

Разработка математической модели маховиков со статическим и динамическим дисбалансами

Студент группы 771

Каун Татьяна

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент Ткачев С.С.

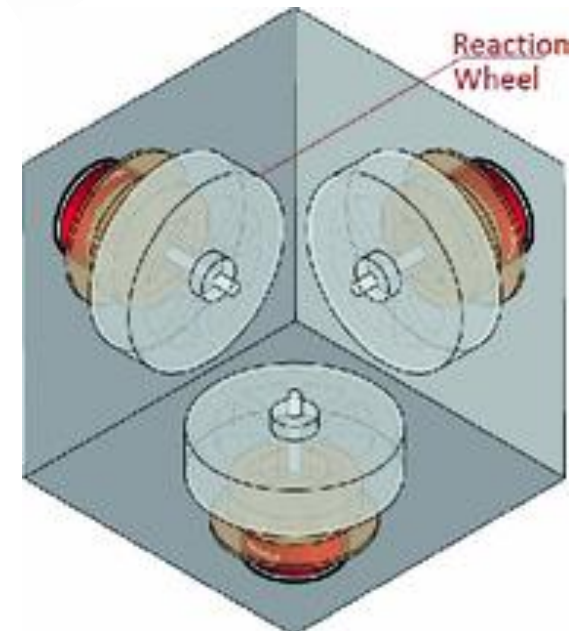
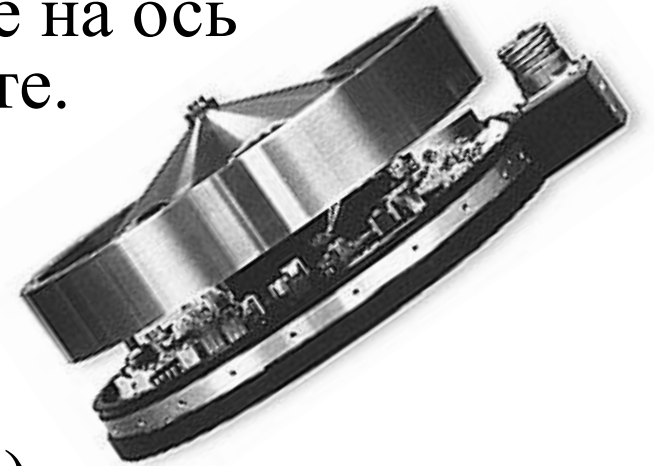
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Содержание работы

- Введение
- Постановка задачи
- Вывод уравнений движения
- Влияние дисбалансов
- Исследование зависимости точностей стабилизации и ориентации
- Заключение

О маховиках

- Маховик – осесимметричное тело, прикрепленное на ось вращения, неподвижно установленную на аппарате.
- Возмущения:
 1. Гармонические (дисбалансы);
 2. Субгармонические (неровности, сбои двигателя).
- Методы получения модели:
 1. Опытный
 2. Аналитический
 3. Смешанный



Постановка задачи

- Статический дисбаланс представим как неоднородность распределения материала в плоскости вращения;

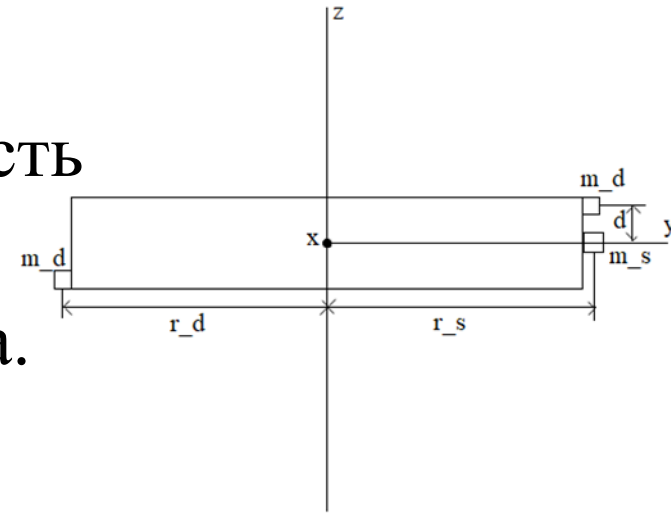
динамический – как неоднородность в толщине диска.

Метод 1

$$\mathbf{F}_s = \begin{pmatrix} U_s \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_s) \\ U_s \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_s) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} U_d \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_d) \\ U_d \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_d) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_s = m_s r_s$$

$$U_d = 2m_d r_d d$$



Метод 2

- Запись кинетической энергии и составление ланжана

Метод 3

- Вывод полных уравнений движения спутника с учетом динамического и статического дисбаланса в маховиках.

Уравнения движения

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}_i \quad \mathbf{R}_{kj} = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{kj}$$

- основной принцип механики для системы с идеальными связями:

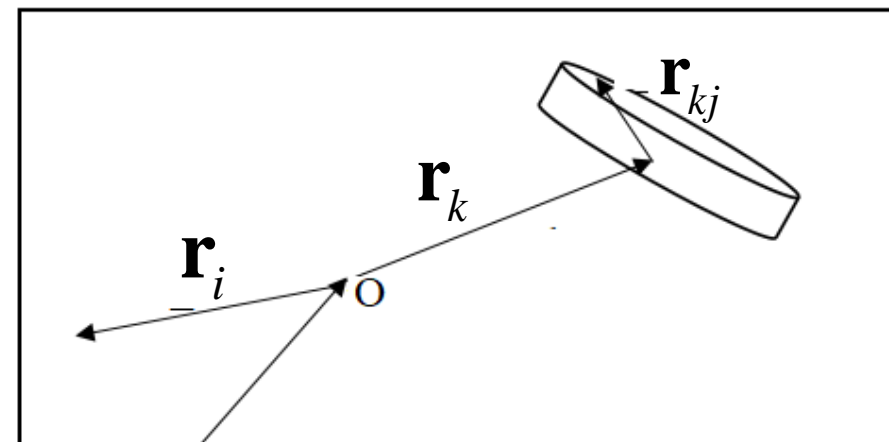
$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{R}_i + \sum_k \sum_j (m_{kj} \ddot{\mathbf{R}}_{kj} - \mathbf{F}_{kj}) \delta \mathbf{R}_{kj} = \sum_k M_k \delta \varphi_k$$

$$\delta \mathbf{R}_i = \delta \mathbf{R}_O + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i \quad \delta \mathbf{R}_{kj} = \delta \mathbf{R}_O + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_k + (\boldsymbol{\theta} + \delta \varphi_k \mathbf{e}_k) \times \mathbf{r}_{kj}$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = \ddot{\mathbf{R}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_{kj} = \ddot{\mathbf{R}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k + (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kj} + (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k) \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k) \times \mathbf{r}_{kj}$$

Условие: $m_s \mathbf{r}_s + \sum_k m_k \mathbf{r}_k = 0$



\mathbf{R}_O

Уравнения движения

- Для $\delta \mathbf{R}_O$:
$$m\ddot{\mathbf{R}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \sum_k m_k \mathbf{r}_{kc} + \sum_k m_k (\dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kc} + \sum_k m_k (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kc} = \mathbf{F}_s + \sum_k \mathbf{F}_k.$$

$$\sum_k m_k \mathbf{r}_{kc} \times \ddot{\mathbf{R}}_C + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_k (m_k \mathbf{K}_k(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{kc}) + \mathbf{I}_k) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} +$$

