

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Базовая организация:

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Квалификационная работа на соискание степени магистра
по направлению 03.04.01 «Прикладные математика и физика»,
магистерская программа «Управление динамическими системами»

Построение, выведение и поддержание тетраэдральной формации наноспутников на высокоэллиптических орбитах

Выполнил:

студент группы 272в

Коптев Михаил Дмитриевич

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.

Трофимов Сергей Павлович

Москва, 2018

Оглавление

Введение	3
1 Постановка задачи	7
1.1 Области интереса	7
1.2 Желаемая конфигурация и функционал качества формации . .	8
1.3 Решаемые задачи	12
2 Системы координат и уравнения движения	14
2.1 Геоцентрическая инерциальная и орбитальная системы координат	14
2.2 Оскулирующие и равноденственные элементы	15
2.3 Регуляризация и обезразмеривание уравнений движения	19
2.4 Учет внешних возмущений	22
3 Оптимальный выбор начальных орбит	25
3.1 Параметры опорной орбиты	25
3.2 Оптимизируемый функционал	27
3.3 Оптимизация с использованием суперкомпьютера	29
3.4 Влияние возмущений на конфигурацию формации	32
4 Выведение группировки на орбиту	38
4.1 Анализ чувствительности задачи к начальным условиям	38
4.2 Выведение со стандартными пружинными толкателями	39
4.3 Выведение с низкоскоростным отделением	43
5 Увеличение продолжительности миссии	47
5.1 Коррекция орбиты одного из аппаратов	47
5.2 Добавление дополнительного наноспутника	49
Заключение	52
Список использованных источников	53

Введение

В последние годы все больше внимания уделяется исследованию магнитосферы Земли – области пространства вокруг планеты, поведение плазмы в которой зависит от магнитного поля Земли. Это в первую очередь связано с тем, что геомагнитное поле является основополагающим фактором для зарождения жизни на планете, поскольку именно оно защищает Землю от губительных потоков солнечного ветра – потока ионизированных частиц, испускаемых Солнцем. Одним из способов изучения магнитосферы является непосредственное измерение ее параметров с помощью космических аппаратов (далее – КА). За последние 30 лет в России, США, Европе, Китае и Японии было запущено несколько десятков спутников и спутниковых группировок (проекты ISEE, AMPTE, «Интербол», Geotail, Wind, Polar, Cluster, Double Star, THEMIS, в 2015 году – MMS) [1–4], с установленной на борту научной аппаратурой массой от нескольких десятков до нескольких сотен килограммов, которая предназначалась для измерения всего набора параметров электромагнитных полей.

Одним из наименее изученных процессов, происходящих в магнитосфере, является магнитное пересоединение – явление, при котором силовые линии магнитного поля сходятся и быстро перестраиваются, изменяя локальную структуру магнитного поля [5, 6]. Этот процесс сопровождается высвобождением колоссального количества энергии. Схематично процесс магнитного пересоединения изображен на рис. 1.

Магнитное пересоединение – одна из основных причин появления магнитных бурь, которые как вызывают невероятно красивые полярные сияния, так и создают серьезные помехи в работе радиокommunikаций на Земле.

Большая часть того, что известно о физической природе явления магнитного пересоединения, получено с помощью теоретических исследований,

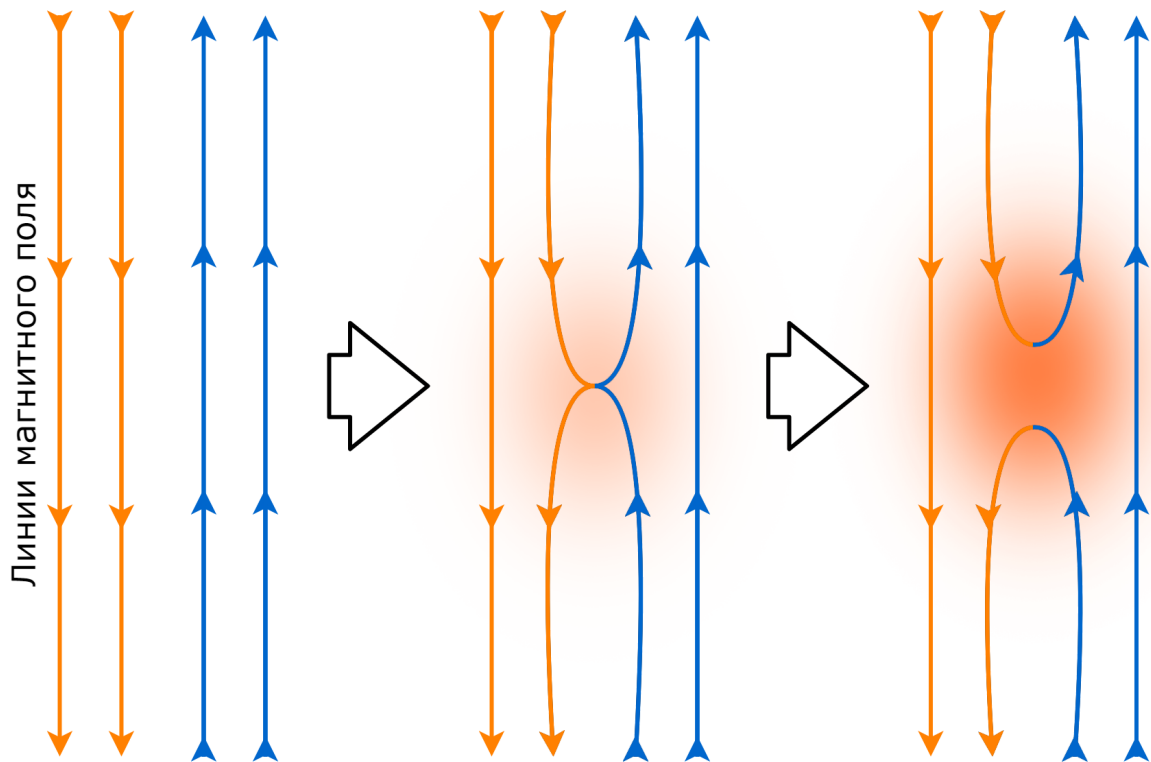


Рис. 1. Процесс магнитного пересоединения.

компьютерного моделирования или наблюдений магнитного пересоединения, происходящего на поверхности Солнца. Лучшее понимание этого явления может быть получено только при непосредственном измерении локальных характеристик магнитосферы Земли. Известно, что магнитное пересоединение можно наблюдать в некоторых областях на границе земной магнитосферы, однако такие области имеют довольно малую толщину, порядка нескольких километров. Этот факт накладывает сильные ограничения на выбор орбиты для КА, а также появляются требования к геометрической конфигурации спутниковой группировки.

Совсем недавно, в 2015 году, агентством NASA была реализована миссия Magnetospheric Multiscale (MMS). Ее основная цель состоит именно в изучении явления магнитного пересоединения. Для получения интересующих измерений необходимо как минимум четыре аппарата, при этом нужно, чтобы в интересующей области пространства аппараты находились в вершинах правильного

тетраэдра с заданной длиной сторон [7]. Поддержание такой формации является одной из важных особенностей миссии; поэтому, помимо научного оборудования, на борту спутников находится массивная система управления движением, включающая в себя двигатели с необходимым запасом топлива. В итоге каждый из четырех аппаратов на старте весил 1362 килограмма.

Необходимо понимать, что большое количество служебной аппаратуры и исполнительных органов системы управления имеет немалую стоимость, еще дороже обходится космическому агентству каждый килограмм, выводимый на орбиту.

Одним из возможных способов снизить итоговую стоимость миссии является применение нано- и микроспутников – аппаратов с массой от 1 до 10 или от 10 до 100 килограммов соответственно. Они являются наиболее доступными с точки зрения цены и сроков создания из ныне используемых классов КА, однако обладают рядом ограничений. Самое важное ограничение связано с возможностью маневрирования: из-за малых размеров таких КА на них не могут быть установлены маршевые двигатели с достаточно большим уровнем тяги для управления орбитальным движением. В лучшем случае возможно использование электрореактивных двигателей малой тяги, активно разрабатывающихся в настоящее время, но пока не прошедших достаточного количества летных испытаний.

Целью данной работы является исследование возможности применения наноспутников для проведения измерений магнитосферы Земли. Рассматривается возможность использования наноспутников в задаче построения и поддержания тетраэдральной формации на высокоэллиптических орбитах. Из-за вышеупомянутых ограничений на управление акцент сделан на исследовании пассивного движения четырех аппаратов. При моделировании орбитального движения принимается во внимание влияние несферичности Земли, а также притяжение Солнца и Луны. Эти эффекты ведут к неизбеж-

ным вековым изменениям орбит аппаратов и, как следствие, постепенной деградации любых формаций при пассивном движении. В связи с этим главной задачей является задача глобального поиска и дальнейшей оптимизации начальных орбит для каждого КА.

Во второй части работы приводится анализ возможных схем выведения группировки на орбиту. В частности, рассматриваются и сравниваются схемы выведения с использованием стандартных и низкоскоростных пружинных толкателей для отделения трех дочерних наноспутников от материнского микроспутника. Проводятся серии испытаний Монте-Карло для исследования влияния возможных ошибок выведения на общую продолжительность миссии.

В завершение, предлагается метод продления времени активного существования миссии, в котором подразумевается использование одного дополнительного наноспутника, а также коррекция орбиты материнского микроспутника.

1 Постановка задачи

1.1 Области интереса

Задача исследования магнитного поля и явления магнитного пересоединения определяет интересующие области в пространстве, в которых должна быть найдена группировка КА для проведения измерений. Перезамыкание магнитных линий может наблюдаться в двух зонах магнитосферы, отмеченных красным на рис. 2.

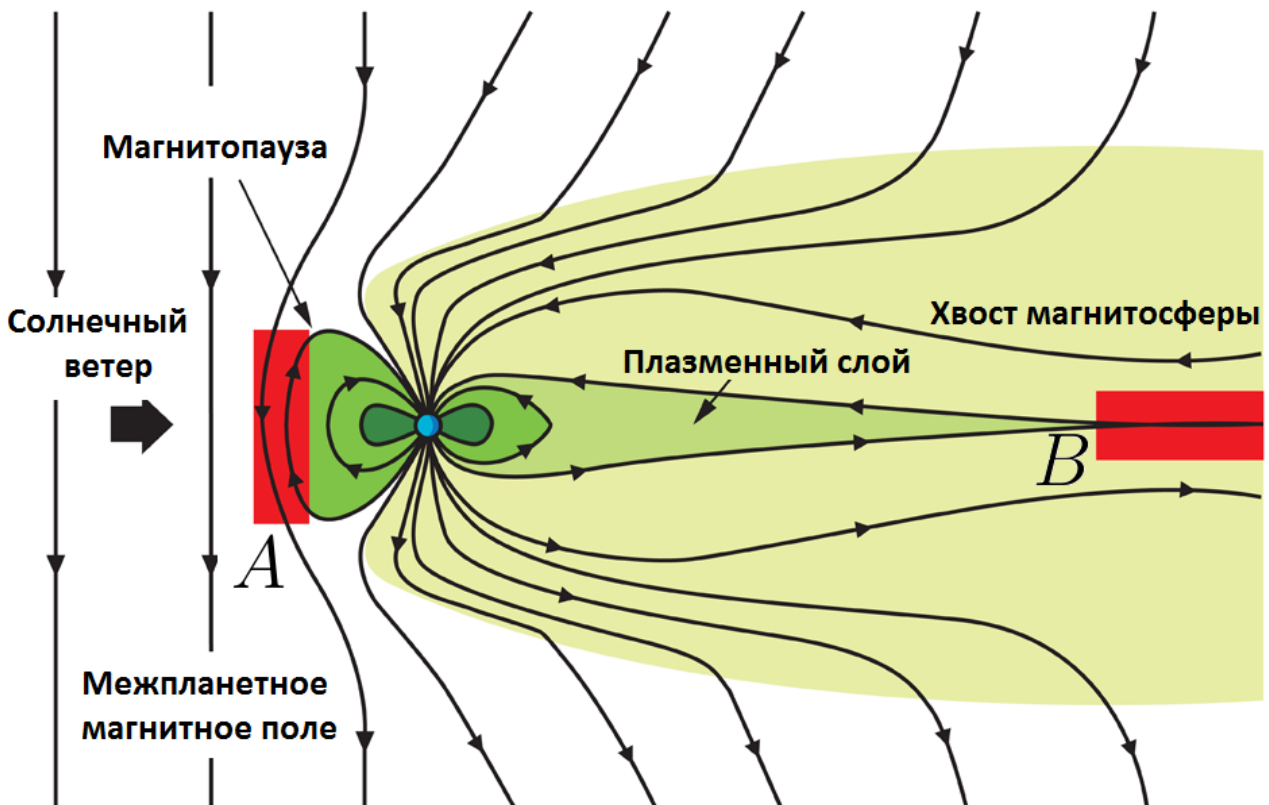


Рис. 2. Структура магнитного поля Земли [8].

Зона *A* удалена от Земли примерно на 80 тысяч километров. В этом регионе межпланетное магнитное поле сливается с геомагнитным полем, вызывая явление магнитного пересоединения. Зона *B* же лежит в хвосте магнитосферы на значительном удалении от планеты — 200 тысяч километров. Здесь

магнитное пересоединение высвобождает энергию, запасенную в хвосте магнитосферы, и вызывает так называемые магнитные суббури.

Американская миссия MMS состоит из двух фаз: в течение первой исследуется регион A , а затем орбита корректируется, чтобы группировка аппаратов пролетала через область B . Для определенности будем рассматривать лишь вторую фазу с исследованием более удаленной части магнитосферы. В качестве опорной орбиты — орбиты, к которой близки орбиты всех спутников — примем высокоэллиптическую орбиту с высотой перигея (ближайшей к Земле точки) 2000 км и высотой апогея (наиболее удаленной от Земли точки) 200000 км. Регион, представляющий интерес, — это все точки орбиты, удаленные от Земли более, чем на 15 земных радиусов, что эквивалентно 95 тысячам километров. Более подробно опорная орбита будет описана далее в соответствующей главе.

Отметим также, что хвост магнитосферы расположен вблизи плоскости эклиптики. В процессе движения Земли по орбите хвост магнитосферы ориентирован вдоль линии Земля-Солнце, вращающейся в инерциальном пространстве за счет движения Земли по орбите со скоростью порядка одного градуса в сутки. В то же время произвольная околоземная орбита свойством гелиосинхронности обладать не будет. Апогей орбиты, размеры которой указаны выше, пересечет хвост магнитосферы примерно за три месяца.

