Оптимизация траекторий КА с малой тягой в регулярных переменных

Корнеев Кирилл Романович, гр. М05-902в, МФТИ

Научный руководитель:

Трофимов С.П., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Цели и задачи

Цель работы:

- Исследовать эффективность использования регуляризованных уравнений движения в задаче поиска оптимальной траектории КА с малой тягой

На примере перелёта Земля-Марс решены следующие задачи:

- Получена расширенная система уравнений движения и уравнений в вариациях в переменных Кустаанхеймо-Штифеля (KS), записаны выражения для терминальных многообразий в KS-пространстве
- Краевая задача принципа максимума сведена к оптимизационной, разработана двухэтапная процедура её решения стандартными методами оптимизации
- Проведено сравнение предложенного подхода с методом продолжения по параметру по критериям быстродействия и вычислительной устойчивости

Постановка задачи оптимального управления

- Перелёт между двумя орбитами в центральном гравитационном поле Солнца
- Не учитывается притяжение планет
- КА оснащен двигателем малой тяги с ограниченной мощностью

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\dfrac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a} \end{cases} \qquad \min \Delta m\left(t_f\right) \Leftrightarrow \min J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{a}^2 dt$$

a – реактивное ускорение

- Нужно найти управление **a**(t), минимизирующее затраты топлива при условии ограниченности мощности ДУ и обеспечивающее выполнение граничных условий.

Существующие подходы

Прямые методы – сведение бесконечномерной задачи к конечномерной с помощью дискретизации:

- Метод псевдоимпульсов (Ю.П. Улыбышев)
- Sims-Flanagan and FBLT (J. Sims, S. Flanagan)

Непрямые методы – методы решения краевых задач, получающихся при использовании необходимых условий оптимальности:

- Метод продолжения по параметру (В.Н. Петухов, R. Epenoy, B. Pan)
- Метод пристрелки и параллельной пристрелки (N. Parrish)

Проблема выбора переменных:

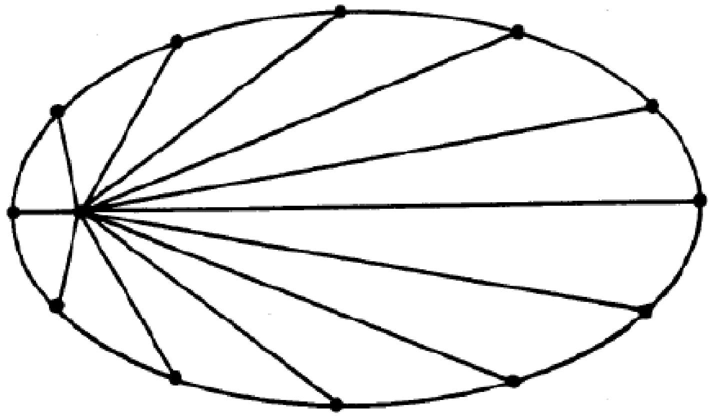
- Использование другого набора переменных состояния: оскулирующие элементы, равноденственные элементы, гибридные параметры (E. Taheri, J. Junkins)
- Использование переменных Кустаанхеймо-Штифеля (А.В. Иванюхин)

Предложенный метод

- Регуляризация уравнений движения
- Принцип максимума Понтрягина
- Решение краевой задачи сведением её к оптимизационной
- Регулярная процедура нахождения начального приближения для оптимизационной задачи

Регуляризирующие преобразования

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}$$



Распределение точек орбиты равномерно по эксцентрической аномалии

Преобразование Сундмана

$$dt = \frac{r}{\sqrt{-2h}}ds$$ *s* – фиктивное время

Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля (KS)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = L(u)u$$

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = 0 \longrightarrow \mathbf{u}'' + \frac{\mathbf{u}}{4} = 0$$

Вспомогательное преобразование

$$\hat{\mathbf{u}} = \left\{\mathbf{u} : L(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{r}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Система дифференциальных уравнений

