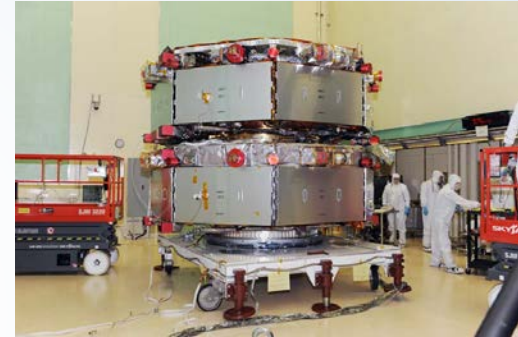
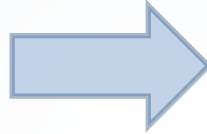
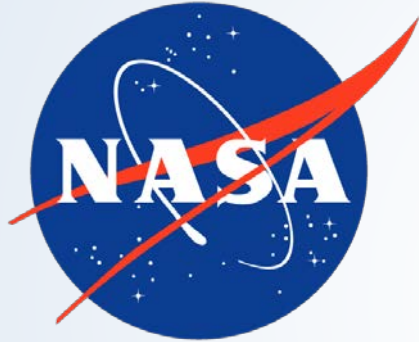


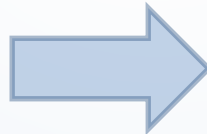
Выпускная квалификационная работа
*Динамика и управление роем наноспутников
в задаче исследования магнитосферы Земли*

Выполнил	студент группы ФН2-83	Коптев М.Д.
Руководитель ВКР	д.ф.-м.н., профессор	Ткачёв С.Б.
Консультант	к.ф.-м.н., м.н.с. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН	Трофимов С.П.

Исследование земной магнитосферы

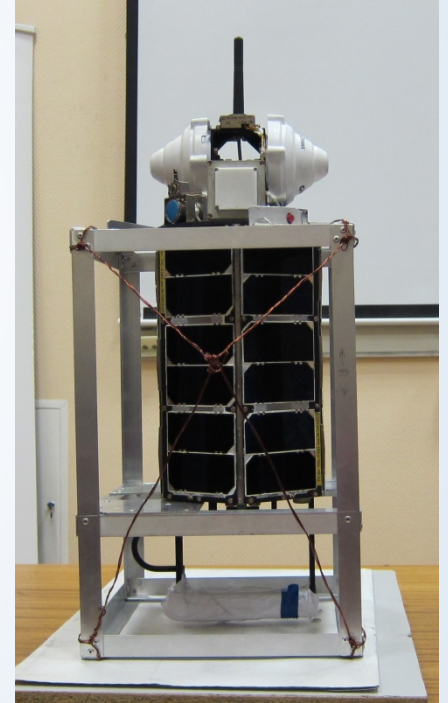
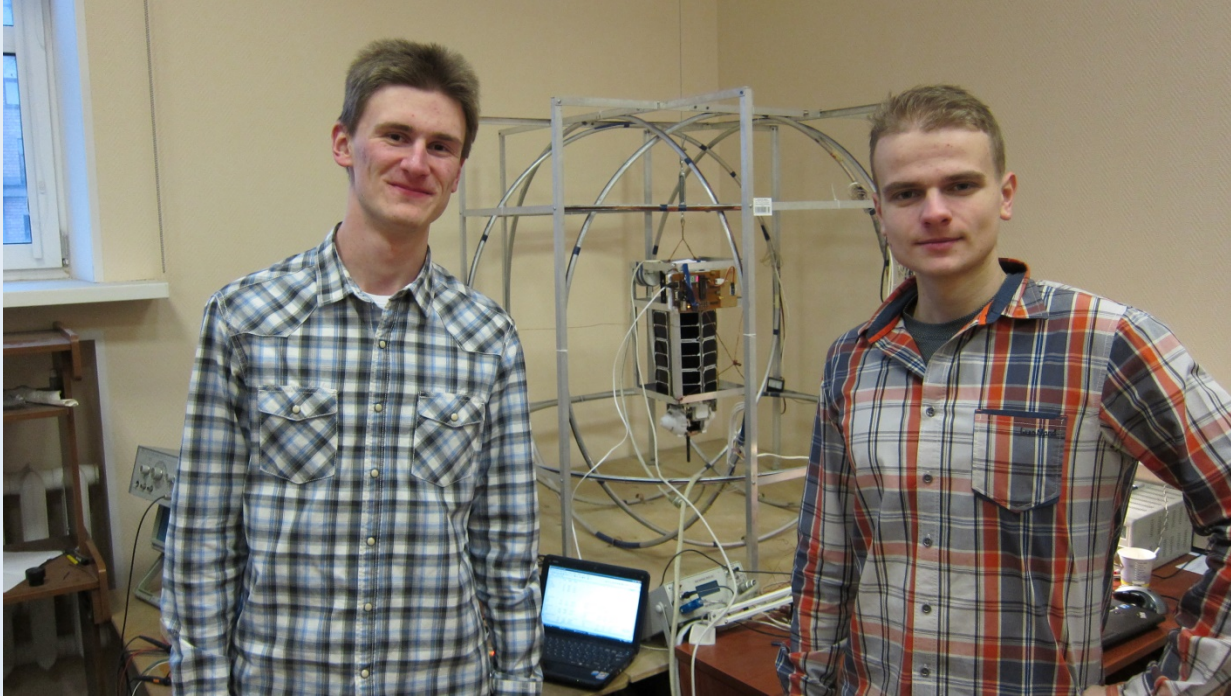


