

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

## **Исследование алгоритмов управления движением группы спутников с помощью аэродинамической силы**

Выпускная квалификационная работа  
(магистерская диссертация)

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладная математика и физика  
Магистерская программа: Управление динамическими системами

Выполнил:

Студент 172 группы \_\_\_\_\_ Кушнирук Максим Сергеевич

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_ Иванов Данил Сергеевич

г. Москва

2017 г.

## Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Алгоритмы управления движением группы спутников для предотвращения столкновений.....	4
1.1 Принятые модели .....	6
<i>Уравнения движения</i> .....	6
<i>Модель аэродинамической силы</i> .....	8
<i>Радиус запрещенной зоны</i> .....	10
1.2 Алгоритмы управления.....	12
<i>Управление по линейному закону</i> .....	13
<i>Оптимальное управление</i> .....	14
1.3 Исследование алгоритмов управления .....	18
<i>Параметры численного моделирования</i> .....	19
<i>Управление по линейному закону</i> .....	20
<i>Оптимальное управление с фиксированными концами</i> .....	22
<i>Зависимость управления от момента начала управления</i> .....	23
Заключение к главе 1 .....	25
Глава 2. Исследование алгоритма управления движением группы спутников с помощью аэродинамической силы.....	26
2.1 Модель аэродинамической силы .....	27
2.2 Алгоритм управления .....	31
<i>Линейно-квадратический регулятор</i> .....	32
<i>Вычисление ориентации спутников при заданном управлении</i> .....	32
2.3 Исследование алгоритма .....	35
<i>Методика исследования алгоритмов</i> .....	35
<i>Задание параметров системы</i> .....	37
<i>Влияние возмущений</i> .....	44
Заключение к главе 2 .....	51
Заключение.....	52
Список литературы .....	53

## Введение

Групповой полет – формация спутников, движущихся по орбите на небольшом удалении (от нескольких метров до нескольких десятков километров) друг от друга и решающих единую задачу. Групповой полет спутников расширяет возможности наблюдений и решения различных прикладных задач в космосе. Основными его преимуществами являются способность одновременного выполнения экспериментов и повышенная надежность: неисправность одного из спутников не приводит к утрате работоспособности всей группы. Для проведения таких исследований необходимо обеспечить управление относительным движением спутников. В связи с широким использованием в формациях малых спутников, имеющих ограничения по массе, запасу топлива и энергетике на борту, большой интерес представляют алгоритмы управления относительным движением, не требующие расхода рабочего тела. Существуют методы управления, основанные на использовании магнитных [1] и электростатических сил [2,3], обмене импульса между спутниками [4]. В настоящей работе исследуется управление относительным движением с использованием аэродинамической силы в верхних слоях атмосферы.

Рассматривается группа спутников, движущихся по близким низким околокруговым орбитам вокруг Земли. Предполагается, что спутники имеют одинаковую форму с некоторой плоской частью, например, плоскими солнечными панелями. За счет поворота относительно центра масс изменяется площадь сечения аппарата относительно набегающего потока, которая определяет величину аэродинамической силы, действующей на аппарат. Если спутники имеют различную ориентацию относительно набегающего потока, то возникает разница между действующими на спутники силами. Таким образом, за счет изменения взаимной ориентации, например, с помощью установленных на борту маховиков, можно управлять относительным движением центров масс спутников.

Аэродинамическую силу можно разделить на две составляющие – это сила сопротивления, направленная против вектора скорости, и аналог "подъемной" силы, которая перпендикулярна плоскостям, с которыми сталкиваются молекулы атмосферы. На низких околоземных орбитах взаимодействие воздуха со спутником таково, что максимальное значение силы сопротивления почти на порядок больше, чем значение "подъемной" силы [5], поэтому, как правило, при разработке алгоритмов управления ей пренебрегают. Однако это приводит к потере потенциальной возможности управления движением вне плоскости орбиты, что делает недостижимыми целый ряд относительных траекторий, в том числе траекторий стыковки. В настоящей работе используется модель аэродинамической силы, учитывающая как силу сопротивления, так и небольшую по величине "подъемную" силу, что позволяет получить полностью управляемое относительное движение спутников в группе.

Популярность управления с использованием аэродинамических сил обусловлена упрощенным запуском группы малых и коротко живущих спутников на низкие орбиты и эффективным управлением без расхода топлива. Несмотря на достаточно большой объем исследований алгоритмов управления, пока были реализованы лишь две миссии, где тестировалась подобная схема управления – спутники OrbComm [6] и спутники JC2Sat-FF [7].

Настоящая работа посвящена решению двух задач управления с использованием аэродинамических сил – это избежание столкновений между близколетающими спутниками и проблема относительного маневрирования без насыщения управления. Работа соответственно разделена на две главы, каждая из которых начинается с небольшого обзора по рассматриваемой тематике. В конце работы приведено общее заключение.

## **Глава 1. Алгоритмы управления движением группы спутников для предотвращения столкновений**

Во время управления движением группой спутников, летящих на небольших относительных расстояниях, остро стоит проблема безопасного маневрирования. При реконфигурации относительной траектории, стыковке, задачах инспектирования необходимо избегать опасного сближения спутников, которое может привести к столкновению. Кроме того, в связи с возрастающим объемом космического мусора на околоземных орбитах, все большую актуальность приобретает проблема уклонения активных спутников от закончивших свой срок существования аппаратов или их обломков.

Алгоритмы управления групповым полетом для предотвращения столкновений, как правило, нацелены на уменьшение вероятности опасного сближения. В работе [8] представлен подход для прогнозирования вероятности столкновения с учетом точности определения относительного движения, действующих возмущений и неточности исполнения маневра для уклонения от опасного сближения. В этой работе предложен алгоритм для вычисления необходимого манёвра в случае прогнозируемого близкого пролета, который минимизирует одновременно вероятность столкновения и расход характеристической скорости. Похожий подход используется и в работе [9] при построении оптимального импульсного маневра для уклонения от столкновения, однако наряду с минимизацией характеристической скорости проводится максимизация расстояния относительного пролета, что уменьшает вероятность столкновения. Релейное управление, построенное в работе [10], также обеспечивает минимизацию вероятности столкновения, даже в случае, если аппарат движется по заданной траектории, которая приводит к столкновению. В работе [11] рассматривается один из видов оптимального управления – метод роя частиц. Систему движений уравнений приводят к упрощенной линеаризованной форме. Задача непопадания в запрещенную зону сводится к задаче линейного программирования с ограничениями в форме неравенств.

Следует заметить, что оптимальные алгоритмы, рассмотренные в вышеупомянутых работах, требуют численной оптимизации, что может быть трудно реализуемо на бортовых вычислительных машинах.

Другим распространенным подходом для предотвращения столкновений является метод искусственных потенциальных полей, рассмотренный, например, в работе [12]. Космический аппарат образует вокруг себя потенциальное поле, имеющее форму сферы. Согласно алгоритму управления при попадании внутрь этой сферы другого аппарата или космического мусора, на него начинает действовать отталкивающая сила, направленная по радиусу от одного спутника ко второму. В качестве функции потенциала обычно рассматривается экспоненциальная или обратная пропорциональная зависимость от расстояния между спутниками. В зависимости от способа задания потенциальных функций можно получить траектории с обходом препятствий с той или иной степенью «риска» (степени приближения друг к другу). То есть, если заранее задать запрещенную зону, в которой вероятность столкновения достаточно высока, то подходы, основанные на методе потенциалов, не обеспечивают непопадания в запрещенную зону, которое возможно при определенных начальных условиях. Метод потенциальных полей требует управления по всем направлениям, что бывает невозможным для некоторых видов управления. Этот метод напрямую реализуется при управлении спутников, несущих переменные статические заряды одного знака. Под действием кулоновских сил спутники отталкиваются друг друга. Эти силы значительны при относительно небольших расстояниях между спутниками и быстро убывают при удалении спутников друг от друга.

Наряду с оптимальным управлением, требующим больших вычислительных затрат, и методом потенциальных полей существуют более простые и легкорезализуемые алгоритмы. Например, в работе [13] построен алгоритм на основе поведенческого управления для реконфигурации группы спутников. В случае попадания спутников в сферическую запрещенную зону во время реконфигурации аппаратам дается заданный отталкивающий импульс, направленный по радиус-вектору. Такой импульс прикладывается до тех пор, пока аппарат находится в запрещенной зоне. Такое управление не является оптимальным и приводит к перерасходу характеристической скорости, однако доказано, что оно эффективно предотвращает столкновения при реконфигурации. Другой достаточно простой подход предложен в работе [14]. Относительное движение спутников в группе представляется через разницу элементов орбиты. В случае, когда два аппарата в какой-то момент попадают в одну точку, проводится маневр для фазирования орбиты одного из спутников, благодаря чему аппараты разлетаются на заданное расстояние друг от друга.

Большинство вышеупомянутых работ предполагает использование двигателей малой тяги для совершения маневров, предотвращающих столкновения. Однако если производится отталкивающий импульс по радиус-вектору между спутниками, выбрасываемое рабочее тело может привести к выходу из строя приборов, установленных на соседних спутниках, при полете на небольших расстояниях. В настоящей работе рассматривается управление с

использованием аэродинамической силы сопротивления, которое эффективно справляется с задачей предотвращения столкновения на низких околоземных орбитах и не требует затрат рабочего тела. Если спутники имеют переменную площадь сечения, то управляя ориентацией аппаратов, можно получить разницу между действующими на два спутника аэродинамическими силами.

В настоящей работе построены два алгоритма для предотвращения столкновений: оптимальное по энергетике управление, основанное на функции Понтрягина, и линейное управление. Оптимальное управление нацелено на гарантированное избегание столкновения и обеспечивает непопадание внутрь запрещенной зоны вокруг спутника - строится касательная траектория к сферической запрещенной зоне. Аналитическое решение задачи с закрепленными концами на основе линейной модели относительного движения позволяет уменьшить объем необходимых для управления расчетов, что упрощает реализацию алгоритма на бортовом компьютере. Однако разработанное оптимальное управление оказывается возможным упростить с помощью линейного управления, которое обеспечивает траекторию, близкую к касательной.

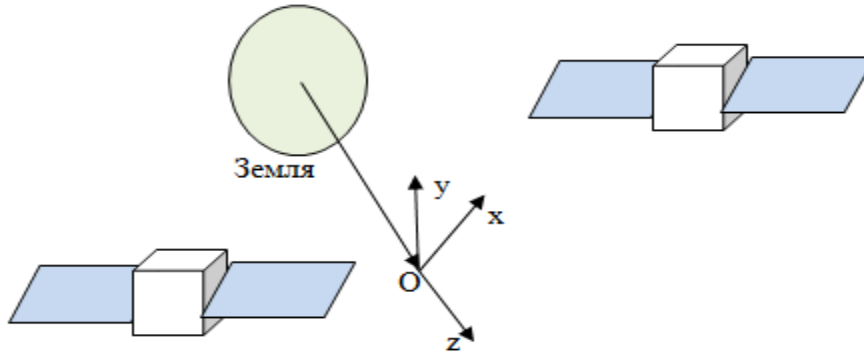
## **1.1 Принятые модели**

Для построения управления при решении задачи уклонения от столкновения в настоящей работе используется линейная модель относительного движения спутников. Предполагается, что основное воздействие на аппараты на низкой околоземной орбите оказывает только трансверсальная компонента аэродинамической силы. При таком предположении движение по нормали к орбите является неуправляемым и рассматривается управление движением только в плоскости орбиты. Изменять величину трансверсальной составляющей аэродинамической силы удастся путём поворота спутника относительно центра масс, что приводит к изменению эффективного сечения относительно набегающего потока. Задача уклонения от столкновения сводится к построению траектории, огибающей "запрещенную" зону в виде окружности в плоскости орбиты, которая определяется неточностью определения относительного движения с помощью бортовых средств навигации.

### ***Уравнения движения***

Будем рассматривать систему, состоящую из двух спутников, движущихся по близким орбитам. Для описания траекторий в таком случае удобно пользоваться уравнениями движения, записанными в относительных координатах. Общий вид уравнений относительного движения двух спутников достаточно сложен для аналитического рассмотрения, поэтому в настоящей работе используется система уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшира, которая описывает относительное движение двух спутников, летящих по близким

околокруговым орбитам в центральном поле тяготения Земли [15,16]. Используется опорная система координат, ее начало (опорная точка  $O$ ) движется по круговой орбите радиуса  $r_0$  с угловой скоростью  $\omega = \sqrt{\mu/r_0^3}$ , где  $\mu$  – гравитационный параметр Земли. Ось  $Oz$  направлена от центра Земли к опорной точке, ось  $Oy$  направлена по нормали к плоскости орбиты, ось  $Ox$  дополняет тройку до правой (рис.2).



**Рис.1. Система координат, связанная с опорной точкой  $O$ , движущейся по круговой орбите**

Пусть  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  – координаты первого и второго спутников в опорной системе координат. Тогда для координат  $(x, y, z)$  вектора относительного положения спутников  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\dot{z}\omega, \\ \ddot{y} &= -y\omega^2, \\ \ddot{z} &= 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}x(t) &= -3c_1\omega t + 2c_2 \cos \omega t - 2c_3 \sin \omega t + c_4, \\ y(t) &= c_5 \sin \omega t + c_6 \cos \omega t, \\ z(t) &= 2c_1 + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos \omega t,\end{aligned}\tag{2}$$

где константы интегрирования  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  выражаются через начальные условия

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0,\tag{3}$$

$t_0$  – момент времени, в который определены относительные координаты  $x_0, y_0, z_0$  и относительные скорости  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}, & c_2 &= \frac{\dot{z}_0}{\omega}, & c_3 &= -3z_0 - \frac{2\dot{x}_0}{\omega}, \\
c_4 &= x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega}, & c_5 &= \frac{\dot{y}_0}{\omega}, & c_6 &= y_0.
\end{aligned} \tag{4}$$

### *Модель аэродинамической силы*

Рассмотрим управляемое движение двух спутников. Будем предполагать, что оба спутника имеют одинаковую форму. Каждый из спутников состоит из центральной части, имеющей форму шара, и тонкой плоской пластины. К каждому спутнику приложена аэродинамическая сила сопротивления, которая состоит из двух компонент: действующей на центральную часть и на пластины. Также будем предполагать, что сопротивление центральной части не зависит от ориентации спутника в пространстве и одинаково для обоих спутников, а сопротивление пластины зависит положения нормали к пластине по отношению к направлению набегающего потока. Запишем уравнения относительного движения с учетом аэродинамической силы в виде

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -2\dot{z}\omega + f_x, \\
\ddot{y} &= -y\omega^2 + f_y, \\
\ddot{z} &= 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2 + f_z,
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $\mathbf{f} = [f_x \ f_y \ f_z]^T = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$  – разница удельных аэродинамических сил. Удельную аэродинамическую силу, действующую на каждый из спутников, можно представить так:

$$\mathbf{f}_i = -\frac{1}{m} \rho V^2 S \left\{ (1 - \varepsilon)(\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i) \mathbf{e}_v + 2\varepsilon(\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i)^2 \mathbf{n}_i + (1 - \varepsilon) \frac{\nu}{V} (\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \right\}. \tag{6}$$

Здесь  $\rho$  – плотность атмосферы на расстояние  $r_0$  от центра Земли,  $m$  – масса спутника,  $V$  – скорость набегающего потока (предполагается одинаковой для двух спутников),  $S$  – площадь пластины,  $\mathbf{n}_i$  – единичный вектор внешней нормали к пластине,  $\mathbf{e}_v$  – единичный вектор, направленный по скорости набегающего потока,  $\varepsilon$  и  $\nu$  – коэффициенты взаимодействия молекул атмосферы с поверхностью спутника,  $i = 1, 2$ . По современным представлениям, схемы взаимодействия газа с поверхностью спутника таковы, что  $\varepsilon \approx 0.1$  и  $\nu/V \approx 0.1$  [5]. Предполагая, что на маневр для предотвращения столкновений понадобится на коротких интервалах времени и учитывая, что второе и третье слагаемое в силе (6) меньше первого на порядок, ими можно пренебречь, тогда остается только одна компонента по вектору скорости, которая совпадает для



круговой орбиты с компонентой  $f_x$ :

$$f_i = -\frac{1}{m} \rho C V^2 S \cos \beta_i.$$

Здесь  $C = 1 - \varepsilon$  – аэродинамический коэффициент сопротивления,  $\beta_i$  – угол между направлением набегающего потока и нормалью  $i$ -ой пластины, которая образует острый угол с набегающим потоком,  $i = 1, 2$ . Заметим, что углы  $\beta_i$  лежат в пределах  $[0; \pi/2]$ . Будем рассматривать близколетящие спутники, поэтому плотность атмосферы и скорость набегающего потока для обоих спутников можно считать одинаковыми. Также на начальном этапе будем предполагать, что плотность атмосферы не изменяется вдоль орбиты.

Сделаем замену  $\alpha_i = 90^\circ - \beta_i$ . После преобразований получаем формулу для разницы аэродинамических сил сопротивления:

$$f_x = -\frac{1}{m} \rho C V^2 S (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = \frac{1}{m} \rho C V^2 S \sin \Delta \alpha, \Delta \alpha = \arcsin(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2).$$

Для любого  $\Delta \alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$  существует бесконечное множество пар  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые удовлетворяют равенству, записанному выше. Для однозначности наложим условие на  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :  $\alpha_1 \alpha_2 = 0$ , что означает, что только один из спутников во время управления отклоняется от направления набегающего потока. При повороте первого спутника значение  $\Delta \alpha > 0$ , а при повороте второго спутника  $\Delta \alpha < 0$ .