Физические координаты

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\dfrac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a} \end{cases}$$

$\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})^T$ – 6-мерный

Параметрические координаты

$$\begin{cases} \mathbf{u}' &= \mathbf{w}, \\ \mathbf{w}' &= -\dfrac{\mathbf{u}}{4} - \dfrac{\mathbf{u}^2}{4h} L^T \mathbf{a} - \dfrac{h'}{2h}\mathbf{w}, \\ h' &= 2\mathbf{w} \cdot L^T \mathbf{a}, \\ \tau' &= \dfrac{1}{(-2h)^{3/2}} \left(\mu + 4(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})h' + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}\cdot L^T\mathbf{a}\right). \end{cases}$$

$\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{w}, h, \tau)^T$ – 10-мерный

Временная компонента

$$\tau = t_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} E$$

Энергия

$$h = -\frac{\mu}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 4(\mathbf{w}\cdot\mathbf{w})}$$

Функция Гамильтона-Понтрягина

Физические координаты | Параметрические координаты

Функционал

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{a}^2(t)dt$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s_f} \mathbf{a}^2(s)\frac{\mathbf{u}^2(s)}{\sqrt{-2h(s)}}ds$$

$$\mathbf{u}_b \cdot L^T\mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_4 = 0$$ Смешанное ограничение

Функция Гамильтона-Понтрягина

$$H = -\frac{\mathbf{a}^2}{2} + \mathbf{p}_r\mathbf{v} + \mathbf{p}_v\left(-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}\right)$$

$$H = -\frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}}\frac{\mathbf{a}^2}{2} + \mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{p}_u\cdot\mathbf{w} - \frac{\mathbf{p}_w\cdot\mathbf{u}}{4} + p_\tau\frac{\mu}{(-2h)^{3/2}} - m\mathbf{u}_b\cdot L^T\mathbf{a}.$$

Оптимальное управление

Физические координаты

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v$$

Параметрические координаты

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \frac{\sqrt{-2h}}{\mathbf{u}^2}$$

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} - mL\mathbf{u}_b, m = \frac{\mathbf{\Lambda}_4}{\mathbf{u}^2}$$

Вспомогательный вектор

$$\mathbf{\Lambda} = L\left(-\frac{\mathbf{u}^2}{4h}\mathbf{p}_w + \mathbf{w}(2\mathrm{p}_h - \frac{1}{h}\mathbf{p}_w \cdot \mathbf{w}) + \mathrm{p}_\tau \frac{1}{(-2h)^{3/2}}\left((\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} + 8(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{w}\right)\right)$$

Краевая задача принципа максимума

Физические координаты

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_{tf} \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_{tf} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{z} = \left\{\mathbf{p}_{r0}, \mathbf{p}_{v0}\right\}$

Параметрические координаты

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(s_f) - \tilde{L}(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}_f \\ \mathbf{v}(s_f) - \dfrac{2\sqrt{-2h_f}\tilde{L}(\mathbf{u}_f)\mathbf{w}_f}{(\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f)} \\ h(s_f) - h_f \end{pmatrix}$$

$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{z} = \left\{\mathbf{p}_{u0}, \mathbf{p}_{w0}, p_{h0}, p_{\tau 0}\right\}$

Условия трансверсальности

$$\mathbf{p}(s_f) = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{p}(s_f) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(s_f))}{\partial \mathbf{x}(s_f)} \cdot \mathbf{C}$$

Процедура поиска начального приближения

Чтобы найти начальное приближение для $\mathbf{z}$, решаем вспомогательную краевую задачу, сводя её к оптимизационной:

Функционал $J \equiv 1$

Ограничение типа равенства

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(s_f) - \mathbf{u}_{sf,\gamma f} \\ \mathbf{w}(s_f) - \mathbf{w}_{sf,\gamma f} \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{u}(s_f) \in \hat{\mathbf{u}}_{sf} \\ \mathbf{w}(s_f) \in \hat{\mathbf{w}}_{sf} \end{cases}$$