Миссия MMS



Наноспутник

Лаборатория динамики малых спутников ИПМ им. М.В. Келдыша РАН



Области интереса и опорная орбита

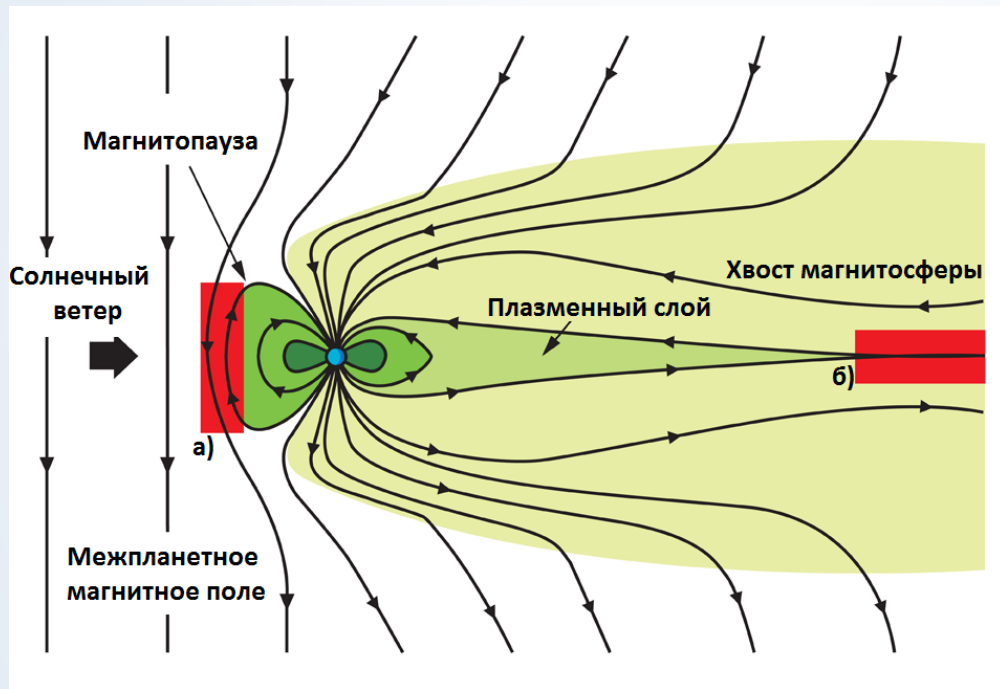
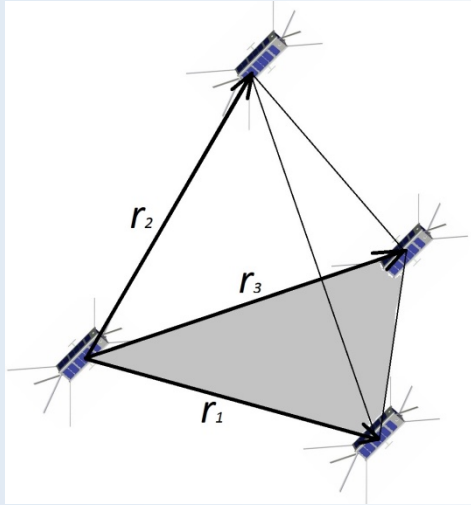


Схема магнитосферы Земли

$R_{\alpha} = 200000$ км
 $R_{\pi} = 2000$ км
1 месяц (10 витков)

Функционал качества формации



$$V_a = \frac{1}{6} \mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$$

$$L = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 l_i; \quad V_r = \frac{\sqrt{2} L^3}{12}$$

