Московский физико-технический институт (ГУ)
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Исследование алгоритма управления движением группы спутников с помощью аэродинамической силы

Кушнирук М.С.

Научный руководитель:
Иванов Д.С.

Содержание

Введение

- Появление малых спутников
- Увеличение кол-ва миссий требующих поддержания спутников на близком расстоянии
- Повышенный интерес к алгоритмам управления без расхода рабочего тела (Например, с помощью аэродинамической силы)
  - Leonard C.L. Formation Keeping of Spacecraft via Differential Drag // Master Thesis, Massachusetts Inst. Technol. 1986
  - Kumar, B. S., and Ng, A., A Bang-Bang Control Approach to Maneuver Spacecraft in a Formation with Differential Drag, // Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Honolulu, Hawaii, August 2008
  - Zeng G., Hu M., Yao H. Relative Orbit Estimation and Formation Keeping Control of Satellite Formations in Low Earth Orbits // Acta Astronaut. Elsevier, 2012. Vol. 76. P. 164–175

Группа спутников OrbComm

Принцип управления с помощью аэродинамической силы

- Рассматривается два спутника, летящих в группе, состоящие из центральной части и пластин (солнечных батарей)
- При изменении ориентации меняется площадь сечения относительно набегающего потока
- Возникает разница между действующими на два спутника аэродинамическими силами

Постановка задачи

- Во время переходных процессов или свободного движения возможно опасное сближение или столкновение спутников
- Необходимо обеспесить безопасную область
- Задача управления - избежать попадания спутника внутрь заданной области
- После маневра включается управление, возвращающее на заданную траекторию, если это необходимо.

Уравнения относительного движения

Уравнения Хилла и их решения:

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} + 3\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \mathbf{f}.$$

При $\mathbf{f} = 0$

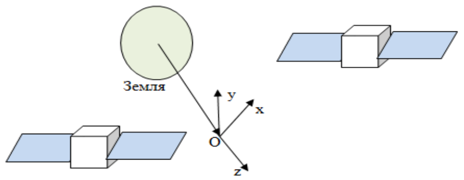
$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\dot{z}\omega, \\ \ddot{y} = -y\omega^2, \\ \ddot{z} = 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = -3c_1\omega t + 2c_2\cos\omega t - 2c_3\sin\omega t + c_4, \\ y(t) = c_5\sin\omega t + c_6\cos\omega t, \\ z(t) = 2c_1 + c_2\sin\omega t + c_3\cos\omega t. \end{cases}$$

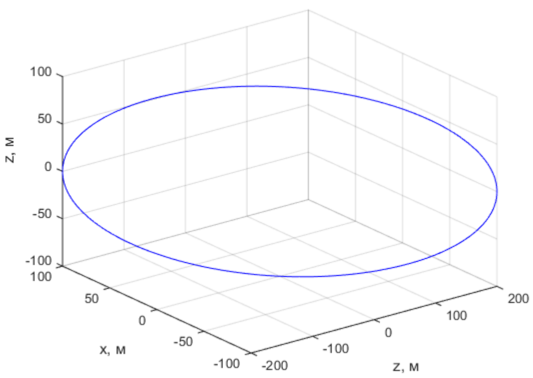
Рассмотрим движение в плосксти Oxz.

Модель аэродинамической силы:

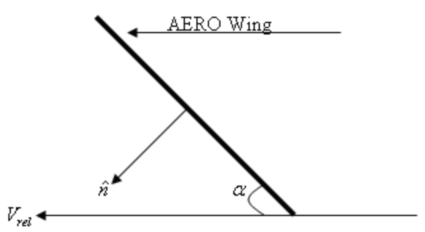
$$\begin{cases} f_x = -\dfrac{1}{2m}\rho C V^2 S\left(|\sin\alpha_2| - |\sin\alpha_1|\right) = q\sin\Delta\alpha, \\ \alpha_1\alpha_2 = 0. \end{cases}$$



Система координат



Траектория относительного движения



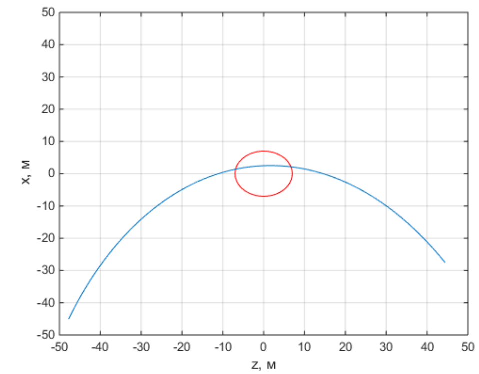
$\alpha -$ угол между платиной и набегающим потоком

Вычисление радиуса запретной зоны

$\mathbf{e}_0$ – ошибка начальных условий в момент времени t_0.