1.2 Желаемая конфигурация и функционал качества формации

Рассмотрим теперь относительную конфигурацию аппаратов группировки. Чтобы провести измерение некоторой физической характеристики геомагнитного поля в фиксированной точке пространства, достаточно и одного аппарата. Однако, чтобы получить представления о пространственном распре-

делении значений этой характеристики в один момент времени, необходимо большее количество синхронных измерений в различных точках пространства. Так, разместив два аппарата, по их измерениям можем получить представление о распределении измеряемой величины на прямой; воспользовавшись тремя КА, можем судить о поведении этой величины в плоскости. Чтобы исследовать магнитное поле в пространстве, важно иметь как минимум четыре КА. Очевидно также, что наилучшей будет ситуация, когда все четыре аппарата равноудалены друг от друга, т.е. образуют правильный тетраэдр (см. рис. 3).

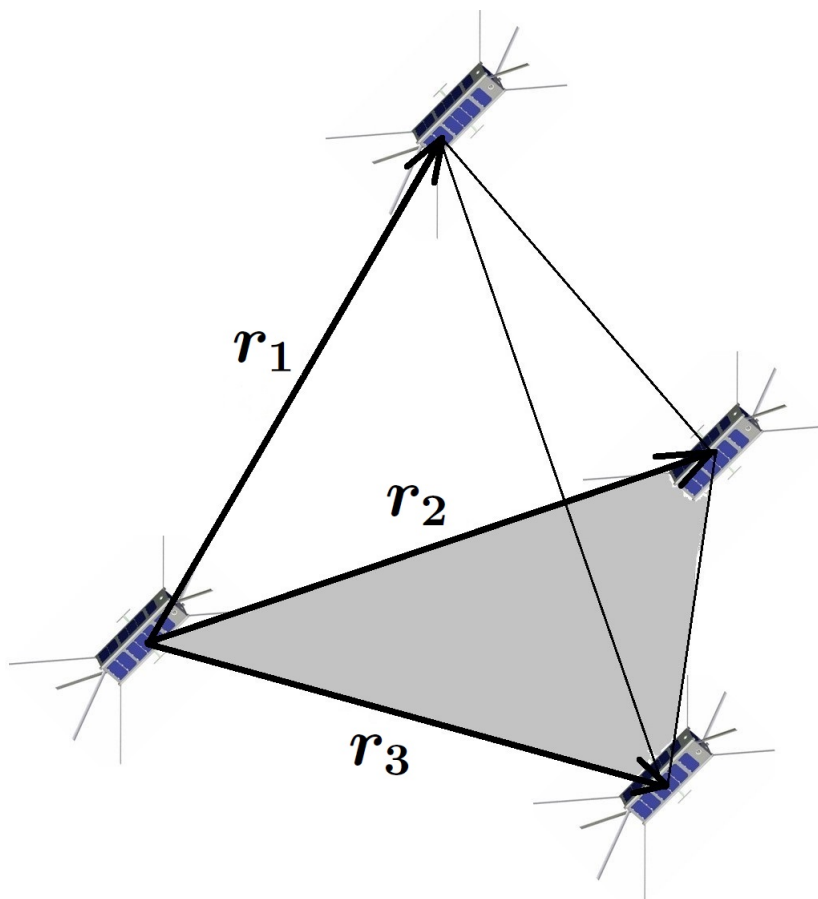


Рис. 3. Оптимальная геометрическая конфигурация четырех спутников.

Важно определить масштабы тетраэдра. За определяющий фактор прием длину стороны тетраэдра. Для научных целей интерес представляют величины 10000 км, 1000 км, 100 км, 10 км. Так, в миссии MMS масштаб формации колеблется от 10 до 400 километров. Следует отметить, что чем меньше

расстояние между КА, тем сложнее поддерживать формацию. В дальнейшем для определенности рассмотрим только один из масштабов и будем считать, что идеальным является расположение аппаратов в вершинах правильного тетраэдра со стороной 100 км. Чтобы как-то формализовать это требование, введем показатель качества формации – некоторый коэффициент, который по положению четырех аппаратов в данный момент времени будет оценивать близость образованного этими КА тетраэдра к номинальному.

Существуют разные способы определить показатель качества тетраэдральной формации [9–11]. В нашей работе будем следовать подходу из статьи [9] и представим показатель качества Q в виде произведения двух составляющих: коэффициента Q_v , отвечающего за качество формы тетраэдра, и коэффициента Q_s , характеризующего его размеры (масштаб). Опишем эти множители подробнее.

Чтобы оценить, насколько пирамида, в вершинах которой лежат четыре аппарата, близка к правильному тетраэдру, можно посмотреть на отношение объема этой фигуры V_a к объему правильного тетраэдра V_r , имеющего сторону, равную среднему расстоянию между аппаратами L . Будем рассматривать КА как материальные точки. Принимая одну из них за начало отсчета, будем считать, что положения трех других КА заданы радиус-векторами \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 соответственно, как на рис. 3. Тогда объем пирамиды, в вершинах которой лежат КА, равен:

$$V_a = \frac{1}{6} |\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)|. \quad (1)$$

Также известно, что объем правильного тетраэдра со стороной L равен

$$V_r = \frac{L^3}{6\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$Q_v = \frac{V_a}{V_r} = \frac{\sqrt{2}}{L^3} |\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)|. \quad (3)$$

Введенный показатель обладает следующим важным свойством [9]:

$$0 \leq Q_v \leq 1.$$

Показатель Q_v будет равен 1, если имеющийся тетраэдр правильный, и нулю, если все четыре КА лежат в одной плоскости.

Чтобы определить коэффициент масштаба, воспользуемся полиномиальной функцией [9]

$$Q_s(L) = \begin{cases} 0, & L < l_1. \\ \frac{(L - l_1)^2(L + l_1 - 2l_2)^2}{(l_2 - l_1)^4}, & l_1 \leq L < l_2; \\ 1, & l_2 \leq L \leq l_3; \\ \frac{(L - l_4)^2(L - 2l_3 + l_4)^2}{(l_4 - l_3)^4}, & l_3 \leq L < l_4; \\ 0, & L > l_4. \end{cases} \quad (4)$$

В выражении (4) константы l_1 , l_2 , l_3 и l_4 характеризуют отклонение размеров тетраэдра от заданного масштаба формации. Так, поскольку нас интересует тетраэдр со стороной 100 километров, примем $l_1 = 65$ км, $l_2 = 85$ км, $l_3 = 115$ км, $l_4 = 135$ км. Действительно, как было выявлено ранее для миссии MMS [7], отклонение в пределах 15% не ухудшает качества измерений.

Таким образом, для показателя качества формации имеем:

$$Q = Q_s Q_v = \frac{\sqrt{2} Q_s}{L^3} |\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)|. \quad (5)$$

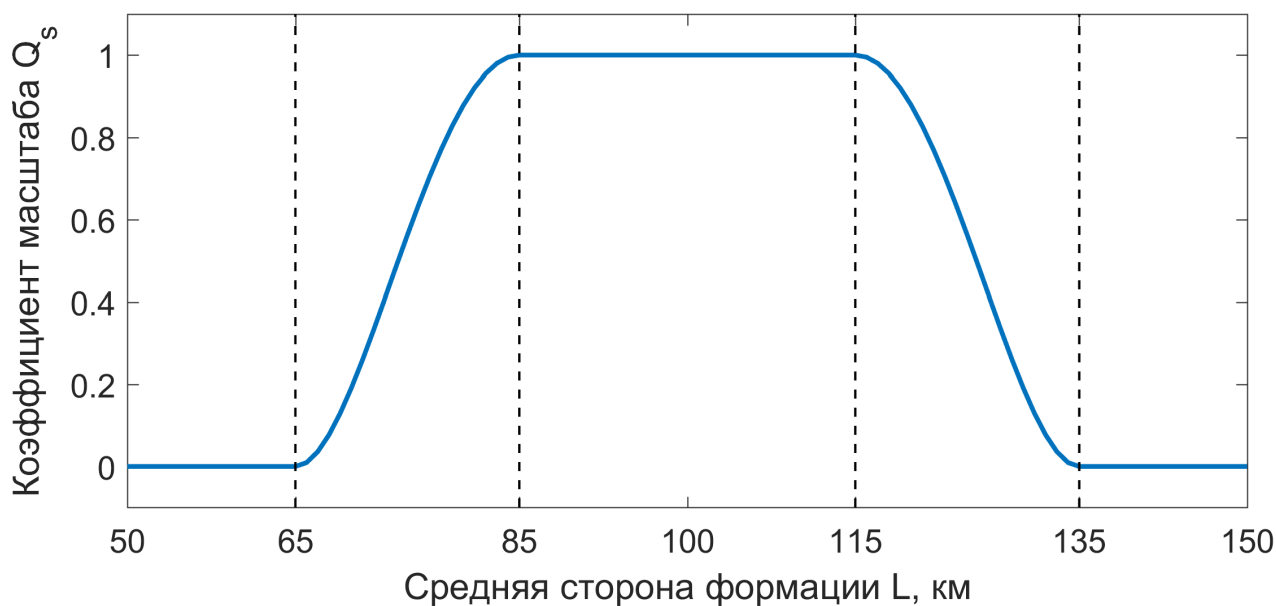


Рис. 4. График $Q_s(L)$. Пунктиром отмечены значения констант l_i .

Когда конфигурация формации близка к правильному тетраэдру со стороной 100 километров, значение функционала Q стремится к единице, а с ухудшением качества формации, величина Q убывает вплоть до нуля.

Поскольку нас интересует качество формации не в один момент времени, а на заданном участке орбиты – в области интереса, введем интегральный показатель среднего качества формации на временном интервале $[t_1, t_2]$:

$$Q_{int} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Q dt. \quad (6)$$

Базируясь на опыте миссии MMS [9], будем считать, что для получения хороших измерений среднее качество формации в областях интереса не должно быть ниже 0.7.

1.3 Решаемые задачи

Любой тетраэдр будет со временем деградировать ввиду внешних возмущений: нецентральности гравитационного поля Земли, притяжения Луны и

Солнца, светового давления и т.д. В американской миссии MMS используются аппараты большой массы, позволяющие корректировать орбиты по мере ухудшения качества формации. Однако если использовать наноспутники, то необходимо учитывать ограничения на управляющие воздействия. Поэтому немаловажной частью работы будет исследование пассивного движения аппаратов группировки. В частности, необходимо решить задачу нахождения оптимальных начальных параметров орбиты для каждого аппарата, позволяющих получить наибольшее число витков, на которых интегральный показатель качества формации (6) будет превышать значение 0.7.

Отдельной задачей является построение схемы выведения группировки спутников на орбиту. Реальным является сценарий, при котором на орбиту выводится относительно большой микроспутник (материнский КА), несущий на борту необходимую аппаратуру для измерений и радиосвязи с другими КА группировки и наземными станциями, некоторый запас топлива, а также три наноспутника (дочерние КА). В дальнейшем последние отделяются в нужных направлениях. Необходимо найти начальную орбиту для материнского аппарата, а также моменты и импульсы отделения наноспутников.

Материнский аппарат является управляемым, и после деградации формации можно скорректировать его орбиту для продления срока активного существования миссии. Кроме того, поскольку дочерние аппараты являются наноспутниками, можно допустить использование дополнительного, пятого, КА, для еще большего увеличения времени жизни миссии. Нахождение соответствующих оптимальных орбит для двух КА после деградации формации является еще одной задачей, рассматриваемой в данной работе.

2 Системы координат и уравнения движения

2.1 Геоцентрическая инерциальная и орбитальная системы координат

Будем исследовать движение КА в геоцентрической инерциальной системе координат [12]. Как следует из названия, ее центр расположен в центре Земли, а ось z направлена перпендикулярно земному экватору. Ось x направлена в точку весеннего равноденствия, а ось y лежит в плоскости экватора и дополняет систему координат до правой (см. рис. 5).

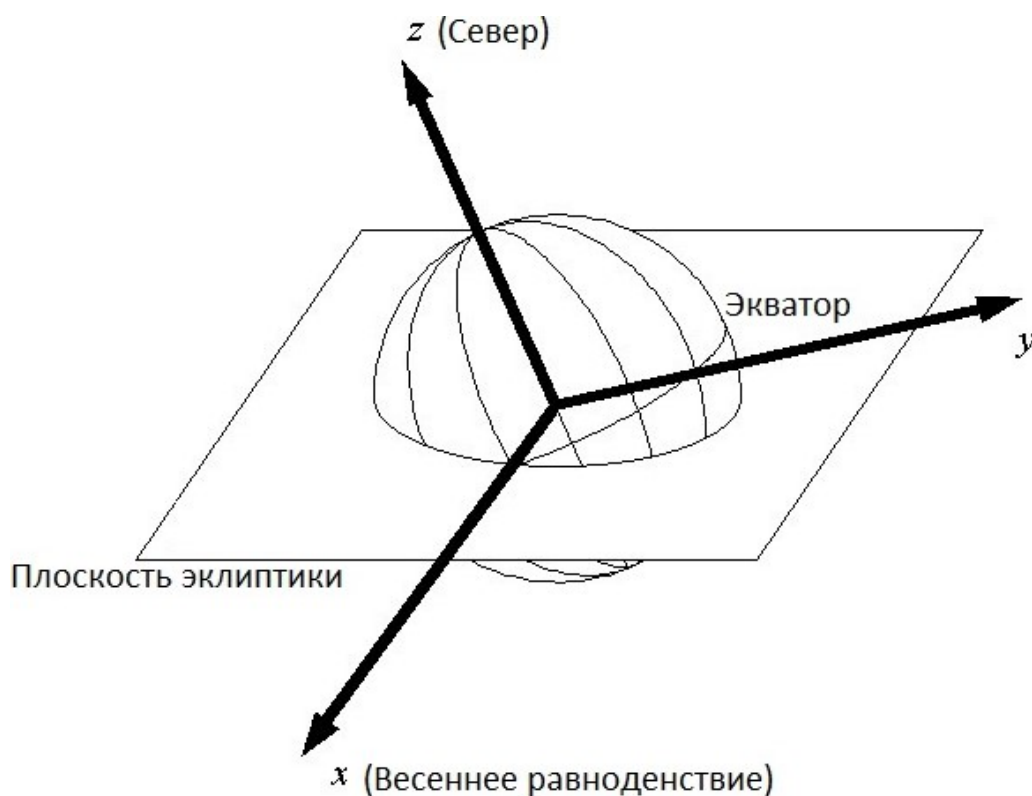


Рис. 5. Геоцентрическая инерциальная система координат.

