

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени магистра
по направлению 03.04.01 «Прикладные математика и физика»,
магистерская программа «Управление динамическими системами»

Оптимизация траекторий космического аппарата с малой тягой в регулярных переменных

Выполнил:
студент группы М05-902в
Корнеев Кирилл Романович

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., с.н.с.
Трофимов Сергей Павлович

Москва, 2021

Аннотация

В работе рассматривается возможность применения регуляризации уравнений движения космического аппарата с помощью KS-преобразования и преобразования Сундмана в задаче поиска оптимальной траектории межпланетного перелёта. В качестве возмущения задачи двух тел рассматривается сила реактивной тяги. Из функции Гамильтона-Понтрягина строится оптимальное управление для функционала квадрата ускорения силы тяги. Получены численные решения задачи сопровождения небесного тела для этого функционала. Приводится вспомогательное преобразование из физических координат в параметрические, определяющее терминальные многообразия в параметрическом пространстве. Проводится сравнение с траекториями, полученными методом продолжения по параметру, а также исследование области сходимости и сравнение чисел обусловленности матриц чувствительности двух методов.

Оглавление

Обозначения и сокращения	4
Введение	5
1. Оптимизация траектории в декартовых координатах	10
1.1. Оптимальное управление	10
1.2. Принцип максимума Понтрягина	11
1.3. Постановка краевой задачи	13
2. Регулярные уравнения движения	19
2.1. Временное преобразование	19
2.2. Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля	22
2.3. Уравнения движения в KS-переменных	25
2.4. Вспомогательное преобразование	27
3. Оптимизация траектории в регулярных переменных	30
3.1. Оптимальное управление	30
3.2. Принцип максимума Понтрягина	31
3.3. Постановка краевой задачи	36
3.4. Постановка задачи оптимизации	37
4. Сравнение методов	40
4.1. Параметры численных расчётов	40
4.2. Сходимость и гиперпараметры	43
4.3. Устойчивость траекторий	45
Заключение	47
Список использованных источников	48

Обозначения и сокращения

Скалярные величины обозначаются без выделения — x , векторные жирным выделением — \mathbf{y} , модули векторов без выделения — y .

μ	гравитационный параметр
t	физическое время
τ	временная компонента
s	фиктивное время
h	кеплерова энергия
\mathbf{r}, \mathbf{v}	физические положение и скорость
\mathbf{u}, \mathbf{w}	параметрические положение и скорость
$\hat{\mathbf{u}}$	множество точек в параметрическом пространстве, соответствующее одному физическому положению
\mathbf{a}	вектор ускорения реактивной тяги
p_y, p_x	сопряжённая вектору \mathbf{u} или скаляру x переменная
\mathbf{z}	искомый вектор сопряжённых переменных в начальный момент времени
$L(\mathbf{u})$	матрица перехода из параметрического пространства в физическое
J	интегральный функционал
H	функция Гамильтона-Понтрягина
КА	космический аппарат

Введение

В настоящее время задача уменьшения расхода топлива при перелётах космических аппаратов (КА) может быть решена переходом к более совершенным электрореактивным двигателям, которые характеризуются высоким удельным импульсом и относительно малыми затратами топлива. Такие космические аппараты с малой тягой способны совершать перелёты не только в околоземном, но и в межпланетном пространстве. Для построения оптимальных траекторий КА с малой тягой традиционно рассматриваются прямые и не прямые методы. При использовании прямых методов дискретизируют траекторию, например, разбивая равномерно по времени. Обычно при таком подходе требуется хорошее начальное приближение. Альтернативный подход — это использование не прямых методов, которые сводят задачу к краевой при помощи использования оптимальности Понтрягина или Беллмана.

К прямым методам относится, например, метод псевдоимпульсов [1], использование метода пристрелки вместе с гомотопией [2, 3]. Также можно отметить работу [4], посвящённую прямым методам в задаче перелёта Земля-Луна на малой тяге с применением баллистического захвата. Одним из популярных не прямых методов является метод продолжения по параметру, который сводит оптимизационную задачу к краевой и представлен в работах В.Г. Петухова [5–9] и в работе Д. Переза-Палау [10]. В этих работах также рассматриваются приёмы осреднения уравнений движения для уменьшения численных ошибок интегрирования на многовитковых траекториях. Часто применяют метод гомотопии, то есть непрерывное продолжение решений однопараметрического семейства задач из начального приближения к искомому решению. Гомотопия и даже двойная гомотопия рассматривается в Б. Пана [11, 12], Ф. Джианга [13] и Ч. Джанга [14]. Непрямой метод вкупе со сквозной оптимизацией используется в работе А.С. Самохина [15]. Одним

из редких подходов является использование эволюционных алгоритмов [16].

Зачастую не прямые методы используют одновременно с заменой переменных состояния на более подходящие по тем или иным признакам. Такие замены подробно рассмотрены в работах Э. Тахери [17–20], где также уделяется внимание обезразмериванию величин и использованию сглаживания функций переключения. Кроме того, стоит обратить внимание на работу Д. Джанкинса [21], также посвящённую выбору вектора состояния и являющуюся развитием работ Тахери, и на работу С. Жефруа [22]. Грамотно выбранная замена переменных обычно позволяет улучшить сходимость оптимизационных методов. Кроме замены вектора состояния есть и другие подходы для увеличения точности вычислений, например, использование комплексного шага при интегрировании [23], что позволяет справиться с чрезмерным уменьшением величины шага. Кроме того, существует подход, в котором физическое время заменяется на фиктивное. Впервые в своей работе его предложил К.Ф. Сундман [24]. Физическое время становится переменной состояния или вообще заменяются на так называемую временную компоненту, которая меняется почти линейно с фиктивным временем; после временные компоненты были изучены в работах П. Накози [25] и Е. Брумберга [26].

Для сведения задачи двух тел к регулярной системе возможно использовать переменные Кустаанхеймо-Штифеля (KS), предложенные в труде Е. Штифеля [27], или применять подходы с использованием первых интегралов у [28]. KS-преобразование, связывающее декартовы координаты и KS-переменные, обобщает двумерное преобразование Т. Леви-Чивиты [29]: к трёхмерному радиус-вектору добавляется нулевая четвёртая координата, а KS-преобразование осуществляет переход из четырёхмерного параметрического пространства в расширенное таким образом трёхмерное физическое. В этом параметрическом пространстве уравнения движения не имеют особенностей в начале координат. В следующей монографии [30] подробно

рассмотрена такая замена координат. KS-преобразование также рассматривается в работах Д. Жезевски [31], А. Иванюхина [32] и Я. Сапункова [33]; его мы и будем использовать в данной работе.

Чтобы иметь возможность сравнения, выделим метод продолжения по параметру среди других непрямых методов. Его применение для случая малой непрерывной тяги, существование решений и условия первого и второго порядка рассматривается в трудах А. Петропулоса [34], Х. Уберле [35], и Ж. Пруссинга [36]. Одними из ключевых проблем метода продолжения по параметру являются плохая обусловленность матрицы чувствительности, необходимость решать последовательность задач с постепенным изменением времени перелёта к удалённым точкам Солнечной системы, например, Плутону. В данной работе особое внимание будет уделено улучшению обусловленности матрицы чувствительности.

При решении задачи нахождения оптимальной траектории одновиткового и многовиткового межпланетного перелёта используется принцип максимума Понтрягина. Это позволяет перейти от бесконечномерной задачи оптимального управления к конечномерной краевой задаче. С учётом опыта других авторов в использовании различных наборов векторов состояния было решено рассмотреть преобразования Кустаанхеймо-Штифеля (KS-преобразование) и Сундмана. Они последовательно применяются к задаче двух тел с силой реактивной тяги в качестве управления, что позволяет перейти к регуляризованным уравнениям движения.

Целью данной работы является рассмотрение применимости KS-преобразования в задаче нахождения оптимальной траектории межпланетного перелёта с малой тягой, а также сравнение предлагаемого метода со стандартными реализациями поиска такой траектории методом продолжения по параметру.

В число задач входят поиск терминальных многообразий в четырёхмерном KS-пространстве, нахождение оптимального управления с учётом

смешанных ограничений, определение способа решения краевой задачи и рассмотрение особенностей численной реализации.

По материалам данного исследования сделан доклад «Построение оптимальной траектории КА с использованием регуляризованных уравнений движения» на секции динамики и управления движением космических аппаратов 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ.

Работа имеет следующую структуру. В первой главе рассматривается стандартная постановка задачи оптимального перелёта малой тягой и ограничением мощности, доступной двигателю КА. Такой постановке задачи соответствует квадратичный функционал - интеграл от квадрата реактивного ускорения. Далее в декартовых координатах к квадратичному функционалу применяется формализм Понтрягина, и из функции Гамильтона-Понтрягина находится оптимальное управление. Краевая задача решается методом продолжения по параметру. Для исключения случаев ветвления решений используется модификация метода, в которой гравитационный параметр Солнца также рассматривается как функция параметра продолжения. Данный подход рассматривается в качестве эталонного: с ним будет производиться сравнение предложенного метода оптимизации в регулярных переменных.

Далее рассматривается преобразование Сундмана и KS-преобразование. Вводится фиктивное время и временная компонента, обсуждаются основные свойства преобразования Леви-Чивиты и KS-преобразования, после чего приводятся уравнения движения в четырёхмерном пространстве. После этого приводится вспомогательное преобразование для получения выражений для терминальных многообразий в KS-пространстве.