- Для $\delta \boldsymbol{\theta}$:
$$+ \sum_k ((m_k \mathbf{K}_k(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{kc}) + \mathbf{I}_k) \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k + m_k \mathbf{r}_k \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{kc} + m_k \mathbf{r}_k \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{r}_{kc} +$$

$$+ m_k \mathbf{r}_k \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{r}_{kc} + \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\Omega}_k + \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\Omega}_k) = \mathbf{M}_s + \sum_k \mathbf{M}_{kc}.$$

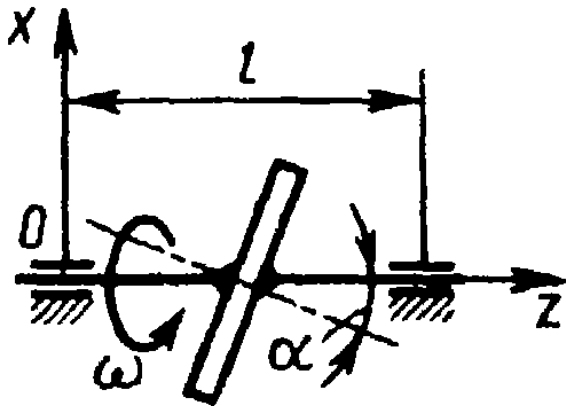
- Для $\delta \varphi_k$:
$$\mathbf{e}_k^T (m_k \mathbf{r}_{kc} \times (\ddot{\mathbf{R}}_C + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) + \mathbf{I}_k (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{I}_k (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k)) =$$

$$= M_k + \mathbf{e}_k^T \mathbf{M}_k$$

- Все это собираем в
$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_c \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k \end{pmatrix} = \mathbf{N}.$$

Влияние дисбалансов

- Смещение центра масс k -го маховика $r_{ck} = \frac{U_s}{m_k}$
- Тензор инерции $I = \begin{pmatrix} I_{rr} & 0 & 0 \\ I_{rr} \cdot \cos \alpha^2 + I_{zz} \cdot \sin \alpha^2 & (I_{rr} - I_{zz}) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha & \\ 0 & (I_{rr} - I_{zz}) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha & I_{rr} \cdot \sin \alpha^2 + I_{zz} \cdot \cos \alpha^2 \end{pmatrix}$
- Ограничение для динамического дисбаланса $\sin 2\alpha = \frac{2U_d}{I_{zz} - I_{rr}} \leq 1$



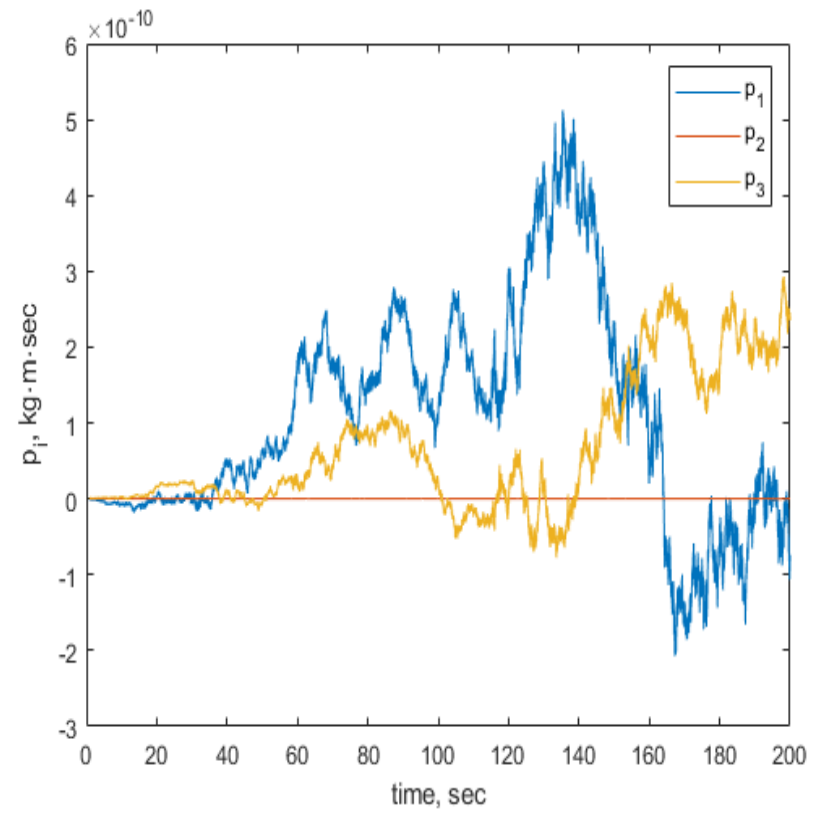
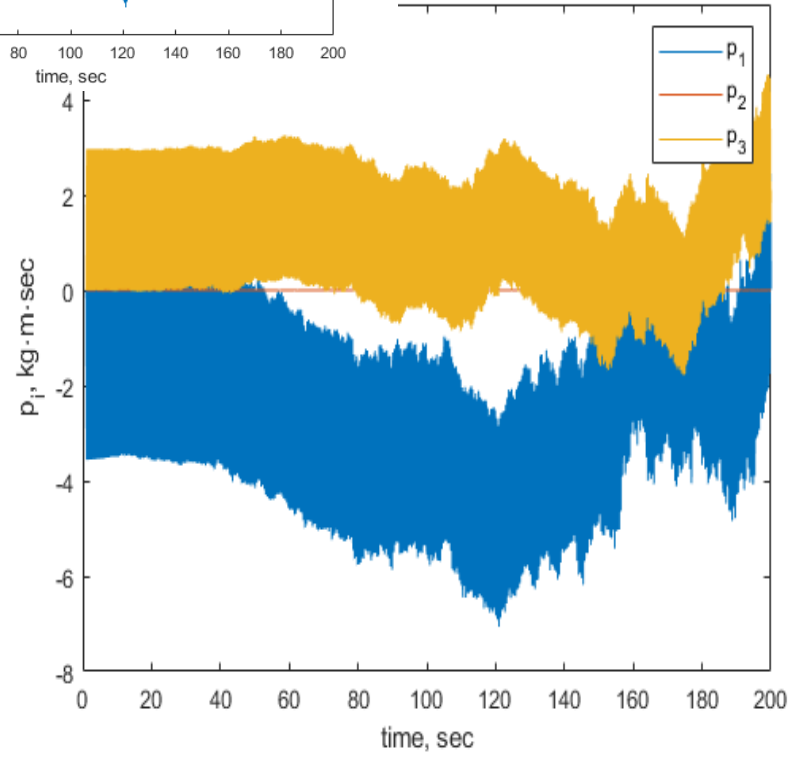
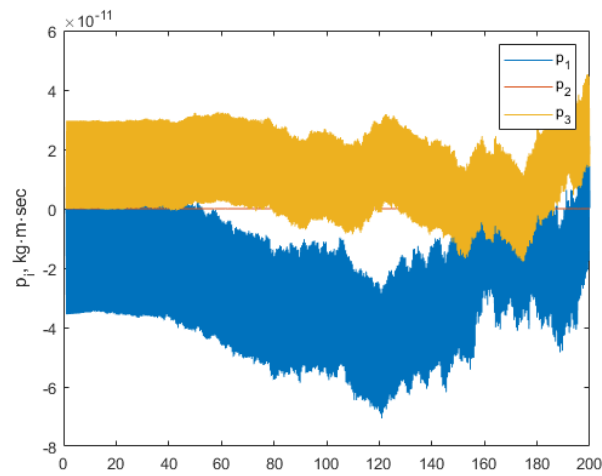
Моделирование