Согласно второму закону Ньютона, уравнение возмущенного движения тела малой массы в гравитационном поле Земли имеет вид [13]

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{F},$$

где μ – гравитационный параметр Земли (произведение гравитационной постоянной на массу Земли), \mathbf{r} – геоцентрический радиус-вектор, \mathbf{F} – вектор суммарного возмущающего ускорения. Для обозначения модуля вектора в дальнейшем будем использовать нежирный шрифт, т.е. $F = |\mathbf{F}|$

Поскольку поставленная задача связана с формациями космических аппаратов на орбите, важной частью является исследование относительного движения. Это удобнее всего делать с использованием подвижной орбитальной системы координат (ОСК), начало которой находится в центре масс одного из КА. Ось x направлена вдоль линии, соединяющей центр Земли с КА по направлению от Земли, ось y лежит в плоскости орбиты и направлена в сторону движения КА, а ось z дополняет систему до правой (см. рис. 6).

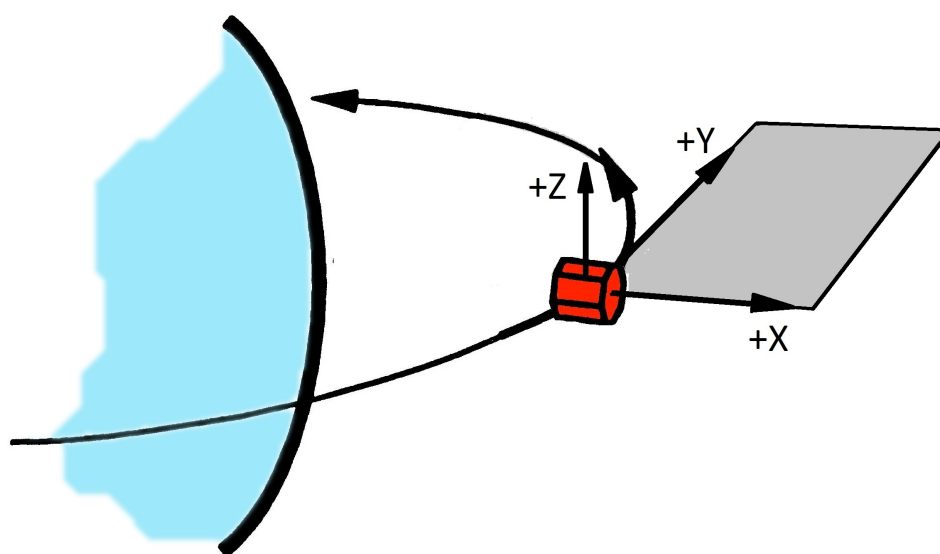


Рис. 6. Оси орбитальной системы координат.

2.2 Оскулирующие и равноденственные элементы

Традиционно для описания орбитального движения в возмущенной задаче двух тел используются кеплеровы элементы орбиты, также называемые

оскулирующими элементами: большая полуось a , эксцентриситет e , наклонение i , долгота восходящего узла Ω , аргумент перицентра ω . В качестве быстро меняющейся переменной обычно рассматривают истинную аномалию ν . Часто вместо большой полуоси a используют фокальный параметр $p = a(1 - e^2)$. Вышеупомянутые элементы и их геометрический смысл проиллюстрированы на рис. 7.

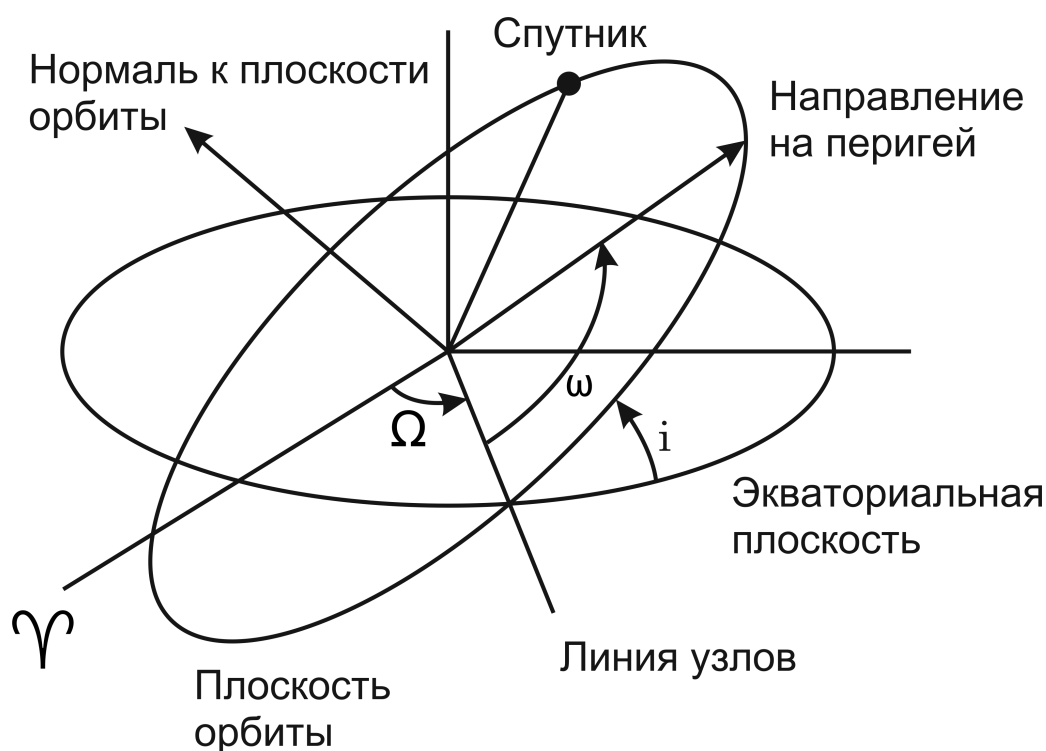


Рис. 7. Кеплеровы элементы орбиты [14].

У уравнений в оскулирующих элементах есть ряд преимуществ перед уравнениями в декартовых координатах. Так, в случае малых возмущающих ускорений

$$F \ll \frac{\mu}{r^2}$$

оскулирующие элементы изменяются медленно вдоль траектории и на этом обычно основываются асимптотические методы построения движения. Кроме того, полученные в результате решения системы в оскулирующих элементах зависимости $p(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $\Omega(t)$, $\omega(t)$, $\nu(t)$ позволяют наглядно представить

эволюцию орбиты под действием возмущающих сил, т.е. провести качественный анализ движения. Система уравнений в оскулирующих элементах, описывающая орбитальное движение КА, выглядит следующим образом [13]:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= 2F_y \cdot r \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \\
\frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ F_x \sin \nu + \right. \\
&\quad \left. + F_y \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \nu + e \frac{r}{p} \right] \right\}, \\
\frac{di}{dt} &= F_z \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= F_z \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-F_x \frac{\cos \nu}{e} + \right. \\
&\quad \left. + F_y \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \nu}{e} - F_z \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right], \\
\frac{d\nu}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{p}{e\mu} \left[-F_x \cos \nu - F_y \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \nu \right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $u = \nu + \omega$ – аргумент широты, а F_x , F_y , F_z – компоненты вектора суммарного возмущающего ускорения в проекции на оси орбитальной системы координат.

Как известно, система уравнений, записанная в оскулирующих элементах не лишена недостатков. Так, в случае орбиты с малым эксцентриситетом, аргумент перицентра ω перестает быть медленно меняющейся величиной, при нулевом эксцентриситете (т.е. круговой орбите), он и вовсе становится неопределенным. Такое же замечание касается и наклона i , обнуление которого (случай экваториальной орбиты) вызывает неопределенность долготы восходящего узла Ω . Указанную проблему можно легко обойти, например, с помощью следующей совокупности замен:

$$\begin{aligned}
e_x &= e \cos(\omega + \Omega), & i_x &= \tan \frac{i}{2} \cos \Omega, \\
e_y &= e \sin(\omega + \Omega), & i_y &= \tan \frac{i}{2} \sin \Omega, \\
L &= \nu + \omega + \Omega.
\end{aligned} \tag{8}$$

Введенный набор переменных, вкуне с фокальным параметром p , называется равноденственными элементами. За быстро меняющуюся переменную здесь взята истинная долгота L .

Приведем также формулы для обратного перехода к оскулирующим элементам:

$$\begin{aligned}
e &= \sqrt{e_x^2 + e_y^2}, \\
i &= \begin{cases} 2 \arctan \sqrt{i_x^2 + i_y^2}, & 0 < i < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - 2 \arctan \sqrt{i_x^2 + i_y^2}, & \frac{\pi}{2} < i < \pi, \end{cases} \\
\Omega &= \mathbf{atan2}(i_y, i_x), \\
\omega &= \mathbf{atan2}(e_y, e_x) - \Omega, \\
\nu &= L - \omega - \Omega.
\end{aligned} \tag{9}$$

В двух из этих формул арктангенс вычисляется с помощью функции **atan2**, реализованной в основных языках программирования (FORTRAN, C/C++, Java, Python, MATLAB, Mathematica). Она корректно определяет квадрант угловой переменной. Для удобства дальнейшей записи введем дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}
\phi &= 1 + i_x^2 + i_y^2, \\
\eta &= i_x \sin L - i_y \cos L, \\
\sigma &= 1 + e_x \cos L + e_y \sin L.
\end{aligned} \tag{10}$$

С учетом (8) и (10) система (7) переписется в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= \frac{2p}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{p}{\mu}} F_y, \\
\frac{de_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin L \cdot F_x + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \cos L + \frac{e_x}{\sigma} \right] F_y - \frac{e_y \eta}{\sigma} F_z \right\}, \\
\frac{de_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\cos L \cdot F_x + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \sin L + \frac{e_x}{\sigma} \right] F_y + \frac{e_x \eta}{\sigma} F_z \right\}, \\
\frac{di_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\phi \cos L}{2\sigma} F_z, \\
\frac{di_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\phi \sin L}{2\sigma} F_z, \\
\frac{dL}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sigma^2}{p} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\eta}{\sigma} F_z.
\end{aligned} \tag{11}$$

2.3 Регуляризация и обезразмеривание уравнений движения

При выборе формы записи системы уравнений движения КА необходимо принять во внимание второй закон Кеплера, утверждающий, что при движении по орбите за равные промежутки времени радиус-вектор КА заметает равные площади. Из этого можно сделать вывод, что при разбиении витка на участки, соответствующие равным временным отрезкам, в районе апоцентра будет заметно большее скопление точек, чем в районе перицентра. Этот факт вынудит измельчать шаг интегрирования для поддержания точности, что снижает вычислительную эффективность процедуры.

Как видно из системы (11), время t отсутствует в правой части в явном виде. Оно может содержаться только в компонентах вектора внешних возмущений F_x , F_y , F_z , однако на практике часто возмущающее ускорение \mathbf{F} не зависит явно от времени, а определяется только положением тела на орбите. В таком случае целесообразно провести регуляризацию системы и принять

за независимую переменную вместо времени другую быструю переменную, называемую фиктивным временем. Наиболее популярным способом перейти к фиктивному времени является преобразование Сундмана [15]:

$$dt = \sqrt{\frac{a}{\mu}} r ds,$$

где s – фиктивное время, совпадающее при отсутствии возмущений с эксцентрической аномалией. Графическая интерпретация перехода к такому фиктивному времени показана на рис. 8.

После регуляризации системы к ней надо добавить еще одно уравнение для физического времени t , чтобы уметь восстанавливать его для каждого значения фиктивного времени на сетке интегрирования. В результате система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= \frac{2pr\sqrt{ap}}{\sigma \mu} \cdot F_2, \\ \frac{de_x}{ds} &= \frac{r\sqrt{ap}}{\mu} \left\{ \sin L \cdot F_1 + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \cos L + \frac{e_x}{\sigma} \right] F_2 - \frac{e_y \eta}{\sigma} F_3 \right\}, \\ \frac{de_y}{ds} &= \frac{r\sqrt{ap}}{\mu} \left\{ -\cos L \cdot F_1 + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \sin L + \frac{e_x}{\sigma} \right] F_2 + \frac{e_x \eta}{\sigma} F_3 \right\}, \\ \frac{di_x}{ds} &= \frac{r\sqrt{ap} \phi \cos L}{\mu \cdot 2\sigma} \cdot F_3, \\ \frac{di_y}{ds} &= \frac{r\sqrt{ap} \phi \sin L}{\mu \cdot 2\sigma} \cdot F_3, \\ \frac{dL}{ds} &= r \sqrt{\frac{a}{p}} \frac{\sigma^2}{p} + r \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\eta}{\sigma} \cdot F_3, \\ \frac{dt}{ds} &= r \sqrt{\frac{a}{\mu}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Для моделирования движения КА в работе используются регуляризованные уравнения в равноденственных элементах (12), вектор координат имеет

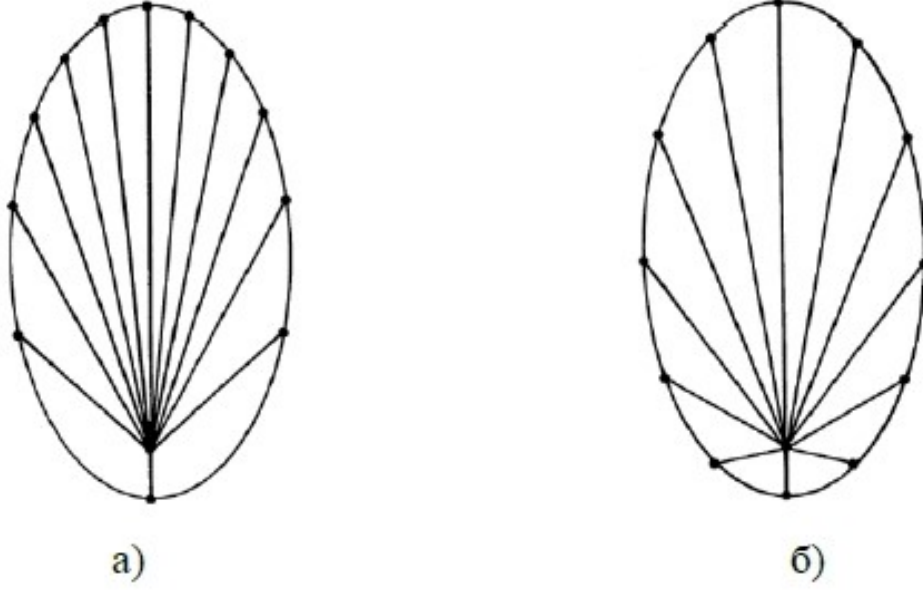


Рис. 8. Распределение 12 точек орбиты, равностоящих по а) средней аномалии б) эксцентрической аномалии [15].