В третьей главе с помощью понтрягинского формализма находится оптимальное управление для квадратичного функционала и системы уравнений движения в параметрическом пространстве с учётом смешанного ограничения на управление и вектор состояния, выражаемого билинейным

соотношением. Краевая задача сопровождения (встречи) решается сведением её к оптимизационной и применением к последней метода внутренней точки.

В последней главе на примере перелёта Земля-Мартс будут рассмотрены приёмы, использованные в численной реализации данного метода в среде MATLAB, и некоторые гиперпараметры, влияющие на работу метода. Затем будет произведено сравнение его с эталонным поточечно (в точках с фиксированным физическим временем, равномерно распределённых по угловой дальности) по критериям величины чисел обусловленности матриц чувствительности и скорости сходимости; строится Парето-фронт в координатах фиктивного времени и затрат массы, после чего делается вывод о применимости всех вышеупомянутых математических построений.

1. Оптимизация траектории в декартовых координатах

Напомним стандартную процедуру оптимизации в декартовых координатах, с которой будем в дальнейшем проводить сравнение. Сначала в этой главе рассмотрим поиск оптимального управления космического аппарата (КА) с ограниченной мощностью в задаче двух тел. Движение запишем в декартовых координатах. Задачу оптимизации сведём к краевой задаче с помощью принципа максимума Понтрягина. При этом начальное значение сопряжённых переменных отыщем методом продолжения из нулевого приближения.

1.1. Оптимальное управление

Во-первых, запишем задачу двух тел в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{r} — это радиус-вектор, \mathbf{v} — скорость, μ — гравитационный параметр, а ускорение реактивной тяги \mathbf{a} , которое и является управлением, будет иметь следующий вид

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_T}{m(t)} = \frac{\dot{m}u}{m(t)}\mathbf{e}, \quad (2)$$

где \dot{m} — расход топлива в секунду, \mathbf{e} — единичный вектор направления, а u — скорость истечения. Предполагается, что u и \dot{m} можно контролировать произвольным образом. Такое управление называется идеальным, то есть предполагается возможным реализовать любое значение \mathbf{a} . Будем искать непрерывный закон управления. Ограничим мощность, уносимую реактивной струёй, максимальным значением доступной двигателю электрической

мощности N_{max} , с учётом КПД двигателя η

$$\frac{\dot{m}u^2}{2} \leq \eta N_{max}. \quad (3)$$

Выразим скорость истечения через реактивное ускорение

$$\frac{\mathbf{a}^2(m_0 - m_r)^2}{2} \leq \eta N_{max}. \quad (4)$$

Проинтегрировав систему, мы получим

$$\frac{1}{m_0 - m} - \frac{1}{m_0} = \int_{t_0}^t \frac{\mathbf{a}^2(\tau)}{2\eta N_{max}} d\tau \geq \int_{t_0}^t \frac{\mathbf{a}^2(\tau)}{2\eta N} d\tau. \quad (5)$$

Здесь равенство достигается при использовании максимума доступной мощности N . Для определённости предположим, что в качестве источника энергии используется радиоизотопный термоэлектрический генератор (РИТЭГ), что означает постоянную максимальную мощность $N_{max} = const$. Для упрощения предположим независимость КПД от времени $\eta = const$. Это приведёт нас к минимизации следующего функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{a}^2(t) dt. \quad (6)$$

Этот функционал называется квадратичным и используется благодаря удобству нахождения аналитических решений.

1.2. Принцип максимума Понтрягина

Применительно к системе дифференциальных уравнений (1) рассмотрим принцип максимума Понтрягина, который должен будет максимизировать функционал (6). Сначала выпишем вектор переменных состояния

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v}), x \in \mathbb{R}^6, \quad (7)$$

которому будет соответствовать вектор сопряжённых переменных

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v), x \in \mathbb{R}^6. \quad (8)$$

Кроме того, запишем управление в виде

$$\mathbf{a} = (0 \leq a < \infty, -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2, 0 \leq \beta \leq 2\pi), a \in \mathbb{R}^3, \quad (9)$$

где α и β — это углы, определяющие единичный вектор, а a — величина ускорения. Тогда функция Гамильтона-Понтрягина будет записана как

$$H = -\frac{\mathbf{a}^2}{2} + \mathbf{p}_r \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a} \right). \quad (10)$$

Производные сопряжённых переменных по времени выражаются через частные производные гамильтониана по соответствующей переменной

$$\dot{\mathbf{p}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad (11)$$

а также производная по скорости

$$\dot{\mathbf{p}}_v = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}. \quad (12)$$

Максимуму функции Гамильтона-Понтрягина соответствует минимум функционала. Условиям оптимальности будет удовлетворять управление \mathbf{a} , такое что выполняется

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} = 0. \quad (13)$$

В случае квадратичного функционала управление, отвечающее необходимым условиям оптимальности, будет выглядеть так

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v. \quad (14)$$

Вектор \mathbf{p}_v обычно называют базис-вектором Лоудена.

1.3. Постановка краевой задачи

Для перехода к краевой задаче, добавим к системе (1) производные для сопряжённых переменных, а также оптимальное управление

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{p}_v, \\ \dot{\mathbf{p}}_r &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \\ \dot{\mathbf{p}}_v &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}. \end{cases} \quad (15)$$

Это система 12 порядка. Среди них 6 уравнений в фазовых переменных и 6 в сопряжённых к ним. Однако, основной интерес представляет базис-вектор. Поэтому обычно обращаются к следующей системе. Далее заменяют $-\mathbf{r}\mu/r^3$ на запись в потенциале $\partial U/\partial \mathbf{r}$ и обращаются к эволюции первой производной \mathbf{p}_v

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p}_v \\ \ddot{\mathbf{p}}_v &= \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{r}^2} \mathbf{p}_v \end{cases} \quad (16)$$

В начальный момент времени фазовый вектор принадлежит многообразию

$$M_0 = \{\mathbf{g}_0(\mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = \mathbf{0}\}, \quad (17)$$

а в конечный момент времени многообразию

$$M_f = \{\mathbf{g}_f(\mathbf{r}(t_f), \mathbf{v}(t_f)) = \mathbf{0}\}. \quad (18)$$

В момент времени t_f переменные, сопряжённые свободным фазовым переменным будут равны нулю.

Пусть будет поставлена двухточечная краевая задача для системы уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad (19)$$

где \mathbf{z} — вектор параметров, однозначно задающий траекторию системы, а \mathbf{z}_0 — его начальное приближение. Для решения этой краевой задачи нередко применяется метод продолжения по параметру [9]. Этот метод предполагает погружение краевой задачи в однопараметрическое семейство задач. Это позволяет свести её к решению задачи Коши. Данный метод будет использоваться для сравнения с предлагаемым в следующих главах методом.

Рассмотрим примеры таких функций \mathbf{f} . Например, поставим задачу сопровождения. Скорость и положение аппарата в конечный момент времени должны равняться таковым у небесного тела

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_{tf} \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_{tf} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

или задачу пролёта, где должно быть одинаковое положение, а p_v равняться нулю по условиям трансверсальности

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_{tf} \\ \mathbf{p}_v(t_f) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Вектор невязок при использовании начального приближения $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$ будет равен

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}. \quad (22)$$

Введём однопараметрическое семейство $\mathbf{z}(\tau)$, для которого будет вы-

полняться при параметре τ

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}(\tau)) = (1 - \tau)\mathbf{b}. \quad (23)$$

Так при $\tau = 1$ вектор невязок будет равен нулю. В таком случае обозначим $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$, а $\mathbf{z}(1)$, что и будет искомым решением.

Чтобы получить $\mathbf{z}(1)$, нам следует составить систему дифференциальных уравнений и проинтегрировать её от 0 до 1. Сначала продифференцируем вектор параметров по τ :

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \mathbf{b}. \quad (24)$$

Дифференциальное уравнение метода продолжения по параметру вместе с начальным условием $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ ставит задачу Коши относительно функции $\mathbf{z}(\tau)$ на интервале $\tau \in [0, 1]$. Другими словами, исходная система нелинейных уравнений редуцирована к задаче Коши. Из-за ресурсозатратности вычисления правой части системы ОДУ численное интегрирование рекомендуется производить одним из многошаговых методов высокого порядка. Матрица чувствительности $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ может быть аппроксимирована на каждом шаге численно или найдена из совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях. В данной работе используется второй подход.