- Рассматриваем временной интервал от 0 до 200 сек.
- Решение системы уравнений осуществлялось методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Элемент вектора состояния	Значение	№ вида	$U_s, \text{Г} \cdot \text{см}$	$U_d, \text{Г} \cdot \text{см}^2$
\mathbf{r}_0	$[7 \cdot 10^6; 0; 0]$	1	0.067	0.018
\mathbf{v}_0	$[0; \sqrt{\frac{\mu}{r_0(1)}}; 0]$	2	0.217	0.130
$\boldsymbol{\omega}_0$	$[0; 0; 0]$	3	0.716	29.54
Ω_0	14,371 (кроме п.3.1)			
\mathbf{q}_0	$[0.5; 0.5; 0.5; 0.5]$			

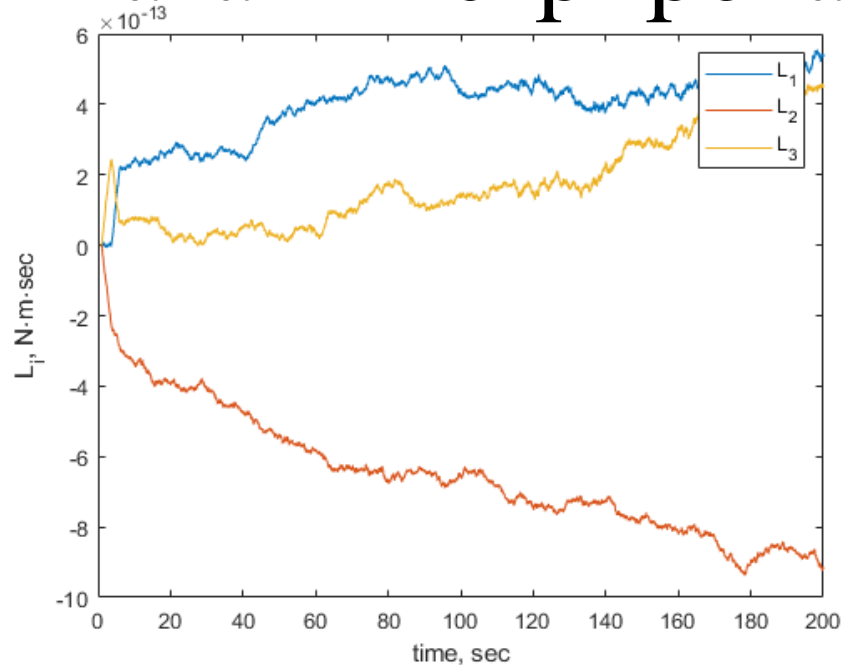
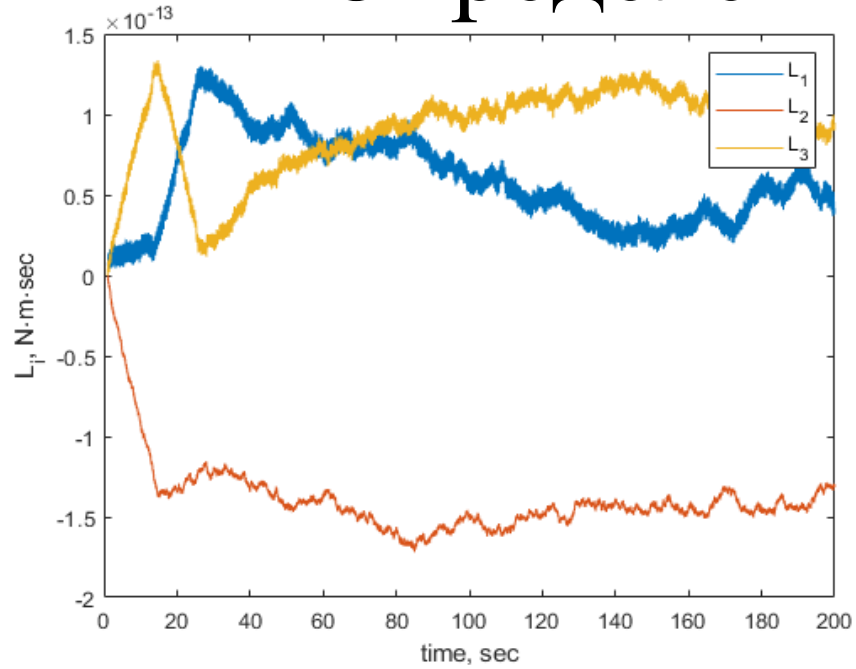
еделение шага интегрирования

в 1го типа при $\Omega_0 = 14,371 \text{ рад/с}$. (10% от максимума)
мым шагом является 10^{-3} с . При $\Omega_0 = 71,855 \text{ рад/с}$ - 10^{-4} с .

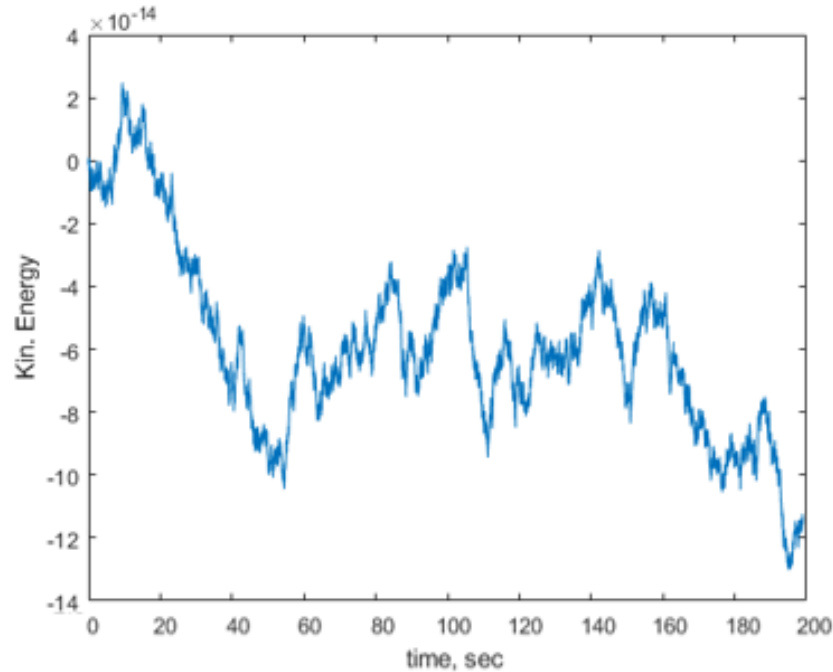
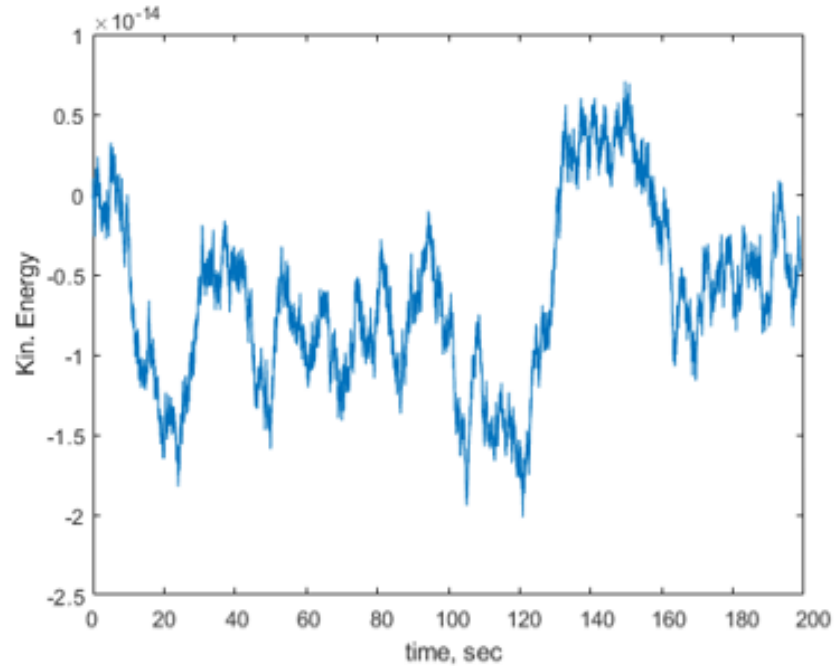