вид $(p, e_x, e_y, i_x, i_y, L, t)$. Однако для анализа и интерпретации результатов бывает желательным совершить переход к геоцентрической декартовой системе координат, совершающийся с помощью вспомогательных векторов \mathbf{f} и \mathbf{g} :

$$\mathbf{f} = \frac{\sqrt{\mu p}}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{pmatrix} 1 + i_x^2 - i_y^2 \\ 2i_x i_y \\ -2i_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \frac{\sqrt{\mu p}}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{pmatrix} 2i_x i_y \\ 1 - i_x^2 + i_y^2 \\ 2i_x \end{pmatrix}.$$

Тогда геоцентрические положение и скорость КА находятся по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{\sqrt{p/\mu}(\mathbf{f} \cos L + \mathbf{g} \sin L)}{1 + e_x \cos L + e_y \sin L}, \\ \mathbf{v} &= \frac{e_x + \cos L}{p} \mathbf{g} - \frac{e_y + \sin L}{p} \mathbf{f}. \end{aligned} \tag{13}$$

Процедура обезразмеривания в задачах орбитальной механики сводится к принятию гравитационного параметра главного тела (Земли) за единицу:

$$\mu = GM_{\oplus} \equiv 1.$$

За единицу длины DU примем экваториальный радиус Земли

$$DU = R_{\oplus} = 6378.137 \text{ км.}$$

Тогда единицей скорости VU становится первая космическая скорость

$$VU = V_1 = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} \approx 7.906 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

После этого легко вычислить единицу времени

$$TU = \frac{R_{\oplus}}{V_1} \approx 806.746 \text{ сек.}$$

2.4 Учет внешних возмущений

Исходя из размеров и формы опорной орбиты, можно заключить, что из всех внешних возмущений достаточно учитывать нецентральность гравитационного поля Земли, а также притяжение аппаратов Солнцем и Луной.

Если считать планету сфероидом (эллипсоидом вращения), симметричным относительно экваториальной плоскости, то ее гравитационный потенциал представим в виде [16]

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_n(\sin \Phi) \right], \quad (14)$$

где P_n , $n = 2 \dots \infty$ – присоединенные полиномы Лежандра, а Φ – угол наклона радиус-вектора аппарата к плоскости экватора (геоцентрическая широта). Слагаемые, стоящие под знаком суммы, называются зональными гармониками. Для Земли влияние зональных гармоник выше четвертого порядка мало. Скажем, $J_2 = 1.0826 \times 10^{-3}$, а коэффициенты J_3 и далее имеют порядок 10^{-6} и выше. Поэтому при оценке влияния несферичности Земли можно

ограничиться учетом только второй зональной гармоники.

Обозначим $\delta = \frac{3}{2} J_2 \mu R_{\oplus}^2$, тогда, с учетом $\mu = 1$

$$U = \frac{1}{r} + \frac{\delta}{r^3} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \Phi \right).$$

Компоненты соответствующего возмущающего ускорения $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ в проекциях на оси ОСК равны:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\delta}{r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1), \\ F_y &= -\frac{\delta}{r^4} \sin 2u \sin^2 i, \\ F_z &= -\frac{\delta}{r^4} (\sin u \sin 2i). \end{aligned} \tag{15}$$

Чтобы учитывать притяжение КА Солнцем и Луной, необходимо знать их положения в текущий момент времени. Для нахождения положений Солнца и Луны, воспользуемся эфемеридной моделью DE432t, составленной NASA Jet Propulsion Lab [17].

Пусть $\mathbf{r}_s = \mathbf{r} + \mathbf{R}_s$ – вектор, связывающий Солнце и КА, где \mathbf{R}_s – вектор Солнце-Земля, μ_s – гравитационный потенциал Солнца. Дополнительное ускорение, действующее на КА, равно

$$\mathbf{F}_s = -\frac{\mu_s}{r_s^3} \mathbf{r}_s + \frac{\mu_s}{R_s^3} \mathbf{R}_s, \tag{16}$$

поскольку необходимо также учитывать ту силу, с которой Солнце притягивает Землю. Аналогичное выражение можно составить для ускорения, сообщаемого Луной \mathbf{F}_m .

В интегрируемой системе уравнений (12) вектор внешних возмущений разложен по компонентам в ОСК, поэтому необходимо совершить соответ-

ствующий переход, домножив вектора \mathbf{F}_m и \mathbf{F}_s на матрицу перехода A . Ввиду громоздкости записи приведем ее поэлементно:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i, \\
 A_{12} &= \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i, \\
 A_{13} &= \sin u \sin i, \\
 A_{21} &= -\cos \Omega \sin u - \sin \Omega \cos u \cos i, \\
 A_{22} &= -\sin \Omega \sin u + \cos \Omega \cos u \cos i, \\
 A_{23} &= \cos u \sin i, \\
 A_{31} &= \sin \Omega \sin i, \\
 A_{32} &= -\cos \Omega \sin i, \\
 A_{33} &= \cos i,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где Ω , u и i – долгота восходящего узла, аргумент широты и наклонение для орбиты аппарата в геоцентрической инерциальной системе координат. Для получения вектора состояния КА в кеплеровых элементах и расчёта элементов матрицы будем пользоваться формулами перехода, приведенными выше.

3 Оптимальный выбор начальных орбит

3.1 Параметры опорной орбиты

Ранее было условлено, что в качестве опорной орбиты принимается высокоэллиптическая орбита с высотой перигея 2000 км и высотой апогея 200000 км. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} R_{\pi} = a(1 - e), \\ R_a = a(1 + e), \end{cases} \quad (18)$$

получим

$$\begin{cases} e = 0.9220, \\ a = 107378.1370 \text{ км.} \end{cases} \quad (19)$$

Поскольку интересующие области магнитного поля Земли преимущественно находятся вблизи плоскости эклиптики, необходимо, чтобы плоскость орбиты была как можно ближе к ней. Земной экватор наклонен к плоскости эклиптики примерно на 23.4° . Кроме того, при одноимпульсном выведении наклонение орбиты относительно плоскости экватора не может быть меньше широты точки старта [12]. Из этого следует, что идеальным будет старт с низких широт. Миссия MMS находилась в выгодном положении, поскольку пуск осуществлялся с космодрома на мысе Канаверал, имеющего широту 28.5° . За неимением подобных альтернатив для отечественных миссий будем рассматривать выведение аппаратов на орбиту с космодрома Байконур, которое обеспечивает наклонение орбиты 51.6° . При этом минимально возможное наклонение орбиты относительно плоскости эклиптики составляет $51.6^\circ - 23.4^\circ = 28.2^\circ$ и достигается при долготе восходящего узла $\Omega = 0^\circ$.

Хвост магнитосферы ориентирован примерно вдоль линии Земля-Солнце, вращающейся в инерциальном пространстве за счет движения Земли

по орбите со скоростью порядка одного градуса в сутки. Для проведения измерений необходимо, чтобы апогей опорной орбиты был расположен в области хвоста магнитосферы. Подбирая долготу восходящего узла Ω и аргумент перицентра ω опорной орбиты, можно добиться требуемой ее ориентации при старте в разные дни в течение года. В частности, можно зафиксировать $\Omega = 0^\circ$ для обеспечения близости плоскости орбиты и плоскости эклиптики и для каждого дня в году найти оптимальное значение аргумента перицентра ω , при котором достигается минимальный угол α между направлением на апогей и направлением на Солнце. Соответствующие графики приведены на рис. 9. Можно видеть, что α обращается в ноль дважды в течение года, в дни весеннего и осеннего равноденствия.

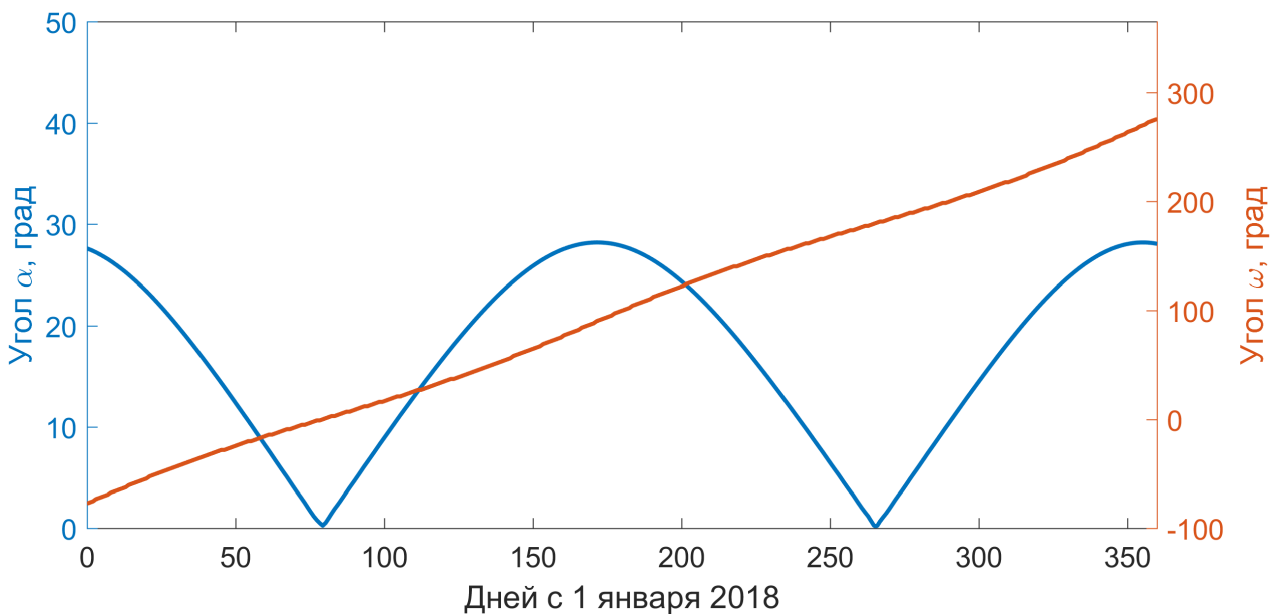


Рис. 9. Связь между датой старта, минимальным углом α и соответствующим аргументом перицентра ω .

Подробный анализ выбора даты старта будет проведен в соответствующем разделе, пока же будем считать $\Omega = \omega = 0^\circ$, что соответствует нахождению апогея в центральной области хвоста магнитосферы в день весеннего равноденствия. Полный набор параметров опорной орбиты приведен в табл. 1, а сама орбита и область интереса изображены на рис. 10.

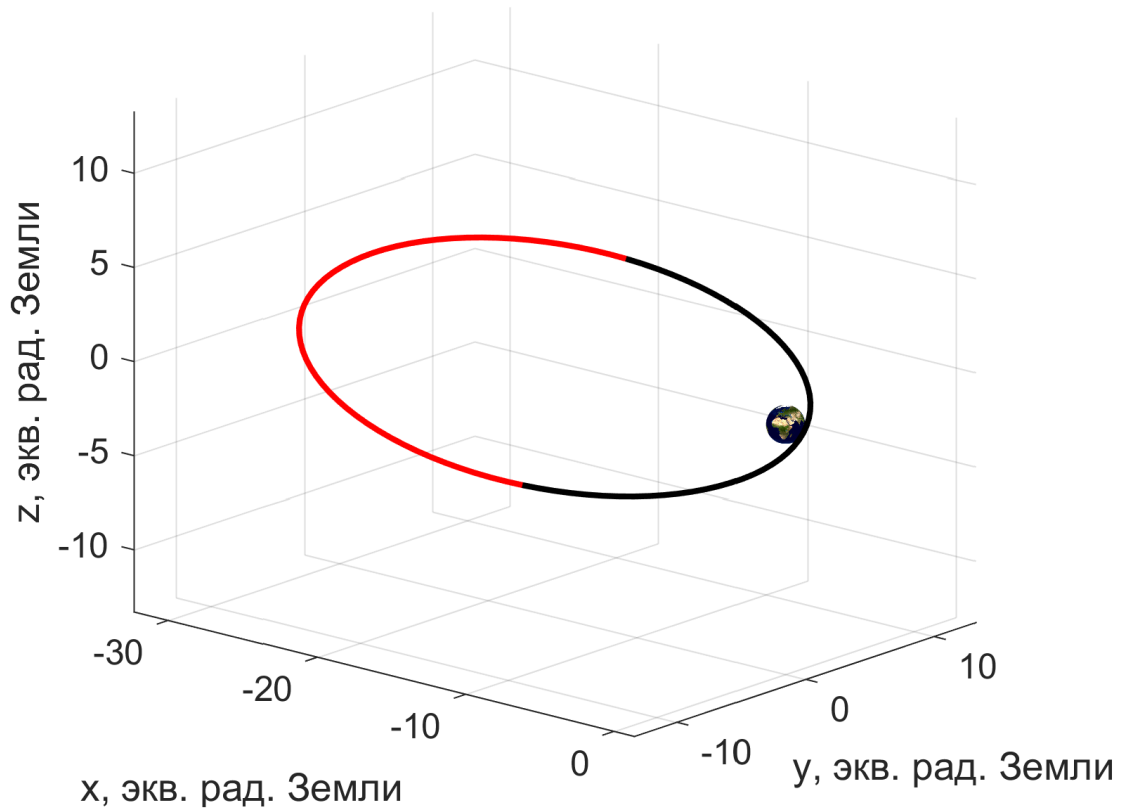


Рис. 10. Опорная высокоэллиптическая орбита с отмеченной на ней красным цветом областью интереса.

Таблица 1. Кеплеровы элементы опорной орбиты.

a , км	e	i , град	Ω , град	ω , град
107378.1370	0.9220	51.6000	0.0000	0.0000

3.2 Оптимизируемый функционал

Начальный вектор состояния одного КА может быть описан шестью параметрами. При оптимизации орбит для четырех спутников нужно найти 24 неизвестных параметра. Будем максимизировать следующий функционал:

$$\bar{Q}_{int}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_{rev}} \sum_{i=1}^{N_{rev}} \hat{Q}_{int}^i(\mathbf{x}), \quad (20)$$

где N_{rev} – число орбитальных периодов, на которых проводится оптимизация. Этот параметр находится с помощью серий последовательных оптимизаций,

его значение должно несколько превышать максимально возможную длительность миссии. В данной работе использовалось значение $N_{rev} = 100$.

В выражении (20) \hat{Q}_{int}^i обозначает модифицированный интегральный показатель качества формации на i -м витке. Этот показатель представляет собой составную функцию, записываемую как

$$\hat{Q}_{int}^i = \begin{cases} 0.7 + p_a(Q_{int}^i - 0.7), & Q_{int}^i > 0.7, \\ p_b Q_{int}^i, & Q_{int}^i < 0.7; \end{cases} \quad (21)$$

где $p_a = 0.05$, $p_b = 0.1$ – веса, выбранные таким образом, чтобы алгоритм оптимизации стремился увеличивать \bar{Q}_{int} за счет добавления новых витков с $Q_{int}^i > 0.7$. Необходимость использования \hat{Q}_{int}^i вместо Q_{int}^i объясняется тем, что требуется максимизировать не среднее значение качества формации на протяжении миссии, а число витков, на которых $Q_{int}^i > 0.7$.

