О положениях равновесия солнечного паруса в задаче трех тел

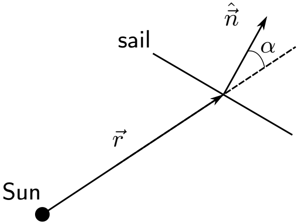
Кабанов Сергей Михайлович, гр. 872в

Московский физико-технический институт
(государственный институт)

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Овчинников М.Ю.

Модель идеального солнечного паруса

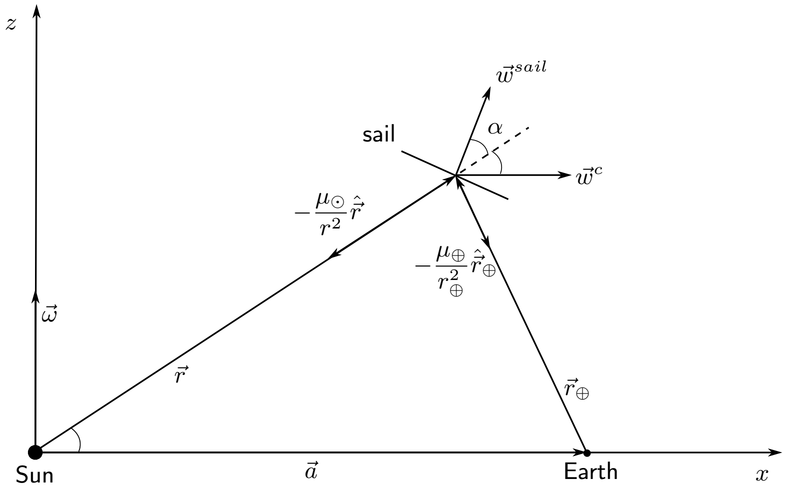


- Плоская пластина с идеальной отражательной способностью
- Сила солнечного давления приложена к центру масс паруса и равна

$$\vec{f}^{sail} = p_{\oplus} A \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos^2 \alpha \hat{\vec{n}},$$

где $p_{\oplus} \simeq 5 \times 10^{-6}$ [Н/м^2] – максимально возможное давление со стороны солнечной радиации на парус, находящийся на орбите Земли; A – площадь активной отражающей поверхности паруса.

Поиск положений равновесия солнечного паруса в рамках ограниченной круговой задачи трех тел Sun-Earth-sail.



$$\omega^2 x - \frac{\mu_\odot}{r^3} x + \frac{\mu_\oplus}{r_\oplus^3}(a - x) + w_x^{sail} = 0,$$
$$\omega^2 y - \frac{\mu_\odot}{r^3} y - \frac{\mu_\oplus}{r_\oplus^3} y + w_y^{sail} = 0,$$
$$-\frac{\mu_\odot}{r^3} z - \frac{\mu_\oplus}{r_\oplus^3} z + w_z^{sail} = 0,$$

здесь

$$w_i^{sail} = \frac{p_\oplus A}{m}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos^2\alpha\, \hat{n}_i,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$r_\oplus = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2},$$

где $\mu_\odot$, $\mu_\oplus$ и $(r, r_\oplus)$ – гравитационные параметры (расстояния от паруса до) Солнца и Земли, соответственно; m – масса паруса.

Переход в безразмерную систему единиц

Примем за единицу гравитационный параметр Солнца $\mu_\odot = 1$ и расстояние между Солнцем и Землей $a = 1$. Тогда $\omega = \sqrt{\mu_\odot / a^3} = 1$ и $\mu = \mu_\oplus / \mu_\odot$ – безразмерный гравитационный параметр Земли.
И введем безразмерный параметр β паруса как

$$\beta = \frac{p_\oplus a^2}{\mu_\odot} \frac{A}{m}.$$

Обезразмеренные уравнения

$$x - \frac{x}{r^3} - \frac{\mu}{r_\oplus^3}(x-1) + \beta \frac{\cos^2\alpha}{r^2} \hat{n}_x = 0,$$

$$y - \frac{y}{r^3} - \frac{\mu}{r_\oplus^3} y + \beta \frac{\cos^2\alpha}{r^2} \hat{n}_y = 0,$$

$$-\frac{z}{r^3} - \frac{\mu}{r_\oplus^3} z + \beta \frac{\cos^2\alpha}{r^2} \hat{n}_z = 0,$$

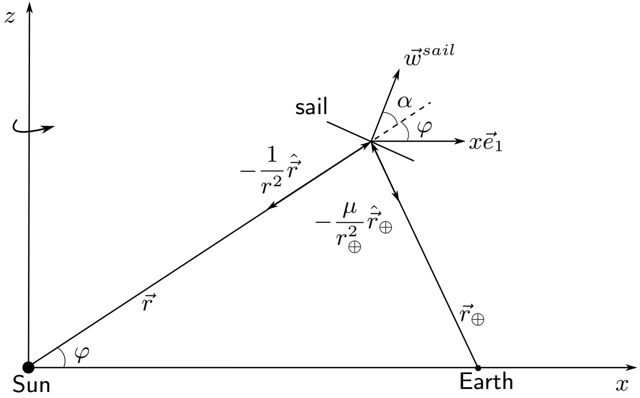
здесь

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_\oplus = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}.$$

$$x + \frac{\beta \cos^2 \alpha}{r^2} \cos(\alpha + \varphi) = \frac{x}{r^3} + \frac{\mu(x-1)}{r_\oplus^3},$$

$$\frac{\beta \cos^2 \alpha}{r^2} \sin(\alpha + \varphi) = \frac{z}{r^3} + \frac{\mu z}{r_\oplus^3}.$$