Помимо продолжения по параметру τ используется модификация гравпараметра μ , описанная в работе Петухова [9]. Здесь требуется сохранить угловую двльность постоянной. Для этого гравитационный параметр центрального тела заменяют на искусственный

$$\bar{\mu}(\tau) = \mu_0 + (\mu - \mu_0)\tau. \quad (25)$$

Здесь μ_0 определяют так, чтобы полное число витков было заданным. Пусть

θ_0 — истинная аномалия, ϕ — угол между \mathbf{r}_0 и проекцией \mathbf{r}_f на плоскость орбиты старта, а a_0 — большая полуось орбиты старта. Чтобы КА за время $t_f - t_0$ совершил N витков и оказался в точке с истинной аномалией $\theta_f = \theta_0 + \phi$, гравитационный параметр должен быть равен

$$\mu_0 = \left(\frac{M_f + 2\pi N - M_0}{t_f - t_0} \right) a_0^3. \quad (26)$$

Средние аномалии M_0 и M_f определяются через истинные аномалии θ_0 и θ_f с помощью следующих соотношений

$$M = E - e \sin E, \quad (27)$$

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (28)$$

где e — это эксцентриситет. Для инвариантности орбит также должно выполняться соотношение

$$\mathbf{v}(t, \tau) = \mathbf{v}(t, 1) \sqrt{\frac{\bar{\mu}(\tau)}{\mu}}. \quad (29)$$

В таком случае конечная функция \mathbf{f} заменяется на следующую

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_{tf} \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_{tf} \sqrt{\bar{\mu}(\tau)/\mu} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

а вместо системы (24) используется

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} + \mathbf{b} \right). \quad (31)$$

В таком случае матрица чувствительности и производная $\partial \mathbf{f} / \partial \tau$ записыва-

ются через вариации

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} & \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}} \right) \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \mathbf{v}(t_f)}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\bar{\mu}(\tau)}} \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu} \right) \mathbf{v}_f \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Уравнения в вариациях, необходимые для нахождения составных элементов матрицы чувствительности и $\partial \mathbf{f} / \partial \tau$ требуют совместного интегрирования с системой (24) и более подробно рассмотрены в уже упомянутой работе [9], поэтому мы не будем их выписывать.

Рассмотрев один из способов решения поставленной проблемы, а именно метод продолжения с модифицированным гравпараметром, найдём другие. Целью данной работы является рассмотрение альтернативного способа нахождения вектора \mathbf{z} , предполагающего регуляризацию уравнений движения с помощью KS-переменных, избегая вовлечения уравнений в вариациях. Уравнения движения в KS-переменных имеют меньшие числа обусловленности, чем уравнения движения в физических декартовых координатах. Это позволяет использовать стандартные методы оптимизации для нахождения подходящего вектора параметров, например метод внутренней точки.

В работе будут описаны сглаживающие преобразования, KS-преобразование и его свойства. Потом будут получены уравнения движения в KS-переменных с преобразованием времени Сундмана. После этого с помощью принципа максимума Понтрягина будет получено оптимальное управление, что сведёт задачу к краевой. Эта краевая задача будет сведена к оптимизационной. В конце работы будут приведены численные

результаты, полученные в среде MATLAB, проведён анализ сходимости и устойчивости метода. Также будет проведено сравнение предложенного метода с рассмотренным выше.

2. Регулярные уравнения движения

В этой главе будут рассмотрены все вопросы, касающиеся преобразования Кустаанхеймо-Штифеля (KS) и преобразования Сундмана, а именно будут последовательно выведены уравнения движения в задаче двух тел после воздействия этих двух преобразований. Также в этой главе будет обсуждено обратное KS-преобразование.

2.1. Временное преобразование

Будем следовать аналогичным преобразованиям в [30]. Начнём рассмотрение метода со сглаживания. Одним из способов регуляризации [37] является временное преобразование. Оно осуществляет переход от времени t к новой переменной s , которую в дальнейшем будем называть мнимым временем

$$dt = f(r, \dot{r})ds. \quad (34)$$

Также такое преобразование называется сглаживающим. Подбирая масштабирующий множитель f , можно добиться почти равномерного по s изменения правой части. Возьмём масштабирующий множитель вида

$$dt = r \sqrt{\frac{a}{\mu}} ds, \quad (35)$$

который впервые был предложен Сундманом [24], и называющийся преобразованием Сундмана. Здесь r — это величина радиус-вектора, а a — это большая полуось орбиты в данный момент времени. Применим это преобразование к уравнению (1). В результате оно приобретает вид

$$\mathbf{r}'' = f^2 \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a} \right) + f^{-1} f' \mathbf{r}', \quad (36)$$

где штрихом обозначается производная по фиктивному времени. Выход в координатное пространство осуществляется путём дополнения уравнений (36) временным уравнением

$$t' = f, \quad (37)$$

что потребует интегрировать (36) и (37) совместно.

Однако стоит заметить, что присоединение временного уравнения заметно сглаживает регуляризирующий эффект. Масштабирующий множитель часто испытывает короткопериодические колебания. Решением этой проблемы может служить временная компонента — переменная, которая была бы явным образом связана с временем, но при это росла бы линейно по отношению к фиктивному времени при отсутствии возмущений. Получим дифференциальное уравнение для преобразования Сундмана. В преобразовании Сундмана роль фиктивного времени играет эксцентриская аномалия. Рассмотрим преобразование Кеплера и выделим величину, линейно меняющуюся по отношению к эксцентриской аномалии E . Запишем уравнение Кеплера в виде

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} E - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} e \sin E, \quad (38)$$

где t_0 время прохождения перицентра орбиты, соответствующее $E = 0$. В качестве временного элемента выберем величину τ

$$\tau = t_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} E. \quad (39)$$

Учтём соотношение $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\mu a} e \sin E$ и подставим (39) в (38) $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\mu a} e \sin E$. Получим соотношение для физического времени

$$t = \tau - \frac{a}{\mu} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (40)$$

Продифференцируем правую и левую часть по физическому времени t и оставим слева производную τ

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{\mu} \frac{da}{dt} + \frac{a}{\mu} v^2 + \frac{a}{\mu} \mathbf{r} \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a} \right). \quad (41)$$

Перейдём от большой полуоси a к кеплеровой энергии h , используя известное соотношение

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (42)$$

и соотношение

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\mu}{(-2h)^2} \frac{dh}{dt}. \quad (43)$$

С учётом (42) и (43) уравнение (41) запишем в виде

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{(-2h)^2} \frac{dh}{dt} + \frac{1}{(-2h)^2} v^2 - \frac{1}{-2h} \frac{\mu}{r} + \frac{1}{-2h} \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}. \quad (44)$$

Сумма первого, третьего и четвёртого члена в правой части равна $\mu/(-2hr)$.

Также можно заменить dt на $r ds / \sqrt{-2h}$ окончательно имеем

$$\tau' = \frac{1}{(-2h)^{3/2}} \left[\mu + 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} h' + r \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \right]. \quad (45)$$

Для определения h и h' воспользуемся (42) и вариационным уравнением в форме Гаусса

$$h' = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}. \quad (46)$$

Перепишем уравнения движения (36), подставив масштабирующий множитель преобразования Сундмана

$$\mathbf{r}'' = \frac{a}{\mu} r^2 \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a} \right) + \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\sqrt{\frac{a}{\mu}} r \right)' \mathbf{r}'. \quad (47)$$

Для преобразования второго слагаемого в правой части заметим, что

$$r' = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, \quad (48)$$

а также

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\sqrt{\frac{a}{\mu}} r \right)' \mathbf{r}' = \sqrt{-2h} \frac{h'}{(-2h)^{3/2}} = \frac{h'}{-2h}. \quad (49)$$

Учтём (48) и (49) в (47). Получим дифференциальное уравнение

$$\mathbf{r}'' = \frac{1}{-2h} \left[-\frac{\mu}{r} \mathbf{r} + r^2 \mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + h' \mathbf{r}' \right]. \quad (50)$$

Также преобразуем (40) используя (48)

$$t = \tau - \frac{1}{\sqrt{-2h}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}. \quad (51)$$

Такая форма уравнений будет более удобной для применения преобразования Кустаанхеймо-Штифеля.

2.2. Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля

Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля [24] или же KS-преобразование предусматривает замену трёхмерного физического пространства на набор из четырёх параметров (u_1, u_2, u_3, u_4) , которые соответствуют четырёхмерному параметрическому пространству

$$x + iy = (u_1 + iu_2)^2. \quad (52)$$

Двумерному случаю такого преобразования соответствует преобразование Леви-Чивиты [29]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 \\ 2u_1u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Ортогональную матрицу

$$L(u) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

называют матрицей Леви-Чивиты.

Для радиус-вектора $\mathbf{r} = (x, y)^T$ выполняется

$$\mathbf{r} = L(u)\mathbf{u}. \quad (55)$$

Непосредственной подстановкой проверяются важные свойства преобразования

$$r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \quad (56)$$

$$\mathbf{r}' = 2L(\mathbf{u})\mathbf{u}', \quad (57)$$

$$L'(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}'), \quad (58)$$

$$L^{-1}(\mathbf{u}) = \frac{L^T(\mathbf{u})}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \quad (59)$$

Также особо стоит выделить следующее свойство. Пусть задан произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, тогда выполняется

$$\frac{\partial L(\mathbf{u})\mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = L(\mathbf{x}). \quad (60)$$

Эти свойства сохраняются и в четырёхмерном параметрическом простран-

стве. Выпишем KS-преобразование в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ 2(u_1u_2 - u_3u_4) \\ 2(u_1u_3 + u_2u_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Ортогональная матрица $L(u)$ вида

$$L(u) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \quad (62)$$

и введение четвёртой нулевой координаты сокращает запись до

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = L(u)u. \quad (63)$$

Для выполнения свойства (57) потребуем выполнения билинейного соотношения

$$\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (64)$$

где $\mathbf{u}_b = (u_4, -u_3, u_2, -u_1)$ — это четвёртая строка матрицы L .