Оптимизируемый функционал зависит от вектора

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{24}),$$

в котором дифференциальные орбитальные элементы x_1, \dots, x_6 задают отклонение первого КА – материнского микроаппарата – от опорной орбиты, элементы x_7, \dots, x_{12} описывают отклонение орбиты второго КА (первого дочернего наноспутника) относительно орбиты материнского КА, x_{13}, \dots, x_{18} – третьего КА (второго дочернего), а x_{19}, \dots, x_{24} – четвертого КА (третьего дочернего).

Процесс оптимизации построен таким образом, что орбита материнского аппарата ищется в некоторой V -окрестности опорной орбиты, заданной в табл. 1, а орбиты трех дочерних наноспутников находятся в U -окрестности орбиты материнского КА. Границы областей поиска V и U указаны в табл. 2.

Расчет значения оптимизируемого функционала включает в себя числен-

Таблица 2. Границы окрестностей, в которых проводится оптимизация.

Окр-ть	Δa , км	Δe	Δi , град	$\Delta \Omega$, град	$\Delta \omega$, град	$\Delta \nu$, град
V	± 318.9068	± 0.0050	± 0.2865	± 5.7296	± 5.7296	± 0
U	± 63.7813	± 0.0010	± 0.0573	± 0.0573	± 0.0573	± 0.0573

ное моделирование орбитального движения с учетом возмущений от второй зональной гармоники геопотенциала, а также притяжения Луны и Солнца. Для расчета траекторий КА используется система уравнений 12. После этого находятся положения аппаратов в областях интереса в одинаковые моменты времени, и для каждого витка вычисляется значение $\hat{Q}_{int}^i(\mathbf{x})$.

3.3 Оптимизация с использованием суперкомпьютера

Для решения задачи глобальной оптимизации был использован многопроцессорный суперкомпьютер К-60, созданный в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Можно выделить три основных подхода к параллелизации оптимизационных задач. Поскольку основные временные затраты при оптимизации приходятся на многократное вычисление оптимизируемой функции, часто достаточно считать параллельно только ее. В нашем случае целевой функцией является \bar{Q}_{int} , для чего необходимо проинтегрировать траектории четырех аппаратов. Так как операция численного интегрирования не поддается параллелизации, то, независимо от имеющихся вычислительных мощностей, можно достичь лишь четырехкратного ускорения, параллельно рассчитывая траектории КА.

Вторым способом применения большого числа процессоров для ускорения оптимизации является использование алгоритмов, которым на каждом шаге оптимизации необходимо вычислять множество значений оптимизируемой функции. Примером могут служить генетические алгоритмы или алгоритмы дифференциальной эволюции. В этом случае вычисление значе-

ний функции для разных «особей» в «популяции» является независимым процессом, который можно выполнять параллельно. Однако такой подход накладывает значительные ограничения на спектр возможных алгоритмов.

В нашей работе остановимся на третьем подходе, так называемой *островной модели*. Она является обобщением двух предыдущих подходов, но использует некоторые особенности параллельных систем для получения наилучших результатов. Такой подход позволяет задействовать любые доступные вычислительные мощности, при этом не нарушая целостности оптимизационного процесса.

Суть островной модели заключается в создании множества островов, на которых одновременно решается поставленная оптимизационная задача. На различных островах могут быть использованы различные оптимизационные методы, при этом на промежуточных этапах острова обмениваются своими наилучшими решениями подобно генетическим алгоритмам. Большую роль играет выбранная топология островов, от которой зависят связи между ними и пути миграций лучших решений.

Для того чтобы решить задачу на суперкомпьютере К-60, потребовалось переписать код Matlab на язык C++. Для интегрирования дифференциальных уравнений движения КА использовалась библиотека *boost*. Реализация островной модели была взята из библиотеки *ragmo*, разрабатываемой сотрудниками Европейского космического агентства (European Space Agency, ESA) специально для решения различных астродинамических задач [18, 19]. На момент выполнения работы была доступна новая версия библиотеки, *ragmo2*, однако в ней отсутствовала поддержка интерфейса MPI, позволяющего проводить расчеты на многопроцессорных системах без общей памяти. Помимо островной модели в библиотеке *ragmo* реализованы популярные оптимизационные алгоритмы, а также имеется поддержка таких оптимизационных библиотек как SNOPT и NLOPT.

При решении задачи была выбрана топология «колесо», в которой все острова формируют кольцо, при этом соседние острова связаны между собой, т.е. имеют возможность обмена данными. Кроме того, один дополнительный остров находится в центре этого кольца и имеет двустороннюю связь со всеми островами кольца. На островах, находящихся на кольце, было решено использовать различные методы глобальной оптимизации. На центральном острове был применен алгоритм локальной оптимизации, основной задачей которого стало улучшение результатов, полученных с других островов. Расположение островов проиллюстрировано на рис. 11.

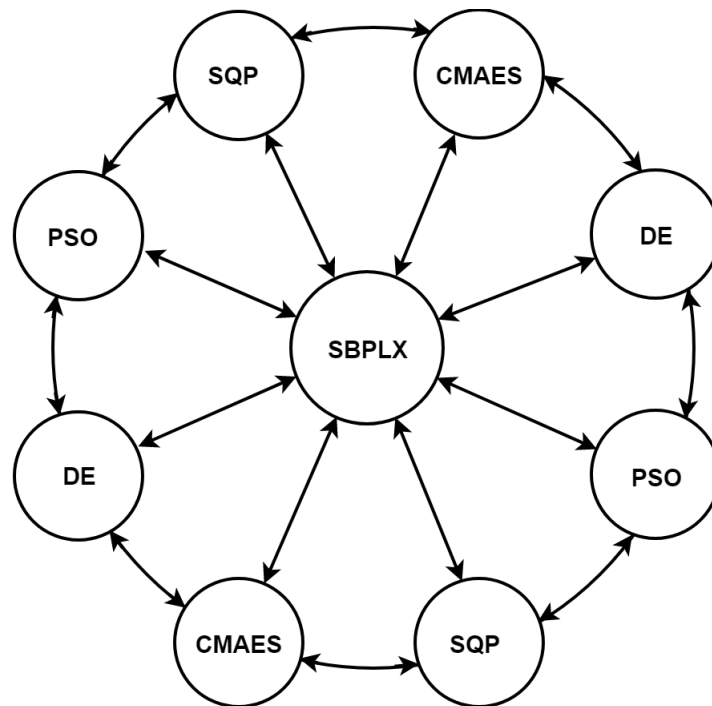


Рис. 11. Расположение островов и используемых алгоритмов при оптимизации на суперкомпьютере.

Для выбора алгоритмов из широкого набора, предоставляемого различными библиотеками, была смоделирована тестовая задача. Она также заключалась в нахождении орбит аппаратов для максимизации \bar{Q}_{int} , однако длительность миссии составляла всего 1 виток, а в уравнениях движения не учитывались сторонние возмущения, что позволило снизить затраты времени на проведение испытаний. По результатам тестирования для глобальной

оптимизации были выбраны алгоритмы дифференциальной эволюции (DE), эволюции ковариационной матрицы (CMAES), роя частиц (PSO) и последовательного квадратичного программирования (SQP). Начальные приближения для алгоритмов глобальной оптимизации генерировались равномерным распределением в заданных границах, что обеспечило наилучшее покрытие исследуемой области. Для центрального острова был выбран subplex-алгоритм (SBPLX), являющийся модификацией метода Нелдера-Мида. Политика миграции была выбрана такой, что наилучшие решения с островов кольца передавались на центральный остров, уточнялись процедурой локальной оптимизации, а затем возвращались обратно на внешние острова. Подробности об используемых оптимизационных методах можно почерпнуть из [20]- [24].

На рис. 11 показана схема с использованием 9 островов. Для наилучшей параллелизации нужно использовать количество процессоров, равное числу островов. Использование суперкомпьютера К-60 позволило увеличить размер схемы до 361 острова. Все последующие оптимизации проводились на 361 вычислительном ядре в составе суперкомпьютера К-60.

3.4 Влияние возмущений на конфигурацию формации

Деградация формации со временем прежде всего связана с тем, что на аппараты, находящиеся на различных орбитах, действуют различные возмущающие силы, связанные с несферичностью Земли, а также притяжением Луны и Солнца. Очевидно, что последние возмущения нестационарны и зависят от взаимного расположения планет. Этот факт может оказать значительное влияние на срок активного существования формации в зависимости от даты старта миссии (датой старта миссии в дальнейшем будем считать время, начиная с которого отслеживается изменение Q_{int}).

Для определения оптимальной даты старта необходимо рассмотреть

множество миссий с одинаковыми начальными условиями, но разной датой старта. Чтобы найти такие начальные условия, можно построить оптимальные орбиты в простой модели движения формации в центральном гравитационном поле Земли. Оптимизационная схема, описанная выше, применима для решения такой оптимизационной задачи – с тем лишь отличием, что нет необходимости использовать численное моделирование, поскольку задача двух тел решается аналитически.

Найденные орбиты представлены в табл. 3, а соответствующий им график Q_{int} и эволюция Q_{int} для этих орбит в полной модели (с учетом гармоник J_2 геопотенциала и лунно-солнечных возмущений) – на рис. 12.

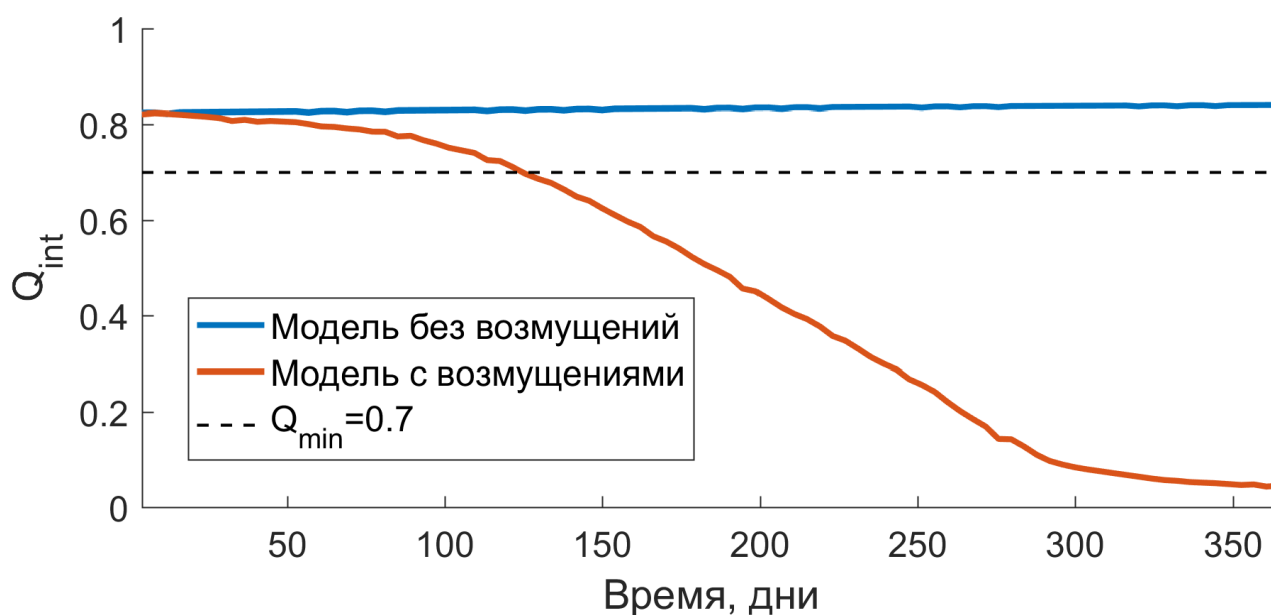


Рис. 12. Изменение Q_{int} для найденного решения в простой модели (синим) и полной модели движения (красным).

Для определения зависимости между скоростью деградации орбит и датой старта миссии проинтегрируем полученные орбиты в течение 100 витков для каждого из 365 дней, начиная с 1 января 2018 года. Нас интересует количество витков, в течение которых функционал качества формации превышает значение 0.7.

Можно также заметить, что в начале интегрирования $Q_{int} > 0.7$, а

Таблица 3. Орбиты, оптимизированные в простой модели.

	a , км	e	i , град	Ω , град	ω , град	ν , град
Материнский КА	107378.1370	0.9220	51.6000	0.0000	0.0000	180.0000
Дочерний КА 1	107378.1192	0.9222	51.5930	0.0112	0.0212	179.9915
Дочерний КА 2	107378.1200	0.9220	51.6001	0.0377	-0.0155	179.9975
Дочерний КА 3	107378.1197	0.9217	51.6012	0.0146	0.0156	179.9926

значит, говоря о полной модели, можно воспользоваться интегрированием в обратном времени, для того чтобы определить, на сколько можно сместить дату старта назад от момента начала интегрирования. Другими словами, рассмотрим 365 миссий с различными датами старта, в которых орбиты всех четырех КА в один из дней года (для каждой миссии – свой) совпадают. Для того чтобы лучше понять характер зависимости, проанализируем дополнительно два случая: с учетом только J2-гармоники и притяжения Солнца и с учетом только J2-гармоники и притяжения Луны. Было замечено, что картина периодична, с периодом примерно полгода, поэтому для удобства отображения на рис. 13-15 приведены соответствующие гистограммы только для 180 дней.

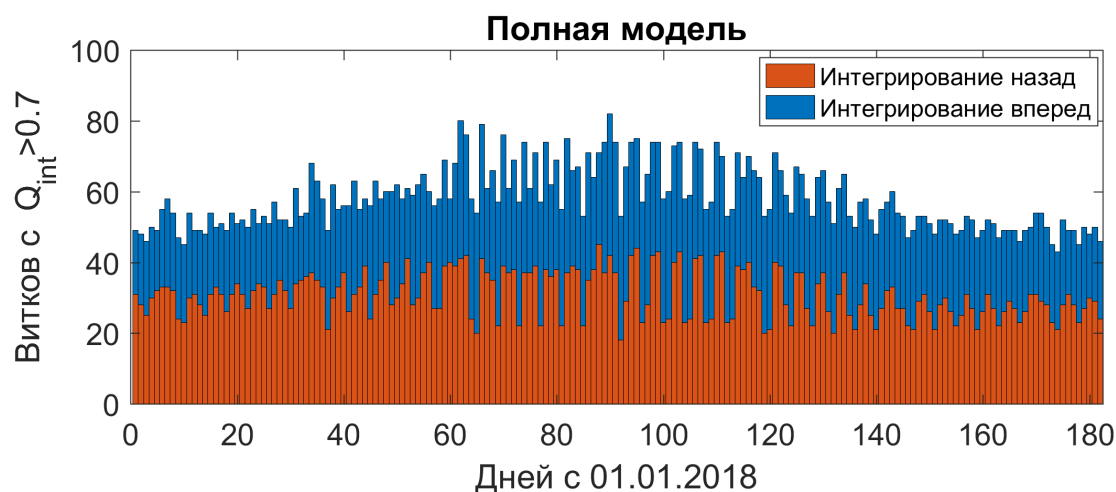


Рис. 13. Количество витков для найденной конфигурации формации в зависимости от времени начала интегрирования, полная модель.