$$Q_v = \frac{V_a}{V_r}$$

$$Q = Q_v \cdot Q_s$$

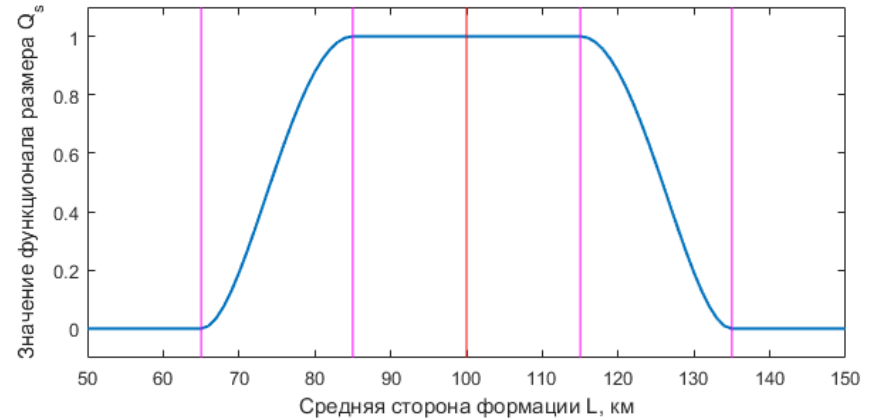


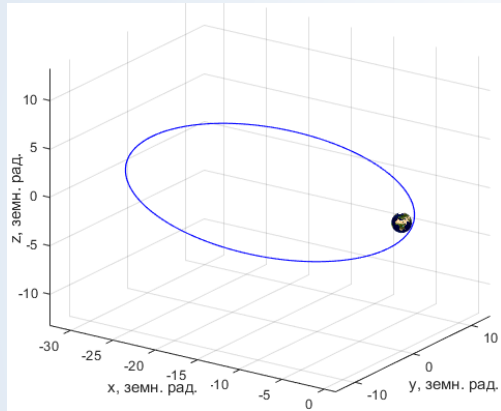
График Q_s

$$Q_{int} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Q(t) dt$$

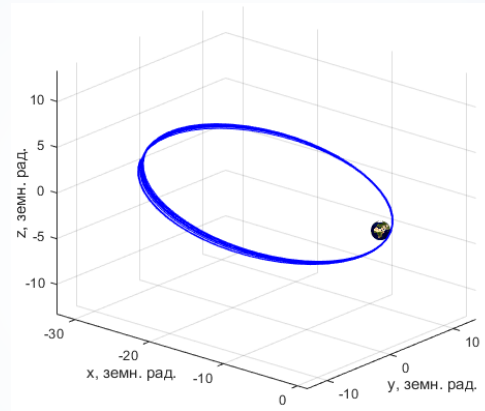
Постановка задачи

- Определить минимальное число аппаратов в группировке для месячного сбора качественных ($Q_{int} > 0.7$ в области интереса на каждом витке) измерений в пассивном полёте, и наилучшие начальные условия для них (параметры выведения)
- Разработка алгоритма управления одним из аппаратов, оснащённым двигателем малой тяги, с целью поддержания конфигурации формации