При действии только трансверсальной компоненты аэродинамической силы движение по нормали к опорной орбите является неуправляемым, поэтому это движение в работе не рассматривается. Кроме того, для большинства миссий группового полета, связанных, например, с дистанционным зондированием Земли, важно движение именно в плоскости орбиты, т.е. в плоскости  $Oxz$ . Запишем уравнения Хилла в виде линейной системы для осей  $Ox$  и  $Oz$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

где приняты следующие обозначения:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\omega & 3\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$B_x = -\frac{1}{m}\rho C V^2 S, \quad u = \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1.$$

При изменении разности синусов углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  создается управляющее воздействие. Однако следует заметить, что разность синусов не может лежать вне интервала  $[-1;1]$  при условии  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; \pi/2]$ . Это накладывает ограничения на возможное значение управляющего воздействия. Вне интервала  $[-1;1]$  управление нереализуемо и не имеет физического смысла.

### ***Радиус запрещенной зоны***

Для предотвращения опасного сближения необходимо определить область вокруг спутника, в которой опасность столкновения недопустимо высока, и строить управление таким образом, чтобы избежать попадания в эту "запрещенную" зону. Размер запрещенной области может определяться точность определения относительного движения с помощью бортового навигационного оборудования. Так как ошибки определения движения задаются ковариационной матрицей ошибок, то наиболее естественная форма "запрещенной" области – это эллипсоид, в центре которого находится спутник. Размер и положение эллипсоида обусловлены текущими ошибками знания траектории. Будем рассматривать эллипсоиды ошибок таких размеров, чтобы вероятность нахождения спутника внутри них была близка к 100%. Для построения "запрещенной" зоны в плоскости орбиты, необходимо спроецировать эллипсоид ошибок. В результате получится некоторый эллипс, попадание спутника в который угрожает столкновением. Однако удобнее строить траекторию, огибающую не эллипс, а окружность, с радиусом, равным большой полуоси эллипса.

Предположим, что в момент времени  $t_0$  начальные условия (3) заданы с ошибкой  $\mathbf{e} = [e_x \ e_y \ e_z \ e_{\dot{x}} \ e_{\dot{y}} \ e_{\dot{z}}]^T$ , которая распределена по нормальному закону с нулевым вектором математического ожидания и ковариационной матрицей  $P(t_0) \in R^{6 \times 6}$ . Пусть компоненты вектора  $\mathbf{e}$  независимы, а матрица имеет диагональный вид  $P(t_0) = \text{diag}(\sigma_x^2, \dots, \sigma_z^2)$ .

Плотность вероятности для случайного вектора  $\mathbf{e}$ :

$$p(\mathbf{e}|0, P(t)) = N(\mathbf{e}|0, P(t)) = \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{\det P(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T P(t)^{-1} \mathbf{e}\right). \quad (8)$$

Выражение  $\mathbf{e}^T P(t)^{-1} \mathbf{e} = \chi^2 = \text{const} > 0$  есть положительная определенная квадратичная форма для вектора  $\mathbf{e}$ . Поэтому в соответствии с теорией поверхностей второго порядка настоящее уравнение представляет собой уравнение шестимерного эллипсоида относительно вектора  $\mathbf{e}$  (эллипсоид равной плотности вероятности или эллипса рассеивания). Уравнение эллипсоида можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{e_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{\sigma_z}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{x}}}{\sigma_{\dot{x}}}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{y}}}{\sigma_{\dot{y}}}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{z}}}{\sigma_{\dot{z}}}\right)^2 = \chi^2. \quad (9)$$

Разделим правую и левую часть уравнения (9) на  $\chi^2$

$$\left(\frac{e_x}{\chi\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{\chi\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{\chi\sigma_z}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{x}}}{\chi\sigma_{\dot{x}}}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{y}}}{\chi\sigma_{\dot{y}}}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{z}}}{\chi\sigma_{\dot{z}}}\right)^2 = 1, \quad (10)$$

где  $\chi\sigma_i$  является главными полуосями шестимерного эллипсоида.

Если спроецировать шестимерный эллипсоид на плоскость  $Oxz$ , то получится двухмерный эллипс. В общем случае, если матрица  $P(t)$  не диагональная, главные оси этого эллипса не совпадают с осями системы координат  $Oxz$ . Приведем эллипс к главным осям, повернув систему координат. Тогда новые средние квадратичные отклонения  $\sigma_1, \sigma_2$  выразятся через  $\chi\sigma_x, \chi\sigma_z$ . Определим радиус запрещенной зоны, как большую полуось двухмерного эллипса рассеивания:

$$R = \max(\sigma_1, \sigma_2). \quad (11)$$

Величина  $\chi$  выбирается таким образом, чтобы практически все значения вектора  $\mathbf{e}$  лежали внутри шестимерного эллипсоида. То есть, если определить область  $E_\chi = \{\mathbf{e}: \mathbf{e}^T P(t)^{-1} \mathbf{e} \leq \chi^2\}$ , то вероятность нахождения ошибки внутри запрещенной области определяется так:

$$p(E_\chi) = 1 - \varepsilon, \quad (12)$$

где  $\varepsilon \ll 1$ .

Закон изменения ковариационной матрицы при свободном движении записывается через уравнения Рикатти:

$$\dot{P} = AP + PA^T, \quad (13)$$

Если проинтегрировать матричное уравнение (13), то можно получить ковариационную матрицу ошибок в любой момент времени. Зная ковариационную матрицу и значение  $\varepsilon$ , можно построить шестимерный эллипсоид (12), спроецировать его на плоскость  $Oxz$  и определить радиус запрещенной зоны согласно (11).

## 1.2 Алгоритмы управления

Сформулируем постановку задачи для построения управления с целью уклонения от столкновения. Пусть в момент времени  $t_0$  заданы начальные условия относительного движения  $[x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0]^T$  с известной ковариационной матрицей ошибки  $P(t_0)$ . Если при интегрировании уравнений движения (1) траектория движения спутника попадает в запрещенную зону, вычисленную согласно уравнениям (13) и (11), то необходимо облететь запрещенную зону по касательной траектории. Для уклонения от столкновения выбрана именно касательная к запрещенной зоне траектория, так как она предотвращает опасное сближение с одной стороны, и требует минимальных затрат ресурса управления с другой стороны.

При такой постановке задачи предотвращения столкновения возникает вопрос – за какое время до попадания в запрещенную зону необходимо начинать управлять аппаратами? Ответ на этот вопрос зависит от точности прогнозирования траектории, величины максимального управляющего воздействия, размеров запрещенной области и минимального расстояния до объекта при движении без управления. Линейные уравнения (1) применимы для описания относительного движения на коротких интервалах времени и дают большую ошибку на длинных интервалах. Поэтому если их использовать для прогнозирования движения, то стоит ограничиться небольшим отрезком времени, например, одним витком. Максимальное управляющее воздействие в основном зависит от плотности атмосферы на высоте полета группы спутников и от переменной составляющей площади аппарата по набегающему потоку. Чем больше максимальное воздействие, тем позже можно начать управлять для обеспечения касания запрещенной зоны. Однако для любого воздействия будет существовать момент "точки невозврата", после которой избежать попадания в запрещенную зону будет невозможно. Поэтому необходимо вычислить этот момент времени, чтобы начать уклоняться от столкновения заранее.

Рассмотрим два типа управления, обеспечивающего касательную траекторию к запрещенной зоне. Сначала построим закон управления, линейно изменяющийся во времени, который достаточно просто реализовать на практике.

Потом выведем оптимальное по расходу управляющего воздействия управление, обеспечивающее касание, и сравним эти два алгоритма. При построении алгоритмов на начальном этапе предполагается, что момент начала маневра уклонения задан и размеры запрещенной области известны.

### **Управление по линейному закону**

Для решения задачи уклонения рассмотрим управление, которое подчиняется линейному закону. Пусть управление имеет вид

$$u(t) = u_0 \left( 1 - \frac{t - t_0}{T - t_0} \right), \quad (14)$$

$u_0$  – начальное значение управления,  $t_0$  – время начала маневра,  $T$  – время касания запрещенной зоны. Заметим, что величина управления в момент касания запрещенной зоны равняется нулю. Будем считать, что  $u_0$  и  $T$  – неизвестные, которые зависят от начальных условий и радиуса запрещенной зоны.

Подставляя выражение (14) в уравнения движения (5) и решая систему дифференциальных уравнений, получаем решение для координат и скоростей по осям  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 \sin(\omega(t - t_0)) + a_5 \cos(\omega(t - t_0)), \\ \dot{x}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + a_4 \omega \cos(\omega(t - t_0)) - a_5 \omega \sin(\omega(t - t_0)), \\ z(t) &= a_6 + a_7 t + a_8 t^2 + a_9 \sin(\omega(t - t_0)) + a_{10} \cos(\omega(t - t_0)), \\ \dot{z}(t) &= a_7 + a_8 t + a_9 \omega \cos(\omega(t - t_0)) - a_{10} \omega \sin(\omega(t - t_0)), \end{aligned} \quad (15)$$

где константы интегрирования  $a_i$  ( $i=0, \dots, 10$ ) выражаются через начальные условия (3), время касания  $T$  и начальное значения управления  $u_0$ .

Для касания запрещенной зоны необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned} x(T)^2 + z(T)^2 - R^2 &= 0, \\ x(T)\dot{x}(T) + z(T)\dot{z}(T) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $R$  – радиус запрещенной зоны. Оба равенства обеспечивают касание окружности радиуса  $R$  в некоторой точке. Первое равенство – это совпадение точки на траектории с радиусом окружности, второе равенство – условие касания скорости.

Подставляя уравнения (15) в (16), получаем

$$\begin{aligned} f_1(u_0, T) &= 0, \\ f_2(u_0, T) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Функции  $f_1(u_0, T)$  и  $f_2(u_0, T)$  обращаются в нуль при значениях  $(u_0^*, T^*)$ , которые обеспечивают касание запрещенной зоны. Для нахождения  $(u_0^*, T^*)$  можно воспользоваться методом Ньютона

$$\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k - (\mathbf{H})^{-1} \mathbf{f},$$

$$\mathbf{w}^k = \begin{pmatrix} u_0^k \\ T^k \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(u_0, T)}{\partial u_0} & \frac{\partial f_1(u_0, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial f_2(u_0, T)}{\partial u_0} & \frac{\partial f_2(u_0, T)}{\partial T} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{u_0=u_0^k \\ T=T^k}}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(u_0^k, T^k) \\ f_2(u_0^k, T^k) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Начальное приближение можно взять  $\mathbf{w}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ T^0 \end{pmatrix}$ , где  $T^0$  – время, когда траектория первый раз пересекает запрещенную зону при неуправляемом движении  $u \equiv 0$ . Условие остановки итерационного процесса имеет вид

$$|u_0^{k+1} - u_0^k| < \varepsilon_{u_0}, |T^{k+1} - T^k| < \varepsilon_T, \quad (19)$$

где  $\varepsilon_T \ll 1$ ,  $\varepsilon_{u_0} \ll 1$  – заранее заданные параметры.

Итерационный процесс (18) не требует больших вычислительных мощностей, так как матрица Якоби  $H$  получена явно, хотя имеет громоздкий вид. Обращение матрицы  $H$ , которая имеет размер  $2 \times 2$ , также не требует большого количества операций. Решение системы (17) обычно занимает несколько итераций. Таким образом, линейное управление (14) может быть реализовано даже на маломощных бортовых компьютерах микроспутников.

### ***Оптимальное управление***

Построим оптимальное управление для предотвращения столкновения. При движении на низких околоземных орбитах большая полуось орбиты уменьшается пропорционально площади космических аппаратов по набегающему потоку. Поэтому в качестве минимизируемого функционала разумно взять квадрат от управления, чтобы уменьшить изменение большой полуоси орбиты спутника вследствие совершения манёвра уклонения. В качестве краевых условий оптимального управления возьмем точку, которая удовлетворяет условиям касания (16) запрещенной зоны.

Сначала сформулируем в общем виде задачу оптимального управления и затем применим принцип максимума для решения задачи уклонения с фиксированными концами.

Рассмотрим динамическую систему, состояние которой в каждый момент времени  $t$  описывается вектор-функцией  $\mathbf{x}(t) = R^n$ . На состояние системы можно

воздействовать, изменяя управляемые параметры  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ . Будем рассматривать класс кусочно-непрерывных управлений  $\mathbf{u}(t)$ .

При заданном управлении  $\mathbf{u}(t)$  состояние системы изменяется во времени согласно закону:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \quad (20)$$

где  $\mathbf{f}$  – нелинейная вектор функция, задающая уравнения движения.

Сформулируем задачу оптимального управления такой системой следующим образом: определить управление  $\mathbf{u}^*(t)$ , доставляющее экстремум функции  $Q$  вида:

$$Q = \int_{t_0}^T F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + \Phi_0(t_0, T, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(T)) \rightarrow \max, \quad (21)$$

где  $t_0$  – начальное время,  $T$  – время окончания управления,  $F$  и  $\Phi_0$  – некоторые нелинейные функции. Первое слагаемое (интегральная часть критерия) характеризует качество функционирования системы на всем промежутке управления  $[t_0, T]$ , второе слагаемое (терминальный член) – только конечный результат воздействия управления, определяемый начальным  $\mathbf{x}(t_0)$  и конечным результатом  $\mathbf{x}(T)$  состояниями и, возможно, моментами начала и окончания управления  $t_0$  и  $T$ . В зависимости от задачи интегральная или терминальная часть критерия может быть равна нулю.

На процесс функционирования системы могут накладываться дополнительные ограничения в форме краевых условий, задающих множество допустимых начальных и конечных состояний системы и моменты начала и окончания управления:

$$\Phi_i(t_0, T, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(T)), i = 1 \dots m. \quad (22)$$

Важным частным случаем (22) являются условия вида:

$$\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0 = 0; \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_T = 0, \quad (23)$$

соответствующие закреплению левому и правому концу фазовой траектории. Моменты времени начала и окончания управления,  $t_0$  и  $T$ , могут быть как известными, тогда говорят о задаче с фиксированным временем управления, или неизвестными – возникает задача со свободными концами. Л.С. Понтрягиным

доказано [17], что оптимальное управление  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$  достигается при максимуме функции  $\tilde{H}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ :

$$\tilde{M}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}_0) = \sup_{\mathbf{u} \in \Omega} \tilde{H}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

где  $\boldsymbol{\psi}$  – вектор сопряженных параметров,  $\Omega$  – область допустимых значений управления.

Сформулируем теперь принцип максимума. Пусть  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_0^*, T^*)$  – оптимальный процесс в задаче (20)–(22). Тогда найдутся одновременно не равные нулю множители Лагранжа  $\boldsymbol{\lambda}$  и сопряженные параметры  $\boldsymbol{\psi}$ :  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ ,  $\lambda_0 \geq 0$  и  $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n$  такие, что выполнены следующие условия:

а) Функция Понтрягина задачи

$$\tilde{H}(t, \lambda_0, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \lambda_0 F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (24)$$

при каждом  $t \in [t_0, T]$  достигает максимума при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ .

б) Вектор-функция  $\boldsymbol{\psi}(t)$  удовлетворяет сопряженной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_j(t)}{dt} = - \frac{\partial \tilde{H}(t, \lambda_0, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j}; j = 1, \dots, n, \quad (25)$$

с краевыми условиями (условия трансверсальности)

$$\begin{aligned} \psi_j(t_0^*) &= - \left( \boldsymbol{\lambda}, \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_0^*, T^*)}{\partial x_j(t_0)} \right), \\ \psi_j(T) &= \left( \boldsymbol{\lambda}, \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_0^*, T^*)}{\partial x_j(T)} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

в) Выполняются условия на подвижные концы:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t, \lambda_0, \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \Big|_{t=t_0} &= \left( \boldsymbol{\lambda}, \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_0^*, T^*)}{\partial t_0} \right), \\ \tilde{H}(t, \lambda_0, \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \Big|_{t=T} &= - \left( \boldsymbol{\lambda}, \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_0^*, T^*)}{\partial T} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Множитель Лагранжа  $\lambda_0$  определяет чувствительность оптимального решения задачи к виду интегральной части функционала. В вырожденном случае, если ограничения задачи таковы, что оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t)$  не зависит от вида интеграла  $F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ , то из условий принципа максимума следует, что  $\lambda_0 = 0$ . В невырожденном случае  $\lambda_0 > 0$ , поэтому ее можно



положить равной 1 (разделив функцию  $\tilde{H}$  на  $\lambda_0$ ). Как правило, из постановки задачи понятно допускаются ли в ней вырожденные решения. При исследовании таких решений необходимо обращать внимание на выполнение условия теоремы о том, что множители  $\lambda$  и  $\psi(t)$  не могут одновременно быть равными нулю.

Для задачи с закрепленными концами сопряженная функция  $\psi(t)$  имеет свободные концы, т.е. соответствующие условия трансверсальности отсутствуют.

Обратно, для задачи со свободными концами, не содержащей ограничений (22), сопряженная функция имеет закрепленные концы, определяемые соотношениями (26).

С данными обозначениями сформулируем задачу оптимального управления для задачи предотвращения столкновения.

Решим задачу перевода фазовой точки из начального состояния в точку касания запрещенной зоны при минимизации «затрат» на управление. Сформулируем задачу следующим образом. Пусть точка движется в плоскости  $Oxz$  по закону (5) во время  $t \geq t_0$ . Требуется найти кусочно-непрерывное ограниченное управление  $u(t)$  ( $|u(t)| \leq u^{\max}$  в промежутке времени  $t_0 \leq t \leq T$ ) такое, чтобы точка, выйдя из начального положения (3), пришла в точку

$$x(T) = x_T, z(T) = z_T, \dot{x}(T) = \dot{x}_T, \dot{z}(T) = \dot{z}_T \quad (28)$$

,которая удовлетворяет условиям касания (16). Конечную точку можно найти, например, используя управление по линейному закону.. Кроме того, управление должно максимизировать функционал от квадрата управляющего воздействия

$$Q = \int_{t_0}^T (-u^2(t)) dt. \quad (29)$$

Положим  $\lambda_0 = 1$ . Согласно формуле (21)  $F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = -u^2(t)$ . Запишем функцию Понтрягина (24):

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2}u^2 + \psi_1 \dot{x} + \psi_2 (u - 2\dot{z}\omega) + \psi_3 \dot{z} + \psi_4 (2\dot{x}\omega + 3z\omega^2). \quad (30)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальное управление, максимизирующее функцию  $\tilde{H}$ , можно найти из следующего уравнения

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = -u + \psi_2 = 0.$$

Так как вторая производная функции Понтрягина  $\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial u^2} = -1$  меньше нуля, то при  $u = u^* = \psi_2$  функция Понтрягина принимает максимальное значение.