Параметризация через угол γ

$$\hat{\mathbf{u}} = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{r}, \gamma), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \gamma \in [0, 2\pi] \right\}$$

Оптимизируемые переменные $\mathbf{z}, \gamma_f, s_{f0}$

Интервальные ограничения

$$\gamma_f \in [0, 2\pi] \quad s_{f0} \in \left[s_f - \Delta, s_f + \Delta \right] \qquad |z_i| \le 10^{13}$$

Решение задачи с граничными условиями

Функционал $J \equiv 1$

Ограничение типа равенства

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}(s_f) - \tilde{L}(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}_f, \\ \mathbf{v}(s_f) - \dfrac{2\sqrt{-2h_f}\tilde{L}(\mathbf{u}_f)\mathbf{w}_f}{(\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f)} \\ h(s_f) - h_f \\ \mathbf{p}_{u,w,h} \cdot \mathbf{f}_{ort}(\mathbf{u}_s f, \mathbf{w}_s f) \end{pmatrix} = 0 \qquad \mathbf{f}_{ort}(\mathbf{u}_{sf}, \mathbf{w}_{sf}) = \begin{pmatrix} u_1u_4 & u_2u_4 \\ -u_1u_3 & -u_2u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 \\ -u_1^2 & -u_1u_2 \\ u_1v_4 - u_4v_1 & u_2v_4 - u_4v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 & u_3v_2 - u_2v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 & 0 \\ 0 & u_1v_2 - u_2v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