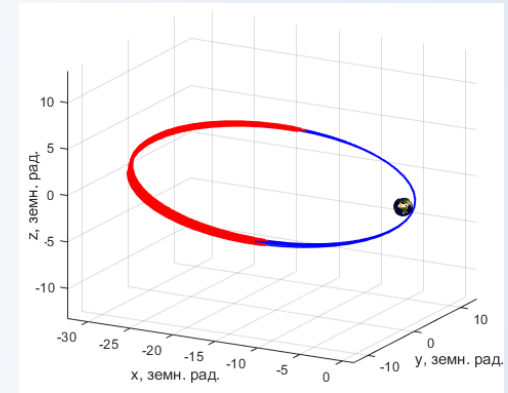
Движение по высокоэллиптической орбите



Опорная орбита

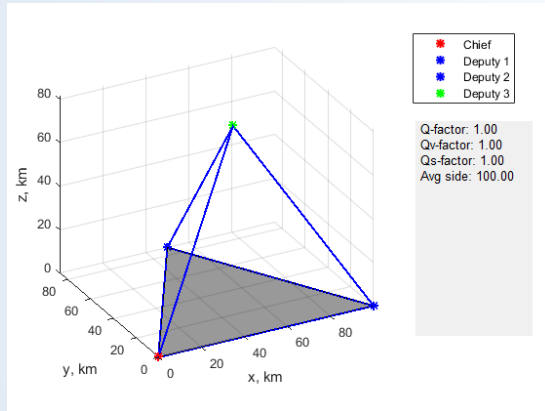


Возмущенное движение

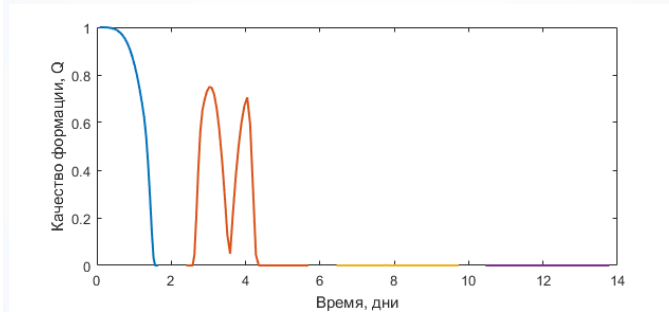


Области интереса

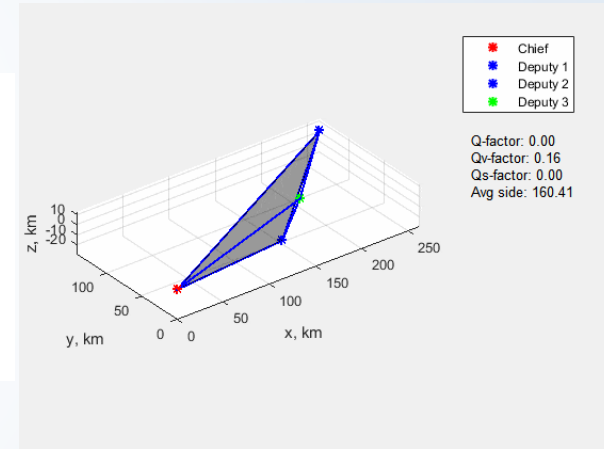
Пассивное движение формации 4-х КА



В начальный момент времени

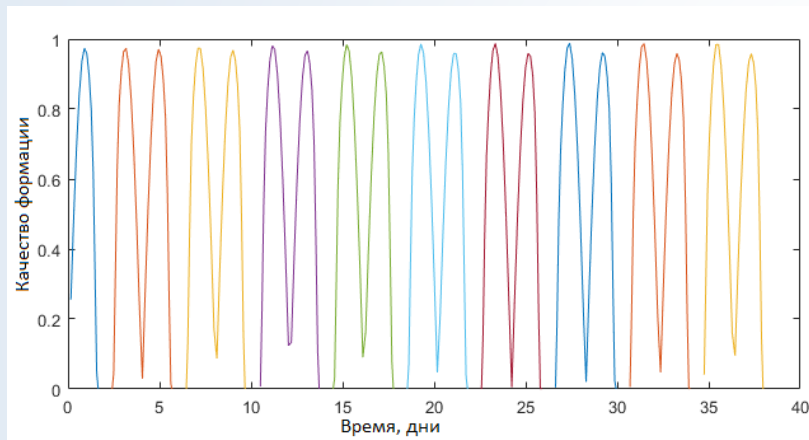


Деградация формации

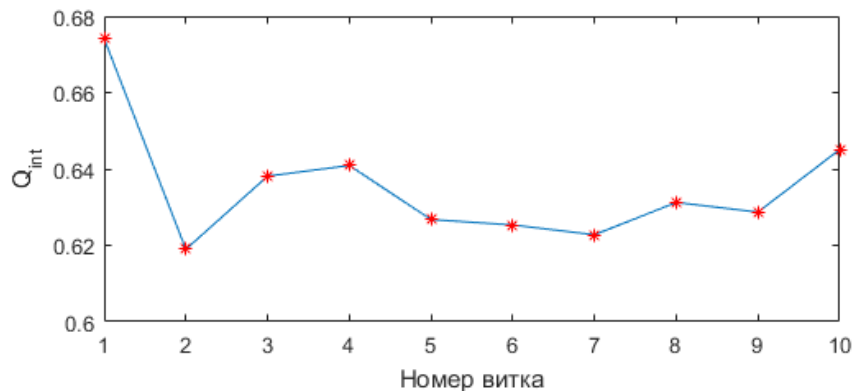


На втором витке

Подбор параметров без изменения размера и формы орбиты

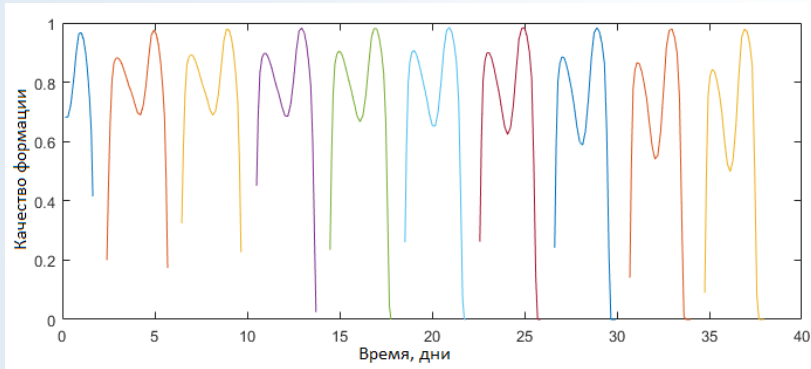


Качество формации на 10 витках

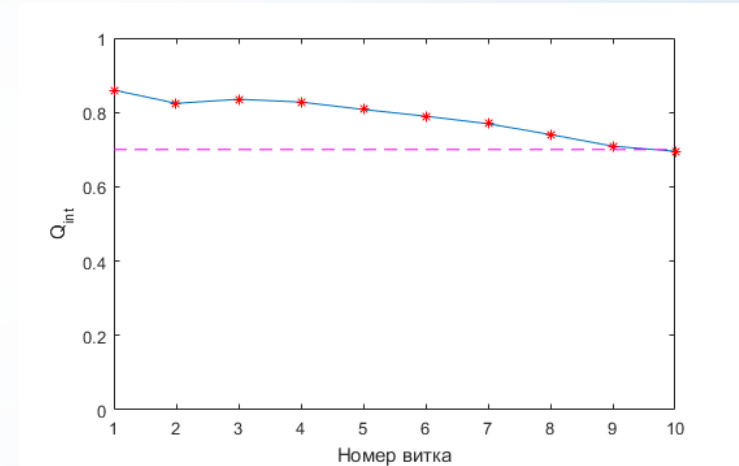


Интегральный показатель качества формации