Найдем сопряженную систему из уравнений (25):

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 - 2\omega\psi_4, \\ \dot{\psi}_3 &= -3\omega^2\psi_4, \\ \dot{\psi}_4 &= -\psi_3 + 2\omega\psi_2. \end{aligned} \tag{31}$$

В решения дифференциальных уравнений (5) и (31) с краевыми условиями (3) и (28) входит неизвестная  $T$ , которую можно найти из условия на подвижный конец (27).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\psi_2(T)^2 + \psi_1(T)\dot{x}(T) + \psi_2(T)(\psi_2(T) - 2\dot{z}(T)\omega) + \psi_3(T)\dot{z}(T) + \\ + \psi_4(2\dot{x}(T)\omega + 3z(T)\omega^2) = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

После постановки решений дифференциальных уравнений (5) и (31) с краевыми условиями (3) и (28) в уравнение (32) получаем одно уравнение, которое зависит от времени касания окружности.

$$h(T) = 0 \tag{33}$$

Решение уравнения (33) можно найти численно, например, методом Ньютона.

Следует отметить, что хотя для задачи с фиксированным правым концом необходимо найти только одну неизвестную из нелинейного уравнения. Такая постановка задачи требует задания точки касания  $\mathbf{x}(T)$ . Чтобы её определить нужно решить уравнение (18) для линейного закона управления и найти ещё две неизвестных. В результате получается, что задача с закрепленным концом требует нахождения трёх неизвестных.

### 1.3 Исследование алгоритмов управления

Проведем моделирование работы рассмотренных алгоритмов для демонстрации их эффективности при решении задачи уклонения от столкновения. Также на примере конкретных начальных относительных траекторий и заданного размера запретной зоны исследуем зависимость максимального управления от времени начала маневра уклонения. Так как

максимальный угол отклонения от набегающего потока не может составлять больше 90 градусов, то таким образом, можно найти момент времени, после которого столкновение невозможно предотвратить.

### ***Параметры численного моделирования***

В качестве прототипа спутников рассмотрим геометрические размеры микроспутника "ТаблетСат-Аврора" [18]. Спутник оснащен 6-ю солнечными батареями, располагающимися в одной плоскости. Суммарная площадь пластин составляет  $S = 0.6 \text{ м}^2$ . Центральная часть имеет форму цилиндрического восьмиугольника. Разница между максимальной и минимальной площадью сечения центральной части при повороте спутника незначительна, поэтому будем считать, что площади сечения центральной части не зависит от ориентации спутника и составляет  $S_0 = 0.1 \text{ м}^2$ . Масса микроспутника составляет  $m = 26 \text{ кг}$ .

В предположении, что атмосфера на высоте 340 км неподвижна, скорость набегающего потока можно оценить как скорость движения спутника по орбите по формуле

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{R_E + h}} \approx 7.69 \text{ км/с},$$

где  $R_E = 6371 \text{ км}$  – средний радиус Земли.

Для заданных параметрах можно вычислить коэффициент  $B_x$  в формуле аэродинамической силы при управлении в формуле (7) приблизительно равен  $1.3 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$ . Время прогнозирования траектории для определения попадания в запрещенную зону  $T^0$  равняется одному периоду.

Будем предполагать, что в начале каждого витка определяется вектор состояния. Точность определения вектора состояния определяется точностью навигационных приборов. Пусть ковариационная матрица состояния в момент времени  $t_0$  после обработки измерений имеет следующий вид:

$$P(t_0) = \text{diag}(1 \text{ см}^2, 1 \text{ см}^2, 1 \text{ см}^2, 0.1 \text{ см}^2 / \text{с}^2, 0.1 \text{ см}^2 / \text{с}^2, 0.1 \text{ см}^2 / \text{с}^2). \quad (34)$$

Такая ковариационная матрица соответствует случаю некоррелированных ошибок определения относительного движения, среднеквадратическая ошибка составляет  $\sigma = 1 \text{ см}$  по положению и  $\sigma = 0.1 \text{ см/с}$  по скорости, что достижимо при обработке, например, видео-измерений относительного положения.

Проинтегрируем ковариационную матрицу на один виток согласно (13) и вычислим радиус запрещенной зоны, как описано в разделе 1.3. На рис 2 представлена зависимость радиуса запрещенной зоны от времени. Как видно из

рисунка, радиус значительно растет за виток. Максимальное значение радиуса за 1 период составляет  $R_{\max} = 11$  м. Зафиксируем радиус запрещенной зоны для наихудшего сценария событий, положив  $R = R_{\max}$ .

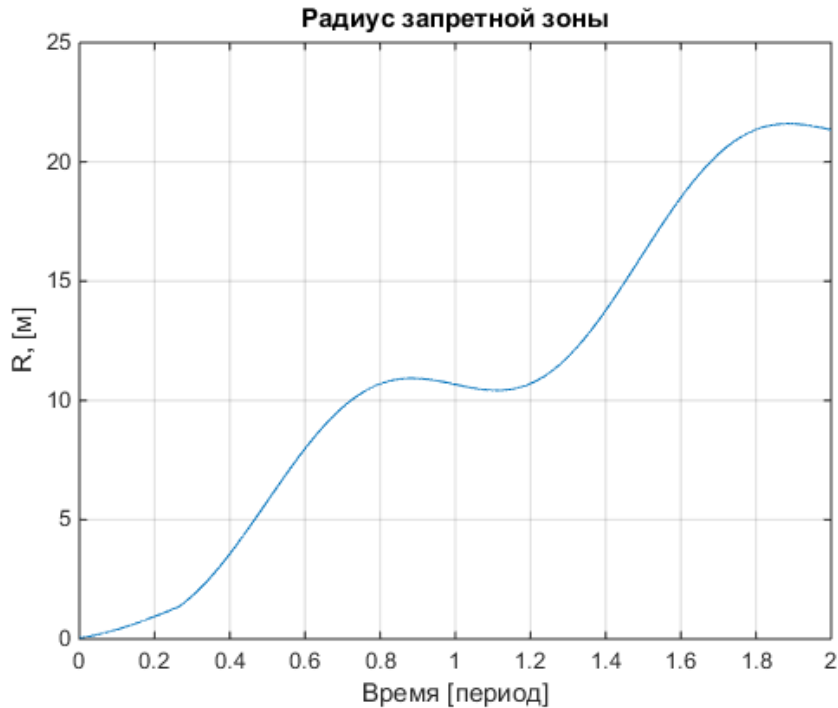


Рис.2. Зависимость радиуса запрещенной зоны от времени

### Управление по линейному закону

Продемонстрируем работу алгоритма на основе линейного изменения управления для предотвращения столкновения. Зададим начальный вектор относительного состояния как:

$$\mathbf{x}_0 = [-45\text{ м} \quad 0\text{ м} \quad -48\text{ м} \quad 0.1\text{ м/с} \quad 0\text{ м/с} \quad 0\text{ м/с}]^T \quad (35)$$

Если с такими начальными условиями проинтегрировать траекторию, то она пересечет запрещенную зону с радиусом  $R = 11$  м (см. рис. 3). Если начать уклоняться в момент времени  $t_0$ , то необходимо с помощью (18) определить начальное управление  $u_0$  и момент окончания управления  $T$ . Для рассматриваемого примера после решения  $u_0$  соответствует  $\Delta\alpha = 52$  град, а  $T \approx 0.11 \cdot T_{\text{орб}}$ , где  $T_{\text{орб}}$  – орбитальный период опорной круговой орбиты. На рис. 4 представлена линейная зависимость управления от времени. Из рисунка видно, что в момент времени  $t = T$  управление равно нулю, как и должно получиться из построения зависимости управления от времени (14).

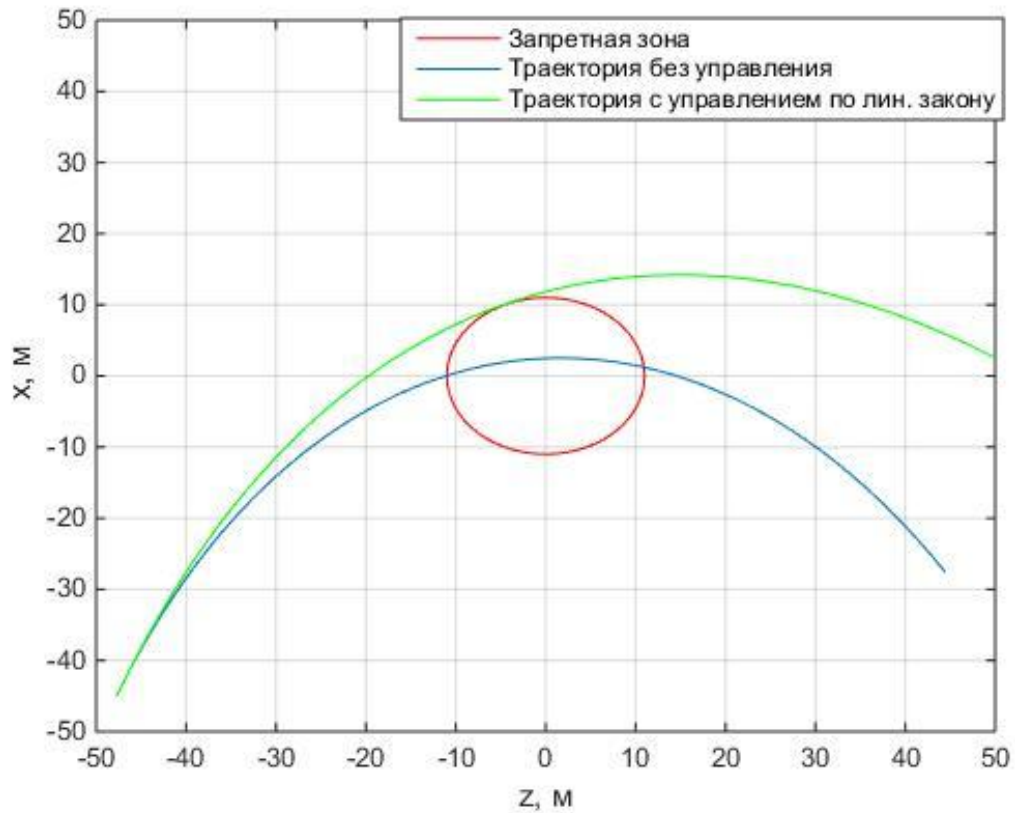


Рис. 3. Пример проекции траектории на плоскость  $Oxz$

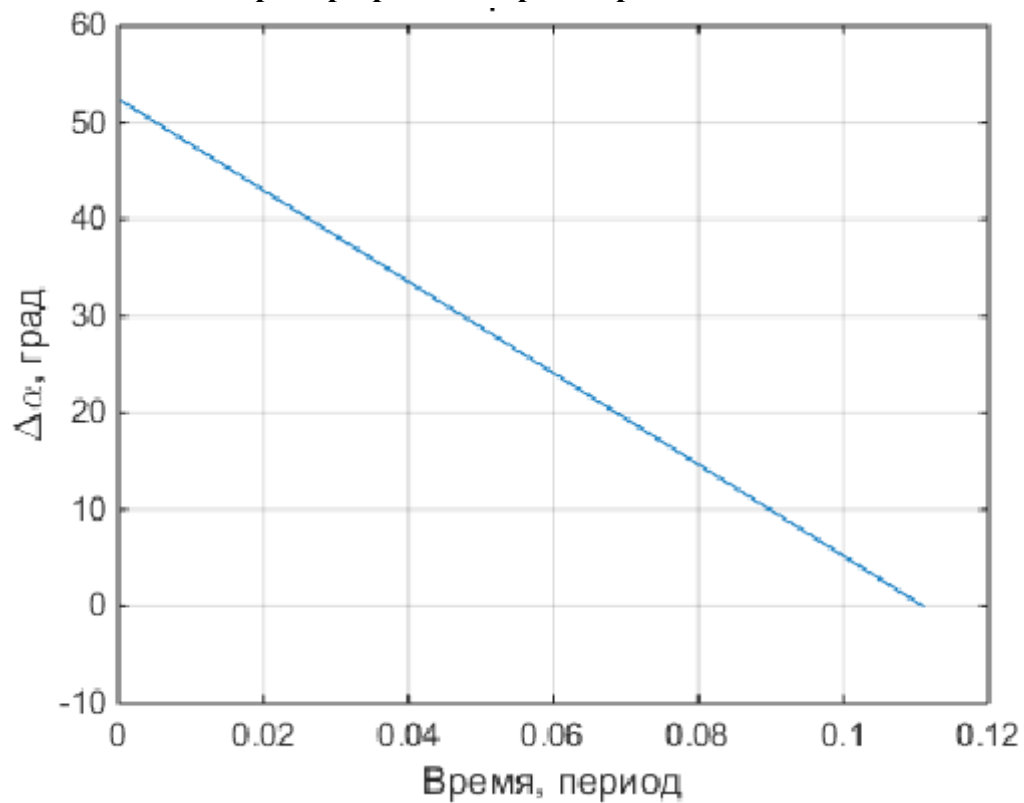


Рис.4. Зависимость разности углов от времени

Для того чтобы сравнить линейное управление с оптимальным, вычислим значение функционала (29)  $Q_{liner} = -8.93 \cdot 10^{-7}$ , которое характеризует расход

ресурса управления. Чем больше этот функционал, тем медленнее будет уменьшаться большая полуось группы спутников.

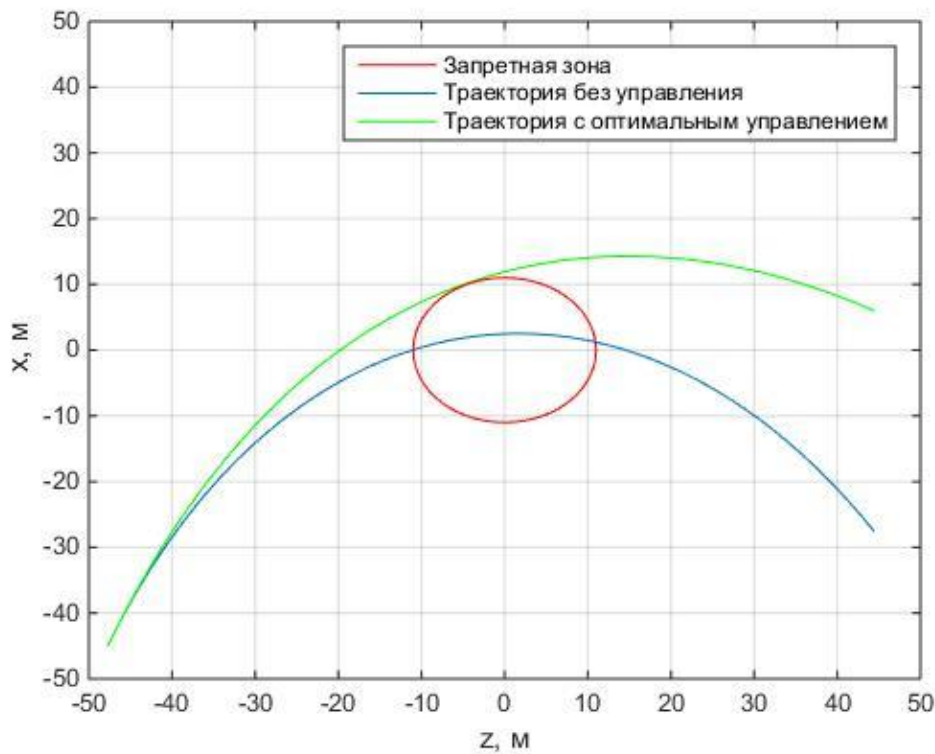
Таким образом, алгоритм управления на основе линейного закона успешно справляется с задачей касания запрещенной зоны.

### ***Оптимальное управление с фиксированными концами***

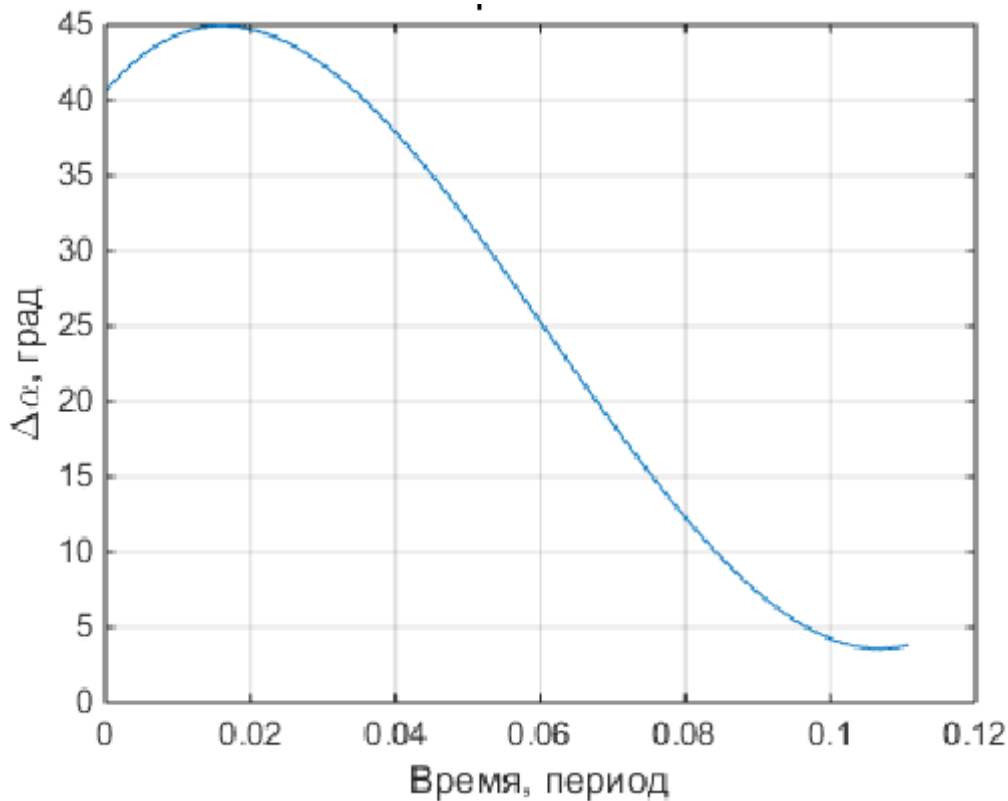
Для тех же начальных условий (35) решим задачу оптимального управления с фиксированными концами. Согласно решению задачи уклонения по линейному закону точка касания запрещенной зоны определяется вектором состояния

$$\mathbf{x}_T = [10.05\text{м} \quad 0\text{м} \quad -4.62\text{м} \quad 0.043\text{м/с} \quad 0\text{м/с} \quad 0.096\text{м/с}]^T.$$

Для решения задачи необходимо определить время окончания управления из нелинейного уравнения (33). На рис. 5 представлена относительная траектория спутника под действием оптимального управления, а на рис. 6 представлена зависимость управления от времени.