Зависимость импульса спутника от времени

Определение шага интегрирования

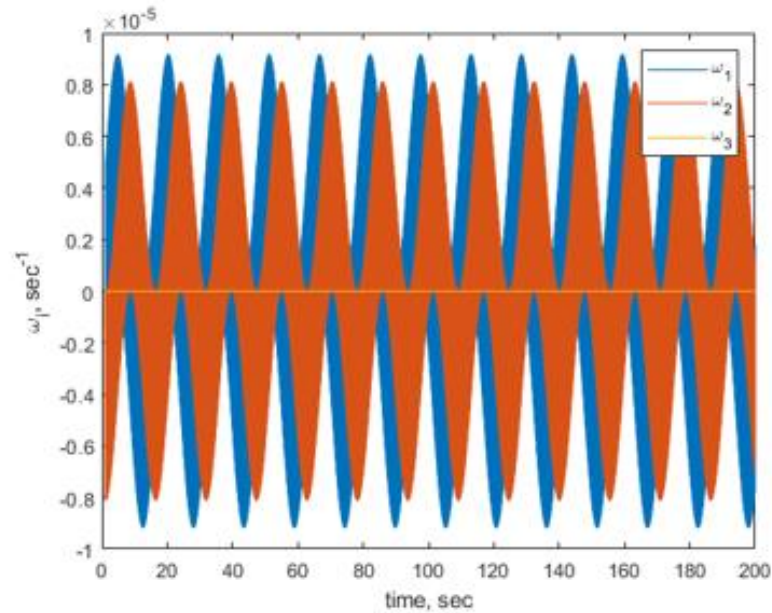
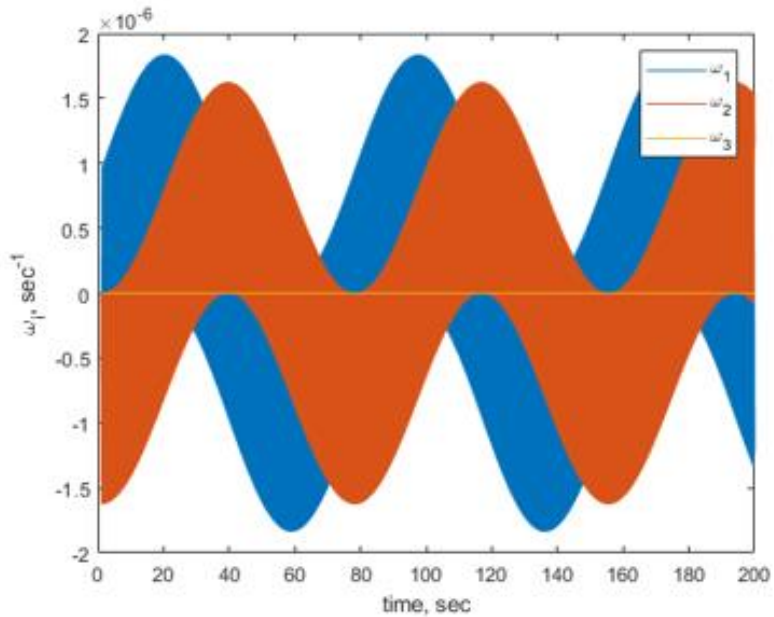


Зависимость
кинетического момента
спутника от времени

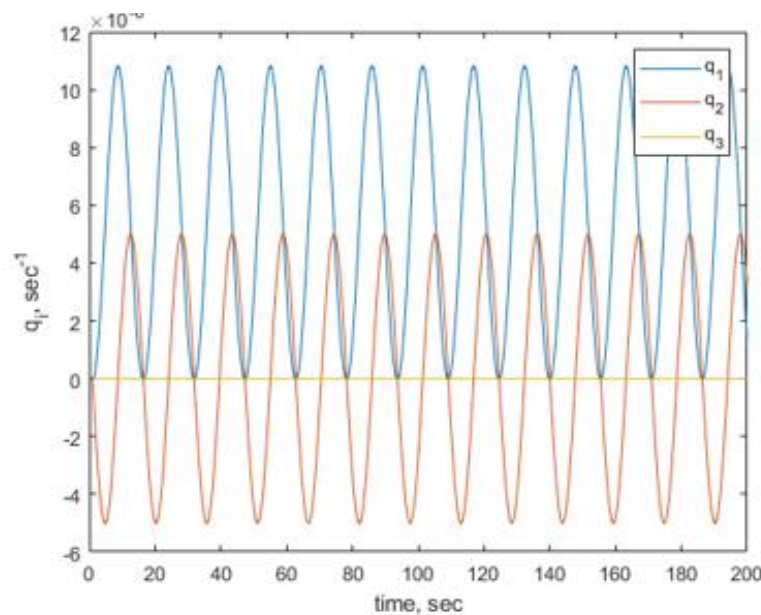
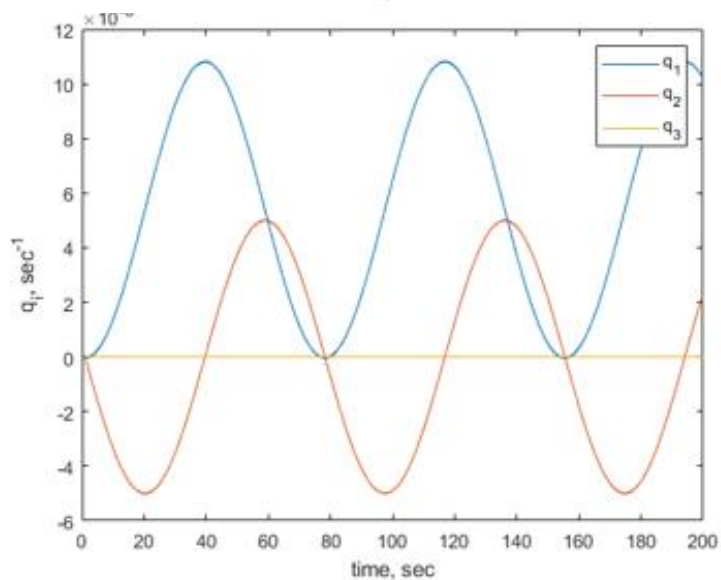


Зависимость кинетической
энергии спутника от
времени

Влияние угловой скорости маховиков при постоянном динамическом дисбалансе.