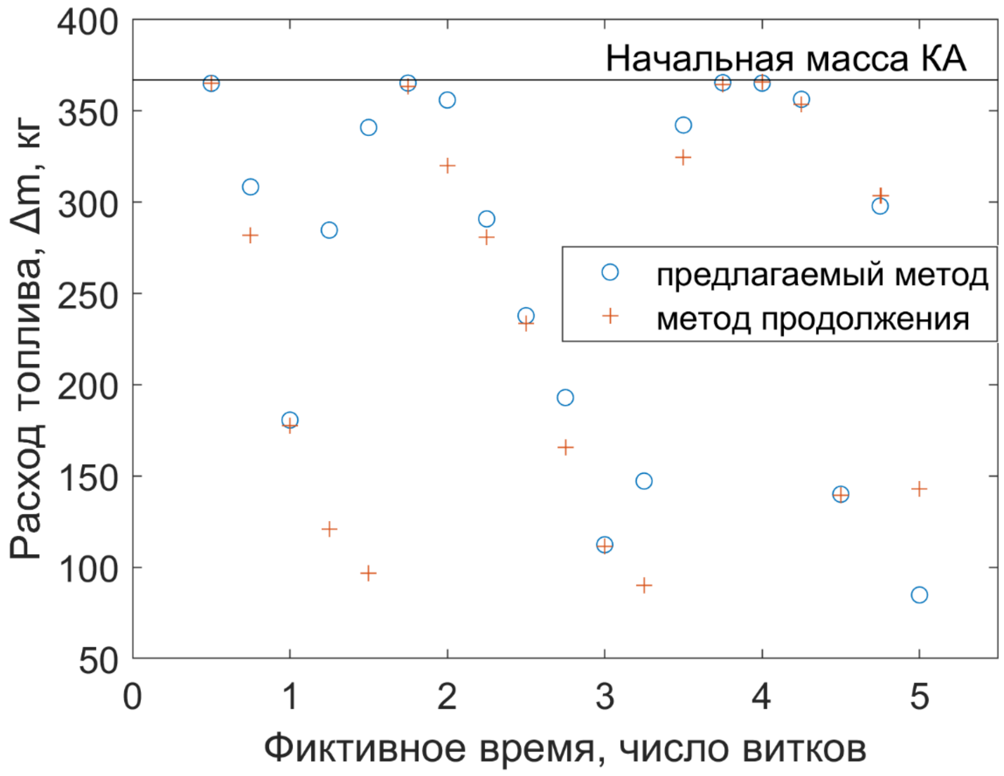
Оптимизируемые переменные $\mathbf{z}$

Интервальные ограничения $|z_i| \leq 10^{13}$

Численные результаты

Расчёты проводились в MATLAB

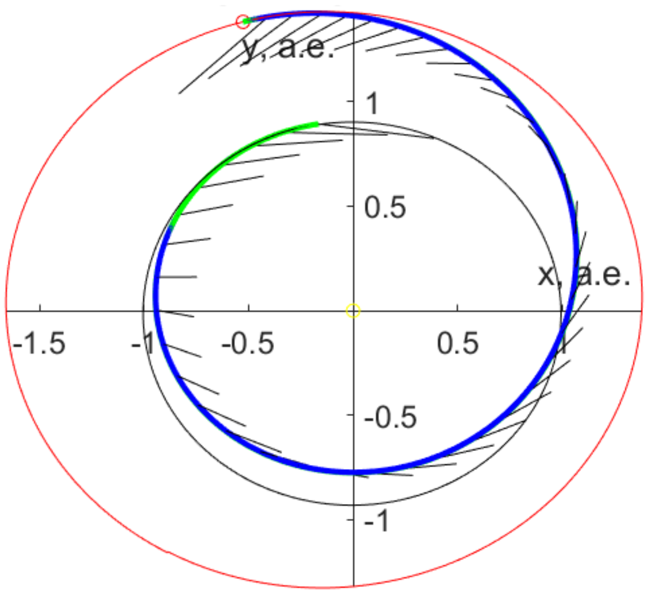
- Перелёт Земля-Марс
- Оптимизационная задача решалась методом внутренней точки (функция fmincon)
- Положения Земли и Марса брались из эфемерид DE430
- Двигатель СПД-100В (тяга 83 мН, удельный импульс 1600 с)
- Начальная масса 367 кг
- Дата старта 01.01.2022



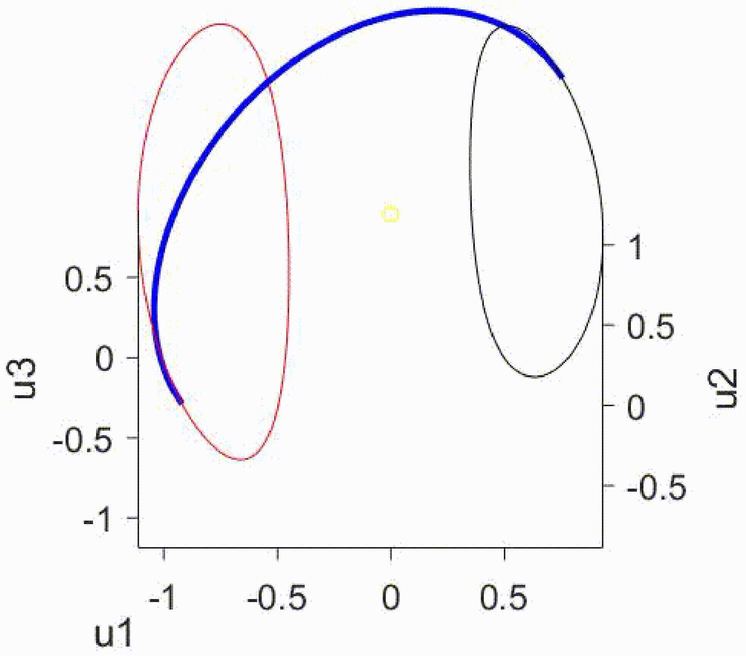
Полученные решения в координатах фиктивное время – затраты топлива