**Рис.5. Проекция траектории на плоскость  $Oxz$**



**Рис.6. Зависимость разности углов от времени**

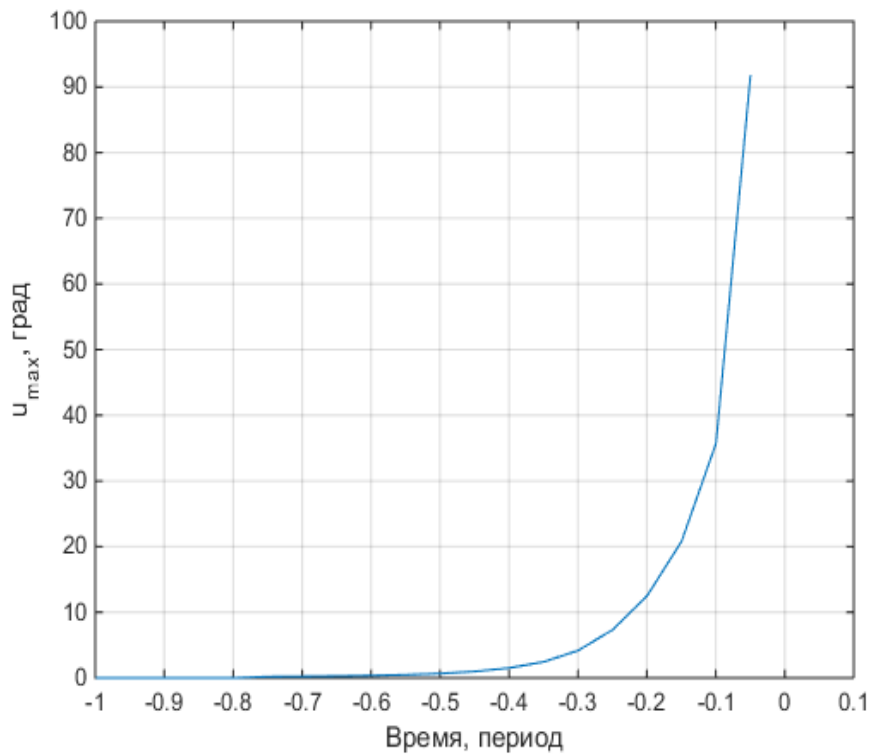
Значение функционала при оптимальном управлении (29)  $Q_{opt} = -8.85 \cdot 10^{-7}$ , что меньше, чем  $Q_{liner}$ . Время касания и максимальный угол поворота получился примерно таким же, как и с линейным управлением.

Таким образом, оптимальное управление успешно справляется с задачей касания запрещенной зоны, показав большее значение функционала по сравнению с линейным управлением. Однако особое внимание следует уделить времени начала управления, так как, начиная с некоторого времени, величина управления становится нереализуемой, то есть разность синусов углов между плоскостями спутников и набегающего потока становится по модулю больше единицы.

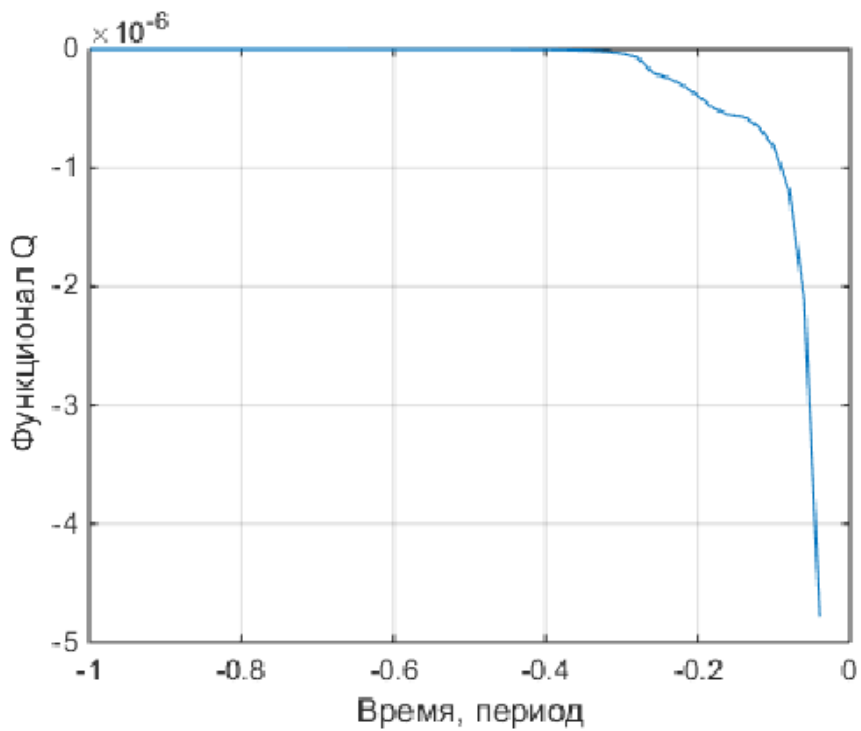
#### ***Зависимость управления от момента начала управления***

Рассмотрим прежний пример с начальными условиями (35). Но теперь будем изменять момент времени начала управления. За начало отсчета примем время прогнозируемого вхождения в запрещенную зону. Из рис. 7 видно, что при  $t = -0.05 \cdot T_{orb}$ , соответствующем приблизительно 5 минутам, управление достигает своего максимального значения  $90^\circ$ . Если начать уклоняться позже, то уже невозможно будет избежать попадания в запрещенную зону. Из графика видно, что для рассматриваемого примера управление нужно включать в промежутке от  $-0.3 \cdot T_{orb}$  до  $-0.05 \cdot T_{orb}$ . Если включать управления слишком рано ( $t_0 < -0.3 \cdot T_{orb}$ ), то сложно на аппаратном уровне обеспечить точность задания маленьких углов ориентации космического аппарата. Хотя, как можно увидеть

из рис. 8, на котором представлена зависимость функционала  $Q$  времени, чем раньше начинается управление, тем больше значение функционала, и как следствие, меньше изменение большой полуоси спутника.



**Рис.7. Зависимость максимального угла от времени**



**Рис.8. Зависимость функционала от времени**



## **Заключение к Главе 1**

В настоящей работе разработаны два типа алгоритмов управления для предотвращения столкновения спутников, летящих в групповом полете на низкой околоземной орбите. Линейный и оптимальный алгоритмы управления не требуют больших вычислительных затрат в отличие от известных алгоритмов, могут быть реализованы на бортовом компьютере и обеспечивают гарантированный облет запрещенной зоны вокруг спутников с заданной вероятностью.

## **Глава 2. Исследование алгоритма управления движением группы спутников с помощью аэродинамической силы**

Как уже упоминалось в главе 1.2 аэродинамическую силу можно разделить на две составляющие – это сила сопротивления, направленная против вектора скорости, и аналог "подъемной" силы, которая перпендикулярна плоскостям, с которыми сталкиваются молекулы атмосферы. На низких околоземных орбитах взаимодействие воздуха со спутником таково, что максимальное значение силы сопротивления почти на порядок больше, чем значение "подъемной" силы, поэтому, как правило, при разработке алгоритмов управления ей пренебрегают. Однако это приводит к управляемому движению только в плоскости орбиты, в то время как движение вне плоскости остается свободным, что делает недостижимыми целый ряд относительных траекторий, в том числе стыковки. В второй части работе используется модель аэродинамической силы, учитывающая как силу сопротивления, так и небольшую по величине "подъемную" силу, что позволяет получить полностью управляемое относительное движение группы спутников.

Впервые подход к управлению с помощью аэродинамической силы сопротивления был предложен в 1986 году Леонардом [19] в предположении дискретного изменения эффективного сечения спутников, летящих в группе. Он предложил алгоритм управления групповым полетом с помощью аэродинамической силы на основе пропорционально-дифференциального (ПД) регулятора. Кумар, Банг и Тахк в работе [20] добавили интегральную часть, что позволило уменьшить энергетические затраты для совершения маневра. С технической точки зрения проще реализовать релейное управление, когда спутник может принимать только два угловых положения: в первом на аппарат почти не действует сила сопротивления, во втором возникает значительная сила сопротивления. Релейное управление с помощью импульсной модуляции позволяет реализовать рассчитанное по ПД- или ПИД-регулятору управляющее воздействие, однако сама модуляция приводит к ошибкам исполнения, что было показано в работе [21]. Наряду с регуляторами в литературе рассматриваются ляпуновское управление. Например, Перес и Бевилакквa [22] разработали алгоритм для управления движением спутников в нижних слоях атмосферы на основе функции Ляпунова и сравнили работу алгоритма управления для поддержания требуемой траектории в случае кеплерова движения и при воздействии возмущения со стороны второй гармоники разложения гравитационного потенциала.

В вышеупомянутых работах по управлению групповым полетом рассматривалась только сила аэродинамического сопротивления. Также в работах не исследовались переходные процессы при управлении, что представляется весьма важным аспектом их применения. В частности, для миссии может иметь ключевое значение время совершения маневра реконфигурации, а также точность поддержания заданного движения после перестроения. Настоящая работа посвящена исследованию линейно-квадратичного регулятора с точки зрения зависимости быстродействия системы от параметров алгоритмов. Во второй части работы рассматривается возмущенное движение группы спутников под воздействием второй гармоники гравитационного потенциала Земли и неточности знания плотности атмосферы, исследуется точность поддержания заданного движения с использованием линейно-квадратичного регулятора с учетом этих возмущений.

## 2.1 Модель аэродинамической силы

Запишем выражение для силы (6) покомпонентно, введя два угла  $\theta$  и  $\varphi$  для задания вектора нормали  $\mathbf{n}_i$  к одной из поверхностей пластины следующим образом (рис. 9):

$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} \sin \theta_i \\ \cos \theta_i \cos \varphi_i \\ \cos \theta_i \sin \varphi_i \end{bmatrix} \quad (36)$$

Угол  $\theta$  выбран таким образом, чтобы при  $\theta = 0$  на спутник не будет действовать аэродинамическая сила. Примем, что угол  $\theta$  изменится в пределах  $[0; \pi/2]$ , так как при  $\theta < 0$  необходимо рассматривать уже другую сторону пластины и её нормаль – молекулы атмосферы будут сталкиваться с обратной поверхностью. Для однозначности будем поворачивать пластину в сторону набегающего потока только одной стороной. Угол  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

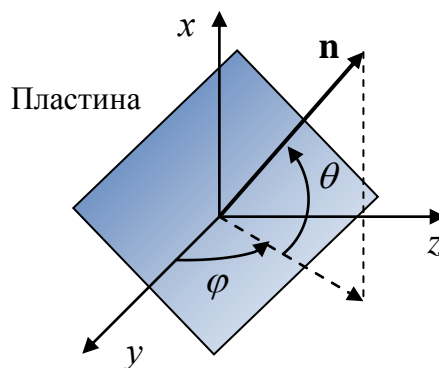


Рис. 9. Углы для задания ориентации нормали к поверхности ОСК

В орбитальной системе координат  $\mathbf{e}_v = [1 \ 0 \ 0]^T$ . Подставив значения для  $\mathbf{n}_i$  и  $\mathbf{e}_v$  в выражение для аэродинамической силы (6), получим

$$\mathbf{f}_i = k \begin{bmatrix} -2\varepsilon(\sin \theta_i)^3 + \eta(\varepsilon - 1)(\sin \theta_i)^2 + (\varepsilon - 1)\sin \theta_i \\ -\cos \theta_i \sin \theta_i (\eta - \varepsilon\eta + 2\varepsilon \sin \theta_i) \cos \varphi_i \\ -\cos \theta_i \sin \theta_i (\eta - \varepsilon\eta + 2\varepsilon \sin \theta_i) \sin \varphi_i \end{bmatrix}, \quad (37)$$

где  $k = \frac{1}{m} \rho V^2 S$ . Если ввести для упрощения следующие функции

$$\begin{aligned} p(\theta_i) &= -2\varepsilon(\sin \theta_i)^3 + \eta(\varepsilon - 1)(\sin \theta_i)^2 + (\varepsilon - 1)\sin \theta_i, \\ g(\theta_i) &= -\cos \theta_i \sin \theta_i (\eta - \varepsilon\eta + 2\varepsilon \sin \theta_i), \end{aligned} \quad (38)$$

то выражение для силы упростится до следующего:

$$\mathbf{f}_i = k \begin{bmatrix} p(\theta_i) \\ g(\theta_i) \cos \varphi_i \\ g(\theta_i) \sin \varphi_i \end{bmatrix}$$

Из записи видно, что проекция силы на ось  $Ox$  зависит только от угла  $\theta$ . Проекция силы на плоскость  $Oyz$  определяется величиной  $g(\theta_i)$ , а положение вектора определяется углом  $\varphi$ . Если принять  $\varepsilon \approx 0.1$  и  $\eta = \nu/V \approx 0.1$ , то зависимость абсолютных значений функций  $p(\theta_i)$  и  $g(\theta_i)$  выглядит так, как показано на рис. 10. Максимальное значение силы в проекции на ось  $Ox$  достигается в точке  $\theta = 90$  град, т.е. когда пластина перпендикулярна набегающему потоку, при этом  $p \approx 1.2$ . Максимум силы в проекции на плоскость  $Oyz$  меньше на порядок –  $g \approx 0.12$  при  $\theta \approx 52$  град, причем в точках  $\theta = 0$  и  $\theta = 90$  град,  $g = 0$ . Это приводит к тому, что создание силы в плоскости  $Oyz$  возможно только в случае ненулевой и не максимальной силы вдоль оси  $Ox$ .

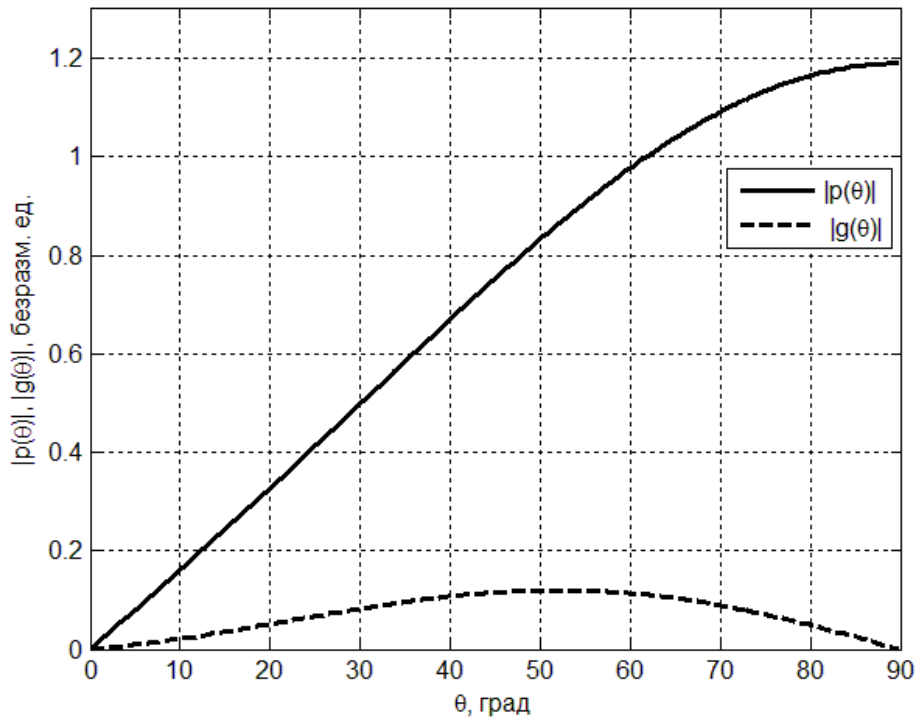


Рис. 10. Зависимость компонент аэродинамической силы от угла  $\theta$

Так как в работе рассматривается управление относительным движением двух спутников, то для управления понадобится разница аэродинамических сил, действующих на аппараты:

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 = k \begin{bmatrix} p(\theta_1) - p(\theta_2) \\ g(\theta_1) \cos \varphi_1 - g(\theta_2) \cos \varphi_2 \\ g(\theta_1) \sin \varphi_1 - g(\theta_2) \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Таким образом, разница двух аэродинамических сил задается четырьмя углами  $\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$ , которые и определяют относительное движение центров масс аппаратов. Однако, так как проекция силы на плоскость  $Oyz$  мала, как видно из рис. 3, то проекцию разности сил  $\Delta \mathbf{f}$  на эту плоскость можно увеличить за счет задания  $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ , тогда эта составляющая силы будет определяться значением  $g(\theta_1) + g(\theta_2)$ :

$$\Delta \mathbf{f} = k \begin{bmatrix} p(\theta_1) - p(\theta_2) \\ (g(\theta_1) + g(\theta_2)) \cos \varphi_1 \\ (g(\theta_1) + g(\theta_2)) \sin \varphi_1 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Из рис.11 видно, что максимальная проекция разности сил на плоскость  $Oyz$  вдвое больше чем проекция одной силы. На рис. 12 показана область возможных значений проекций  $\Delta \mathbf{f}$  на ось  $Ox$  и плоскость  $Oyz$  в нормированных

на  $k$  значениях. Так как положение проекции в  $Oy_z$  определяется углом  $\varphi_1$ , то, чтобы получить представление о возможных значениях векторов  $\Delta \mathbf{f}$  в трехмерном пространстве, нужно поворачивать фигуру на рис. 12 относительно оси ординат на 360 градусов.