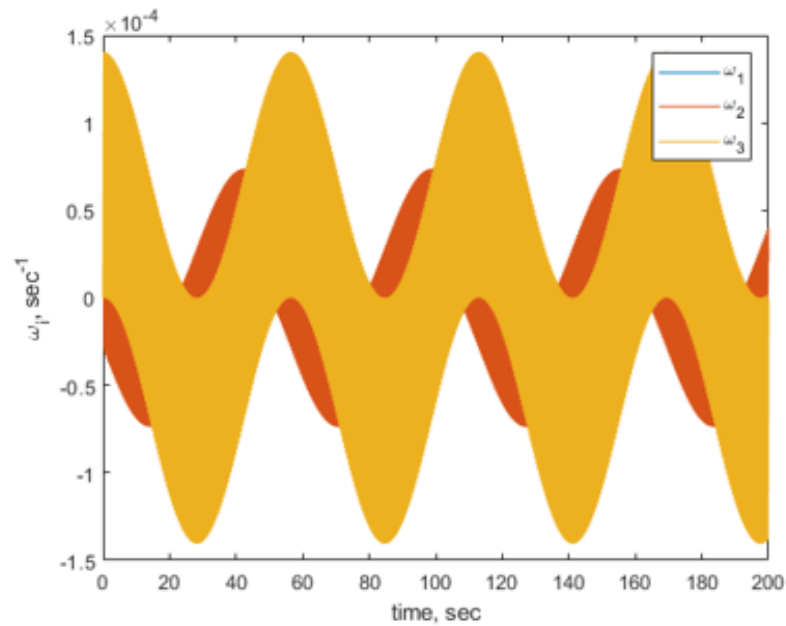
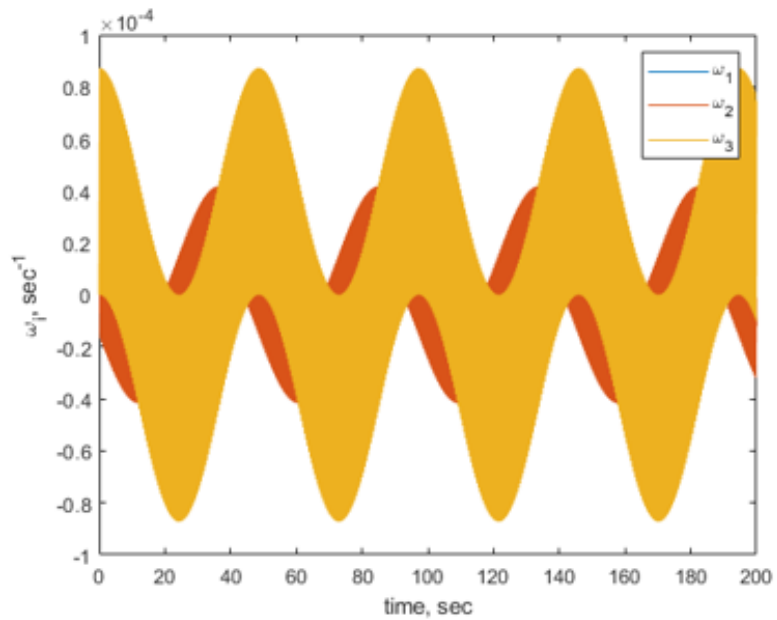


Зависимость угловой скорости спутника от времени

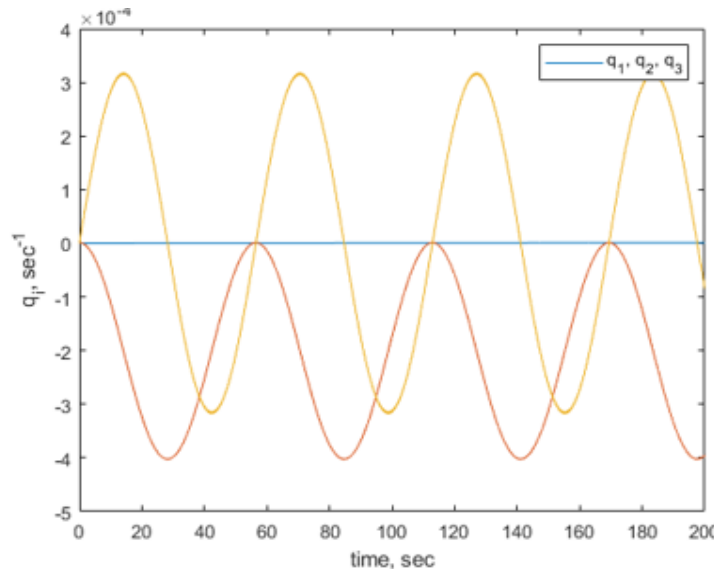
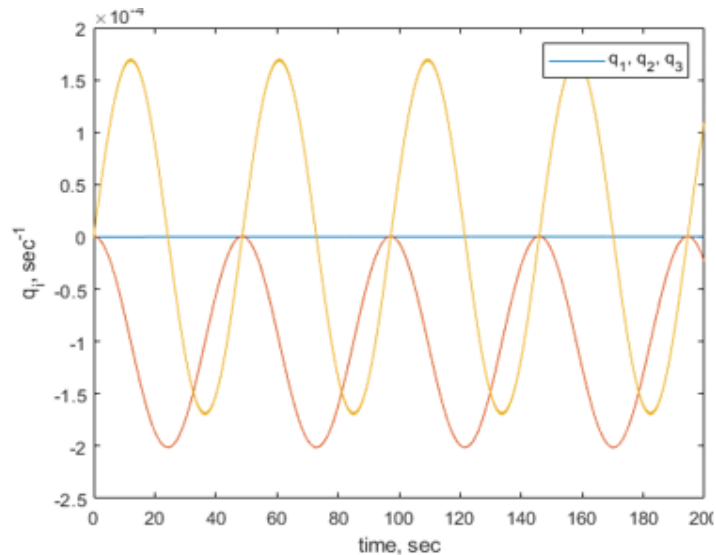