2.3. Уравнения движения в KS-переменных

Для того чтобы записать уравнения плоского движения в переменных Леви-Чивиты, воспользуемся уравнением (50) в немного измененном виде

$$\mathbf{r}'' = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \mathbf{r}' + \frac{1}{-2h} \left[-\frac{\mu}{r} \mathbf{r} + r^2 \mathbf{a} + h' \mathbf{r}' \right]. \quad (65)$$

После подстановки выражений (55) (56) (57) (58) (59) в (65) получаем

$$\mathbf{u}'' + \frac{1}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{L}'(\mathbf{u}') \mathbf{u}' = 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}' - \frac{1}{4h} \left[-\frac{\mu}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{a} + 2h' \mathbf{u}' \right], \quad (66)$$

что после переноса в левую часть и группировки слагаемых даст

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'' + \frac{\mathbf{u}}{4} + \frac{1}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \left[\mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{L}(\mathbf{u}') \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}') \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') \mathbf{u}' \right] = \\ = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{4h} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{a} - \frac{h'}{2h} \mathbf{u}'. \end{aligned} \quad (67)$$

Обратим внимание, что третий член в левой части обращается в ноль

$$\mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{L}(\mathbf{u}') \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}') \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') \mathbf{u}' = 0. \quad (68)$$

В таком случае уравнение движения записывается в виде

$$\mathbf{u}'' + \frac{\mathbf{u}}{4} = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{4h} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{a} - \frac{h'}{2h} \mathbf{u}'. \quad (69)$$

Другими словами, в плоской задаче двух тел при помощи преобразования Леви-Чивиты уравнения движения могут быть сведены к виду регулярных уравнений возмущенного гармонического осциллятора. Если возмущения отсутствуют, то их решением являются гармонические колебания с постоянной частотой $1/2$. В случае четырёхмерного параметрического пространства все проведённые ранее выкладки остаются справедливыми.

Обратим внимание, что в отдельно взятой точке пространства можно связать параметрическую скорость \mathbf{u}' , которую в дальнейшем будем обозначать \mathbf{w} , и производную радиус-вектора по мнимому времени \mathbf{r}' . Для этого требуется преобразовать (57)

$$\mathbf{w} = \frac{L^T(\mathbf{u})\mathbf{r}'}{2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}. \quad (70)$$

В дальнейшем это позволит нам задать начальные соотношения для интегрирования.

Заметим теперь, что выражение кеплеровой энергии можно записать в параметрических координатах

$$h = \frac{\nu^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{-2h \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}{2 r^2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{4h}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} - \frac{\mu}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \quad (71)$$

Проведя необходимые преобразования, получим

$$h = -\frac{\mu}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 4(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w})}. \quad (72)$$

Также необходимо выразить дифференциальное уравнение из (46)

$$h' = 2\mathbf{w} \cdot L^T \mathbf{a}. \quad (73)$$

Приведём соотношения для временного элемента τ в параметрических координатах

$$t = \tau - 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\sqrt{-2h}}. \quad (74)$$

Также выразим дифференциальное уравнение для τ

$$\tau' = \frac{1}{(-2h)^{3/2}} [\mu + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})h' + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \cdot L^T \mathbf{a}]. \quad (75)$$

Таким образом в параметрическом пространстве мы получили 10 уравнений.

2.4. Вспомогательное преобразование

В то время как преобразование (55) из параметрического пространства в физическое однозначно, обратное преобразование не определено. Поэтому мы будем искать в параметрическом пространстве все точки, которые соответствуют точке \mathbf{r} .

Во-первых, заметим, что

$$r = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \quad (76)$$

и также выполняется

$$x = u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2. \quad (77)$$

Из этого можно выразить компоненты вектора \mathbf{u} в форме двух уравнений окружностей

$$u_1^2 + u_4^2 = \frac{r + x}{2}, \quad (78)$$

$$u_2^2 + u_3^2 = \frac{r - x}{2}. \quad (79)$$

Теперь покажем, что все векторы \mathbf{u} , которые соответствуют выбранному вектору \mathbf{r} , определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 \cos \phi, \\ u_2 &= R_2 \cos \gamma, \\ u_3 &= R_2 \sin \gamma, \\ u_4 &= R_1 \sin \phi, \end{aligned} \quad (80)$$

где величины радиусов равны

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\frac{r + x}{2}}, \\ R_2 &= \sqrt{\frac{r - x}{2}}, \end{aligned} \quad (81)$$

а углы $\phi, \gamma \in [0, 2\pi]$. Теперь необходимо установить соотношения с 2 и 3 строкой KS-преобразования (63). Подставим (80) во 2 и 3 строку (63)

$$\begin{aligned} y &= 2R_1R_2(\cos \phi \cos \gamma - \sin \phi \sin \gamma), \\ z &= 2R_1R_2(\cos \phi \sin \gamma + \sin \phi \cos \gamma). \end{aligned} \quad (82)$$

Упростив выражение, получим

$$\begin{aligned} \cos(\phi + \gamma) &= \frac{y}{2R_1R_2}, \\ \sin(\phi + \gamma) &= \frac{z}{2R_1R_2}, \end{aligned} \quad (83)$$

что можно упростить, используя свойства функции atan2

$$\phi + \gamma = \text{atan2}\left(\frac{z}{2R_1R_2}, \frac{y}{2R_1R_2}\right) = \text{atan2}(z, y). \quad (84)$$

Это выражение означает, что угол $\phi + \gamma$ однозначно выражается из компонент вектора \mathbf{r} , то есть произвольно взятому углу $\gamma \in [0, 2\pi]$ можно единственным образом сопоставить угол ϕ .

В точках $r = x$ или $r = -x$ знаменатели в выражениях (83) будут обращаться в ноль. Однако это означает, что один из радиусов R_1 или R_2 равен нулю, а значит число уравнений, определяющих \mathbf{u} сокращается до 2 (78) и (79).

Обозначим получившуюся параметрическую кривую как

$$\hat{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}(\mathbf{r}, \gamma), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \gamma \in [0, 2\pi]\}. \quad (85)$$

Эту кривую также называют слой [27], её можно определить ещё несколькими способами, например

$$\hat{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u} : L(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{r}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\} \quad (86)$$

или через уже найденную точку параметрического пространства

$$\hat{\mathbf{u}} = \{ \mathbf{u} : L(\mathbf{u})\mathbf{u} = L(\mathbf{u}_0)\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^4 \}. \quad (87)$$

Запись в последней форме подробно приведена в работе Штифеля (?) [27].

Кроме того, имеет смысл ввести вспомогательное множество $\hat{\mathbf{w}}$, которое можно выразить как

$$\hat{\mathbf{w}} = \left\{ \mathbf{w} : \mathbf{w} = \frac{2\sqrt{-2h}L(\mathbf{u})\mathbf{w}}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \quad (88)$$

Одному вектору скорости в физических координатах будет соответствовать множество $\hat{\mathbf{w}}$.

3. Оптимизация траектории в регулярных переменных

В данной главе будет поставлена задача поиска оптимального управления в KS-переменных. Для чего сначала будет найдено оптимальное управление с помощью принципа максимума Понтрягина, что позволит свести задачу к краевой. Будет уделено внимание условиям трансверсальности с учётом особенностей KS-преобразования. Однако для решения этой краевой задачи снова потребуется задействовать оптимизационные методы в силу необходимости введения боксовых ограничений на фиктивное или физическое время. Для построения метода оптимизации будут введены невязки, равенство нулю которых будет означать решение краевой задачи.

3.1. Оптимальное управление

Будем рассматривать задачу двух тел с идеальным управлением $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4$, однако, дополнительно потребуем, чтобы $\mathbf{a}_4 = 0$. Запишем задачу двух тел в виде системы уравнений.

Запомним, что $\mathbf{u}' = \mathbf{w}$. Теперь запишем систему уравнений движения в KS-переменных с производными, взятыми по фиктивному времени. В системе будет 10 переменных. Стоит обратить внимание, что теперь система становится автономной

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{w}, \\ \mathbf{w}' = -\frac{\mathbf{u}}{4} - \frac{\mathbf{u}^2}{4h} L^T \mathbf{a} - \frac{h'}{2h} \mathbf{w}, \\ h' = 2\mathbf{w} \cdot L^T \mathbf{a}, \\ \tau' = \frac{1}{(-2h)^{3/2}} (\mu + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})h' + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \cdot L^T \mathbf{a}). \end{cases} \quad (89)$$

Перейдём в интегральном выражении функционала к фиктивному времени

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{a}^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_f} \mathbf{a}^2(t) \frac{dt}{ds} ds = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_f} \mathbf{a}^2(t) \frac{\mathbf{u}^2(s)}{\sqrt{-2h(s)}} ds. \quad (90)$$

Таким образом, мы получили функционал (90) с ограниченной мощностью и независимой переменной s . Обратим внимание, что условие равенства нулю четвёртой координаты управления можно записать следующим образом

$$g(s, \mathbf{u}, \mathbf{a}) = \mathbf{u}_b \cdot L^T \mathbf{a} = 0. \quad (91)$$

Несоблюдение этого неравенства ведет к нефизическим траекториям.