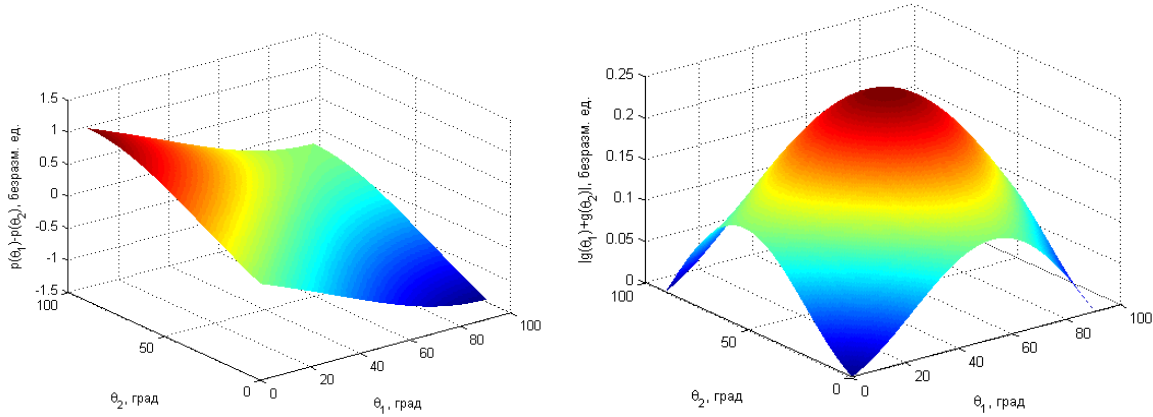


Рис. 11. Величины  $p(\theta_1) - p(\theta_2)$  и  $|g(\theta_1) + g(\theta_2)|$

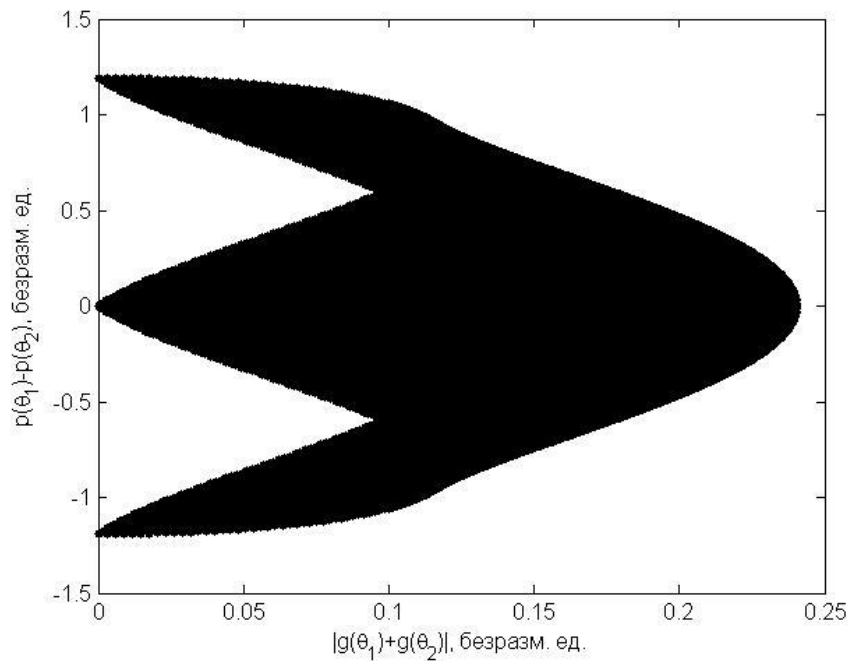


Рис. 12. Область управления

Малые спутники, летящие в группе, как правило, ограничены вычислительной мощностью бортовых компьютеров. Поэтому представляется разумным разработать относительно простые алгоритмы управления их движением. Будем считать, что на борту спутников установлена аппаратура, способная в режиме реального времени определять вектор состояния относительного движения – относительное положение и скорость. Этого можно достичь, например, используя обработку изображений с бортовой камеры [23].

Спутники с помощью бортовых датчиков автономно определяют угловое положение спутников в орбитальной системе координат и с помощью системы управления ориентацией, например, маховичной [24], обеспечивают необходимую ориентацию. Далее предположим, что между спутниками существует канал обмена информацией, по которому аппараты могут посылать как данные об угловом положении, так и управляющие команды для системы управления ориентацией. Пусть целью управления будет достижение требуемой траектории, которая строится исходя из свободного движения согласно уравнениям (1). В этих предположениях построим алгоритм управления с обратной связью на основе линейно-квадратического регулятора.

## 2.2 Алгоритм управления

Представим уравнения движения (5) в виде линейной системы:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (41)$$

где  $\mathbf{x} = [\mathbf{r}^T \mathbf{v}^T]^T$  – вектор состояния,  $A$  – матрица динамики системы, которая имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & E \\ C & D \end{bmatrix}, \quad E \text{ – единичная матрица размером } 3 \times 3,$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega^2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$B$  – матрица управления

$$B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ E \end{bmatrix},$$

$\mathbf{u}$  – вектор управления  $\mathbf{u} = \Delta \mathbf{f}$ .

Пусть требуемое движение соответствует свободному движению системы и описывается уравнениями:

$$\dot{\mathbf{x}}_d = A\mathbf{x}_d$$

Тогда можно записать линейное уравнение для описания динамики отклонения траектории от требуемой:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (42)$$

где  $\mathbf{e} = [\mathbf{x}^T - \mathbf{x}_d^T]^T$ .

### *Линейно-квадратический регулятор*

При построении линейно-квадратического регулятора рассматривается обратная связь вида  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{e}$ , обеспечивающая минимизацию функционала

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{e}^T \mathbf{Q}\mathbf{e} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u}) dt \quad (43)$$

вдоль траектории системы.  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  – положительно определенные матрицы, определяющие вес ошибок по вектору состояния и вес расхода ресурса управления соответственно.

Обратная связь, минимизирующая функционал, определяется уравнением:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{e}, \quad (44)$$

где матрица  $\mathbf{P}$  находится из решения уравнения Риккати

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0. \quad (45)$$

Задав весовые матрицы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ , можно решить уравнение Риккати (45) относительно матрицы  $\mathbf{P}$  и, зная текущий вектор ошибок траектории  $\mathbf{e}$ , вычислить вектор управления. Матрицы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  являются параметрами алгоритма и определяют качество переходных процессов. Возникает задача выбора таких матриц которые бы обеспечили требуемое быстродействие алгоритма при заданных ограничениях на управление.

### *Вычисление ориентации спутников при заданном управлении*

Пусть согласно алгоритму управления с обратной связью (44) вычислено управляющее воздействие  $\mathbf{u}$ . Возникает задача вычисления таких углов ориентации спутников  $\theta_1, \theta_2, \varphi$ , которые бы реализовали вектор  $\mathbf{u}$  с помощью разности аэродинамических сил  $\Delta \mathbf{f}$  (40). Для этого необходимо решить следующую систему нелинейных уравнений:



$$\begin{cases} p(\theta_1) - p(\theta_2) = \tilde{u}_1, \\ (g(\theta_1) + g(\theta_2)) = -\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2}, \end{cases} \quad (46)$$

где  $p(\theta)$ ,  $g(\theta)$  – функции, определенные в (38),  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/k = [\tilde{u}_1 \ \tilde{u}_2 \ \tilde{u}_3]^T$  – безразмерный вектор управления. Угол  $\varphi$  определяется из системы:

$$\cos \varphi = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{u_3}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}}$$

Аналитическое решение системы уравнений (46) достаточно громоздко, поэтому здесь оно не приводится. Система (46) в зависимости от величины вектора  $\tilde{\mathbf{u}}$  может не иметь решений, иметь единственное решение и иметь два решения. Это можно продемонстрировать графически. Если задаться параметрами аэродинамической силы  $\varepsilon \approx 0.1$  и  $\eta = v/V \approx 0.1$ , то можно построить поверхности функций  $p(\theta_1) - p(\theta_2)$  и  $|g(\theta_1) + g(\theta_2)|$ , как это сделано на рис. 11. Плоскость, задаваемая уравнением  $\tilde{u}_1 = const$  пересекается с поверхностью  $p(\theta_1) - p(\theta_2)$  вдоль некоторой кривой, как показано на рис. 13 слева. Эта кривая задает множество решений уравнения  $p(\theta_1) - p(\theta_2) = \tilde{u}_1$ . Если на этом множестве построить кривую функции  $|g(\theta_1) + g(\theta_2)|$  и найти точки пересечения с плоскостью  $\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2} = const$ , то эти точки и будут решением системы (46) (см. рис.13 справа). В случае отсутствия этих точек пересечения, система не имеет решения и расчетное управление нереализуемо. В случае двух точек пересечения, как, например, на рис.13 справа, необходимо выбрать только одно решение. Из двух решений представляется разумным выбирать то, которое соответствует меньшей сумме углов  $\theta_1 + \theta_2$ , чтобы уменьшить абсолютное значение аэродинамической силы сопротивления, действующей на спутники, и, тем самым, увеличить время жизни группы спутников.

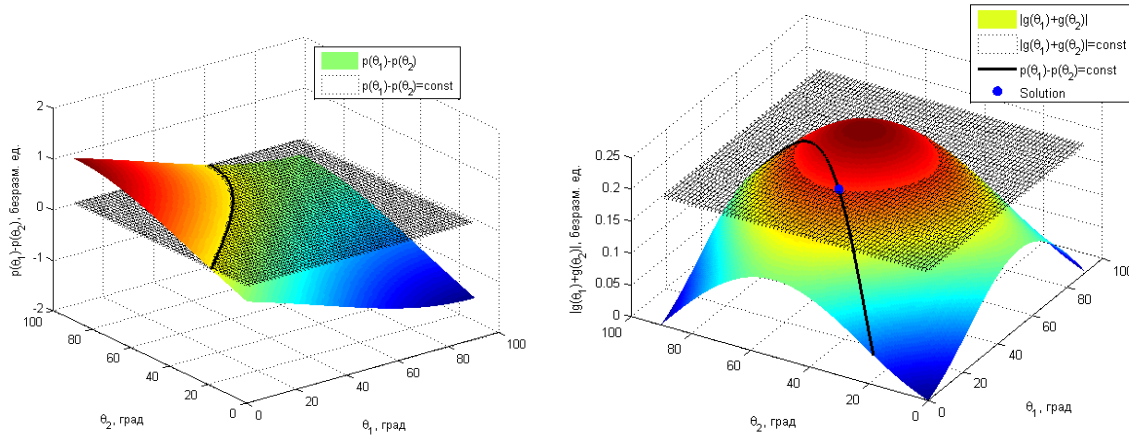


Рис. 13. Графическое решение системы (46)

Из рис. 13 можно заранее сказать, что управление будет нереализуемым, если расчетное управление будет лежать вне интервалов  $\tilde{u}_1 \notin [-1.19; 1.19]$  и  $\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2} \notin [0; 0.24]$ . Это может произойти в случае, если плохо выбраны параметры алгоритмов управления. Однако нереализуемым управление может быть и внутри указанных интервалов, если решения системы (46) не будет существовать. Область допустимых значений реализуемого управления представлена на рис. 12. Следует определиться, что делать, если вычисленное управляющее воздействие нереализуемо. Такая ситуация возможна при больших отклонениях траектории от желаемой на этапе переходных процессов.

В случае, если реализовать расчетный вектор управления  $\tilde{\mathbf{u}}$  полностью невозможно, представляется разумным постараться реализовать хотя бы какие-то его компоненты. Наибольший ресурс управления по компоненте  $\tilde{u}_1$  и, кроме того, управление по оси  $Ox$ , влияет на движение по оси  $Oz$ , как видно из уравнений движения (5). Поэтому можно отдать приоритет реализации управления по компоненте  $\tilde{u}_1$ . В случае, если  $\tilde{u}_1 \notin [-1.19; 1.19]$ , следует реализовать предельное значение  $\Delta f_1 = -1.19$  или  $\Delta f_1 = 1.19$  в зависимости от знака  $\tilde{u}_1$ , остальные компоненты  $\Delta f_2, \Delta f_3$  окажутся равными нулю. Если же  $\tilde{u}_1 \in [-1.19; 1.19]$ , но решения системы (46) нет, то можно точно реализовать  $\Delta f_1 = \tilde{u}_1$ , но при этом выбрать такие  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , удовлетворяющие  $p(\theta_1^*) - p(\theta_2^*) = \tilde{u}_1$ , при которых  $|g(\theta_1) + g(\theta_2)|$  будет максимальным. Тогда

$$\Delta f_2 = \frac{(g(\theta_1) + g(\theta_2))\tilde{u}_2}{\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2}}, \Delta f_3 = \frac{(g(\theta_1) + g(\theta_2))\tilde{u}_3}{\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2}} \quad (47)$$

В этом случае  $\Delta f_2$  и  $\Delta f_3$  будут пропорциональны расчетным значениям  $\tilde{u}_2$  и  $\tilde{u}_3$ .

### 2.3 Исследование алгоритма

При выборе параметров алгоритмов управления необходимо учитывать ограничения на значение управления и задавать их таким образом, чтобы в управлении не было насыщения при некотором заранее определенном векторе ошибок траектории. Кроме того, важной характеристикой переходных процессов является степень устойчивости – на допустимом множестве параметров алгоритмов следует выбирать те, которые обеспечивают максимальную степень устойчивости для уравнения ошибок траектории (42). В этом разделе проводится исследование алгоритма управления для выбора наилучших параметров с точки зрения обеспечения ненасыщения управления при заданных ошибках и максимизации степени устойчивости во время переходных процессов.

#### *Методика исследования алгоритмов*

Для выбора параметров ЛКР, которые бы не приводили к насыщению управления и при этом обеспечивали бы наилучшую степень устойчивости, можно воспользоваться вероятностным подходом для моделирования отклонения траектории. Предположим, что вектор отклонений  $\mathbf{e}_0$  в начальный момент времени распределен согласно нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, которая определяется ковариационной матрицей следующего вида:

$$P_0 = M(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^T)$$

Для того, чтобы задать с помощью ковариационной матрицы всевозможные траектории с вектором начальной ошибки  $\mathbf{e}_0$  исключая траектории с ненулевым дрейфом, введем корреляцию между ошибкой по скорости по оси  $x$   $e_{\dot{x}_0}$  и координатой по оси  $z$   $e_{z_0}$ :

$$\sigma_{\dot{x}_0} = -2\omega\sigma_{z_0}$$

где  $\sigma$  среднеквадратическое отклонение соответствующих компонент ошибок. Остальные компоненты вектора  $\mathbf{e}$  между собой предполагаются некоррелированы.

Модель изменения вектора ошибок задается формулой (42), что с учетом управления с обратной связью приводит к линейной системе вида:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e}$$

Тогда закон изменения ковариационной матрицы записывается через уравнение Рикатти:

$$\dot{P} = FP + PF^T \quad (48)$$

,где

$$F = A - BK$$

Если проинтегрировать матричное уравнение (48), то можно получить ковариационную матрицу ошибок в любой момент времени. Собственное число матрицы  $F$  с максимальной действительной частью определяет степень устойчивости управляемой системы.

Управление с обратной связью

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{e}$$

задает преобразование эллипсоида ошибок, определяемого матрицей  $P$ , в эллипсоид в пространстве управления

$$P_u = \mathbf{K}P\mathbf{K}^T \quad P_u = \mathbf{K}P\mathbf{K}^T \quad (49)$$

Чтобы не было насыщения управления, необходимо, чтобы этот эллипсоид находился внутри области допустимых значений разности сил  $\Delta \mathbf{f}$ . Эта область может быть получена путём вращения фигуры, изображенной на рис. 12 относительно оси ординат, как было сказано выше. Однако эта область допустимых значений управления достаточно сложная, аппроксимируем её с помощью цилиндра, описанного вокруг неё. Тогда если эллипсоид управления вписан в этот цилиндр, как изображено на рис. 14, то вероятность реализации этого управления будет высока.