Зависимость векторной части кватерниона от времени

Влияние расположения маховиков при постоянном статическом дисбалансе

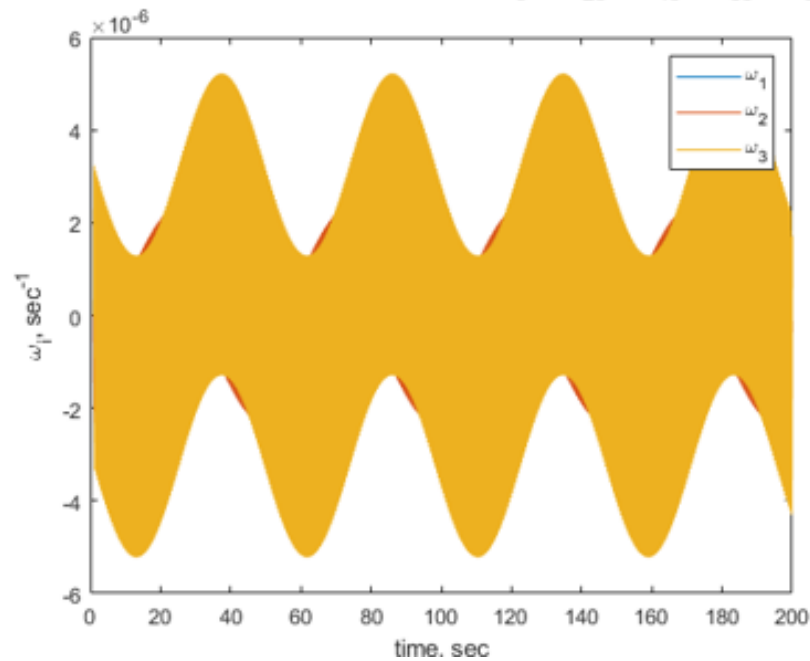
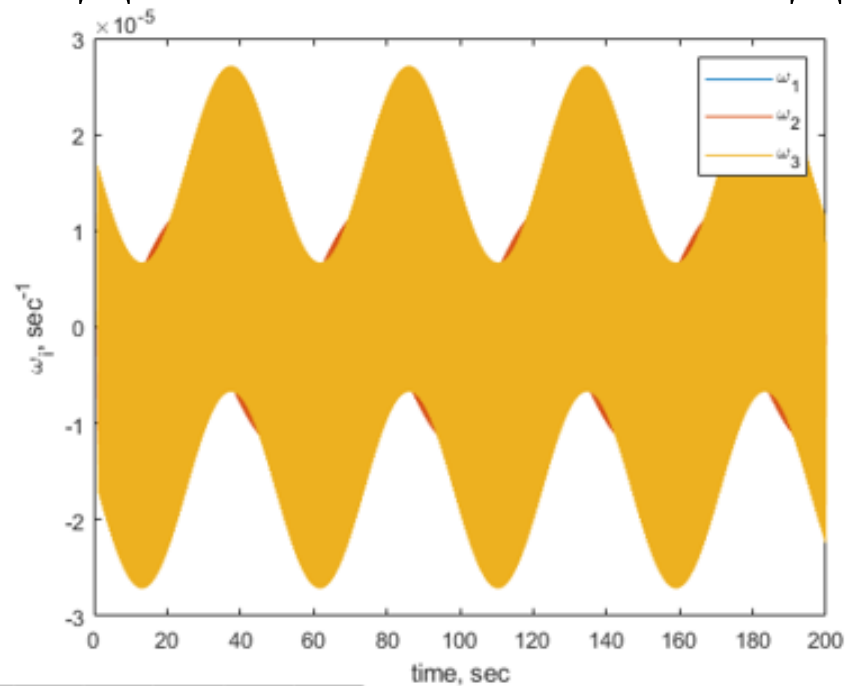
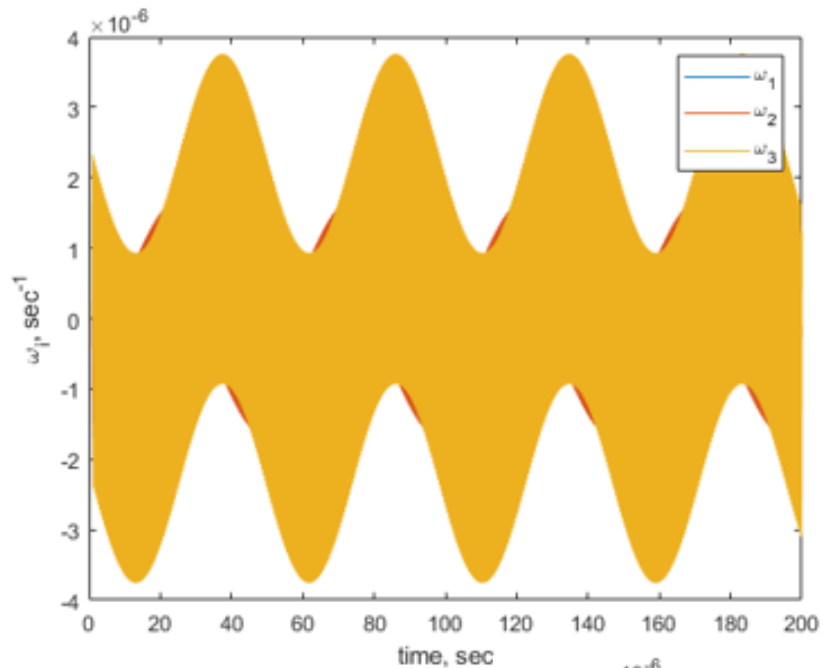


Зависимость угловой скорости спутника от времени



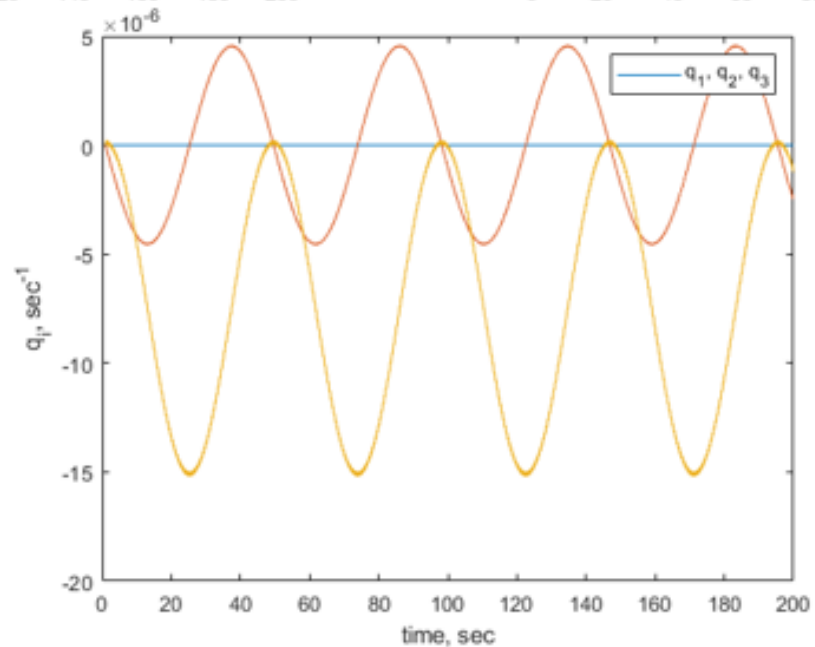
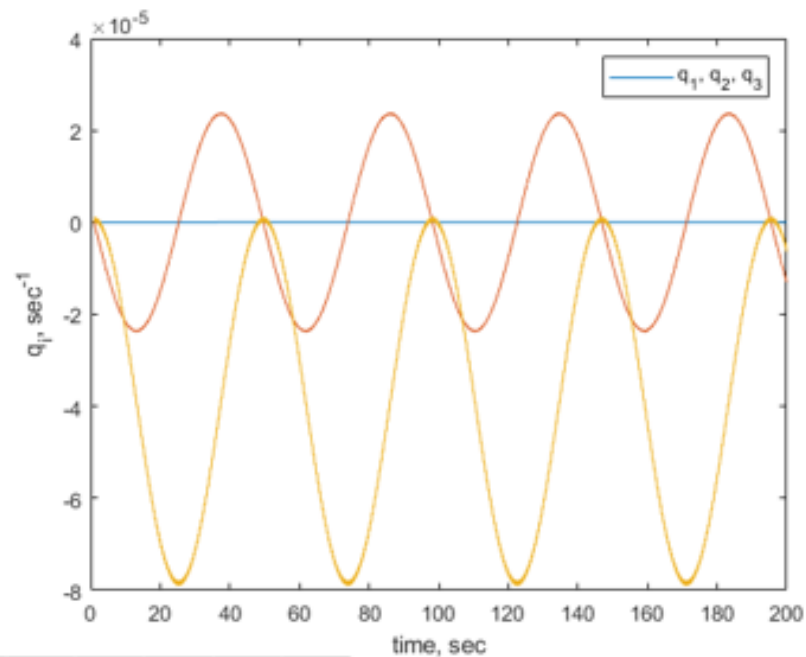
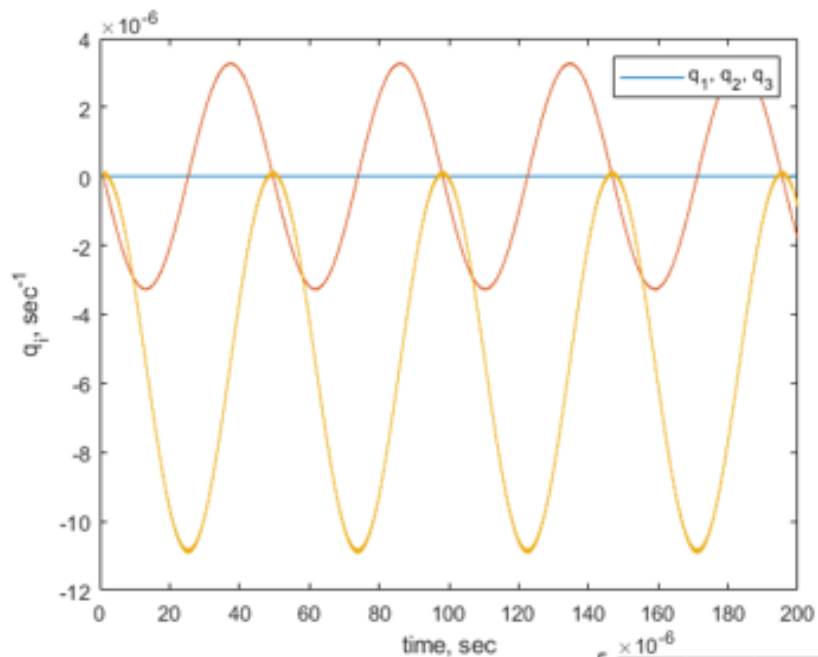
Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника от времени