Эллипсоид ошибок:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0^T P_0^{-1} \mathbf{e}_0 = \chi^2 = const > 0, \\ \mathrm{P}(\mathrm{E}_\chi) = 1 - \varepsilon, \\ \mathrm{E}_\chi = \left\{ \mathbf{e} : \ \mathbf{e}^T P_0^{-1} \mathbf{e} \le \chi^2 \right\}, \\ \dot{P} = FP + PF^T \end{cases}$$



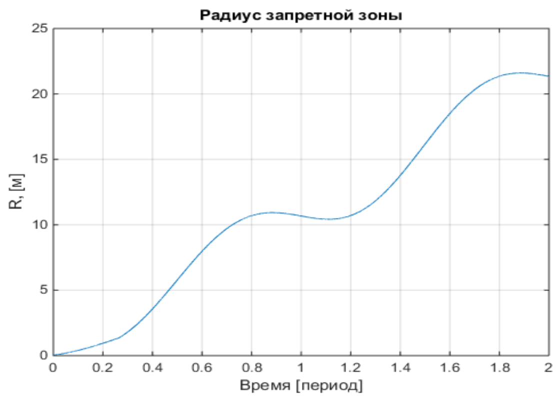
Траектория спутника через запретную зону.

Радиус запретной зоны:

$R = \max(\sigma_x, \sigma_z).$

$P(t_0) = diag(1\ см \quad 1\ см \quad 1\ см \quad 0.001\frac{см}{с} \quad 0.001\frac{см}{с} \quad 0.001\frac{см}{с}).$

$\varepsilon = 0.01.$



Зависимость радиуса запретной зоны от времени

Параметры моделирования:

$S = 0.6$ м^2,

$m = 26$ кг ,

$h = 340$ км ,

$\rho \approx 10^{-11}$ кг/м^3 ,

$q = \frac{1}{2m}\rho V^2 S \approx 1.4 \cdot 10^{-5}$ м/с^2 .

$\mathbf{x}_0 = \left[-45м \quad 0м \quad -48м \quad 0.1м/с \quad 0\,м/с \quad 0\,м/с\right]^T$

Управление по линейному закону

Пусть

$$u(t) = u_0\left(1 - \frac{t - t_0}{T - t_0}\right).$$

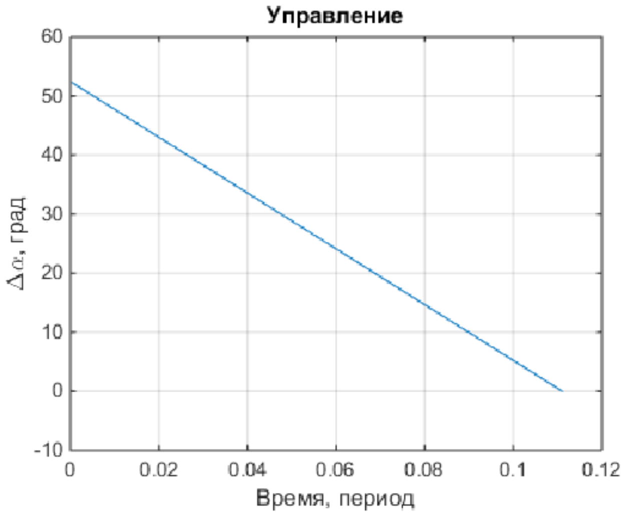
Аналитическое решение:

$$\begin{cases} x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 \sin(\omega(t - t_0)) + a_5 \cos(\omega(t - t_0)), \\ \dot{x}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + a_4 \omega \cos(\omega(t - t_0)) - a_5 \omega \sin(\omega(t - t_0)), \\ z(t) = a_6 + a_7 t + a_8 t^2 + a_9 \sin(\omega(t - t_0)) + a_{10} \cos(\omega(t - t_0)), \\ \dot{z}(t) = a_7 + a_8 t + a_9 \omega \cos(\omega(t - t_0)) - a_{10} \omega \sin(\omega(t - t_0)), \end{cases}$$