Порождающее решение при $\mu = 0$

Система уравнений Sun-sail

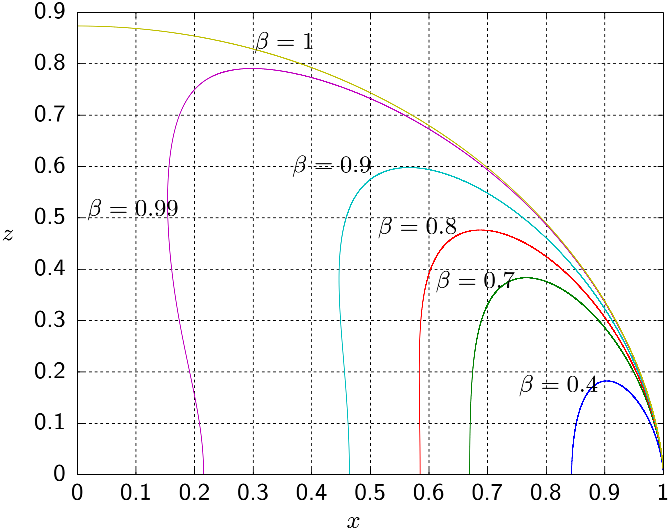
$$
\begin{aligned}
x + \frac{\beta \cos^2 \alpha}{r^2} \cos(\alpha + \varphi) &= \frac{x}{r^3}, \\
\frac{\beta \cos^2 \alpha}{r^2} \sin(\alpha + \varphi) &= \frac{z}{r^3}.
\end{aligned}
$$

Система уравнений Sun-sail допускает аналитическое решение

$$
\begin{aligned}
x &= \left(1 - \beta \cos^3 \alpha + \frac{\beta^2 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha}{1 - \beta \cos^3 \alpha}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\beta \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha}{(1 - \beta \cos^3 \alpha)^2} + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \\
z &= \frac{\beta \cos^2 \alpha \sin \alpha}{1 - \beta \cos^3 \alpha} x.
\end{aligned}
$$

Полученная система решений определяет параметрическое семейство кривых равновесий паруса: $x = x(\alpha; \beta)$, $z = z(\alpha; \beta)$ при $0 < \alpha < \pi/2$.

Параметрическое семейство кривых в задаче Sun-sail

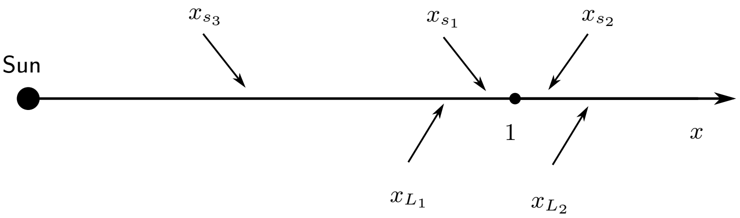


- При $\alpha = \pi/2$:

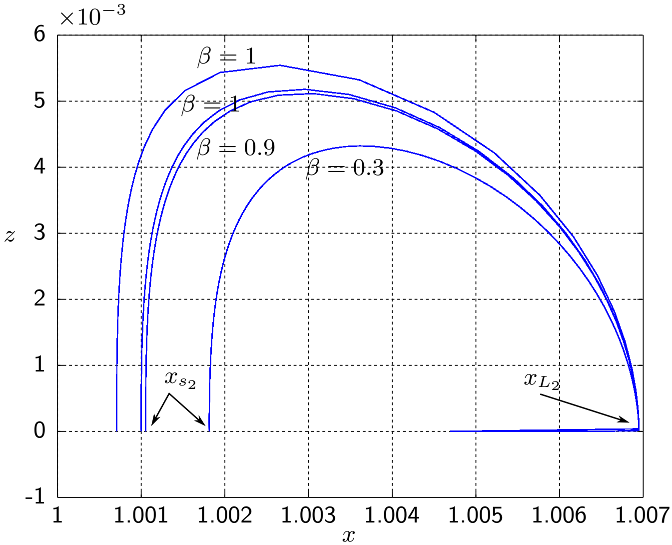
$$x_{L_1} = 1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \ldots, \; x_{L_2} = 1 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \ldots$$

- При $\alpha = 0$ (асимптотика справедлива при $\beta \gg \mu$):

$$x_{s_{1,2}} = 1 \mp \sqrt{\frac{2}{\beta}} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{1/2} + \ldots, \; x_{s_3} = \sqrt[3]{1-\beta} - \frac{\mu}{3\left(\sqrt[3]{1-\beta} - 1\right)^2} + \ldots$$



Численное решение в области «за Землей»



Расходимость численного решения вблизи Земли при «старте» из точки x_{L_1}