Влияние значений динамического дисбаланса



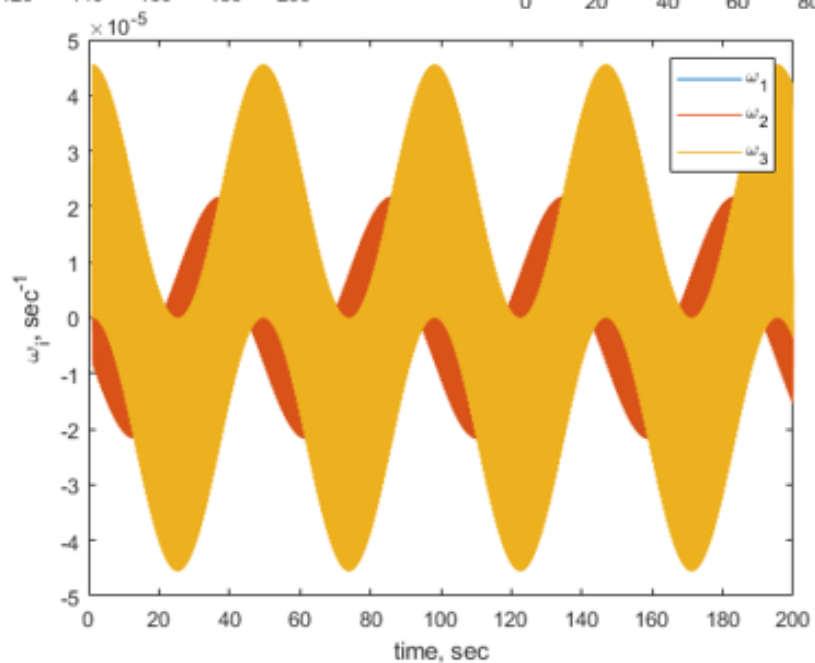
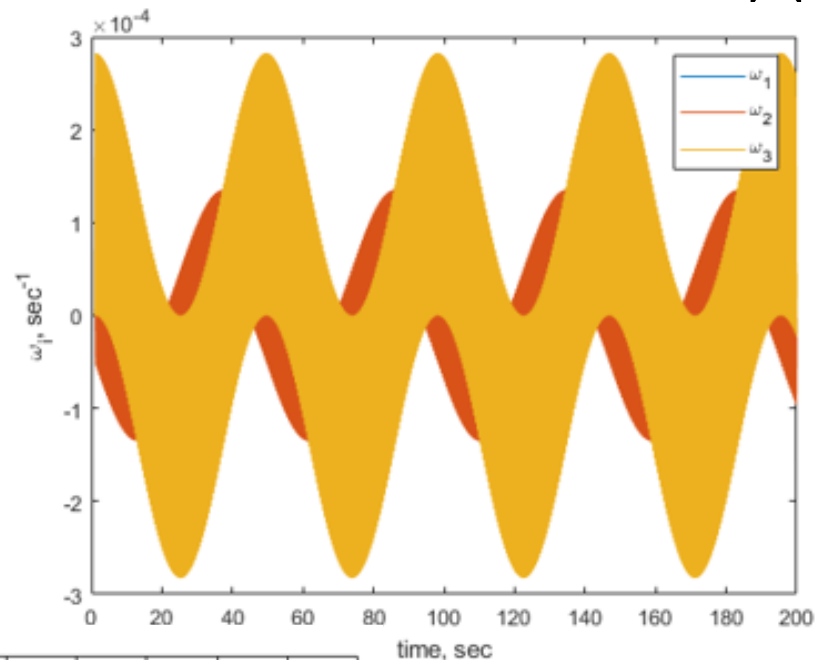
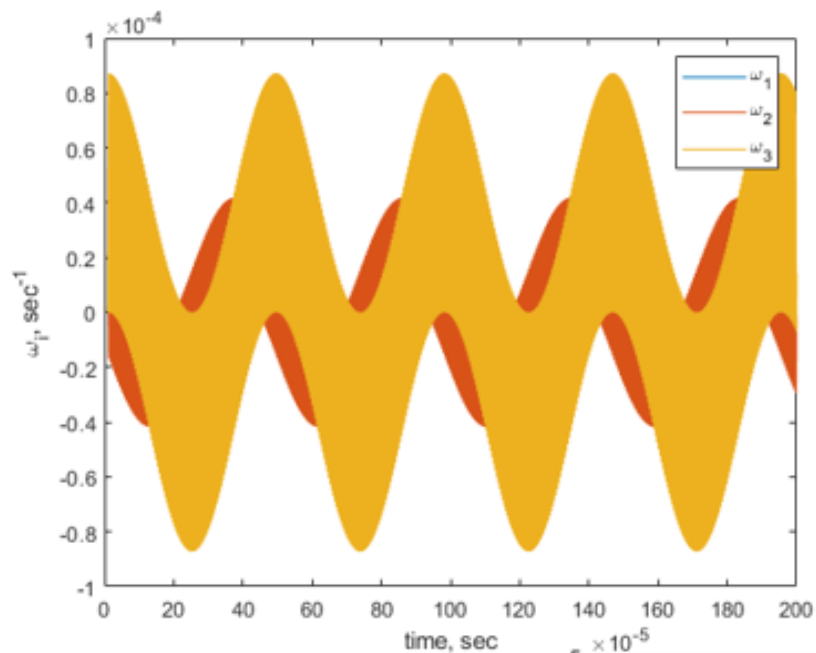
Зависимость угловой скорости спутника от времени