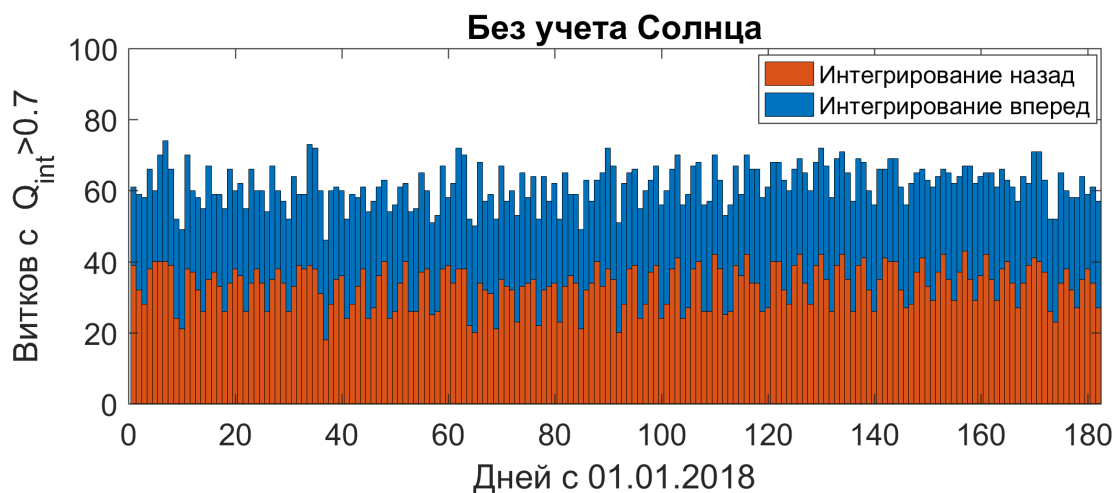


Рис. 14. Количество витков для найденной конфигурации формации в зависимости от времени начала интегрирования, модель без учета Солнца.

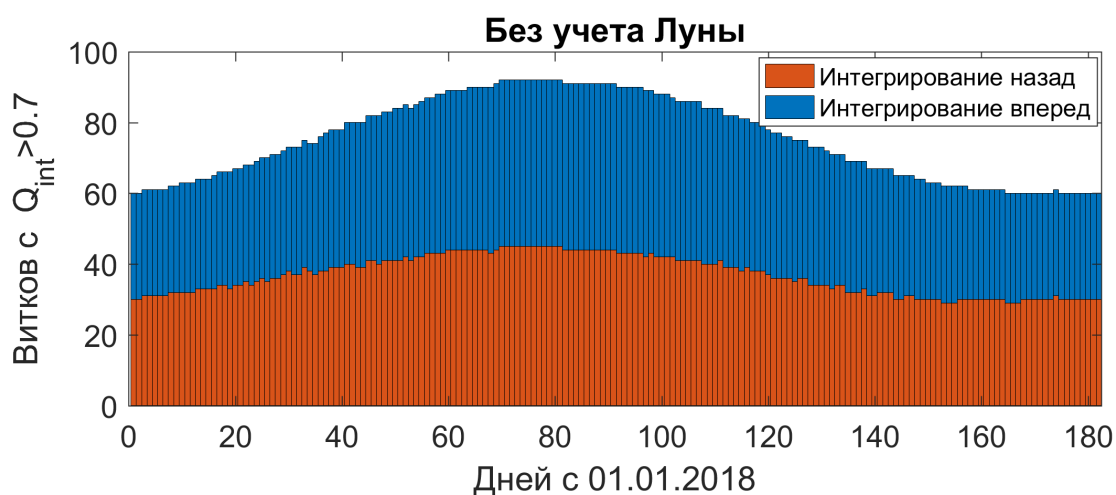


Рис. 15. Количество витков для найденной конфигурации формации в зависимости от времени начала интегрирования, модель без учета Луны.

Анализируя данные, представленные на рис. 13-15, можно заметить, что и Луна, и Солнце оказывают значительное влияние на время жизни миссии (интервал времени, когда средний показатель качества формации превышает 0.7). Чтобы скорость разрушения формации за счет лунно-солнечных возмущений была наименьшей, необходимо правильно выбрать дату старта миссии. Влияние Солнца уменьшается по мере приближения весеннего равноденствия, т.е. когда апогей лежит на максимальном удалении от Солнца. Таким образом,

для выбранной нами опорной орбиты с $\Omega = \omega = 0^\circ$ весеннее равноденствие является оптимальным временем для измерений с точки зрения скорости деградации формации.

Поскольку основной целью работы является построение формации для магнитосферных измерений, необходимо подобрать дату старта таким образом, чтобы апогей опорной орбиты находился в хвосте геомагнитосферы в первые месяцы миссии. Нулевой угол между направлением на перигей и направлением на Солнце достигается в день весеннего равноденствия. Чтобы с течением времени апогей опорной орбиты пересекал хвост магнитосферы, нужно начинать миссию заранее. Полагая, что апогей перескачет хвост магнитосферы за 90 дней, в дальнейшем будем считать, что формация выводится на орбиту за полтора месяца до дня весеннего равноденствия, 06.02.2018 00:00:00 UTC.

Найденные орбиты и эволюция Q_{int} представлены в табл. 4 и на рис. 16 соответственно. При выведении на эти орбиты спутники могут сохранять удовлетворительное качество формации в течение 83 орбитальных периодов, что составляет около 340 дней.

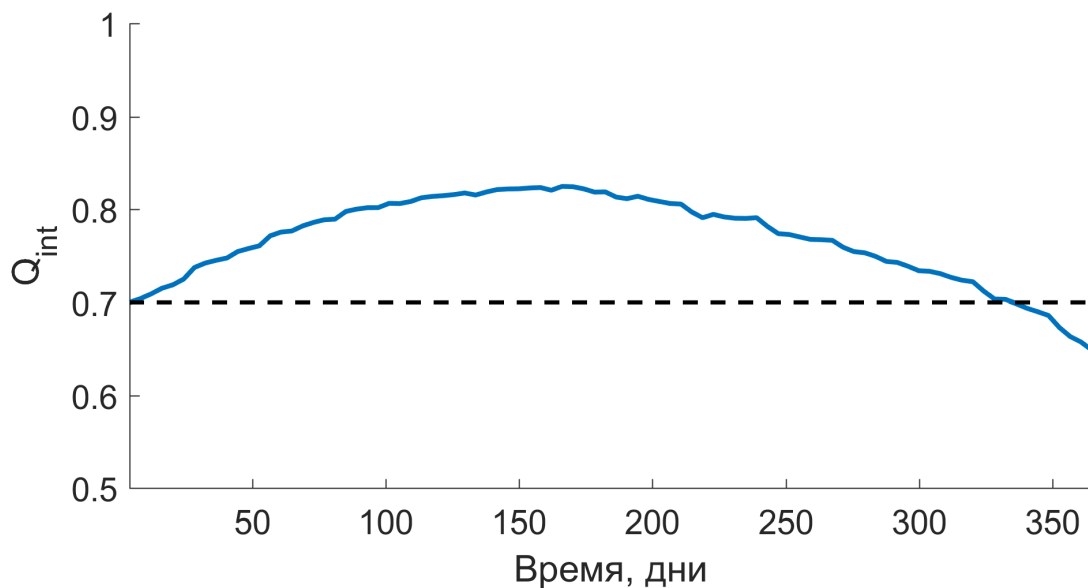


Рис. 16. Изменение Q_{int} для оптимального решения, найденного в полной модели.

Таблица 4. Орбиты, оптимизированные в полной модели.

	a , км	e	i , град	Ω , град	ω , град	ν , град
Материнский КА	107347.0524	0.9170	51.5708	1.0619	-5.7097	180.0000
КА 1	107347.1706	0.9173	51.5740	1.0599	-5.7112	180.0026
КА 2	107347.0639	0.9170	51.5925	1.0342	-5.6734	179.9949
КА 3	107347.3580	0.9173	51.5622	1.0830	-5.7021	179.9953

4 Выведение группировки на орбиту

4.1 Анализ чувствительности задачи к начальным условиям

В этой части работы предлагается найти наилучшую схему для выведения группировки спутников на найденные ранее оптимальные орбиты. Поскольку группировка состоит из управляемого микроспутника и трех неуправляемых наноспутников, возможна схема выведения, в которой управляемый материнский аппарат доставляется на орбиту ракетой-носителем, а затем от него последовательно отделяются дочерние наноспутники.

Процесс выведения может представлять собой последовательные коррекции орбиты управляемого микроспутника и отстрелы дочерних наноспутников. Традиционно отделение малых КА производится при помощи пружинных толкателей. Нахождение схемы выведения представляет собой нетривиальную задачу оптимизации.

Необходимо также промоделировать возможные ошибки выведения, поскольку нельзя всецело полагаться на прецизионность изготовленных пружин и точность алгоритмов управления. При этом сперва необходимо понять, насколько чувствительна решаемая задача к возмущениям начальных условий (н.у.).

Проанализируем орбиты, параметры которых приведены в табл. 4. Внесем нормально распределенные возмущения в исходные векторы положений и скоростей каждого из четырех КА в окрестности оптимальных орбит. Для различных значений среднеквадратичного отклонения σ проведем серии испытаний Монте-Карло. Их результаты представлены на рис. 17. Черным цветом обозначено время жизни миссии равное 90 дням. За это время апогей опорной орбиты полностью пересечет хвост магнитосферы и покинет область,

в которой нужно проводить измерения. В дальнейшем будем считать, что допустимыми являются ошибки выведения, при которых время жизни миссии превышает 90 дней. Можно видеть, что задача является чувствительной к начальным условиям, поэтому необходимо найти максимально точную схему выведения.

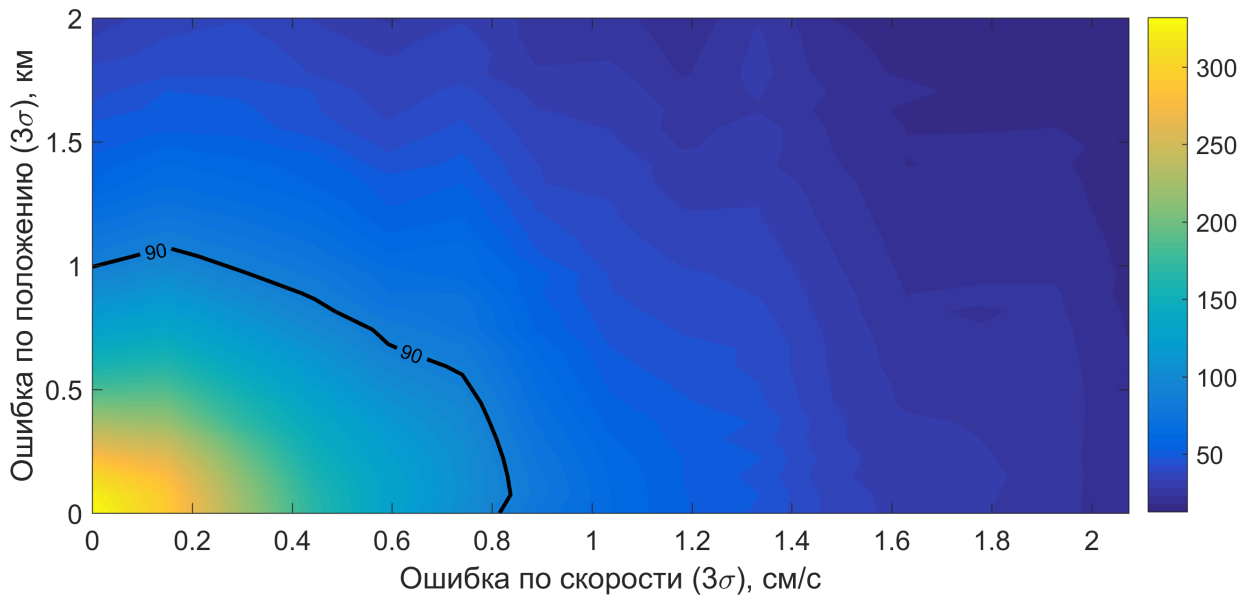


Рис. 17. Время жизни миссии (в днях) для различных возмущений н.у.

4.2 Выведение со стандартными пружинными толкателями

Попробуем реализовать выведение путем отстрела наноспутников от материнского КА с помощью стандартных пружин для отделения кубсатов. Будем считать, что на весь процесс выведения нужно затратить не более трех орбитальных витков (около 12 дней), по одному на отделение каждого дочернего аппарата.

Общая схема такова: материнский КА выводится на некоторую орбиту, а затем чередует пружинный отстрел дочерних КА и этапы коррекции собственной орбиты. Из-за отделения наноспутников масса материнского КА

постепенно уменьшается, и отстрел пружиной имеет все большее воздействие на материнский КА. Положим массы аппаратов следующими:

$$M_c = 30 \text{ кг}, \quad m_d = 5 \text{ кг},$$

где M_c – масса материнского аппарата без дочерних наноспутников, а m_d – масса дочерних КА. Таким образом, в начальный момент времени микроспутник, несущий в себе три наноспутника, весит $M_c + 3m_d = 45$ кг. После отстрела третьего наноспутника масса материнского КА станет равной $M_c = 30$ кг.

Задача выведения в такой постановке содержит 30 неизвестных. Из них 6 неизвестных отвечают за параметры начальной орбиты, с которой материнский микроспутник начинает процесс выведения группировки. Еще 24 неизвестных соответствуют шести импульсам, среди которых три импульса соответствуют пружинному отделению наноспутников и три импульса отвечают за коррекцию орбиты материнского КА. Каждый импульс описывается четырьмя переменными – временем приложения импульса и тремя компонентами приращения вектора скорости КА. Импульсы разделения воздействуют как на материнский КА, так и на отстреливаемый наноспутник, согласно закону сохранения импульса.

Для решения краевой задачи выведения всех КА на требуемые орбиты сведем ее к задаче оптимизации расходуемого на импульсы коррекции топлива. Для этого воспользуемся матлабовской функцией *fmincon*, реализующей алгоритм последовательного квадратичного программирования (SQP). За минимизируемый функционал примем

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=2,4,6} |\Delta \mathbf{v}_i|$$

что означает стремление выполнять промежуточные коррекции с наименьши-

ми затратами характеристической скорости. Величины импульсов разделения ($i = 1, 3, 5$) ограничим сверху значением в 2 м/с.