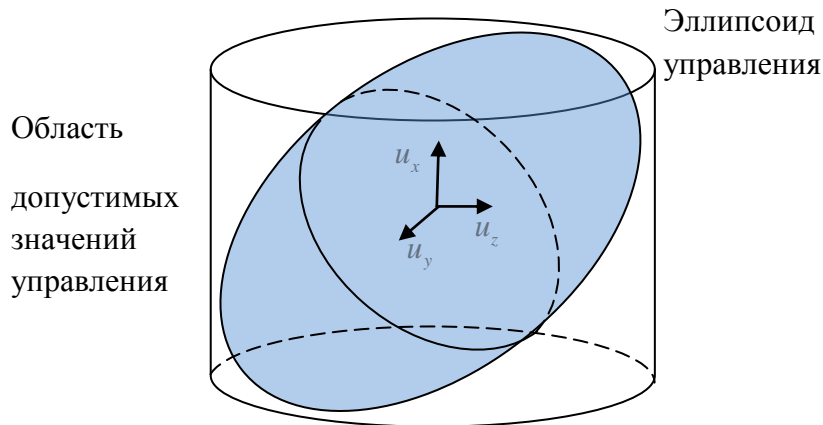


Рис. 14. Эллипсоид управления, вписанный в область реализуемых значений управления

Таким образом, при выборе параметров алгоритмов управления для обеспечения ненасыщения следует руководствоваться следующей методикой. При заданных случайных и нормально распределенных значениях начальных отклонений траектории  $\mathbf{e}_0$ , строится ковариационная матрица  $P_0$ , она используется как начальные условия для уравнения Риккати (48). В матрицу обратной связи  $K$  входят параметры алгоритмов управления – матрицы  $Q$  и  $R$ . Изменение этих параметров влияет на динамику системы и, соответственно, на изменение матрицы  $P$ . Если проинтегрировать уравнение Риккати на одном витке управляемого полета и для каждой точки рассчитать по формуле (49) матрицу для управления  $P_u$ , то нужно задать такие параметры алгоритмов, чтобы эллипсоид, определяемый матрицей  $P_u$ , в каждой точке был вписан в область допустимых значений управления. Продемонстрируем эту методику на конкретных примерах.

### ***Задание параметров системы***

Параметры орбит и характеристики самого спутника рассматриваются такими же, как в первой главе.

Для заданных параметрах можно вычислить коэффициент  $k$  в формуле аэродинамической силы (39):

$$k = \frac{1}{m} \rho V^2 S \approx 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$$

При исследовании алгоритмов управления будем предполагать, что относительный дрейф спутников в начальный момент времени равен нулю. Дело в том, что дрейф приводит к неограниченному увеличению относительного расстояния по оси  $x$ , поэтому при его наличии в первую очередь необходимо его максимально быстро устранить или свести к минимуму. Для этого на начальном этапе приложить максимальную силу по трансверсали  $\Delta f_x$  противоположного

знака с относительным дрейфом, т.е. ориентировать панели одного из спутников перпендикулярно набегающему потоку, а другой вдоль. Это достаточно очевидное управление для устранения дрейфа и в настоящей работе не рассматривается.

Рассмотрим переход с одной замкнутой относительной траектории на некоторую другую. Пусть в начальный момент отклонение траектории от опорной имеет нормальное распределение. В качестве примера примем следующие среднеквадратические отклонения:

$$\begin{aligned}\sigma_{x_0} &= \sigma_{z_0} = 100 \text{ м}, \\ \sigma_{y_0} &= 10 \text{ м}, \\ \sigma_{\dot{x}_0} &= -2\omega\sigma_{z_0}, \\ \sigma_{\dot{y}_0} &= \sigma_{\dot{z}_0} = 0.01 \text{ м/с},\end{aligned}\tag{50}$$

т.е. зададим отклонение по нормали к орбите на порядок меньше, чем в плоскости орбиты, а также свяжем между собой  $\sigma_{\dot{x}_0}$  и  $\sigma_{z_0}$  чтобы получить замкнутые относительные орбиты. Ковариационная матрица будет иметь вид:

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{x_0}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_0}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_0}^2 & \sigma_{z_0}\sigma_{\dot{x}_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_0}\sigma_{\dot{x}_0} & \sigma_{\dot{x}_0}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{y}_0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{z}_0}^2 \end{bmatrix}$$

Зададим матрицы  $Q$  и  $R$ . Матрица  $Q$  в функционале (43) является весовой матрицей для отклонения траектории, пусть для определенности она будет единичной. А матрица  $R$  является весовой для управления, так как для аэродинамической силы максимальная величина в плоскости и вне плоскости отличаются, разумно рассмотреть матрицу следующего вида:

$$R = \text{diag}(r_x, r_{yz}, r_{yz})$$

Проведем исследование, при каких значениях параметров  $r_x$  и  $r_{yz}$  на заданных ошибках начальных отклонений (50) управление не будет насыщаться, т.е.  $\tilde{u}_1 \in [-1.19; 1.19]$  и  $\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2} \in [0; 0.24]$ . На рис. 15а изображены изолинии величин  $\tilde{u}_1$  и  $\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2}$  в зависимости от параметров  $r_x$  и  $r_{yz}$ , и выделены

предельные значения, выше которых наступает насыщение. Во всей области допустимых значений управления разумно выбрать такие параметры, которые соответствуют максимальной степени устойчивости системы. На рис. 15б изображены изолинии самых правых характеристических корней уравнения. Таким образом, для таких параметров эллипсоида начальных отклонений значения  $r_x = 4.5 \cdot 10^{13}$  и  $r_{yz} = 4 \cdot 10^{14}$  управление не будет приходить в насыщение, а ошибки будут сходиться с максимальной скоростью.

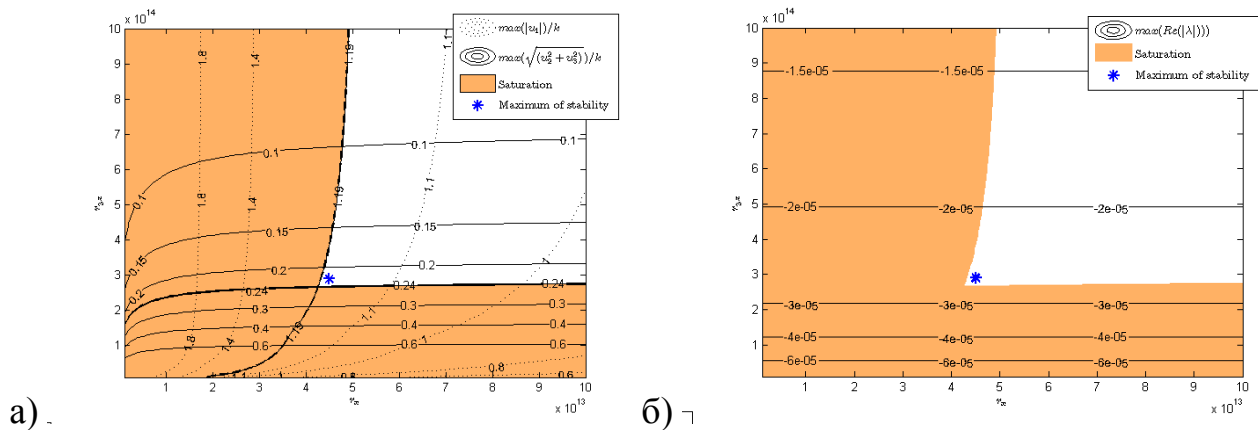


Рис. 15. Области параметров, приводящие к насыщению управления (а), и точка с максимальной степенью сходимости (б)

Зададим сначала произвольные значения констант  $c_1 - c_6$  в начальный момент времени для линейной модели (2), например,

$$c_1 = 0\text{м}, c_2 = 0\text{м}, c_3 = 200\text{м}, c_4 = 0\text{м}, c_5 = 20\text{м}, c_6 = 0\text{м} \quad (51)$$

Опорная траектория пусть задается константами  $\tilde{c}_1 - \tilde{c}_6$ :

$$\tilde{c}_1 = 0\text{м}, \tilde{c}_2 = 0\text{м}, \tilde{c}_3 = 100\text{м}, \tilde{c}_4 = 0\text{м}, \tilde{c}_5 = 10\text{м}, \tilde{c}_6 = 0\text{м} \quad (52)$$

Такие условия задают начальные отклонения траектории и скоростей:

$$\Delta x = 0\text{м}, \Delta y = 0\text{м}, \Delta z = 100\text{м}, \Delta \dot{x} = -0.23\text{м/с}, \Delta \dot{y} = 0.01\text{м/с}, \Delta \dot{z} = 0\text{м/с}$$

,при этом выполняется

$$\Delta \dot{x} = -2\omega \Delta z$$

Это означает, что выбранные начальная и опорная траектории являются частным случаем множества, задаваемого эллипсоидом с параметрами (50).

Таким образом, рассмотрим в качестве примера переход с некоторой начальной замкнутой орбиты на замкнутую опорную орбиту меньшего размера. Примем наилучшие с точки зрения сходимости параметры регулятора  $r_x = 4.5 \cdot 10^{13}$  и  $r_x = 4 \cdot 10^{14}$ . На рис. 16 показаны исходная и опорная относительные орбиты и траектория аппарата, из которого видно, что траектория аппарата постепенно приходит к опорной орбите. На рис. 17 изображены графики покомпонентных отклонений относительных координат и скоростей от опорного движения.

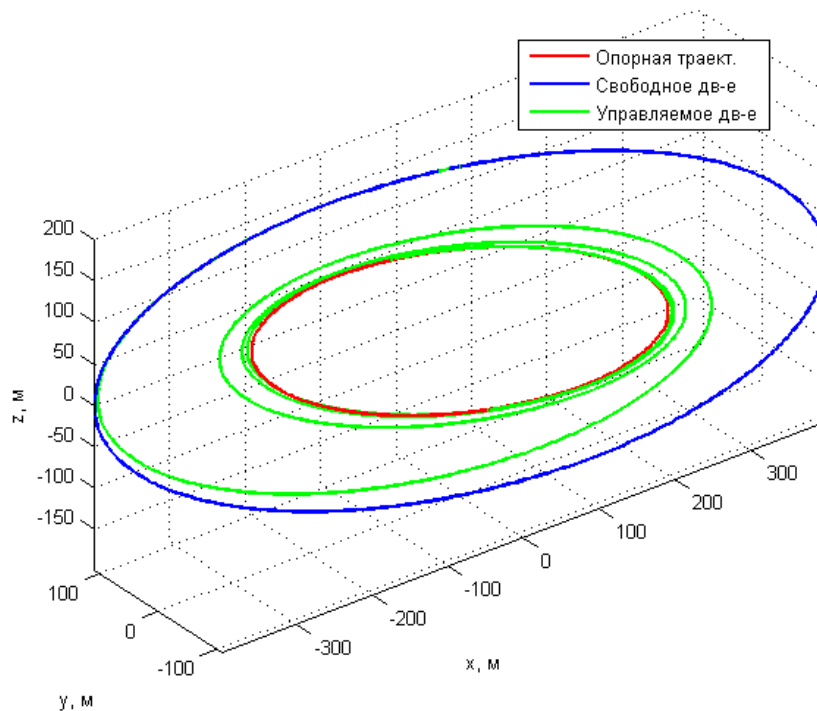


Рис. 16. Опорная траектория и управляемое движение

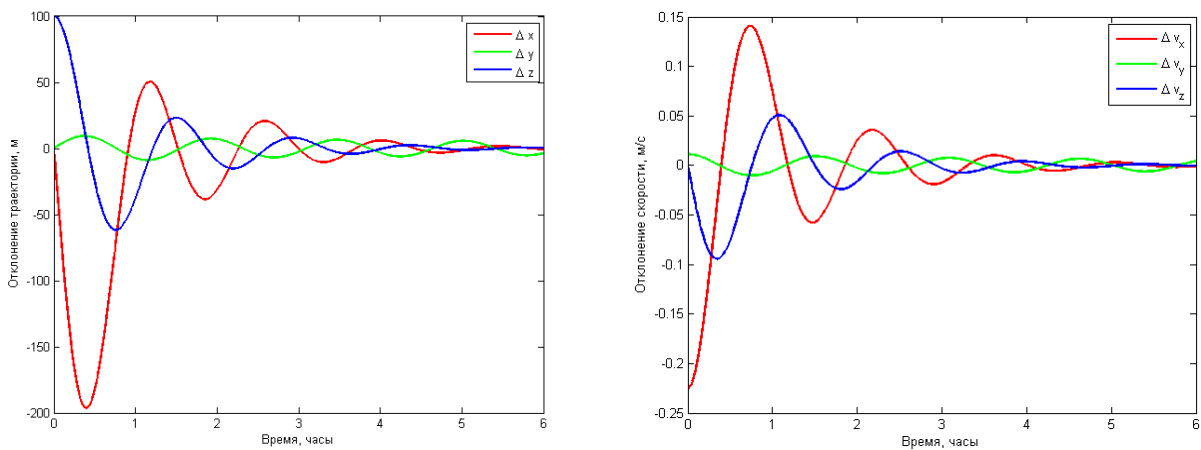




Рис. 17. Отклонение траектории и скорости от опорной орбиты

Так как рассматриваемый пример относительной траектории является частным случаем начальных отклонений, заданных эллипсоидом с параметрами (50), управление с  $r_x = 4.5 \cdot 10^{13}$  и  $r_{yz} = 4 \cdot 10^{14}$  не будет насыщаться, т.е. выходить за пределы  $\tilde{y}_1 \in [-1.19; 1.19]$  и  $\sqrt{\tilde{y}_2^2 + \tilde{y}_3^2} \in [0; 0.24]$ , что можно увидеть из рис. 18а. Однако реализованное управление будет несколько отличаться от расчетного, так как расчетное управление может быть вне области допустимой области управления. На рис. 18б представлено реализованное управление, а на рис. 19а разность расчетного и реализованного управлений. Расчетное и реализованное не совпадают, когда расчетное управление выходит из области, представленной на рис. 19б. В этом случае алгоритм нацелен наиболее близко реализовать компоненту управления по оси  $Ox$ , а по остальным осям управление вычисляется по формулам (47). Каждому значению реализованного управления соответствует набор углов, задающих ориентацию векторов нормали к плоским частям спутника, записанных в орбитальной системе координат. Углы представлены на рис. 20.

Так как требуемая ориентация обеспечивается с помощью бортовой системы управления, например, маховичной, то существует ограничение на максимальное угловое управляющее воздействие. Поэтому в случае, если разность расчетных углов ориентации на двух последовательных шагах управления превышает максимально допустимое значение, определяемой системой управления ориентации, то реализуются не расчетное а максимально возможное приращение углов, вследствие чего также возникают ошибки управления. В частности, вследствие требуемых, но нереализуемых быстрых поворотов возникает ошибка по управлению по компоненте  $Ox$ , что видно из рис. 19а. В настоящей работе угловое движение детально не моделируется, поэтому считается, что угловое положение обеспечивается системой управления ориентации точно за исключением быстрых поворотов, а максимальное угловое управляющее ускорение принято за  $1 \text{ град/с}^2$ .

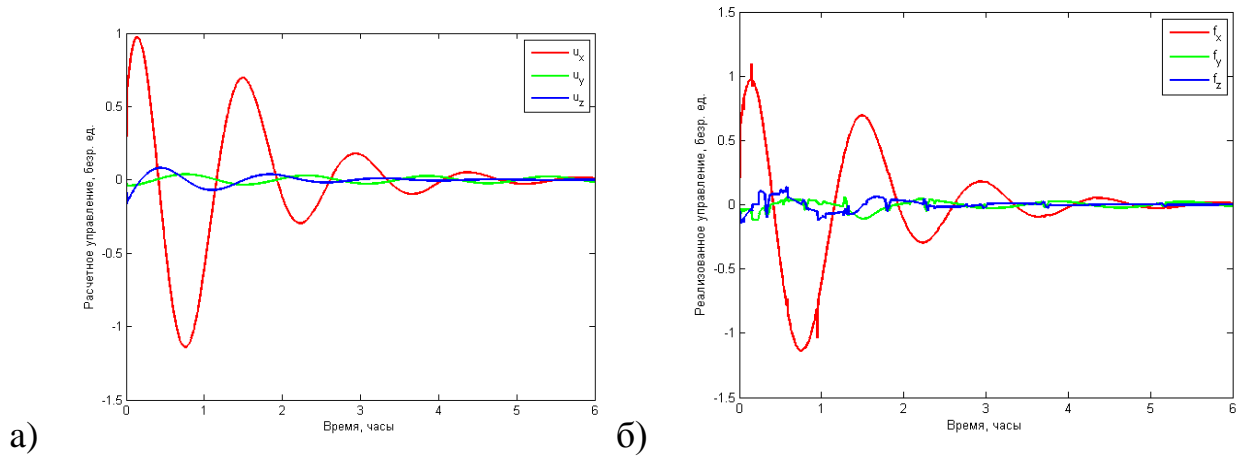


Рис. 18. Расчетное (а) и реализованное (б) управление

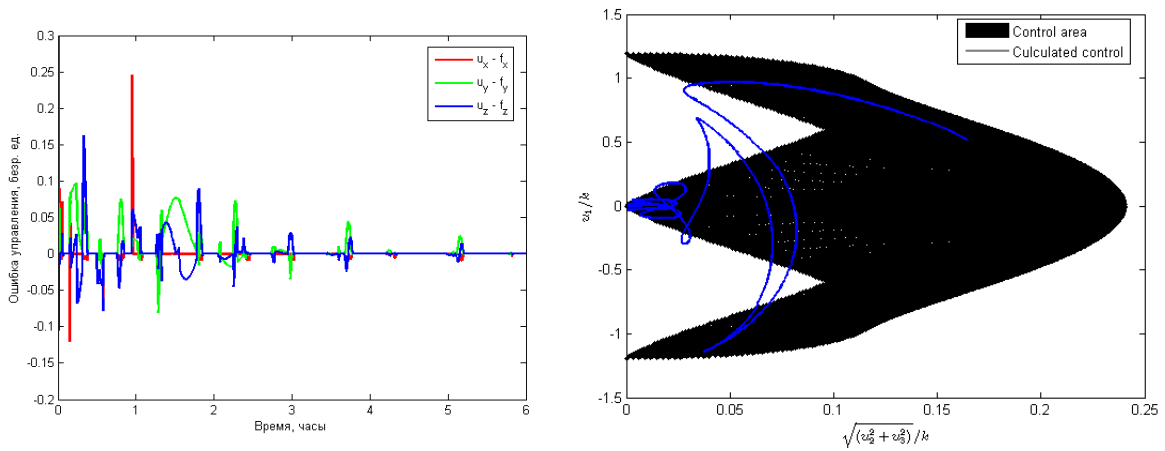


Рис. 19. Разница расчетного и реализованного управления и область управления

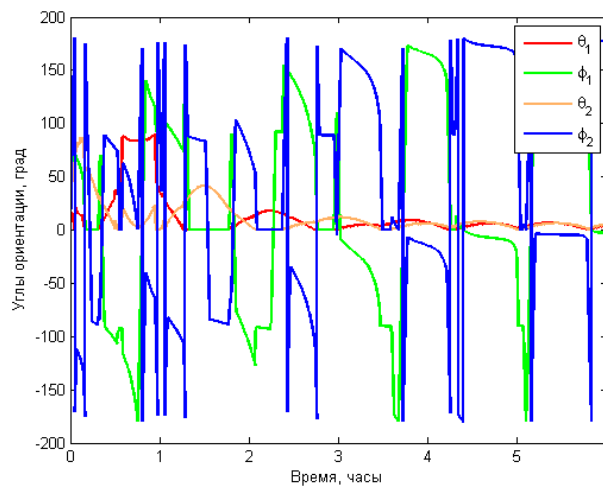


Рис. 20. Углы ориентации для задания нормалей к плоскости для двух спутников

На рис. 21 для примера продемонстрировано изменение компонент вектора нормали к плоской части спутника в орбитальной системе координат (рис. 21а) и соответствующий ему годограф вектора нормали для первого спутника. Из рис. видно, что в начале моделирования вектор нормали почти сонаправлен оси  $Ox$ ,

когда требуется реализовать большое управляющее воздействие, но после вектор нормали становится параллелен плоскости  $Oyz$ , когда расчетное управление мало.