3.2. Принцип максимума Понтрягина

Применим формализм Понтрягина к автономной системе (89) и функционалу (90) с ограничением (91). Учёт таких ограничений, относящихся к смешанным, подробно рассмотрен в книге [38]. Смешанное ограничение означает вхождение и вектора состояния \mathbf{x} и управления \mathbf{a} в уравнение $g(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$. Его можно учесть с коэффициентом m в гамильтониане

$$H = -\phi(\mathbf{a}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{f}(s, \mathbf{x}) - mg(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}). \quad (92)$$

Здесь ϕ — это подынтегральная часть функционала J , \mathbf{p} — это вектор сопряжённых переменных, а \mathbf{f} — это правая часть системы дифференциальных уравнений. Значение неизвестного множителя m и управление \mathbf{a} можно определить из условия стационарности и смешанного ограничения

$$\begin{cases} H_a(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0 = -\phi_a + \mathbf{p} \cdot \mathbf{f}_a - mg_a, \\ g(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0, \end{cases} \quad (93)$$

где $H_a = \partial H / \partial \mathbf{a}$ — это производная по вектору управления. Теперь запишем функцию Гамильтона-Понтрягина с учётом (91) и подставив уже известную подынтегральную функцию и правые части системы уравнений

$$H = -\frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}} \frac{\mathbf{a}^2}{2} + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{w} + \mathbf{p}_w \cdot \left(-\frac{\mathbf{u}}{4} - \frac{\mathbf{u}^2}{4h} L^T \mathbf{a}\right) + (2p_h - \mathbf{p}_w \cdot \frac{\mathbf{w}}{h}) \mathbf{w} \cdot L^T \mathbf{a} + \\ + p_\tau \frac{1}{(-2h)^{3/2}} (\mu + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})h' + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \cdot L^T \mathbf{a}) - m\mathbf{u}_b \cdot L^T \mathbf{a} \quad (94)$$

Запишем вспомогательный вектор

$$\mathbf{\Lambda} = L \left(-\frac{\mathbf{u}^2}{4h} \mathbf{p}_w + \mathbf{w} (2p_h - \frac{1}{h} \mathbf{p}_w \cdot \mathbf{w}) + \right. \\ \left. + p_\tau \frac{1}{(-2h)^{3/2}} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + 8(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}) \right). \quad (95)$$

Теперь можно записать гамильтониан в более удобной форме

$$H = -\frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}} \frac{\mathbf{a}^2}{2} + \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{w} - \frac{\mathbf{p}_w \cdot \mathbf{u}}{4} + p_\tau \frac{\mu}{(-2h)^{3/2}} - m\mathbf{u}_b \cdot L^T \mathbf{a}. \quad (96)$$

Запишем уравнение Эйлера-Лагранжа, называемое условием стационарности

$$H_a = -\frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}} \mathbf{a} + \mathbf{\Lambda} - mL\mathbf{u}_b = 0. \quad (97)$$

Используя равенство (91), найдём значение

$$m = \frac{\mathbf{\Lambda}_4}{\mathbf{u}^2}. \quad (98)$$

Перейдём к новому вектору

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} - mL\mathbf{u}_b. \quad (99)$$

Фактически, это означает выполнение равенства $\Lambda_4=0$. Оптимальное управление будет выражаться в следующем виде

$$\mathbf{a} = \tilde{\Lambda} \frac{\sqrt{-2h}}{\mathbf{u}^2}. \quad (100)$$

Четвёртая координата реактивного ускорения всегда будет равна нулю $\mathbf{a}_4 = 0$. Кроме того, выпишем гамильтониан с подставленным оптимальным управлением

$$H^* = \frac{\sqrt{-2h}}{2\mathbf{u}^2} \tilde{\Lambda}^2 + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{w} - \frac{\mathbf{p}_w \cdot \mathbf{u}}{4} + p_\tau \frac{\mu}{(-2h)^{3/2}}. \quad (101)$$

Теперь найдём сопряжённые дифференциальные уравнения

$$\begin{cases} \mathbf{p}'_u &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{\sqrt{-2h}}{\mathbf{u}^2} \tilde{\Lambda}^2 \right) + \frac{\mathbf{p}_w}{4}, \\ \mathbf{p}'_w &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left(\frac{\sqrt{-2h}}{\mathbf{u}^2} \tilde{\Lambda}^2 \right) - \mathbf{p}_u, \\ p'_h &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\sqrt{-2h}}{\mathbf{u}^2} \tilde{\Lambda}^2 \right) - p_\tau \frac{3\mu}{(-2h)^{5/2}}, \\ \tau' &= 0. \end{cases} \quad (102)$$

В рамках понತ್ರэгинского формализма также требуется определить условия трансверсальности. Это можно сделать из следующего ограничения

$$\mathbf{p}(s_f) = \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x}(s_f))}{\partial \mathbf{x}(s_f)} \cdot \mathbf{C}, \quad (103)$$

где \mathbf{M} — терминальное множество, зависящее от вектора состояния $\mathbf{x}(s_f)$, а \mathbf{C} — это вектор произвольных постоянных.

В параметрических переменных вектор состояния выглядит как $\mathbf{x} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}, h, \tau\}$, однако, будем рассматривать только компоненты \mathbf{u} и \mathbf{w} , так как h введена для увеличения точности интегрирования, а производная p_τ

по фиктивному времени всегда равна нулю.

Теперь определим терминальное множество \mathbf{M} на правом конце. Выразим его как принадлежность $\mathbf{u}_f \in \hat{\mathbf{u}}(s_f), \mathbf{w}_f \in \hat{\mathbf{w}}(s_f)$ и равенство энергий h_f , которая является переменной при интегрировании, и $h(s_f)$ вычисляемой в конечный момент времени из положения и скорости. Это даст нам 7 уравнений в невырожденном случае:

$$\begin{cases} 0 = \mathbf{r}(s_f) - \tilde{L}(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}_f, \\ 0 = \mathbf{v}(s_f) - \frac{2\sqrt{-2h_f}\tilde{L}(\mathbf{u}_f)\mathbf{w}_f}{(\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f)}, \\ 0 = h(s_f) - h_f \end{cases} \quad (104)$$

где $\tilde{L}(\mathbf{u})$ — это первые три строки $L(\mathbf{u})$. Здесь стоит заметить, что билинейное соотношение для положения, которое в данном случае будет обозначать равенство четвёртой физической координаты нулю, исключено из рассмотрения, так же как и аналогичное выражение для скорости. Это сделано из-за высокой точности выполнения этих равенств на протяжении всей траектории. Таким образом, получим три уравнения для параметрического положения, три — для параметрической скорости и одно — для энергии.

Продифференцируем эти выражения по $\mathbf{x} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}, h\}$ и получим матрицу 7×9 . Тогда размерность \mathbf{C} будет равна 7, а это означает, что вектор $\mathbf{p}_{u,v}$ принадлежит семимерному линейному подпространству девятимерного пространства. Обозначим ортогонально дополнение этого пространства \mathbf{g}_{ort} . Найдём его как фундаментальное решение линейной системы

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x}(s_f))}{\partial \mathbf{x}(s_f)} \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (105)$$

Решением системы будет линейная оболочка двух девятимерных векторов:

$$\mathbf{M}_{ort}(\mathbf{u}_{sf}, \mathbf{w}_{sf}) = \begin{pmatrix} u_1 u_4 & u_2 u_4 \\ -u_1 u_3 & -u_2 u_3 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \\ -u_1^2 & -u_1 u_2 \\ u_1 v_4 - u_4 v_1 & u_2 v_4 - u_4 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 & u_3 v_2 - u_2 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 & 0 \\ 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (106)$$

Эти вычисления можно выполнить символично. Заметим, что девятые переменные, соответствующие энергии, равны нулю. То есть p_h может быть произвольным. Теперь запишем условия трансверсальности, не принимая p_h к рассмотрению

$$(\mathbf{p}_{u,w}(s_f) \cdot \mathbf{M}_{ort}^{u,w}(u_{sf}, w_{sf})) = 0. \quad (107)$$

Это даст оставшиеся два уравнения, которые должны будут выполняться, например, в задаче сопровождения.

В случае отсутствия ограничений скорости запишем условие только на параметрическое положение

$$(\mathbf{p}_u(s_f) \cdot \mathbf{M}_{ort}^u(u_{sf}, w_{sf})) = 0. \quad (108)$$

Это будет означать ортогональность \mathbf{p}_u в момент s_f четырёхмерному вектору

3.3. Постановка краевой задачи

Обозначим правую часть системы (89) как $f(s, \mathbf{x})$, где s — мнимое время, а $\mathbf{x} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}, h, \tau, \mathbf{p}_u, \mathbf{p}_w, p_h, p_\tau\}$

$$\mathbf{x}' = f(s, \mathbf{x}). \quad (109)$$

Траектория системы 89 очевидно зависит от начального состояния \mathbf{x}_0 и времени интегрирования s_f

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, s), s \in [0, s_f]. \quad (110)$$

С другой стороны, возможно фиксировать время перелёта t_f , в таком случае время интегрирования s_f станет функцией от него. В рамках численного моделирование это будет задачей с выходом на ограничение

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, s), s \in [0, s_f], s_f = s_f(t_f). \quad (111)$$

В настоящей работе будем фиксировать s_f , так как s — независимая переменная.

В точке $t = t_0$ мы можем получить $\mathbf{r}_0(t_0)$ и $\mathbf{w}_0(t_0)$ с помощью каких-либо вспомогательных средств, например, в эфемеридах. Если положить $\gamma_0 = 0$, то можно однозначно определить \mathbf{u}_0 , \mathbf{w}_0 и h_0 .

Определим \mathbf{u}_0 как точку на слое $\hat{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \gamma_0). \quad (112)$$

Тогда параметрическая скорость выражается как

$$\mathbf{w}_0 = \frac{L(\mathbf{u}_{t_0})^T \mathbf{w}_{t_0}}{2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})} \quad (113)$$

и энергия как

$$h_0 = -\frac{\mu}{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + 4(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{w}_0)}. \quad (114)$$

Также определим τ_0 как момент прохождения перигея в эксцентрической аномалии.