Влияние значений динамического дисбаланса



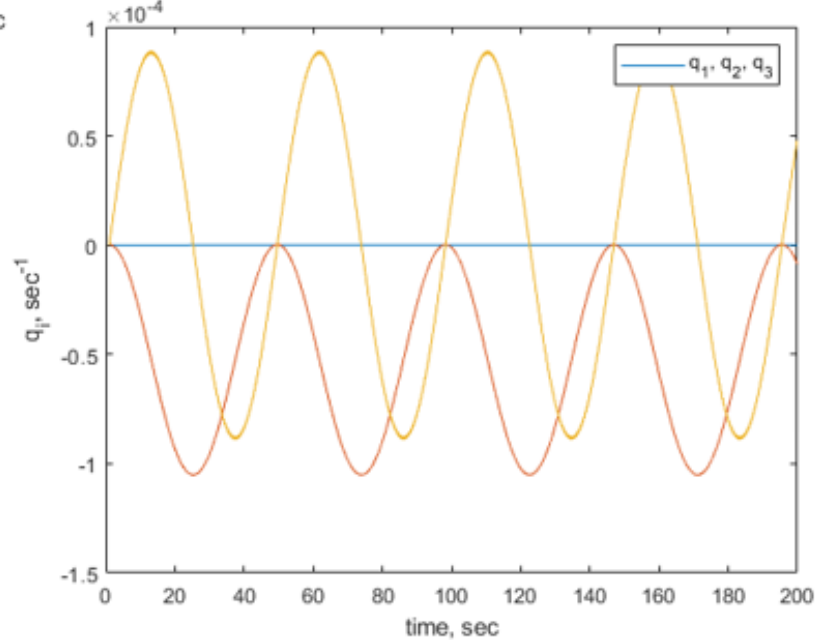
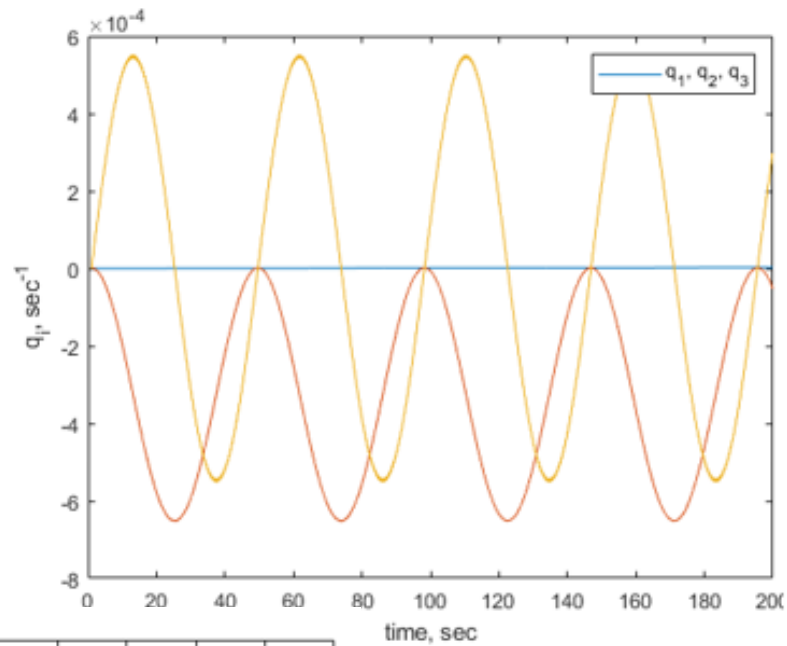
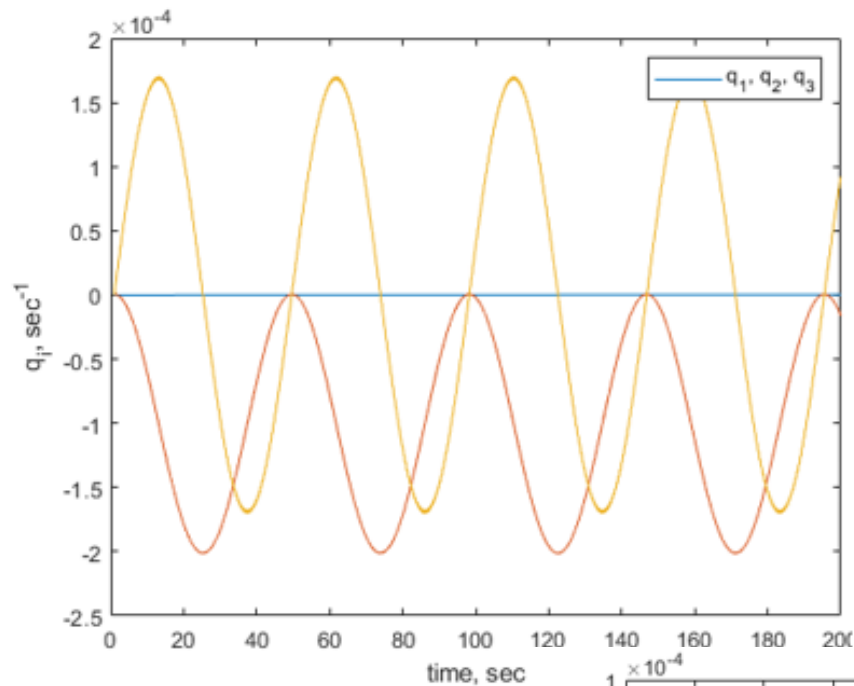
Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника от времени

Влияние значений статического дисбаланса



Зависимость угловой скорости спутника от времени

Влияние значений статического дисбаланса



Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника от времени

Сводные данные

	Точность стабилизации, $рад/с$	Точность ориентации
$\Omega_0 = 14,371 \text{ рад/с}$	10^{-6}	$12 \cdot 10^{-6}$
$\Omega_0 = 71,855 \text{ рад/с}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$12 \cdot 10^{-6}$
$r_k = 5 \text{ см}$	10^{-4}	$2 \cdot 10^{-4}$
$r_k = 10 \text{ см}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
$U_d = 0,018 \text{ г} \cdot \text{см}^2$	$4 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$
$U_d = 0,025 \text{ г} \cdot \text{см}^2$	$6 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
$U_d = 0,13 \text{ г} \cdot \text{см}^2$	$3 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$
$U_s = 0,035 \text{ г} \cdot \text{см}$	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}
$U_s = 0,067 \text{ г} \cdot \text{см}$	10^{-4}	$2 \cdot 10^{-4}$
$U_s = 0,217 \text{ г} \cdot \text{см}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$

Заключение

- Проведено моделирование движения спутника с гироскопической системой управления ориентацией, состоящей из трех маховиков.
- Установлена прямая зависимость исследованных величин и амплитуды колебаний точности ориентации и стабилизации; при росте угловой скорости маховиков увеличивается частота, но не меняется точность ориентации.
- Наблюдаемые изменения происходят прямо пропорционально, за исключением амплитуды в случае изменения угловой скорости маховиков.