Оптимизация по всем начальным параметрам

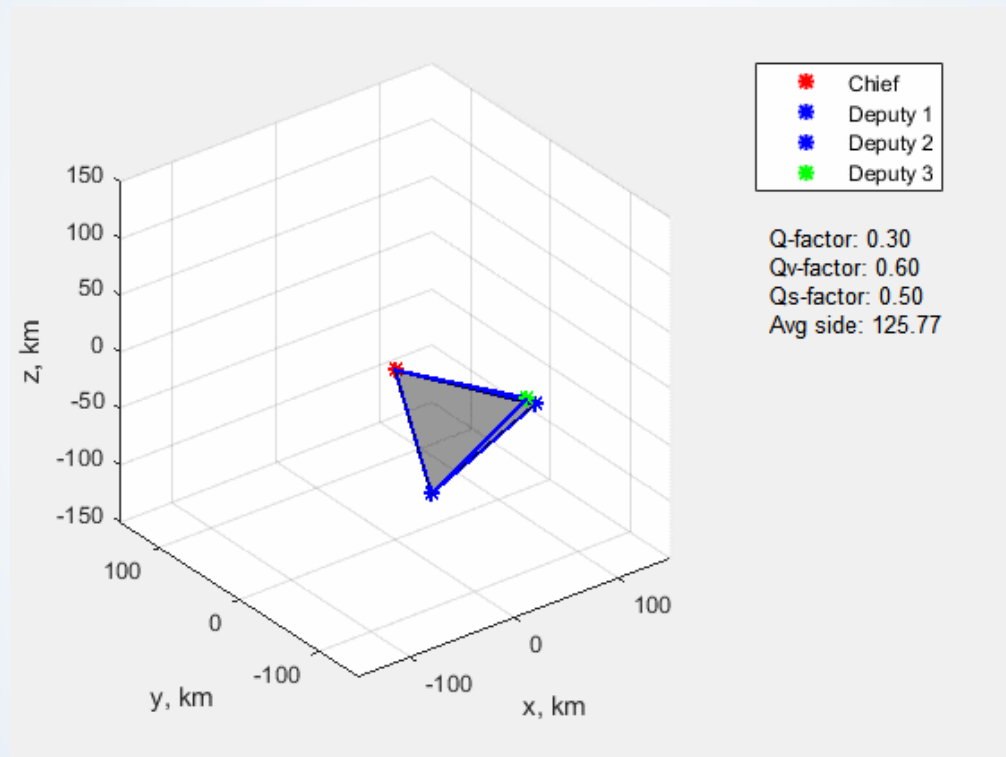


Качество формации на 10 витках

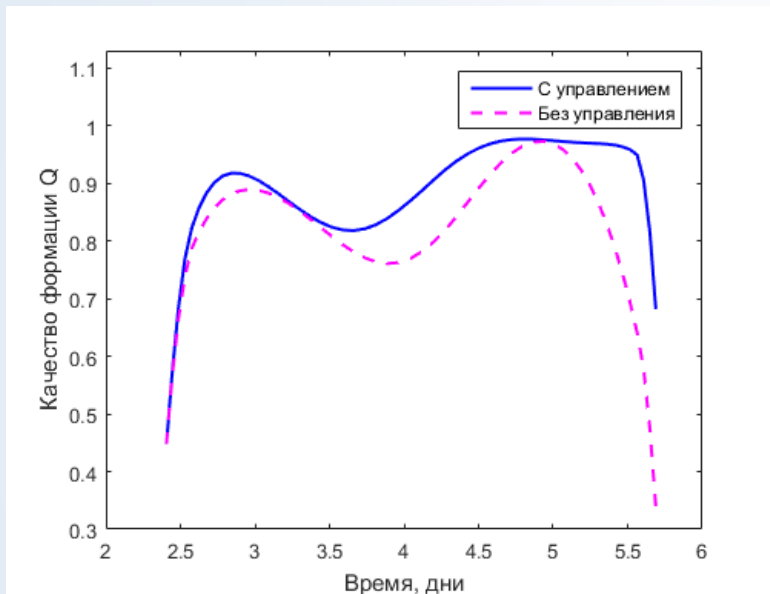


Интегральный показатель качества формации

Эволюция тетраэдра

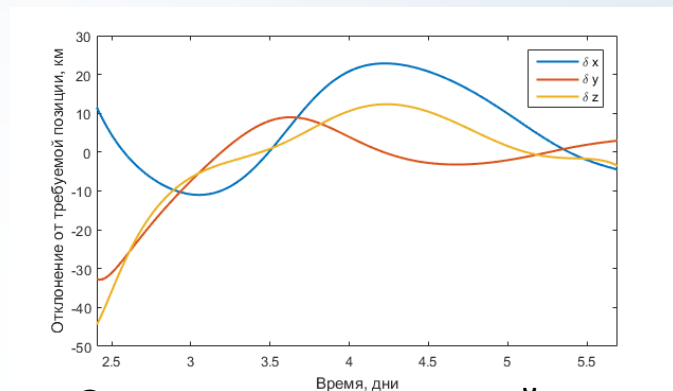


Применение LQR-управления

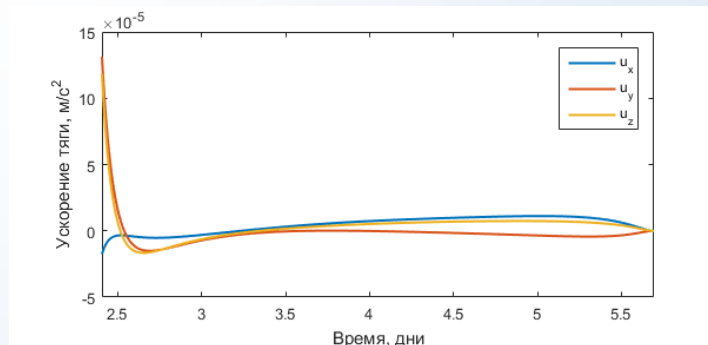


Качество формации

Затраты хар. скорости $\Delta v = 3.3690 m/s$

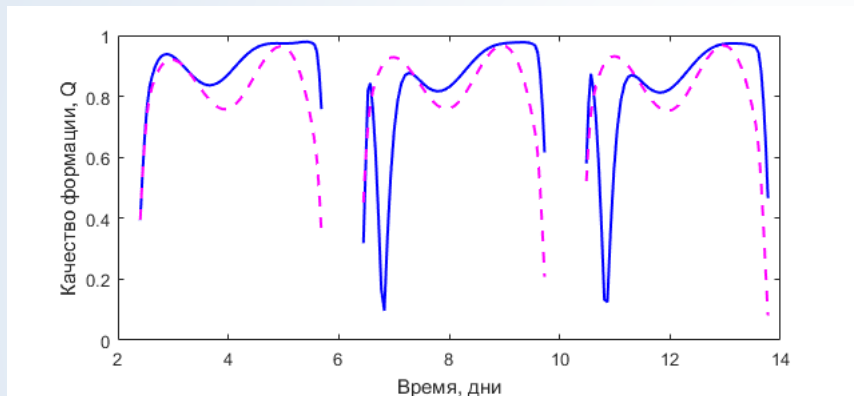


Отклонение от желаемой позиции

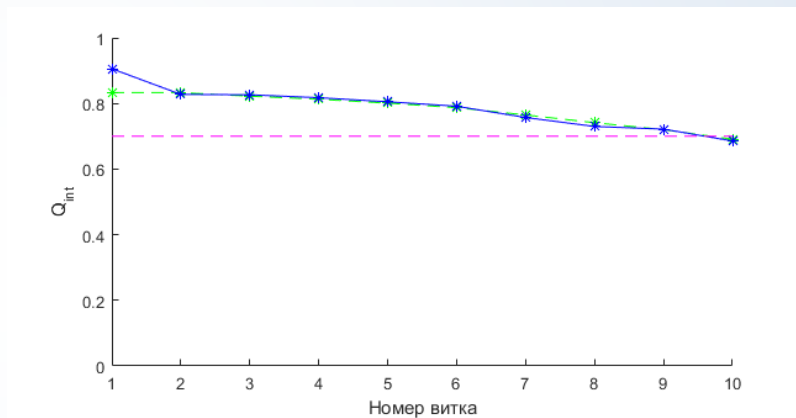


LQR-управление

Многовитковое LQR-управление

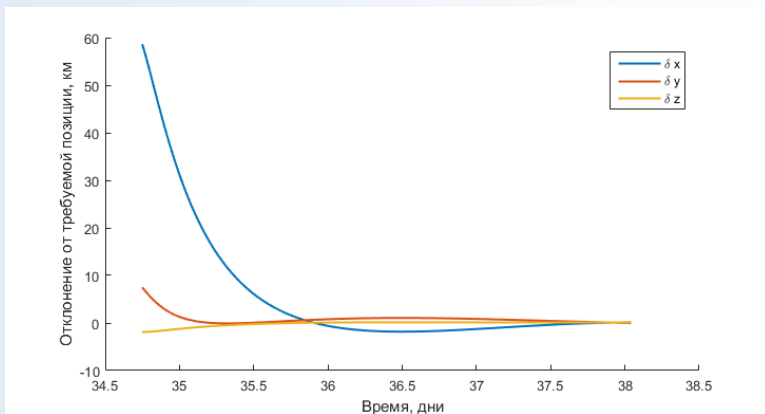


Качество формирования

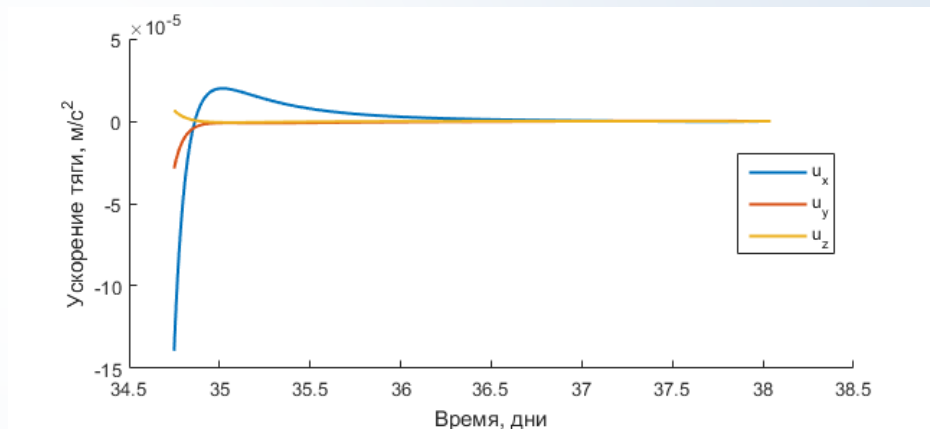