Дополнительно обозначим неизвестный вектор сопряжённых переменных $\mathbf{z} = (\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_w, p_h, p_\tau)$.

Так, определим начальную точку как функцию от начального времени и вектора сопряжённых переменных $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t_0, \mathbf{z})$. Конечная точка \mathbf{x}_f будет зависеть от момента мнимого времени s_f , а также от γ_f , то есть $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_0, \mathbf{z}, s_f, \gamma_f)$.

Теперь можно поставить двухточечную краевую задачу для системы 89 с граничными условиями $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(t_0, \mathbf{z}, \gamma_0)$ и $\mathbf{x}(s_f) = \mathbf{x}_f(t_0, \mathbf{z}, s_f, \gamma_f)$.

Решение такой задачи и подбор вектора параметров z осложнено выбором параметра γ_f , так как радиус-вектор \mathbf{r}_f не зависит от его значения, в отличие от \mathbf{x}_f .

3.4. Постановка задачи оптимизации

В рамках задачи оптимизации сначала рассмотрим физические переменные, а затем сравним их с параметрическими. Определим координату и скорость в конечный момент времени. Для этого рассмотрим обратную замену переменных

$$\mathbf{r}(s_f) = L(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}_f, \quad (115)$$

$$\mathbf{v}(s_f) = \frac{2\sqrt{-2h_f L}\mathbf{w}_f}{\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f}. \quad (116)$$

Физическое положение небесного тела обозначим \mathbf{r}_{sf} , которое так же можно определить в эфемеридах, зная физическое время $t_f = t_f(\tau_f(t_0, \mathbf{z}, s_f))$. Таким же образом определим скорость \mathbf{v}_{sf} . Обратим внимание, что $\mathbf{r}(s_f)$ и $\mathbf{w}(s_f)$ являются трёхмерными векторами.

Для задачи сопровождения определим следующую невязку

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(s_f) - \mathbf{r}_{sf} \\ \mathbf{w}(s_f) - \mathbf{w}_{sf} \\ h(s_f) - h_{sf} \\ (\mathbf{p}_{u,w}(s_f), \mathbf{M}_{ort}(u_{sf}, w_{sf})) \end{pmatrix}. \quad (117)$$

Теперь рассмотрим невязку в параметрических переменных. Необходимо иметь ввиду, что одной точке \mathbf{r}_f соответствует параметрическая кривая $\hat{\mathbf{u}}_f$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(s_f) - \mathbf{u}_{sf,\gamma_f} \\ \mathbf{w}(s_f) - \mathbf{w}_{sf,\gamma_f} \\ h(s_f) - h_{sf} \\ (\mathbf{p}_{u,w}(s_f), \mathbf{M}_{ort}(u_{sf}, w_{sf})) \end{pmatrix}, \quad (118)$$

где вектор $\mathbf{u}(s_f)$ получен в результате интегрирования. Так как γ_f является параметром оптимизации, то вместо точки на правом конце будет эллипс в четырёхмерном пространстве. Если s_f так же является параметром, будем называть получившуюся фигуру криволинейным цилиндром. Здесь, в выражении параметрической скорости \mathbf{w}_{sf,γ_f} присутствует параметр γ_f , так как она выражается через параметрическое положение.

В итоге, для любого рассматриваемого случая будем иметь девятимерный вектор невязки. Минимизируем каждую компоненту невязки в отдельности δ .

Невязка δ зависит от параметров t_0 , s_f , γ_f и начального вектора сопряжённых переменных \mathbf{z} , то есть $\delta = \delta(t_0, \mathbf{z}, s_f, \gamma_f)$. Зададим ограничения $\mathbf{z} \in [\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b]$ для сужения области поиска, а также возьмём начальное приближение $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Стоит заметить, что определение параметра s_f является ключевым в задаче. Например, возможно контролировать число витков n и прибли-

зительный угол дальности в эксцентрической аномалии E . В качестве хорошего приближения можно брать просто $s_f = n + E$. Стоит заметить, что это число не получится оценить точно, так как эксцентрическая аномалия E_f в конечный момент времени будет зависеть от траектории $E_f = E_f(\mathbf{x}(t_0, \mathbf{z}, s_f)) = E_f(t_0, \mathbf{z}, s_f)$.

Для упрощения сходимости можно расширять задачу до задачи со свободным концом.

$$s_f \in [s_a, s_b], \quad (119)$$

где интервал можно взять вида $s_{a,b} = n + E \pm C$. Константа C может быть выбрана в достаточно широких рамках, но лучше брать её значение $C \leq \frac{\pi}{2}$. Такую расширенную задачу можно использовать для нахождения начального приближения вблизи известной точки s_f , что даст более быстрый результат.

4. Сравнение методов

Теперь можно перейти к обсуждению численных результатов и особенностей реализации. В данной главе предполагается осветить сходимость и устойчивость метода и сравнить его с методом продолжения по параметру.

4.1. Параметры численных расчётов

Для получения численного результата использовался пакет прикладных программ MATLAB, для которого было разработано программное обеспечение. В настоящий момент все наработки можно найти по ссылке в репозитории GitHub¹. Вычисления проводились на ноутбуке модели OMEN HP Laptop 15-dh0003ur. Выражения для правой части, а также частные производные были найдены символьно, а затем оптимизированы пакетом MATLAB. Для решения оптимизационной задачи был выбран метод `fmincon`, который задействовал метод внутренней точки. В рамках этого метода использовалось распараллеливание на 6 процессоров. При этом допуск точности оптимальности равен $1E-10$, максимальное число вызовов функции равно $1E+10$, допуск точности шага $1E-10$, допуск ограничений типа равенства равен $1E-12$, максимальное число шагов оптимизатора 250. Кроме того, дополнительно введено ограничение $\tau' \geq 0$.

Для нахождения значений положений и скоростей планет в начальный и конечный момент времени, использовалась эфемеридная модель DE430. В данном случае производился перелёт Земля-Марс. Начальный момент времени выбран как полночь 1-го января 2022 года.

Для получения решения фиксировалось время интегрирования s_f , так как s является независимой переменной. Это избавляет от необходимости контролировать значение гамильтониана. При этом поиск решения произ-

¹<https://github.com/KirillRnd/nir>

водился в 2 этапа. Стоит заметить, что переменные были обезразмерены, а после нахождения решения размерность восстанавливалась. Кроме того, для вектора \mathbf{z} задавались достаточно широкие рамки $|\mathbf{z}_i| < 1\text{E}+13$. Заметим, что значения \mathbf{z}_i также подвергались модификации, путём домножения на гиперпараметр C_p . Здесь и далее под гиперпараметрами будем иметь ввиду некоторые параметры настройки метода, выбираемые исследователем, например, точность интегрирования.

Рассмотрим задачу сопровождения. На первом этапе использовалась невязка в параметрических переменных (118), исключая условия трансверсальности. При этом в оптимизируемые параметры добавляются γ_f для контроля угла поворота в четырёхмерном пространстве и $\in [s_a, s_b]$ для упрощения работы оптимизатора. Обращаем внимание, что такая постановка не соответствует принципу максимума Понтрягина, однако, позволяет быстро сойтись к близкому решению из нулевого приближения $\mathbf{z}_i = 0$. На второй стадии использовалась невязка (117). Здесь значения вектора \mathbf{z} из первого этапа используются в качестве начального приближения. Из оптимизируемых параметров исключаются γ_f и s_f , и остаётся только вектор \mathbf{z} . Такая постановка уже соответствует принципу максимума. В обоих случаях невязка домножалась на гиперпараметр C_δ . Помимо этого, точность интегрирования контролировалась третьим гиперпараметром C_i . Значения всех 3 гиперпараметров и их влияние рассмотрим позднее.

После получения оптимального решения находится $t(s_f)$ и используется модифицированный метод продолжения в физических координатах для нахождения некоторого эталонного решения. Затем обе траектории сравниваются с точки зрения затраченной массы и расстояния между траекториями, которое оценивается по формуле

$$d = \max_{r_0 \in x_0} (\min_{r_1 \in x_1} \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1\|), \quad (120)$$

где под \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_1 подразумеваются траектории КА, полученные двумя разными методами.

В рамках численной проверки были выбраны точки $s_f = k \cdot \pi/2$, где $k = \overline{1, 20}$. То есть рассматривались точки от половины витка до пяти витков. Для первого этапа $s_{a,b} = s_f \pm \pi/4$, и следующие значения гиперпараметров $C_p = 1E-06$, $C_\delta = 1E+10$ для обоих этапов, кроме того, на каждом из них использовалось $C_i = 1E-16$.

Были выбраны следующие параметры моделирования, связанные с КА. Начальная масса $m_0 = 367$ кг, максимальная мощность $N = 1350$ Вт, КПД двигательной установки равное $\eta = 0.45$, которые соответствуют аппарату SMART-1 и двигателю СПД-100в.

На рис. 1 представлены все решения в координатах фиктивное время — затраты топлива, а справа от него рис. 2 представлен парето-фронт для полученных решений. По оси x число витков в фиктивном времени, а по оси y значение затраченной массы в килограммах. Кругами (O) обозначены решения, полученные методом внутренней точки, а крестиками (+) решения, полученные методом продолжения. Среднее значение разницы в затратах — 38 кг, со среднеквадратичным отклонением $\sigma = 79$ кг.