Краевые условия описываются четырьмя ограничениями типа равенство, имеющими следующий вид:

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_i^{des} - \mathbf{P}_i^{obt},$$

где для i -го ($i = 1, 2, 3, 4$) спутника \mathbf{P}_i^{des} – оптимальное значение вектора состояния, а \mathbf{P}_i^{obt} – положение и скорость, полученные в результате выведения.

В качестве начального приближения для параметров импульсов была выбрана последовательность нулевых импульсов, а за исходную орбиту была принята опорная орбита.

Решение, найденное оптимизатором *fmincon* для поставленной задачи с нелинейными ограничениями, представляет собой параметры орбиты материнского аппарата, с которой начинается процесс выведения, а также серию из шести импульсов, в которой импульсы пружинного разделения чередуются с импульсами коррекции орбиты материнского аппарата. Результаты приведены в таблицах 5 и 6. Времена импульсов даны в днях с начала процесса выведения.

Таблица 5. Элементы орбиты материнского КА на момент начала выведения.

a , км	e	i , град	Ω , град	ω , град	ν , град
107464.1598	0.9126	50.5855	1.4241	353.7158	180.2077

Полученное решение позволяет с большой точностью привести спутники на найденные ранее оптимальные орбиты. При этом затраты характеристической скорости на импульсы коррекции материнского КА реализуемы с использованием современных двигателей для микро- и наноспутников, а величины импульсов разделения лежат в допустимом диапазоне для эксплуатируемых в

Таблица 6. Импульсы для выведения группировки на орбиту.

N	Тип импульса	t , дн	ΔV_x , м/с	ΔV_y , м/с	ΔV_z , м/с	ΔV , м/с
1	Разведение	0.3971	0.1787	0.0739	-0.1957	0.2751
2	Коррекция	3.4971	-0.5595	-0.4159	0.2883	0.7544
3	Разведение	4.4971	-0.0229	0.9425	0.0618	0.9448
4	Коррекция	7.4971	-0.0759	0.2102	-1.1465	1.1681
5	Разведение	8.4971	-0.0021	-1.3353	0.8685	1.5930
6	Коррекция	11.7471	0.9031	0.6600	-0.6231	1.2804

настоящее время пружинных блоков выведения КА [25, 26].

Возможные ошибки в процессе выведения КА на орбиты главным образом связаны с неидеальностью маневрирования материнским КА, а также с погрешностями в работе пружинных толкателей. Подобные ошибки могут привести к тому, что время жизни миссии уменьшится до нескольких витков.

Считая, что материнский КА маневрирует с идеальной точностью, проведем серию испытаний Монте-Карло для оценки допустимых ошибок в импульсах отделения КА от материнского аппарата посредством пружинного блока. Результаты моделирования приведены на рис. 18.

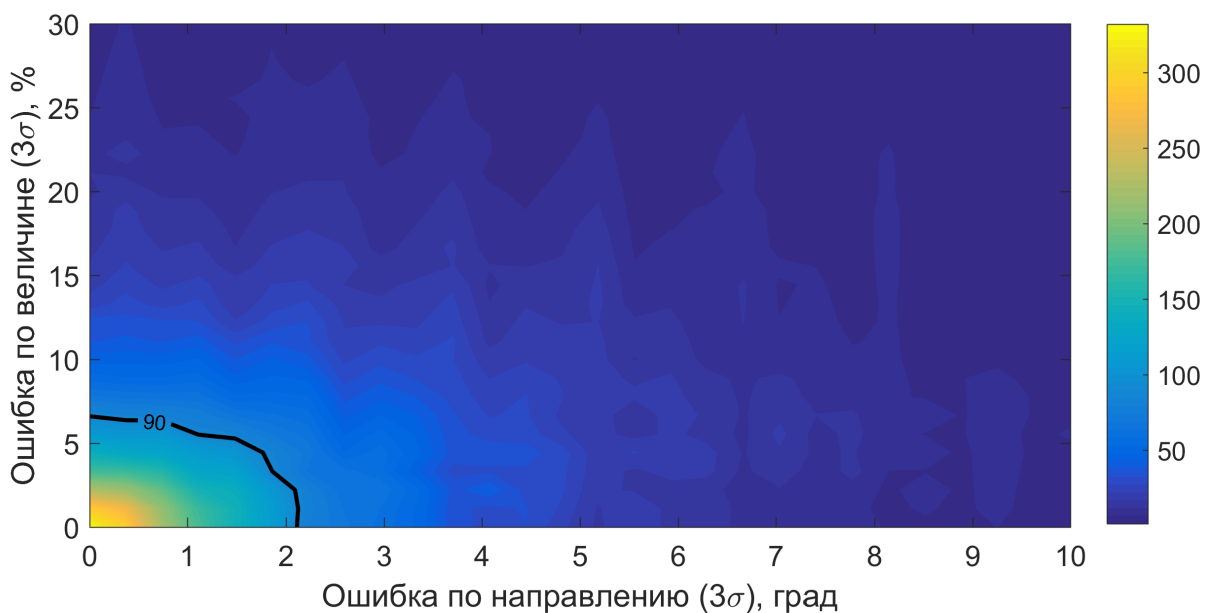


Рис. 18. Время жизни миссии (в днях) в зависимости от ошибок пружинных толкателей.

Несмотря на идеальную точность навигации материнского КА, для достижения требуемого времени жизни миссии в 90 дней требуется повышенная прецизионность пружин: ошибка импульса отделения не должна превосходить 2° по его направлению и 5% по величине, тогда как для кубсатовских пружинных толкателей считается типичной ошибка в 30% по величине импульса и 10° по направлению [25, 26]. В связи с этим рассмотрим другую стратегию выведения группировки на орбиты.

4.3 Выведение с низкоскоростным отделением

В документе [27], опубликованном ESA, упоминается, что в настоящий момент разрабатываются пружинные толкатели, способные отделять наноспутники от материнского аппарата с относительной скоростью около 0.05 м/с. Такое низкоскоростное выведение позволяет избежать большой ошибки в скорости выводимого на орбиту КА даже при погрешности в 30% по величине разделяющего импульса. Поскольку теперь импульсы разделения малы по величине и не могут быть частью процедуры коррекции орбиты материнского КА между отстрелами наноспутников, необходимо изменить подход к поиску оптимального процесса отделения спутников. В этой схеме предполагается старт материнского аппарата с орбиты, близкой к орбите одного из дочерних наноспутников, а затем предлагается чередовать отделение дочерних КА и серии из двух импульсов, позволяющие совершить переход на орбиту следующего отделяемого наноспутника.

Для определения оптимального порядка отделения наноспутников рассмотрим задачу облета орбит дочерних КА. Сравним целевые орбиты всех четырех аппаратов, уделяя при этом основное внимание попарной разнице в значениях большой полуоси и наклона, как двух самых затратных для коррекции элементов орбиты. Введем параметр δ_{jk} , позволяющий определить

близость двух выбранных орбит по большой полуоси a и наклонению:

$$\delta_{jk} = \sqrt{(a_j - a_k)^2 + (i_j - i_k)^2}. \quad (22)$$

Легко заметить, что $\delta_{jk} = \delta_{kj}$.

Поскольку существует всего 24 различных способа облететь орбиты всех четырех аппаратов, решение можно найти с помощью прямого перебора. Оптимальным является порядок (2, 3, 1, 4). Тогда материнским надо считать аппарат под номером 4 (ранее – дочерний КА №3), а начальной орбитой следует выбрать орбиту, близкую к орбите второго спутника (ранее – дочерний КА №1).

Как и ранее, будем полагать, что вся процедура выведения группировки должна занять не более трех орбитальных периодов. Поскольку после разделения дочерний и материнский КА будут иметь близкие скорости, для избежания столкновений необходимо, чтобы импульсы коррекции орбиты материнского КА совершались по прошествии некоторого времени.

Почти всегда оптимальный переход между орбитами имеет импульс в апогее, поэтому будем считать, что пружинное отделение наноспутника происходит за 12 часов до апогея, а два импульса коррекции возможны начиная с момента прохождения апогея и заканчивая моментом за 24 часа до прохождения следующего апогея. Таким образом гарантируется, что импульсы коррекции не будут совершаться за 12 часов до и 12 часов после отделения наноспутника от материнского КА.

Для простоты можно также считать, что пружинное отделение наноспутников происходит строго по вектору скорости КА. Зная величину импульса отделения (5 см/с) и соотношение масс на каждом этапе процесса выведения, можем вычислить целевые орбиты для каждого маневра материнского микроспутника. Таким образом, задача выведения группировки разделяется на

три независимых задачи перехода между близкими орбитами. Имея четкие временные границы и заданные орбиты на момент начала маневра и его окончания, можем найти импульсы коррекции. Они приведены в таблице 7.

Таблица 7. Импульсы для выведения группировки на орбиту с использованием пружин малой скорости.

N	t , дней	ΔV_x , м/с	ΔV_y , м/с	ΔV_z , м/с	ΔV , м/с
Разведение	-0.5000	-0.0338	-0.0199	-0.0208	0.0444
Коррекция	0.0000	0.7467	0.4406	-0.2861	0.9129
Коррекция	3.0548	-0.2275	-0.1919	1.0908	1.1307
Разведение	3.5548	-0.0332	-0.0195	-0.0207	0.0438
Коррекция	4.0549	-0.2275	-0.3561	-0.4633	0.6271
Коррекция	7.1176	0.3504	-0.2324	-0.2354	0.4818
Разведение	7.6176	-0.0324	-0.0192	-0.0204	0.0429
Коррекция	8.4692	-0.2310	1.0162	0.0896	1.0460
Коррекция	11.6610	-0.8682	-0.6087	0.6005	1.2186

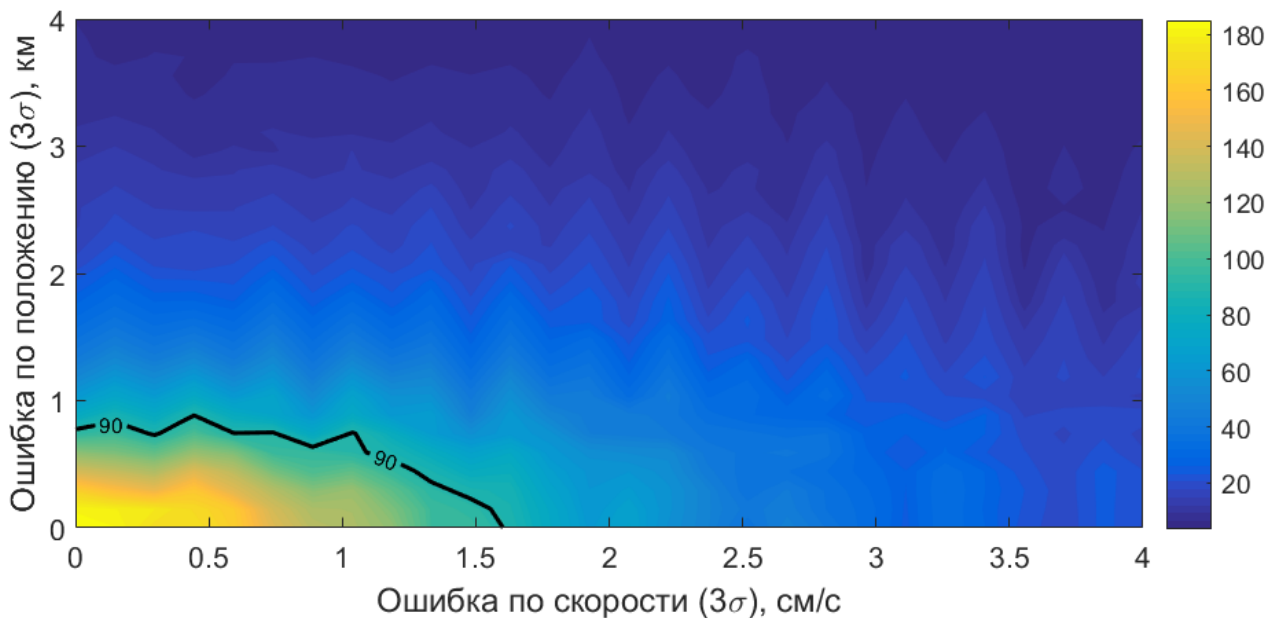


Рис. 19. Время жизни миссии (в днях) в зависимости от навигационных ошибок управления материнским КА.

Проведем теперь серию испытаний Монте-Карло с целью определения требуемой точности приведения материнского КА на промежуточные целевые

орбиты в процессе выведения группировки. При этом примем 3σ значений ошибок пружин равными 20% по величине и 10° по направлению [27]. Цветовая карта зависимости времени жизни миссии от неточностей в положении и скорости главного микроспутника в момент пружинного отстрела наноспутников приведена на рис. 19. Для обеспечения времени жизни в 90 дней необходимо обеспечить навигационную точность материнского КА в 0.8 км по положению и 1.6 см/с по скорости. Такая точность маневрирования является вполне достижимой для современных КА.

5 Увеличение продолжительности миссии

5.1 Коррекция орбиты одного из аппаратов

Рассмотрим теперь способы возможного увеличения срока активного существования миссии. Как было сказано ранее, для измерений в хвосте магнитосферы достаточно трех месяцев, однако, возможно, что для других целей задача максимального продления миссии будет актуальной.

Для продления времени активного существования миссии требуется предотвратить постепенную деградацию качества формации. Одним из возможных способов является коррекция положения аппаратов после того, как Q_{int} станет неприемлемо мал. Поскольку предполагается использование преимущественно пассивных наноспутников, то построить тетраэдр заново не представляется возможным. Однако, полагая, что главный аппарат формации является управляемым микроспутником, мы можем скорректировать его положение.

Используя функцию **fmincon** в среде Matlab, можно найти оптимальную орбиту для материнского аппарата к 83-му витку, когда Q_{int} становится меньше требуемых 0.7 для оптимальных орбит 4. Для наилучшего результата количество оптимизируемых витков равно 30, при этом максимизируется следующий функционал:

$$\sum_{i=83}^{113} \hat{Q}_{int}^i(\mathbf{x}), \quad (23)$$

где размерность искомого вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ равна шести. Этот вектор соответствует искомой новой орбите для главного аппарата. При нахождении Q_{int} орбиты трех дочерних аппаратов неизменны, и находятся интегрированием их пассивного движения из начальных условий найденных в предыдущей секции. За начальное приближение вектора \mathbf{x} принимается положение главного аппарата в начале 83-го витка. Ограничения на вектор \mathbf{x} для функции

fmincon совпадают с таковым для области U в табл. 2. Начальные и оптимизированные решения представлены в таблице 8. Изменение Q_{int} для найденных орбит показано на рис. 20.