Интегральный показатель

Пролонгация миссии (1)



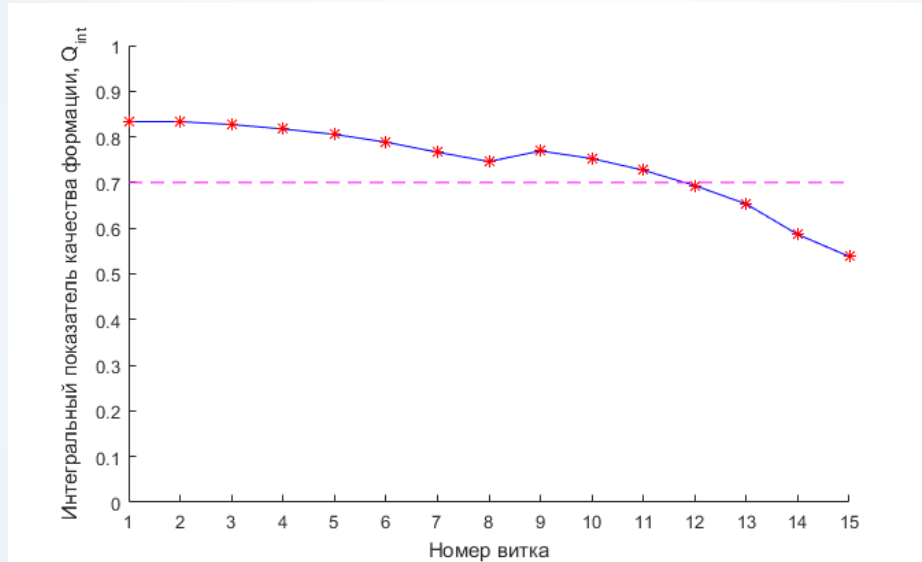
Отклонение от желаемой позиции



LQR-управление

Затраты хар. скорости $\Delta v = 1.5923 \text{ m/s}$

Пролонгация миссии (2)



Интегральный показатель после приведения КА в оптимальную позицию на 10 витке

Результаты работы

- показано, что для пассивного сбора измерений в течение 1 месяца достаточно 4-х аппаратов
- получены оптимальные начальные значения их орбит
- построено LQR управление одним из аппаратов, позволяющее продлить время сбора измерений на 30% (10 дней)
- приобретён опыт моделирования пассивного и управляемого группового полёта