Пример работы

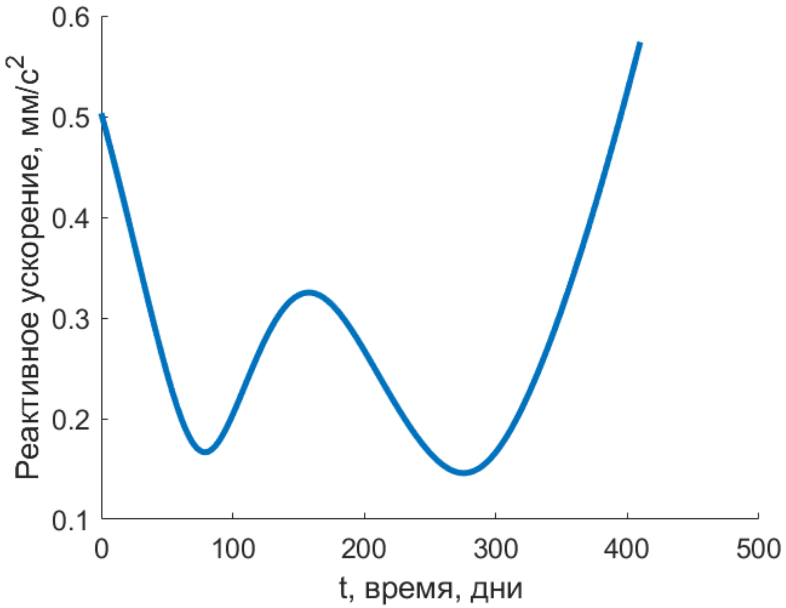
Физические координаты



Параметрические координаты



Величина ускорения



Максимальная разница в координатах 9.77E-03 а.е.
Расход массы в KS-координатах 175.9784 кг
Расход массы методом продолжения 176.1048 кг
Терминальная невязка по координате 2.26E-01 м
Терминальная невязка по скорости 2.71E-08 м/с
Число обусловленности в KS-переменных 6.52E+05
Число обусловленности в методе продолжения 3.52E+15

Время интегрирования

$$s_f = 2\pi$$

$$\gamma(s_f) = 3.620$$

Устойчивость и быстродействие

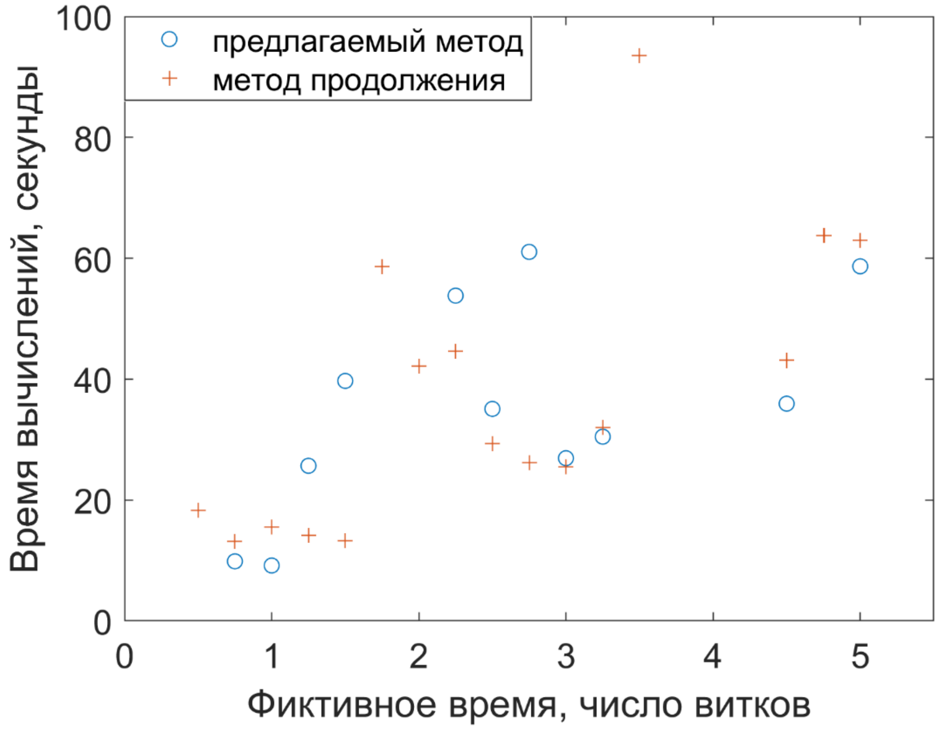
Матрица чувствительности находится интегрированием уравнений в вариациях