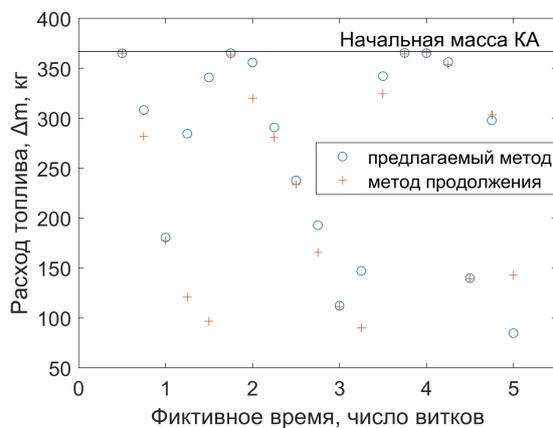


Рисунок 1 – Полученные решения в координатах «фиктивное время — затраты топлива».

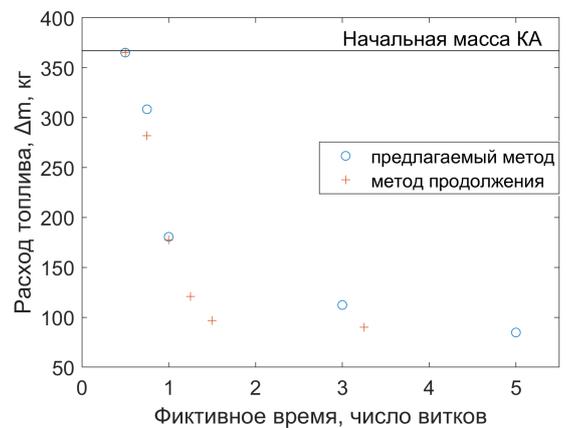


Рисунок 2 – Парето-фронт в координатах «фиктивное время — затраты топлива».

Стоит упомянуть средние значения для разницы траекторий. Это 0.08 астрономических единицы с $\sigma = 0.0983$ а.е., то есть траектории достаточно близки. В качестве примера рассмотрим один виток ($s_f = 2\pi$) с максимальной разницей траекторий в 0.006 а.е. На рис. 3 изображены две траектории, полученные сравниваемыми методами и масштабированные вектора ускорения на протяжении траектории. Для лучшего понимания внешнего вида траектории в KS-координатах на рис. 4 представлен тот же самый перелёт. На рисунке отсутствует четвёртая параметрическая координата, но тем не менее видно влияние угла γ . Орбита Земли рассчитана с $\gamma = 0$, поэтому полностью видна в трёхмерном представлении. Орбита Марса в данном случае отображена так, чтобы совпадал угол γ для изображаемой орбиты и $\gamma(\mathbf{u}_f)$ для конца траектории. Ниже, на рис. 5 можно увидеть величину ускорения, а на рис. 6 нелинейность мнимого времени относительно физического.

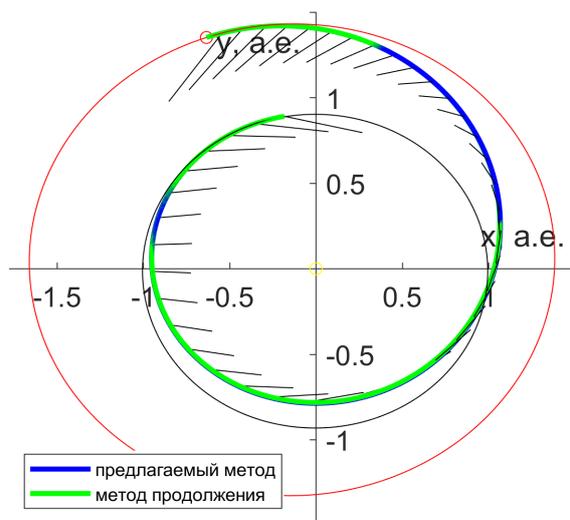


Рисунок 3 – Траектории из предлагаемого метода и метода продолжения. Перелёт Земля-Марс.

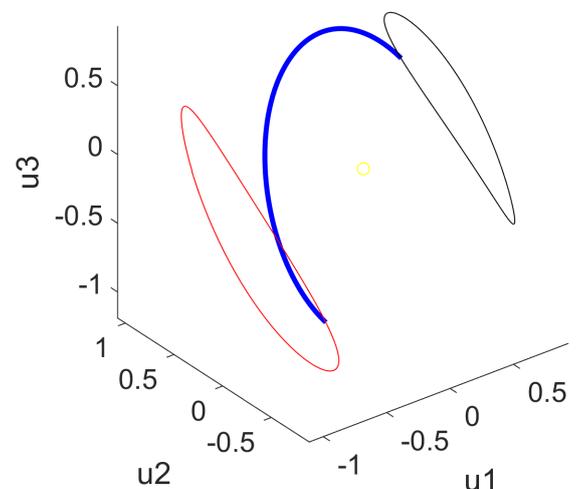


Рисунок 4 – Траектория перелёта Земля-Марс в первых трёх параметрических координатах.

4.2. Сходимость и гиперпараметры

В приведённом выше примере алгоритм сошёлся в 94.7% случаев, в то время как у метода продолжения по параметру сходимость 100%.

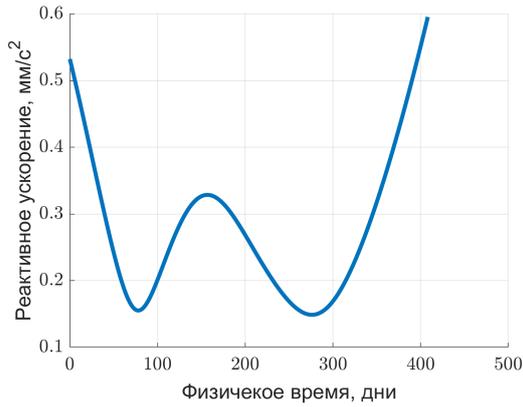


Рисунок 5 – Величина реактивного ускорения в шкале физического времени.

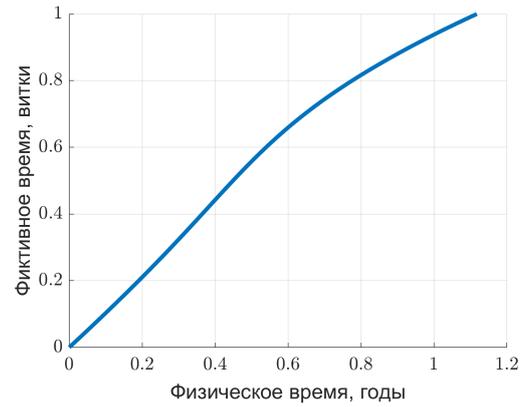


Рисунок 6 – Относительная нелинейность фиктивного и физического времени.

Важно, что область сходимости предложенного метода в значительной степени обусловлена гиперпараметрами. В каждом отдельно взятом случае их возможно подобрать таким образом, чтобы алгоритм сошёлся, в то время как в примере выше гиперпараметры были зафиксированы.

Теперь перейдём непосредственно к смыслу гиперпараметров. Множитель невязки C_δ позволяет избежать слишком малых её значений, которые могут достигать машинного нуля, что приводит к ранней остановке оптимизации. После нескольких запусков было выбрано значение $1E+10$.

Точность интегрирования значительно влияет на первый этап поиска решения и в меньшей степени на второй. При необходимости её можно уменьшать до $1E-10$ на первом этапе, и это повлияет лишь на близость начального приближения второй стадии к оптимальному.

Третий гиперпараметр — множитель начальных значений сопряжённых переменных, он является самым чувствительным. Меньшие его значения будут неявным образом уменьшать шаг оптимизатора, но увеличивать время сходимости. В идеальном случае он должен быть таким, чтобы в обезразмеренных величинах значения \mathbf{z} были близки к единице. Поиск его значения порождает отдельную оптимизационную задачу, поэтому было выбрано значение $1E-06$ в качестве компромисса между скоростью сходи-

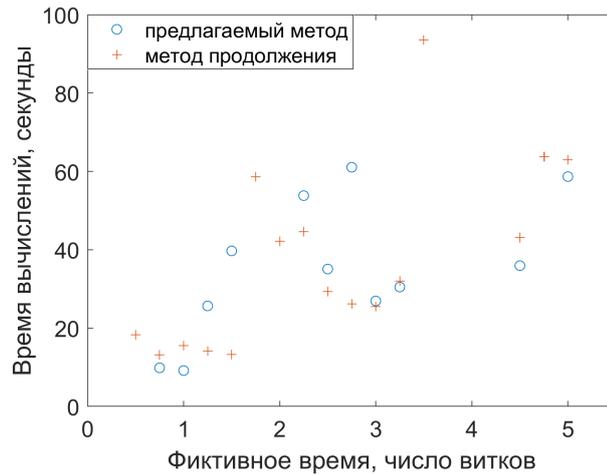


Рисунок 7 – Время на вычисление одного решения.

мости и величиной шага. Эмпирически замечено, что меньшие значения отвечают более близкой к методу продолжения траектории.

Объяснив выбранные гиперпараметры, можно переходить к скорости сходимости. Мы подразумеваем здесь физическое время поиска решения.

На рис. 7 представлено время поиска решений. По оси x число витков, а по оси y время поиска. Кругами (O) обозначены решения, полученные методом внутренней точки, а крестиками (+) решения, полученные методом продолжения. Среднее время вычислений практически одинаково: оно составляет 37 секунд для метода продолжения и 35 секунд — для метода внутренней точки.