Таблица 8. Параметры орбиты для материнского КА в начале региона интереса на 83-м витке.

	a , км	e	i , град	Ω , град	ω , град	ν , град
Начальные	107283.1108	0.9224	41.7497	353.2318	5.6103	155.6540
Оптимальные	107283.3030	0.9225	41.7211	353.2384	5.5931	155.6803

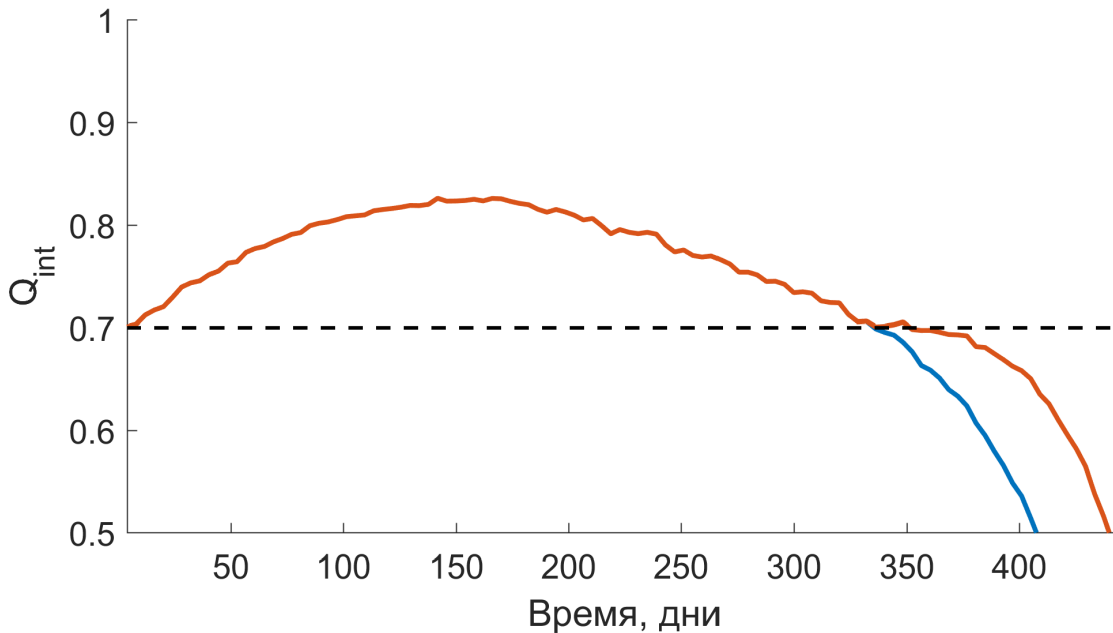


Рис. 20. Изменение Q_{int} для исходных орбит (синим) и для оптимизированных к 83-му витку орбит материнского КА (красным).

Требуемое для коррекции положения материнского КА импульсное управление приведено в табл. 9. Общие затраты характеристической скорости равны

$$\Delta v = 0.8346 \text{ м/с},$$

что достижимо при использовании современных двигателей малой тяги. Однако с помощью такого маневра можно увеличить общую продолжительность

миссии лишь на 16 дней (4 витка), что эквивалентно приросту в 5%. Можно сделать вывод, что коррекция положения одного из четырех аппаратов не является целесообразной применительно к данной миссии.

Таблица 9. Импульсы для коррекции положения материнского КА на 82-м витке.

N	t , дн	ΔV_x , м/с	ΔV_y , м/с	ΔV_z , м/с	ΔV , м/с
1	331.0196	0.0848	-0.2884	0.1613	0.3412
2	334.7162	-0.0471	0.3947	0.2923	0.4934

5.2 Добавление дополнительного наноспутника

В этой работе предлагается использование одного материнского управляемого микроспутника и трех дочерних пассивных наноспутников. С помощью управления материнским КА можно немного увеличить время активного существования миссии, как показано выше. Для достижения лучших результатов требуется коррекция орбиты более чем одного аппарата. Предполагая использование относительно легких и дешевых наноспутников, можно допустить использование одного дополнительного (пятого) КА, который в определенный момент может заменить один из спутников исходной формации для предотвращения ухудшения функционала качества тетраэдра. Получается, к 83-му витку можно изменить орбиты уже двух КА: управлением материнского аппарата и заменой одного из дочерних наноспутников.

Снова требуется найти решение в задаче оптимизации. Функционал остается прежним, как и в (23), однако неизвестный вектор теперь имеет вид

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{12}),$$

и содержит 12 элементов, описывающих две орбиты – для дополнительного наноспутника и материнского КА. Управляя материнским аппаратом, можем

рассмотреть замену любого из дочерних наноспутников. Результаты решения трех оптимизационных задач для различных корректируемых орбит аппаратов показаны на рис. 21.

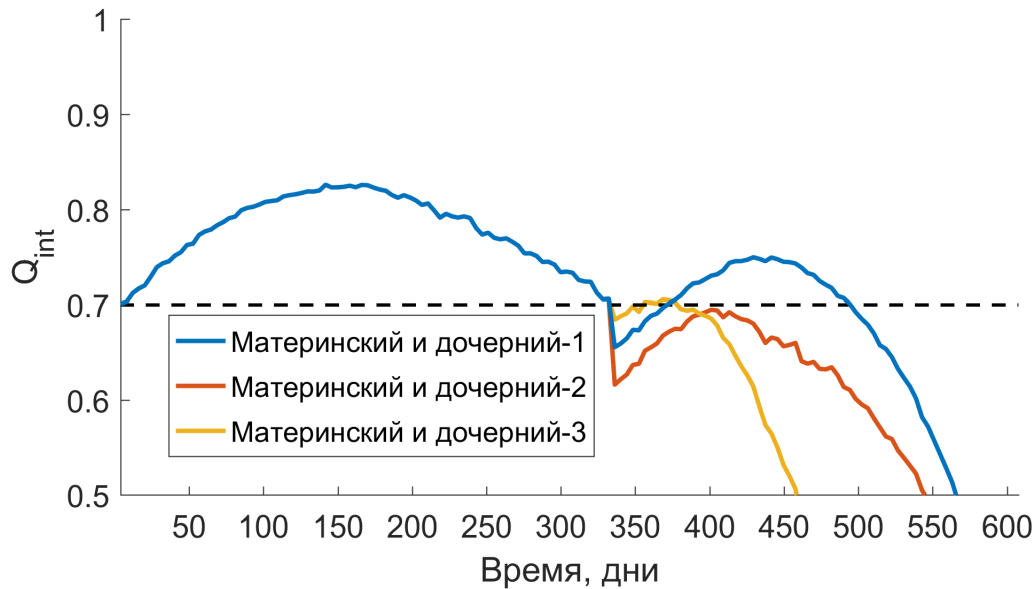


Рис. 21. Эволюция Q_{int} для оптимизированных на 83-м витке положений пар спутников.

Из рисунка понятно, что в выбранной задаче коррекция орбиты материнского аппарата должна сопровождаться использованием дополнительного наноспутника вместо первого дочернего КА. Найденные орбиты представлены в табл. 11, а импульсное управление материнским аппаратом приведено в табл. 10. В этом случае затраты характеристической скорости равны

$$\Delta v = 1.5573 \text{ м/с.}$$

При использовании дополнительного КА и маневрировании материнским спутником на 83-м витке итоговая продолжительность миссии может быть увеличена на 125 дней (31 виток), что соответствует продлению миссии на 37%.

Таблица 10. Импульсы для коррекции положения материнского КА на 83-м витке.

N	t , дн	ΔV_x , м/с	ΔV_y , м/с	ΔV_z , м/с	ΔV , м/с
1	346.9948	0.1989	-0.0016	-0.2223	0.2983
2	350.2450	0.1769	-1.2287	-0.2098	1.2590

Таблица 11. Оптимальные параметры орбиты для материнского и дополнительного КА на 83-м витке.

	a , км	e	i , град	Ω , град	ω , град	ν , град
Мат. КА, начальные	107283.1108	0.9224	41.7497	353.2318	5.6103	155.6540
Мат. КА, оптимальные	107282.5875	0.9222	41.7337	353.1925	5.6052	155.6500
Доп. КА, оптимальные	107282.7423	0.9224	41.7123	353.2410	5.5712	155.6753

Заключение

В работе было рассмотрено эволюция тетраэдральной формации спутников на высокоэллиптических орбитах. Для моделирования орбитального движения КА была использована регуляризованная система уравнений в равноденственных элементах. С помощью оптимизации на суперкомпьютере были найдены оптимальные параметры начальных орбит четырех аппаратов для достижения максимального времени пассивного существования тетраэдральной формации.

При пассивном движении геометрическая конфигурация деградирует с течением времени, однако показатель качества не падает ниже минимально требуемого значения в течение 83 витков (около 340 дней). Ввиду изменения положения орбиты относительно хвоста магнитосферы для проведения измерений достаточно обеспечить время жизни миссии в 90 дней.

Были предложены несколько схем по выведению группировки на орбиту. Для их сравнения и оценки точности были проведены несколько серий испытаний Монте-Карло. Из-за высокой чувствительности задачи к возмущениям начальных условий действенным оказался способ с использованием низкоскоростного отделения дочерних КА. С учетом возможных ошибок пружинного разделения в 20% по величине импульса и 10° по направлению требуемое время жизни миссии в 90 дней достигается при навигационной точности материнского КА в 0.8 км по положению и 1.6 см/с по скорости.

Также был проведен анализ возможных методов продления миссии. С учетом коррекции орбиты материнского КА и использования дополнительного, пятого, наноспутника, возможно поддерживать тетраэдр близкий к правильному на протяжении 465 дней.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Galeev, A.A., Galperin, Yu.I., and Zelenyi, L.M. *The INTERBALL Project to Study Solar-Terrestrial Physics*, Cosmic Research, 1996, Vol. 34, pp. 339–363.
- [2] Frank, L.A. and Paterson, W.R. *Survey of Electron and Ion Bulk Flows in the Distant Magnetotail with the Geotail Spacecraft*, Geophysical Research Letters, 1994, Vol. 21, pp. 2963–2966.
- [3] Angelopoulos, V., Sibeck, D., Carlson, C.W. et al. *First Results from the THEMIS Mission*, Space Science Reviews, 2008, Vol. 141, pp. 453–476.
- [4] Burch, J., Moore, T., Torbert, R., and Giles, B. *Magnetospheric Multiscale Overview and Science Objectives*, Space Science Reviews, 2016, Vol. 199, pp. 5–21.
- [5] The Science of Magnetic Reconnection | NASA. URL: <https://www.nasa.gov/content/goddard/science-of-magnetic-reconnection> (Дата обращения: 12.05.2018).
- [6] An Introduction to Magnetic Reconnection. URL: http://astro.gla.ac.uk/~hamish/stfc_ss15/STFC-SS-Glasgow-Reconnection.pdf (Дата обращения: 12.05.2018).
- [7] Guzman, J. and Edery, A. *Mission Design for the MMS Tetrahedron Formation*, 2004 IEEE Aerospace Conference Proceedings, Big Sky, Montana, USA, March 6-13, 2004, Vol. 1, pp. 533–540.
- [8] NASA. Mission MMS. Science. URL: <http://mms.gsfc.nasa.gov/science.html> (дата обращения: 06.05.2018)
- [9] Roscoe, C.W.T., Vadali, S.R., and Alfriend, K.T. *Optimal Formation Design for Magnetospheric Multiscale Mission Using Differential Orbital Elements*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011, Vol. 34, No. 4, pp. 974–985.
- [10] Маштаков Я.В., Шестаков С.А. *Поддержание тетраэдральной конфигурации группы спутников при помощи одноосного управления*. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016, №95, 27 с.

- [11] Маштаков Я.В., Шестаков С.А. *Построение некоторых опорных относительных орбит для тетраэдральной конфигурации спутников*. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, №84, 26 с.
- [12] Дубошин Г.Н. *Небесная механика. Основные задачи и методы*. М.: Наука, 1975. 800 с.
- [13] Мирер С.А. *Механика космического полета. Орбитальное движение*. М.: Резолит, 2007. 270 с.
- [14] Иванов Д.С., Трофимов С.П., Ширококов М.Г. *Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов / под общ. ред. Овчинникова М.Ю.* — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 118 с.
- [15] Szebehely, V. and Bettis, D.G. *Recent Developments of Integrating the Gravitational Problem of N Bodies // Astrophysics and Space Science* 1971. Vol. 13, No 2. P. 365–376.
- [16] Аксёнов Е.П. *Теория движения искусственных спутников Земли*. М.: Наука, 1977. 360 с.
- [17] JPL Planetary and Lunar Ephemerides. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/?planet_eph_export (дата обращения: 06.05.2018)
- [18] Biscani, F., Izzo, D., and Yam, C.H. *A Global Optimisation Toolbox for Massively Parallel Engineering Optimisation*. 4th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques.
- [19] Izzo, D., Rucinski, M., and Biscani, F. *The generalized Island Model. Parallel Architectures and Bioinspired Algorithms*, Studies in Computational Intelligence, 2012, Vol. 415, pp. 151-169.
- [20] Das, S. and Suganthan, P.N. *Differential Evolution: A Survey of the State-of-the-art*, 2011, IEEE Trans. on Evolutionary Computation, Vol. 15, No. 1, pp. 4-31.
- [21] Hansen, N. «*The CMA evolution strategy: a comparing review*», *Towards a new evolutionary computation. Advances on estimation of distribution algorithms*, 2006, Springer, pp. 1769–1776.

- [22] Nocedal, J. and Wright S.J. *Numerical Optimization*. Springer, 2006.
- [23] Kennedy, J. and Eberhart, R. *Particle Swarm Optimization*. Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, 1995, IV. pp. 1942–1948.
- [24] Rowan, T. *Functional Stability Analysis of Numerical Algorithms*, Ph.D. thesis, Department of Computer Sciences, University of Texas at Austin, 1990.
- [25] NanoRacks CubeSat Deployer (NRCSD) Interface Control Document.
URL: <http://nanoracks.com/wp-content/uploads/NanoRacks-CubeSat-Interface-Control-Document-CubeSat-Guide.pdf> (дата обращения: 06.05.2018)
- [26] Poly Picosatellite Orbital Deployer Mk. III Rev. E User Guide.
URL: <http://gaussteam.com/services/launch-services/gpod/> (дата обращения: 06.05.2018)
- [27] LV-POD Executive Summary Report.
URL: <http://gsp.esa.int/documents/10192/46710/C4000116588ExS.pdf> (дата обращения: 06.05.2018)