$$A = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_0}\right|_{S_f}$$

Числа обусловленности

$$cond = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$$

	Предлагаемый метод	Метод продолжения
Число обусловленности	6.4E+08	2.9E+16
Быстродействие	35 с	37 с



Сравнение быстродействия

Выводы

- Реализована процедура поиска оптимальной траектории в параметрических координатах
- Произведено сравнение с методом продолжения по параметру для краевой задачи в физических координатах. При сопоставимой скорости вычислений числа обусловленности значительно лучше
- Используется стандартная реализация метода внутренней точки (matlab-функция fmincon, опция ‘interior point’)
- Проводится исследование предложенного подхода в применении к задаче оптимального быстродействия

Публикации и доклады

Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Использование регулярных переменных в задаче оптимизации траектории КА с малой тягой // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021 (готовится к публикации)

К.Р. Корнеев, С.П. Трофимов. Построение оптимальной траектории КА с использованием регуляризованных уравнений движения // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ, Москва-Долгопрудный-Жуковский, 23-29 ноября 2020 г. Секция динамики и управления движением космических аппаратов. Прикладная математика и информатика. М.: МФТИ, 2020. С. 63-65.

Исследование поддержано грантом РНФ 19-11-00256 «Динамика и навигация космических аппаратов в сложных гравитационных полях»

Исходный код можно найти по ссылке https://github.com/KirillRnd/nir

Метод продолжения по параметру

$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{z} = \{\mathbf{p}_{r0}, \mathbf{p}_{V0}\}$

$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b},$ – вектор невязок

$\mathbf{z}_0$ – начальное приближение

Погружаем краевую задачу в однопараметрическое семейство задач:

$\mathbf{f}(\mathbf{z}(\tau)) = (1-\tau)\mathbf{b}$

Решение задачи при $\tau = 0$ – это $z = z_0$,
а решение при $\tau = 1$ – это искомое решение

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \mathbf{b} \\ &\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \end{aligned}\right\}$$ – задача Коши метода продолжения

Принцип максимума Понтрягина

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})$ – система ДУ

$J = \int_{t_0}^{t_f} \phi(\mathbf{a}) dt$ – интегральный функционал

$H = -\phi(\mathbf{a}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{f}$ – функция Гамильтона-Понтрягина

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\dfrac{\partial H(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases}$$

– ДУ для сопряжённых переменных

$$H_{opt}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \underset{a}{\mathrm{argmax}} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{a})$$

Оптимизация тяги с ограниченной мощностью

Двигатель малой тяги – двигатель с низкой тяговооруженностью $\dfrac{\mathbf{a}}{g} \le 10^{-4}$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_e}{m(t)} = \frac{\dot{m}u}{m(t)}\mathbf{e}, \quad \frac{\dot{m}u^2}{2} \le \eta N_{\max}$$ мощность двигателя ограничена сверху

$$\frac{1}{m_0 - m} - \frac{1}{m_0} = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathbf{a}^2(\tau)}{2\eta N} d\tau \ge \int_{t_0}^{t} \frac{\mathbf{a}^2(\tau)}{2\eta N_{\max}} d\tau$$

При $\eta = \text{const}$ $N_{\max} = \text{const}$ $\quad \min \Delta m\left(t_f\right) \Leftrightarrow \min J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{a}^2 dt$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0 \quad & \mathbf{r}(t_f) &= \mathbf{r}_f \\ \mathbf{V}(t_0) &= \mathbf{V}_0 \quad & \mathbf{V}(t_f) &= \mathbf{V}_f \end{aligned}$$ – задача сопровождения (встречи)