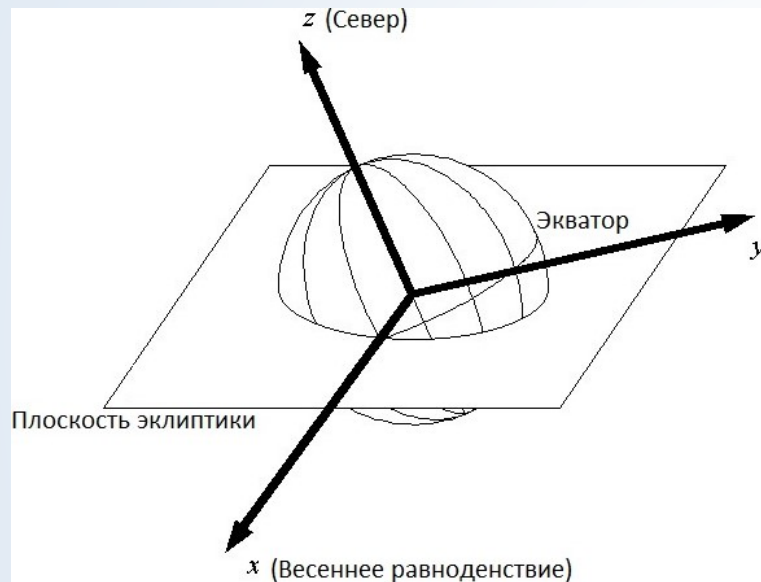
Направления дальнейшей работы

- Поддержание качества формации с помощью оптимального импульсного управления (двигатель на холодном газе)
- Динамика и управление роем с увеличенным количеством аппаратов для проведения мультимасштабных измерений

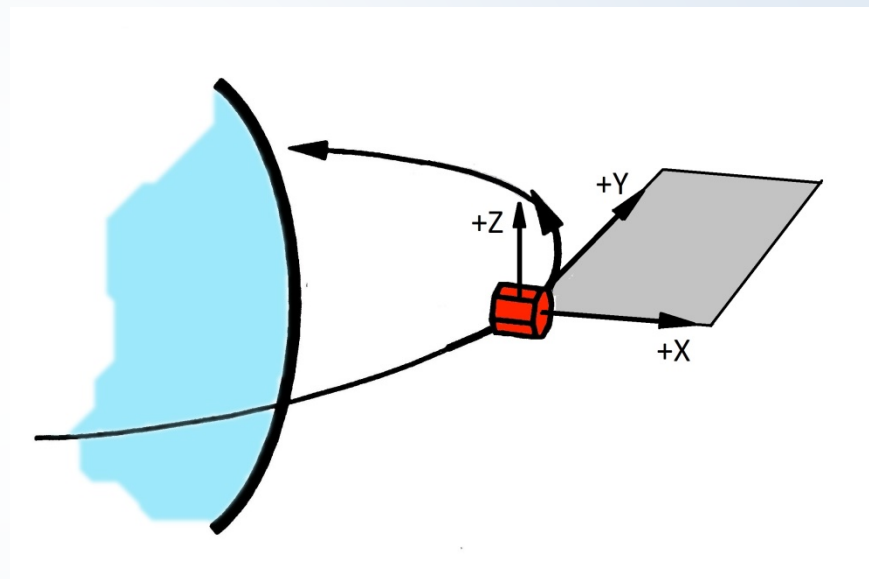
Спасибо за внимание!



Системы координат



Геоцентрическая С.К.



Орбитальная С.К.

Уравнения движения

$$\frac{dp}{ds} = \frac{2pr\sqrt{ap}}{\sigma \mu} \cdot F_2,$$

$$\frac{de_x}{ds} = \frac{r\sqrt{ap}}{\mu} \left\{ \sin L \cdot F_1 + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \cos L + \frac{e_x}{\sigma} \right] F_2 - \frac{e_y \eta}{\sigma} F_3 \right\},$$

$$\frac{de_y}{ds} = \frac{r\sqrt{ap}}{\mu} \left\{ -\cos L \cdot F_1 + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \sin L + \frac{e_x}{\sigma} \right] F_2 + \frac{e_x \eta}{\sigma} F_3 \right\},$$

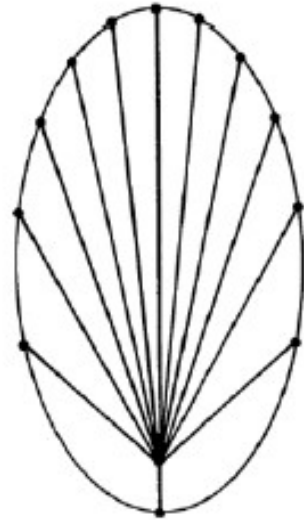
$$\frac{di_x}{ds} = \frac{r\sqrt{ap} \phi \cos L}{\mu \cdot 2\sigma} \cdot F_3,$$

$$\frac{di_y}{ds} = \frac{r\sqrt{ap} \phi \sin L}{\mu \cdot 2\sigma} \cdot F_3,$$

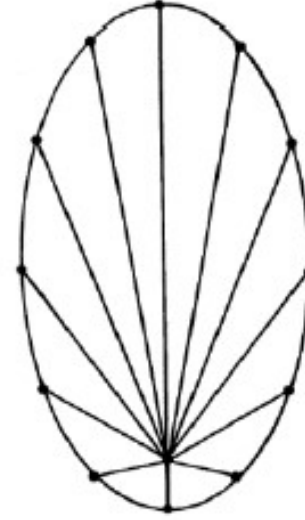
$$\frac{dL}{ds} = r\sqrt{\frac{a}{p}} \frac{\sigma^2}{p} + r\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\eta}{\sigma} \cdot F_3,$$

$$\frac{dt}{ds} = r\sqrt{\frac{a}{\mu}}.$$

Регуляризация



а)