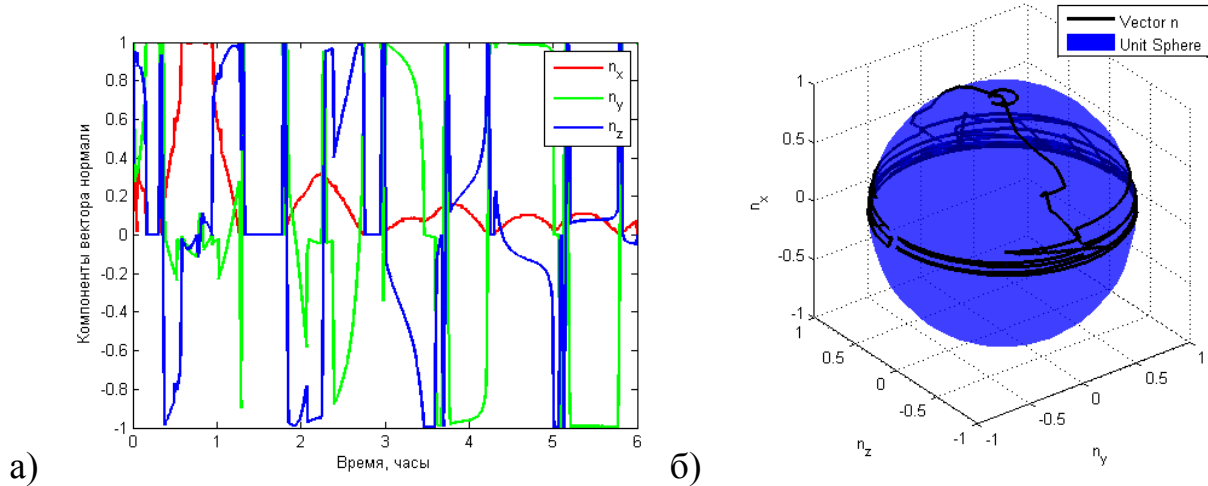


Рис. 21. Компоненты вектора нормали 1-го спутника (а) и траектория конца вектора на единичной сфере (б)

Рассмотрим, как будут меняться параметры ЛКР  $r_x$  и  $r_{yz}$  при изменении начальных отклонений траектории. В качестве примера, будем изменять параметры отклонения по координатам  $x$  и  $z$ :  $\sigma_{x_0} = \sigma_{z_0} = \sigma$ . При выборе параметров  $r_x$  и  $r_{yz}$  из допустимой области, не приводящей к насыщению, будем выбирать те, которые соответствуют максимальной степени устойчивости, как изображено на рис. 15. На рис. 22 представлен график параметров управления при изменении отклонения траектории  $\sigma$  в пределах от 50 до 500 м. Эта зависимость показывает, какие параметры следует выбирать, чтобы расчетное управление при заданных начальных отклонениях не превышало реализуемого управления. Используя разработанную методику можно построить подобные зависимости для любых возможных начальных отклонений как по координатам так и по скоростям, например, зная ошибки отделения от ракетносителя и заложить на борт соответствующие параметры линейно-квадратичного регулятора.

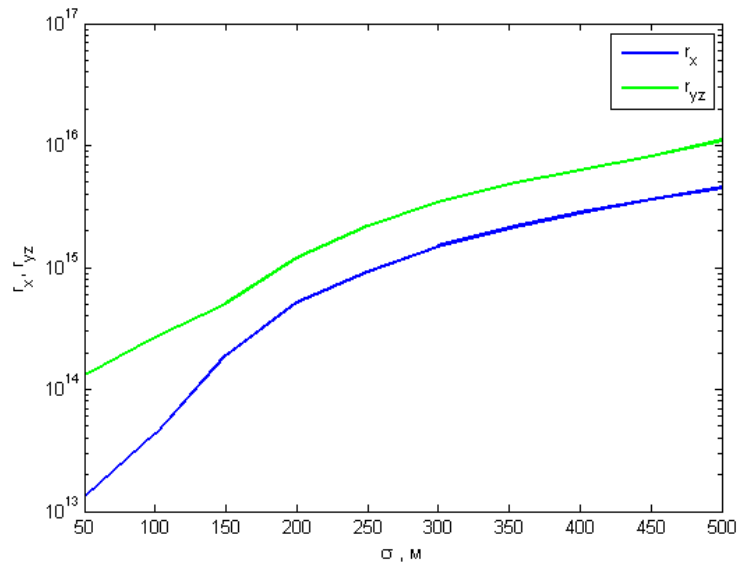


Рис. 22. Параметры ЛКР в области допустимого управления с максимальной степенью устойчивости

### ***Влияние возмущений***

На низких околокруговых орбитах источниками возмущений относительного движения группы спутников являются вторая гармоника  $J_2$  разложения гравитационного поля Земли и влияние слабой эллиптичности орбит. Однако наибольшие возмущения на движение вносят ошибки управления, вызванные неточным знанием плотности атмосферы. Плотность атмосферы на низких околоземных орбитах может меняться в несколько раз вдоль круговой орбиты и зависит от освещенности атмосферы в точке полета, а также от активности Солнца. Модели плотности атмосферы, например, ГОСТ "Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полётов искусственных спутников Земли" [25], всегда имеют некоторую ошибку, и использование этих моделей для расчета плотности на возможно слабом бортовом компьютере может вызвать затруднения. Поэтому исследуем движение двух спутников в случае, если алгоритм управления построен по линейной модели (11) с постоянной плотностью атмосферы, а моделируемое движение учитывает эллиптичность орбиты и вторую гармонику  $J_2$ , а также плотность атмосферы меняется согласно модели [25].

Для демонстрации работы алгоритма управления возьмем те же параметры моделирования, что и для примера управления с использованием линейной модели. Интегрирование орбитального движения каждого спутника производится в инерциальной системе координат, а вычисление относительного движения получается путем перевода разницы положений и скоростей в орбитальной системе координат. Уравнения движения в инерциальной системе координат записываются следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = -\frac{\mu}{R_i^3} \mathbf{R}_i + \mathbf{D}_i^{J_2} + \mathbf{F}_i^a,$$

$$\mathbf{D}_i^{J_2} = \frac{\delta}{R_i^5} \left( \frac{5Z_i^2}{R_i^2} - 1 \right) \mathbf{R}_i - 2 \frac{\delta}{R_i^5} \mathbf{Z}_i,$$

где  $\mathbf{R}_i = [X_i, Y_i, Z_i]$  – радиус-вектор  $i$ -го спутника в ИСК,  $\mathbf{D}_i^{J_2}$  – вектор возмущений от второй гармоники разложения гравитационного поля Земли,  $\delta = 3J_2\mu R_E^2 / 2$ ,  $J_2 = 1082.6 \cdot 10^{-6}$  – вторая гармоника разложения гравитационного поля Земли,  $R_E = 6.378 \cdot 10^6$  м – средний радиус Земли,  $\mathbf{F}_i^a$  – аэродинамическая сила в ИСК, действующая на  $i$ -й спутник. Аэродинамическая сила вычисляется по формуле (6), где все векторы должны быть записаны в ИСК, а плотность атмосферы считается непостоянной и рассчитывается согласно модели ГОСТ. Относительное положение  $\mathbf{r}$  и относительная скорость  $\mathbf{v}$  двух спутников в орбитальной системе координат вычисляется по формулам:

$$\mathbf{r} = G(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1),$$

$$\mathbf{v} = G \left[ (\dot{\mathbf{R}}_2 - \dot{\mathbf{R}}_1) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \right], \quad (53)$$

где  $G$  – матрица перехода из ИСК в ОСК,  $\boldsymbol{\omega}$  – орбитальная угловая скорость, записанная в ИСК.

Для расчета плотности по модели ГОСТ необходимо задать момент старта моделирования, уровень солнечной активности  $F_0$ , среднесуточный индекс солнечной активности, планетарные среднесуточные индексы геомагнитно возмущенности и другие параметры модели. Для определенности, рассмотрим дату старта  $t_0$  – 1 января 2012 года 0 часов 00 минут. Для этой даты известны все эти параметры модели, в частности  $F_0 = 125 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м<sup>2</sup> · Гц), что характеризуется как средний уровень солнечной активности.

Наклонение орбиты примем за  $i = 51.7^\circ$ , для первого спутника зададим такие начальные условия, при которых в центральном поле притяжения он двигался бы по круговой орбите, т.е. в плоскости орбиты зададим скорость  $\dot{\mathbf{R}}_1(t_0) = \sqrt{\mu / (R_E + h)}$  перпендикулярно радиус-вектору, а начальные условия для второго аппарата в соответствии с константами (51). Векторы положения и скорости второго спутника в ОСК будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{r}(t_0) = \begin{bmatrix} c_2 + 2c_2 + c_4 \\ c_6 \\ 2c_1 + c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(t_0) = \begin{bmatrix} -3c_1\omega - 2c_3\omega \\ \omega c_5 \\ 2c_2\omega \end{bmatrix}$$

,а векторы положения и скорости в ИСК вычисляются так:

$$\mathbf{R}_2(t_0) = \mathbf{R}_1(t_0) + G^T \mathbf{r}(t_0),$$

$$\dot{\mathbf{R}}_2(t_0) = \dot{\mathbf{R}}_1(t_0) + G^T \mathbf{v}(t_0) + \boldsymbol{\omega} \times (G^T \mathbf{r}(t_0)).$$

В результате интегрирования уравнений движения для двух спутников с заданными начальными условиями методом Рунге-Кутты 4-го порядка с переменным шагом и контролем точности получаются траектории и скорости движения в ИСК, которые пересчитываются в относительные по формулам (53). И эти значения подаются в алгоритм управления (43), построенном по линейной модели и предположении постоянной плотности атмосферы. На рис. 23 представлены относительные траектории двух аппаратов при перелете с заданной согласно (51) относительной траектории на опорную, согласно (52).

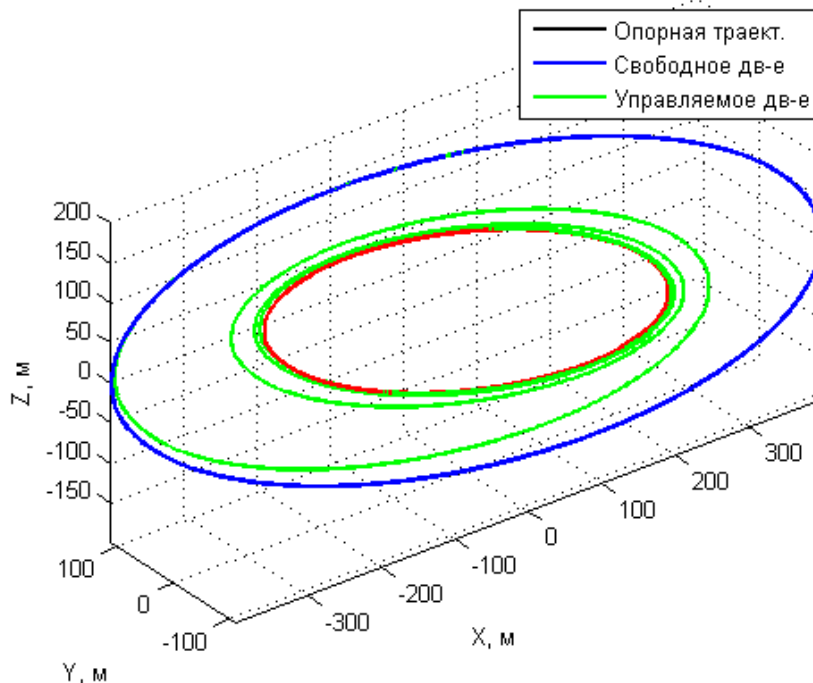


Рис. 23. Опорная траектория и управляемое движение

Управляемое движение, изображенное на рис. 23 несколько отличается от траектории, изображенной на рис. 16, построенной по линейной модели. На рис. 24 представлена покоординатная разность траекторий управляемого движения по линейной модели и по полной. Плотность атмосферы при движении по орбите согласно модели ГОСТ отличается от постоянной  $10^{-11}$  кг/м<sup>3</sup>, как принято в алгоритме управления, почти в 1,5 раза в некоторых точках орбиты (рис. 25). Высота орбиты колеблется с амплитудой 12 км на витке вследствие нецентральности гравитационного поля (рис. 26), а также плавно уменьшается под действием торможения о верхние слои атмосферы (около 0.1 км за 6 часов).

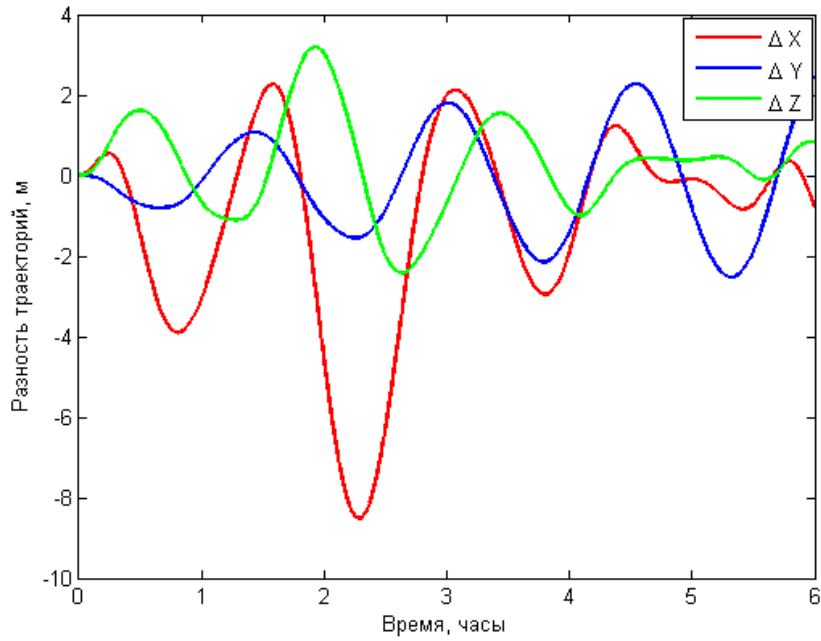


Рис. 24. Опорная траектория и управляемое движение

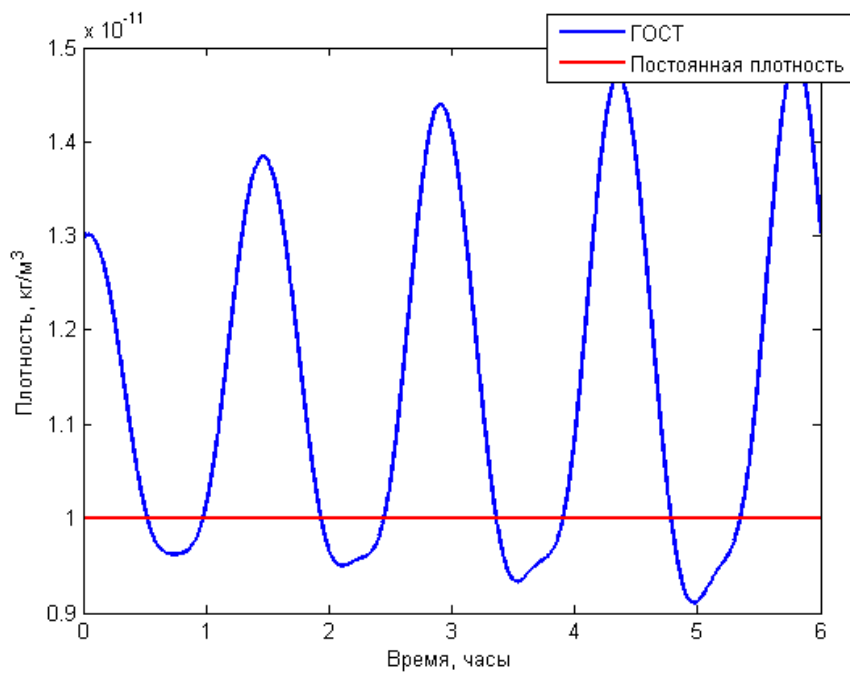


Рис. 25. Плотность атмосферы по модели ГОСТ и принятая постоянная плотность

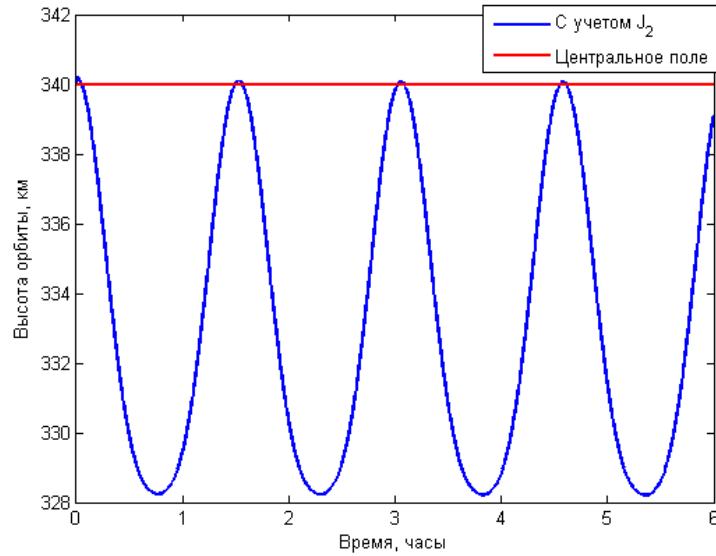


Рис. 26. Высота орбиты в центральном поле и с учетом полярного сжатия

Вариации плотности атмосферы вдоль орбиты приводят к неточной реализации расчетного управления даже в случае, если существует точное решение системы (46). На рис. 26 представлен график разности расчетного управления и реализованного с учетом актуальной плотности атмосферы в текущей точке. А на рис. 27 приведена область допустимого управления и расчетное управление, которое несколько отличается от примера с постоянной плотностью и центральным полем (см рис. 19).