4.3. Устойчивость траекторий

Для оценки устойчивости решения сначала найдём матрицу чувствительности

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_0} \right|_{s_f}. \quad (121)$$

Для этого символично получим уравнения в вариациях, потом проинтегрируем совместно с уравнениями движения в KS-координатах и в конечной точке получим необходимую матрицу A . Сравним её с матрицей чувствительности метода продолжения (32) путём сопоставления чисел обусловленности.

Для квадратных матриц число обусловленности будет равно

$$\mathit{cond}(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2, \quad (122)$$

однако для избежания обращения матрицы используется отношение максимального сингулярного числа к минимальному. Эти числа в среде MATLAB находятся с помощью сингулярного разложения.

Для приведенной выше серии экспериментов среднее значение чисел обусловленности для метода продолжения — $2.9\text{E}+16$, а для метода внутренней точки — $6.4\text{E}+08$, что означает лучшую обусловленность матрицы чувствительности.

Заключение

Реализованный метод засчёт перехода к регулярным переменным позволяет осуществлять поиск оптимальных траекторий стандартными методами MATLAB благодаря низким числам обусловленности, что может упростить начальный этап работ по оптимизации траекторий. Низкие числа обусловленности означают меньшую невязку на правом конце при наличии численных ошибок во время интегрирования. Среди преимуществ предложенного метода стоит назвать простой контроль числа витков, не связанный с физическим временем. Это позволяет быстро получить начальное приближение для многовитковой траектории, которое можно в дальнейшем дорабатывать методами пристрелки.

Сравнительно с методом продолжения по параметру, в котором находится решение задачи Коши, стоит отметить возможность распараллеливания оптимизационной задачи, а именно метода внутренней точки. За счёт этого возможно уменьшить время поиска оптимальной траектории.

Для выбранного квадратичного функционала использование регулярных переменных показывает близкие к эталонным значения затрат массы. При условии учёта физичности траекторий вследствие выполнения смешанных ограничений некоторое несовпадение во всех случаях объясняется неудачным выбором гиперпараметров. При должном внимании к ним и переборе возможных значений в разумных пределах возможно найти оптимальную траекторию для любого выбранного конечного фиктивного времени.

В дальнейшем планируется проверить работоспособность метода на других функционалах, например функционале быстрогодействия, перейти к возмущённой задаче двух тел, а также устранить существующие проблемы со сходимостью. Предполагается, что на других функционалах уменьшение чисел обусловленности будет более значительным.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Улыбышев Ю.П. Обзор методов оптимизации траекторий космических аппаратов с использованием дискретных множеств псевдоимпульсов // Космическая техника и технологии. 2016. Т. 15, № 4. С. 67–79.
- [2] Gergaud, J., Haberkorn, T. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2006. Vol. 12, No. 2. pp. 294–310.
- [3] Haberkorn, T., Martinon, P., Gergaud, J. Low thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2004. Vol. 27, No. 6. pp. 1046–1060.
- [4] Mingotti, G., Topputo, F., Bernelli-Zazzera, F. A method to design sun-perturbed earth-to-moon low-thrust transfers with ballistic capture // XIX A.I.D.A.A. Congress Proceedings. Forli, Italy: 2007.
- [5] Petukhov, V.G. Optimization of multi-orbit transfers between noncoplanar elliptic orbits // Cosmic Research. 2004. Vol. 42, No. 3. pp. 250–268.
- [6] Петухов В.Г. Робастное квазиоптимальное управление с обратной связью для перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17, № 3. С. 50–58.
- [7] Petukhov, V.G. Optimization of interplanetary trajectories for spacecraft with ideally regulated engines using the continuation method // Cosmic Research. 2008. Vol. 46, No. 3. pp. 219–232.
- [8] Petukhov, V.G. Optimal multi-orbit trajectories for inserting a low-thrust spacecraft to a high elliptic orbit // Cosmic Research. 2009. Vol. 47, No. 3. pp. 243–250.

- [9] Petukhov, V.G. Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories // *Cosmic Research*. 2012. Vol. 50, No. 3. pp. 249–261.
- [10] Perez-Palau, D., Epenoy, R. Fuel optimization for low-thrust Earth–Moon transfer via indirect optimal control // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2018. Vol. 130, No. 2. pp. 21.
- [11] Pan, B., Lu, P., Pan, X. et al. Double-homotopy method for solving optimal control problems // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2016. Vol. 39, No. 8. pp. 1706–1720.
- [12] Pan, B., Pan, X., Zhang, S. A new probability-one homotopy method for solving minimum-time low-thrust orbital transfer problems // *Astrophysics and Space Science*. 2018. Vol. 363, No. 9. pp. 1–12.
- [13] Jiang, F., Baoyin, H., Li, J. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2012. Vol. 35, No. 1. pp. 245–258.
- [14] Zhang, C., Topputo, F., Bernelli-Zazzera, F. et al. Low-thrust minimum-fuel optimization in the circular restricted three-body problem // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2015. Vol. 38, No. 8. pp. 1501–1510.
- [15] Григорьев И.С., Заплетин М.П., Самохин А.С. [и др.]. Оптимизация экспедиции к Фобосу с комбинированной тягой с возвращением к Земле // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2017. № 7(67). С. 1–24.
- [16] Lee, S., von Ailmen, P., Fink, W. and Petropoulos A. F. et al. Design and optimization of low-thrust orbit transfers // *2005 IEEE Aerospace Conference*. IEEE, 2005. pp. 855–869.

- [17] Taheri, E., Kolmanovsky, I., Atkins, E. Enhanced smoothing technique for indirect optimization of minimum-fuel low-thrust trajectories // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2016. Vol. 39, No. 11. pp. 2500–2511.
- [18] Taheri, E., Junkins, J.L. Generic smoothing for optimal bang-off-bang spacecraft maneuvers // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2018. Vol. 41, No. 11. pp. 2470–2475.
- [19] Taheri, E., Junkins, J.L., Kolmanovsky, I. et al. A novel approach for optimal trajectory design with multiple operation modes of propulsion system, part 1 // Acta Astronautica. 2020. Vol. 172. pp. 151–165.
- [20] Taheri, E., Junkins, J.L., Kolmanovsky, I. et al. A novel approach for optimal trajectory design with multiple operation modes of propulsion system, part 2 // Acta Astronautica. 2020. Jul.. Vol. 172. pp. 166–179.
- [21] Junkins, J.L., Taheri, E. Exploration of alternative state vector choices for low-thrust trajectory optimization // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2019. Vol. 42, No. 1. pp. 47–64.
- [22] Geffroy, S., Epenoy, R. Optimal low-thrust transfers with constraints—generalization of averaging techniques // Acta Astronautica. 1997. Vol. 41, No. 3. pp. 133–149.
- [23] Petukhov, V.G. A new approach to low-thrust perturbed trajectory optimization based on the use of complex dual numbers // Proceedings of 71st International Astronautical Congress(IAC) – The CyberSpace Edition, 12-14 October 2020. 2020.
- [24] Sundman, K.F. Memoire sur le probleme des trois corps // Acta Mathematica. 1913. Vol. 36. pp. 105–179.

- [25] Nacozy, Paul E. Time elements in Keplerian orbital elements // *Celestial Mechanics*. 1981. Vol. 23, No. 2. pp. 173–198.
- [26] Brumberg, E. V. Length of arc as independent argument for highly eccentric orbits // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1992. Vol. 53. pp. 323–328.
- [27] Stiefel, E.L., Scheifele, G. *Linear and Regular Celestial Mechanics*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften No. 174. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1971.
- [28] Shefer, V.A. Linearization and Regularization of Equations of Keplerian Motion Using Integrals // *Soviet Astronomy*. 1991. Vol. 35, No. 1.
- [29] Levi-Civita, T. Sur la regularisation du probleme des trois corps // *Acta Mathematica*. 1920. Vol. 42. pp. 99–144.
- [30] Иванов Д.С., Трофимов С.П., Ширококов М.Г. Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов. Москва: под ред. М.Ю. Овчинникова / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2016.
- [31] Jezewski, Donald J. A comparative study of Newtonian, Kustaanheimo/Stiefel, and Sperling/Burdet optimal trajectories // *Celestial Mechanics*. 1975. Vol. 12, No. 3. pp. 297–315.
- [32] Иванюхин А.В. Оптимизация траектории космического аппарата с идеально регулируемым двигателем в переменных Кустаанхеймо-Штифеля // *Труды МАИ*. 2014. № 75. С. 1–16.
- [33] Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Построение оптимальных управлений и траекторий движения центра масс космического аппарата, снабженного солнечным парусом и двигателем малой тяги, с

использованием кватернионов и переменных Кустаанхеймо–Штифеля // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 6. С. 489–489.

- [34] Petropoulos, A., Russell, R. Low-Thrust Transfers Using Primer Vector Theory and a Second-Order Penalty Method // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences. Honolulu, Hawaii: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.
- [35] Oberle, H.J., Taubert, K. Existence and multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfer problem // Journal of Optimization Theory and Applications. 1997. Vol. 95, No. 2. pp. 243–262.
- [36] Prussing, J.E., Sandrik, S.L. Second-order necessary conditions and sufficient conditions applied to continuous-thrust trajectories // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2005. Vol. 28, No. 4. pp. 812–816.
- [37] Roa, J. Regularization in Orbital Mechanics. Berlin, Boston: De Gruyter, 2017.
- [38] Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. Центр прикладных исследований мехмата МГУ Москва, 2004. 168 с.