б)

Уравнения Шонера-Хемпеля (1)

$$\bar{x}'' = \frac{3}{1 + e_c \cos \nu_c} \bar{x} + 2\bar{y}' + u_1$$

$$\bar{y}'' = -2\bar{x}' + u_2$$

$$\bar{z}'' = -\bar{z}' + u_3$$

Уравнения Шонера-Хемпеля (2)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Psi(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3/k & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

$$\Psi = (F_m + F_s + F_{J2}) \times \frac{p_0^2}{\mu(1 + e_0 \cos(\nu_0))^3}$$

Оптимизируемый функционал

$$J(x, u, t) = \frac{1}{2}(x(t_f) - x_{des}(t_f))^T F(x(t_f) - x_{des}(t_f)) + \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [(x(t) - x_{des}(t))^T Q(x(t) - x_{des}(t)) + u(t)^T Ru(t)] dt,$$

Весовые матрицы:

$$F = (0_{6 \times 6}) \quad Q = \begin{pmatrix} 10^4 E_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad R = (E_{3 \times 3})$$

LQR-управление(1)

Теорема. Пусть дана система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Psi(t)$$

и целевой функционал

$$J(x, u, t) = \frac{1}{2}(x(t_f) - x_{des}(t_f))^T F(x(t_f) - x_{des}(t_f)) + \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [(x(t) - x_{des}(t))^T Q(x(t) - x_{des}(t)) + u(t)^T R u(t)] dt,$$

в котором u - не ограничено, задан участок $(t_0; t_f)$, матрицы F и Q -- положительно полуопределенные, а R -- положительно определенная.

LQR-управление(2)

Тогда существует оптимальный закон управления, заданный как

$$u_{opt} = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) - R^{-1}(t)B^T(t)G(t),$$

где симметричная матрица $P(t)$ является решением уравнения Рикатти

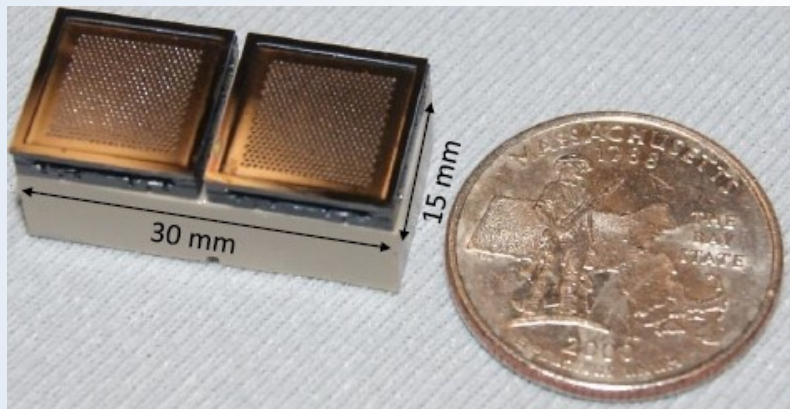
$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)SP(t) - Q, \quad P(t_f) = F,$$

а вектор $G(t)$ -- решение присоединенного уравнения Рикатти

$$\dot{G}(t) = -(A^T(t) - P(t)S)G(t) + Q(t)x_{des}(t) - P(t)\Psi(t),$$

$$G(t_f) = -Fx_{des}(t_f).$$

Электроспрейные двигатели

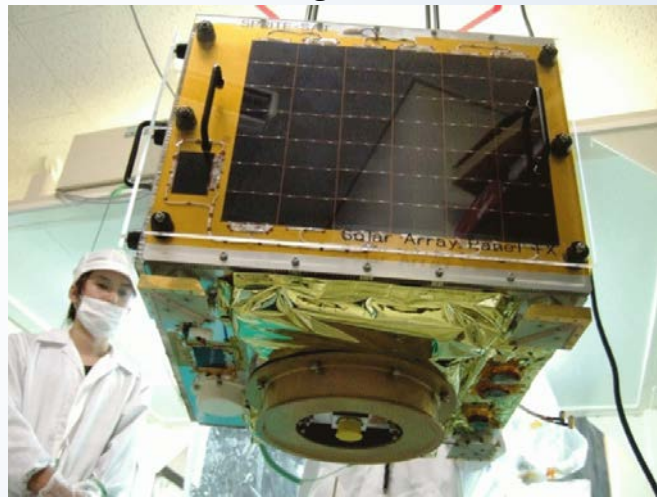


Два электроспрейных двигателя

$$F_s = 50 \mu N$$

Сила тяги для аппарата массой 50кг:

$$F_n = 2 \times 10^{-5} \frac{m}{s^2} \cdot 50kg = 1mN$$



SPRITE-SAT(Япония)

Расчёт массы топлива

Формула Циолковского

$$\Delta v = v_{ex} \cdot \ln \left(\frac{M_0}{M_0 - M_f} \right)$$

Доля массы топлива

$$\frac{M_f}{M_0} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{v_{ex}}}$$

Скорость истечения для электроспрейного двигателя

$$v_{ex} \approx 20 \frac{km}{s}$$

Затраты хар. скорости при LQR-управлении

$$\Delta v < 5 \frac{m}{s}$$

Масса топлива при $M_0 = 50 \text{ kg}$

$$M_f \approx 0.012 \text{ kg} = 12 \text{ g}$$