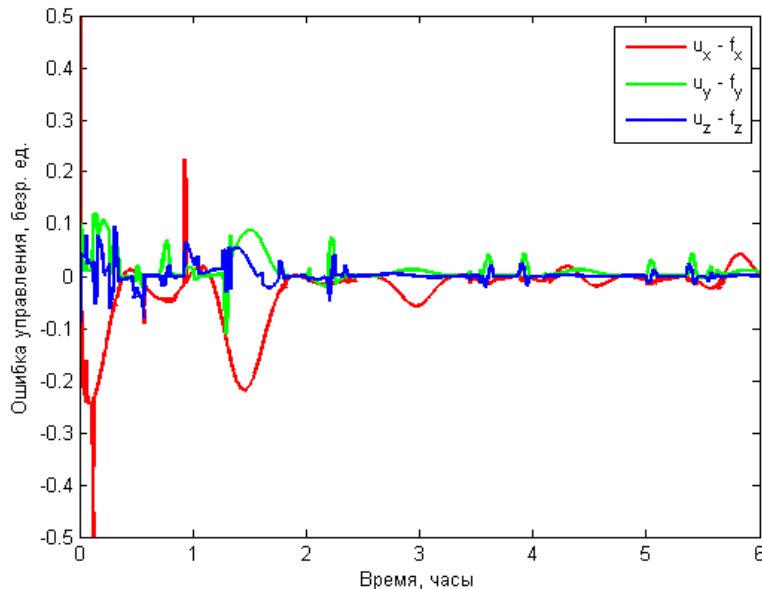


Рис. 26. Ошибки управления



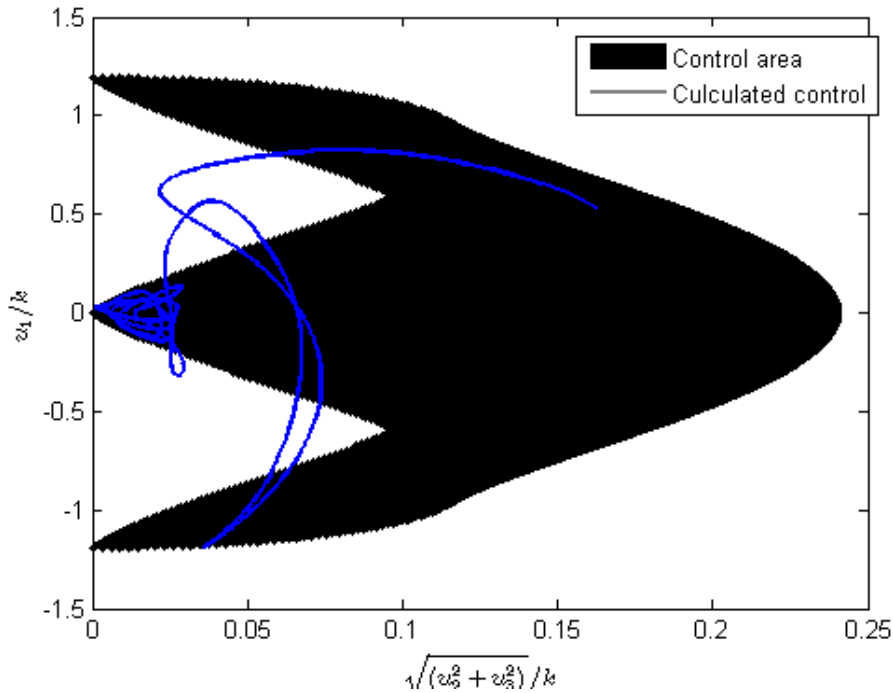


Рис. 27. Область допустимого управления и расчетное управление

Несмотря на введенные модели плотности атмосферы и учет нецентральности гравитационного поля моделирование показало, что достаточно простой алгоритм управления на основе ЛКР с принятой постоянной плотностью атмосферы приводит спутники на требуемую относительную траекторию. Возникает вопрос насколько можно ошибиться в величине постоянной плотности атмосферы и при этом алгоритм будет приводить отклонения траектории к нулю. Для этого проведем серию численных экспериментов с одинаковыми начальными условиями, но различными значениями плотности атмосферы, заложенной в алгоритм управления. Возьмем те же начальные условия, что и в примере выше и будем варьировать плотность атмосферы в алгоритме управления, остальное оставляя неизменным. В качестве интегральной характеристики работы алгоритма примем функционал (43) с конечным временем  $T$ :

$$J = \int_0^T (\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad J = \int_0^T (\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

Чтобы сравнить работу алгоритма при различных значениях плотности рассчитаем отношение  $J$  к функционалу  $J_0$  для работы алгоритма без учета возмущений и с постоянной плотностью. На рис. 28 представлен график отношения  $J / J_0$  изменяющемся значении постоянной плотности, из которого видно, что при значении  $\rho < 9 \cdot 10^{-12}$  кг/м<sup>3</sup> алгоритм перестает работать

вследствие насыщения управления, траектория расходится (рис. 29а). Однако при  $\rho > 10^{-11}$  значение  $J / J_0$  начинает монотонно и плавно увеличиваться. Это можно объяснить тем, что выбранные коэффициенты алгоритма (в нашем случае  $r_x = 4.5 \cdot 10^{13}$  и  $r_{yz} = 4 \cdot 10^{14}$ ) уже не обеспечивают максимальную степень устойчивости. Траектория приближается к опорной медленнее (рис. 29б), а значит за одинаковое время  $J$  будет больше. Поэтому при увеличении параметра плотности атмосферы требуется выбирать соответствующие коэффициенты алгоритма, однако при этом следить за ненасыщением управления.

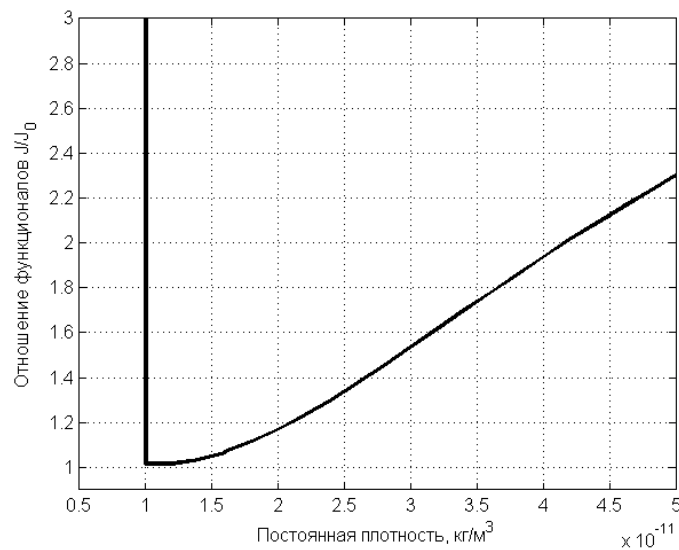


Рис. 28. Отношение функционала при изменении плотности

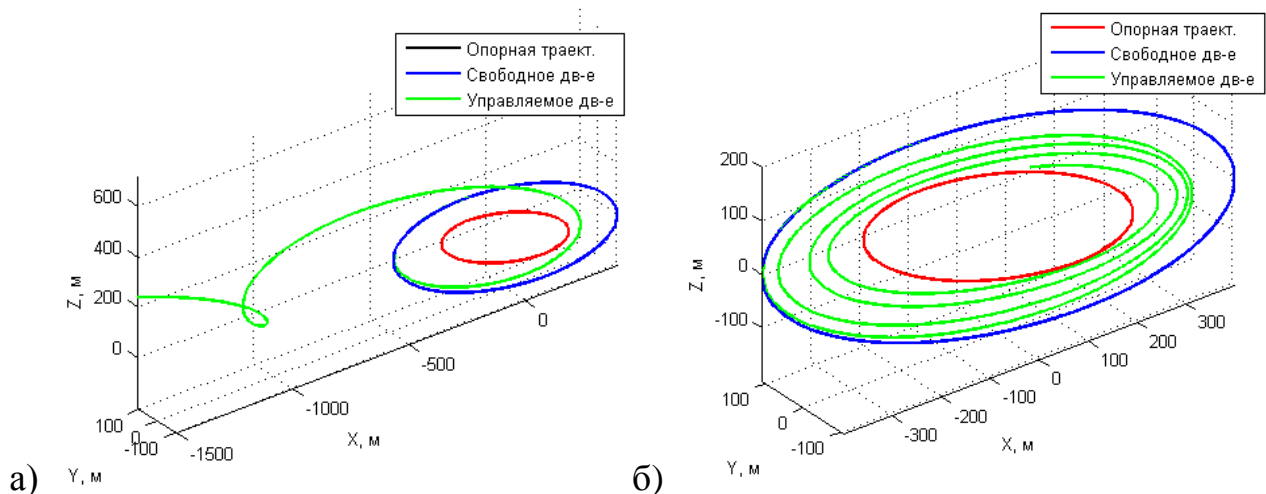


Рис. 29. Относительные траектории при  $\rho = 6 \cdot 10^{-12}$   $\text{кг/м}^3$  (а) и  $\rho = 5 \cdot 10^{-11}$   $\text{кг/м}^3$

Таким образом, численное моделирование показало, что найденные параметры алгоритма с помощью разработанной методики исследования обеспечивают сходимость отклонения траектории только в случае, если заданная

в алгоритме плотность атмосферы больше чем реальная. В этом случае обеспечивается ненасыщение управления, однако чем больше ошибка в знании плотности, тем медленнее сходимость.

### **Заключение к Главе 2**

Популярность групповых полетов микро- и наноспутников неизбежно приводит к необходимости поиска простых и дешевых способах управления. Наиболее естественным на низких околоземных орбитах кажется использование аэродинамических сил. Настоящая работа показала, что использование простой модели аэродинамической силы, которая учитывает "подъемную" составляющую, позволяет управлять относительным движением по всем трем координатам. При этом в алгоритме управления на борту спутников могут использоваться грубые модели относительного движения и плотности атмосферы, что значительно упрощает их вычислительную сложность. Предложенная методика исследования позволяет найти такие параметры алгоритмов управления с обратной связью, которые обеспечат ненасыщение управления при заданных предельных отклонениях траектории от требуемой. Для конкретного примера использования линейно-квадратического регулятора было показано, что плотность атмосферы, принятая в алгоритме, должна быть больше реальной плотности для обеспечения ненасыщения управления и сходимости отклонения траектории.

## Заключение

В настоящей работе было проведено исследование возможности управления относительным движением спутников в группе с помощью аэродинамической силы сопротивления. Показано, что данное управление возможно для использования ряда задач.

Для линейной модели полета были построены 2 типа алгоритма для превращения столкновения спутников, летящих в групповом полете. Данные алгоритмы обеспечивают облет запретной зоны с заданной вероятностью. Исследовано зависимость насыщения управления от начала времени маневрирования.

Рассмотрена модель аэродинамической силы, которая учитывает "подъемную" составляющую. Показано, что данная модель позволяет управлять относительным движением по всем трем координатам. Для конкретного маневра было показано, что ошибка по всем трем осям уменьшается с течением времени.

Предложена методика исследования алгоритма позволяющая найти такие параметры, которые обеспечивают ненасыщение управления с максимальной степенью устойчивости системы при заданных предельных отклонениях траектории от требуемой.

Так как основное влияние на относительное движение низкой околоземной орбите оказывает вторая гармоника разложения поля Земли, были рассмотрены уравнения, учитывающие это возмущения. Рассмотрено движение с ошибками управления, вызванные неточным знанием плотности атмосферы. Для конкретного маневра было показано, что плотность атмосферы, принятая в алгоритме, должна быть больше для обеспечения ненасыщения управления и сходимости отклонения траектории.

## Список литературы

1. Peck M.A. et al. Spacecraft Formation Flying Using Lorentz Forces // *J. Br. Interplanet. Soc.* 2007. Vol. 60. P. 263–267.
2. Schaub H. et al. Challenges and Prospects of Coulomb Spacecraft Formation Control of the Astronautical Sciences // *J. Astronaut. Sci.* 2004. Vol. 52. P. 169–193.
3. King L.B., Parker G.G. Spacecraft Formation Flying Using Inter-vehicle Coulomb Forces // *NASA tech. rep. NASA/NIAC*, 2002. P. 103.
4. Ivanov D., Ovchinnikov M., Shestakov S. Satellite formation flying control by mass exchange // *Acta Astronaut. Elsevier*, 2014. Vol. 102. P. 392–401.
5. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова Думка, 1984. 187 p.
6. Maclay C.T. Satellite Station-Keeping of the ORBCOMM Constellation Via Active Control of Atmospheric Drag: Operations, Constraints, and Performance // *Adv.Astronaut.Sci.* 2005. Vol. 120. P. 763–773.
7. De Ruiter A., Lee J., Ng A. A Fault-Tolerant Magnetic Spin Stabilizing Controller For The JC2Sat-FF Mission // *AIAA Guid. Navig. Control Conf. Exhib.* Honolulu, Hawaii, 18– 21 August 2008. AIAA-2008-7486.
8. Slater G.L., Byram S.M., Williams T.W. Collision Avoidance for Satellites in Formation Flight // *J. Guid. Control. Dyn.* 2006. Vol. 29, № 5. P. 1140–1146.
9. Bombardelli C., Hernando-Ayuso J. Optimal Impulsive Collision Avoidance in Low Earth Orbit // *J. Guid. Control. Dyn.* 2015. Vol. 38, № 2. P. 217–225.
10. Qi Y., Jia Y. Active collision avoidance manoeuvre design based on equidistant interpolation // *Acta Astronaut. Elsevier*, 2011. Vol. 69, № 11-12. P. 987–996.
11. Huang H., Zhuang Y. Optimal satellite formation reconfiguration using co-evolutionary particle swarm optimization in deep space // *Acta Astronaut. Elsevier*, 2015. Vol. 113. P. 149–163.
12. Lee D., Sanyal A.K., Butcher E. a. Asymptotic Tracking Control for Spacecraft Formation Flying with Decentralized Collision Avoidance // *J. Guid. Control. Dyn.* 2015. Vol. 38, № 4. P. 587–600.
13. Schlanbusch R., Kristiansen R., Nicklasson P.J. Spacecraft formation reconfiguration with collision avoidance // *Automatica. Elsevier Ltd*, 2011. Vol. 47, № 7. P. 1443–1449.
14. Jochim E.F., Fiedler H., Krieger G. Fuel consumption and collision avoidance strategy in multi-static orbit formations // *Acta Astronaut. Elsevier*, 2011. Vol. 68, № 7-8. P. 1002–1014.
15. Hill G.W. Researches in Lunar Theory // *Am. J. Math.* 1878. Vol. 1. P. 5–26.

16. Schweighart S., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // *J. Guid. Control. Dyn.* 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
17. Ногин В.Д. Введение в оптимальное управление. Учебно-методическое пособие. СПб.: Изд-во “ЮТАС,” 2008. 92 p.
18. Ivanov D. et al. Analytical study of microsatellite attitude determination algorithms // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 116. P. 339–348.
19. Leonard C.L. Formation Keeping of Spacecraft via Differential Drag // Master Thesis, Massachusetts Inst. Technol. 1986.
20. Kumar B.S., Ng A., Bang-Bang A. Control Approach to Maneuver Spacecraft in a Formation With Differential Drag // *Proc. AIAA Guid. Navig. Control Conf. Exhib.* AIAA Pap. No.2008-6469, Honolulu, Hawaii, August 2008.
21. Zeng G., Hu M., Yao H. Relative Orbit Estimation and Formation Keeping Control of Satellite Formations in Low Earth Orbits // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2012. Vol. 76. P. 164–175.
22. Perez D., Bevilacqua R. Lyapunov-based Spacecraft Rendezvous Maneuvers Using Differential Drag // *AIAA-2011-6630 Pap.* AIAA Guid. Dyn. Control Conf. 2011, Portland, OR.
23. Ivanov D. et al. Satellite relative motion determination during separation using image processing // *Int. J. Sp. Sci. Eng.* 2014. Vol. 2, № 4. P. 365–379.
24. Ovchinnikov M.Y. et al. Development, integrated investigation, laboratory and in-flight testing of Chibis-M microsatellite ADCS // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2014. Vol. 93. P. 23–33.
25. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полётов искусственных спутников Земли; ГОСТ Р 25645.000-2001.