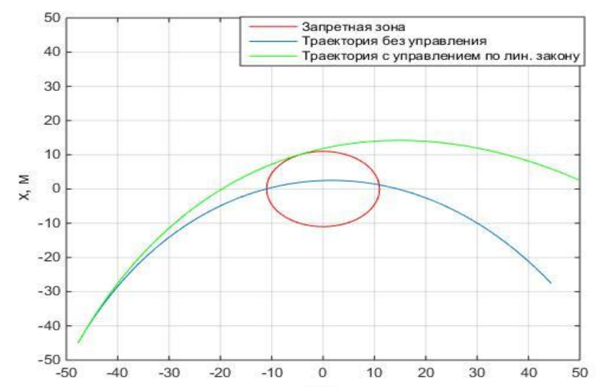
$a_i -$ выражаются через начальные условия, время касания
и начальное управление управления u_0.

Условие касания запретной зоны:

$$x(T)^2 + z(T)^2 - R^2 = 0,$$
$$x(T)\dot{x}(T) + z(T)\dot{z}(T) = 0.$$

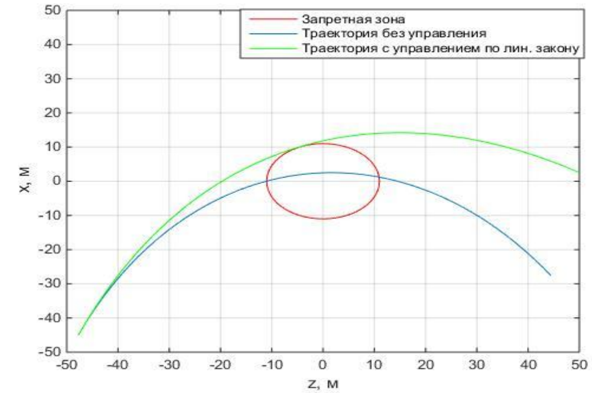


Зависимость разности углов от времени



Пример проекции траектории на плоскость *Oxz*

Оптимальное управление



Пример проекции траектории на плоскость *Oxz*

Функионал системы:

$$Q = \int_{t_0}^{T} (-u^2(t))dt.$$

Функция Понтрягина:

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2}u^2 + \psi_1 \dot{x} + \psi_2 (u - 2\dot{z}\omega) + \psi_3 \dot{z} + \psi_4 (2\dot{x}\omega + 3z\omega^2).$$

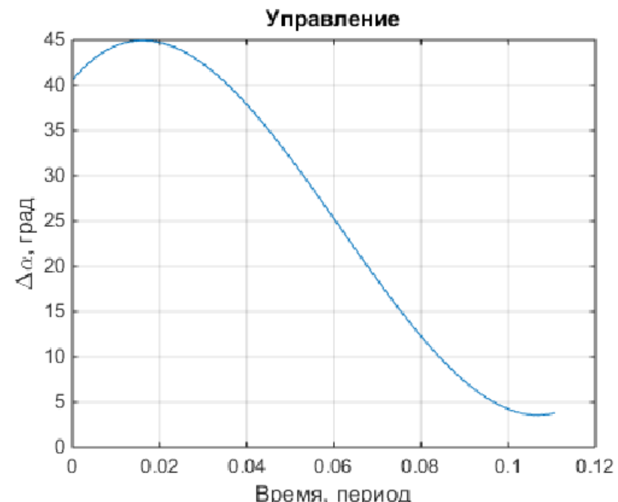
Сопряженная система:

$$\dot{\psi}_1 = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 - 2\omega\psi_4,$$

$$\dot{\psi}_3 = -3\omega^2\psi_4,$$

$$\dot{\psi}_4 = -\psi_3 + 2\omega\psi_2.$$



Зависимость разности углов от времени

Начальные условия:

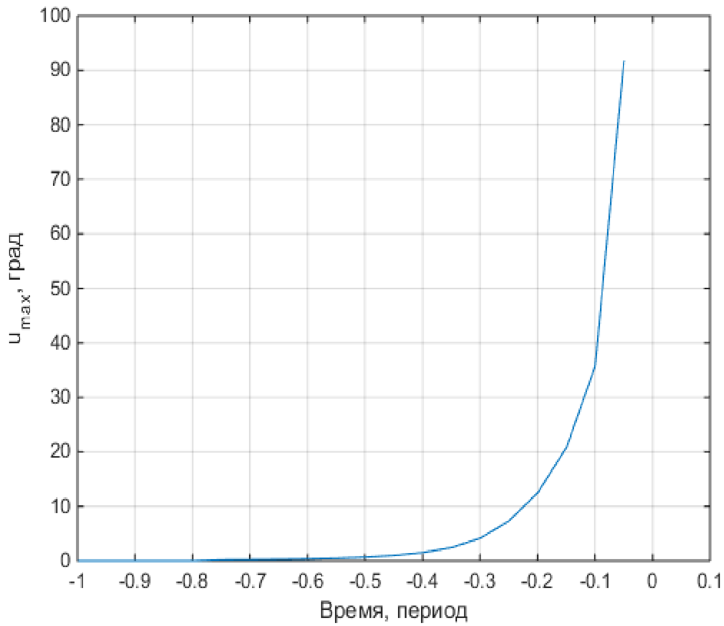
$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T.$$

Условия на подвижный конец:

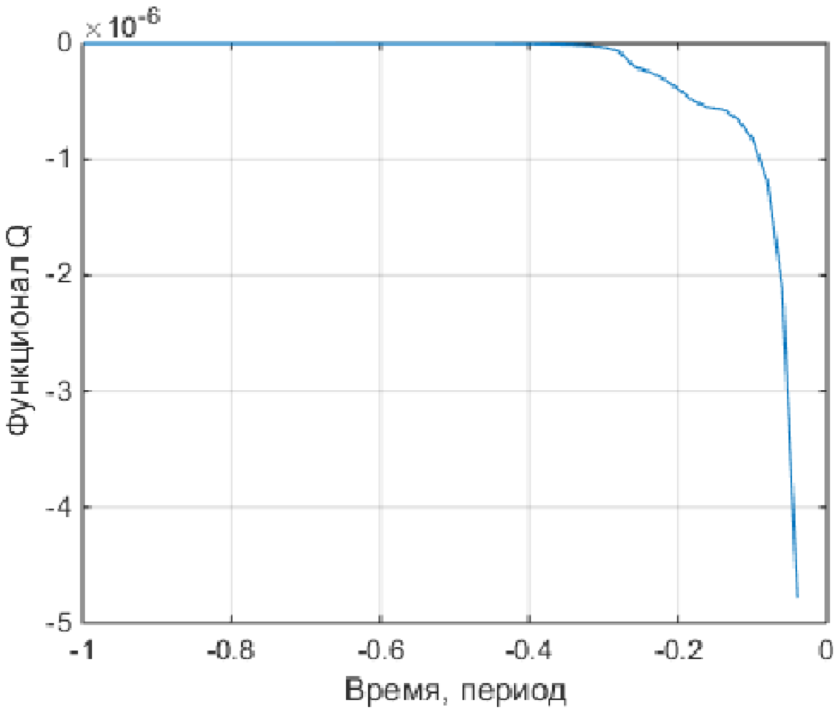
$$-\frac{1}{2}\psi_2(\mathrm{T})^2 + \psi_1(\mathrm{T})\dot{x}(\mathrm{T}) + \psi_2(\mathrm{T})(\psi_2(\mathrm{T}) - 2\dot{z}(\mathrm{T})\omega) + \psi_3(\mathrm{T})\dot{z}(\mathrm{T}) + \psi_4(2\dot{x}(\mathrm{T})\omega + 3z(\mathrm{T})\omega^2) = 0.$$

$$Q_{opt} = -8.93 \cdot 10^{-7}; Q_{liner} = -8.85 \cdot 10^{-7}$$

Исследование движения в зависимости от времени начала управления



Зависимость максимального угла от начала маневра



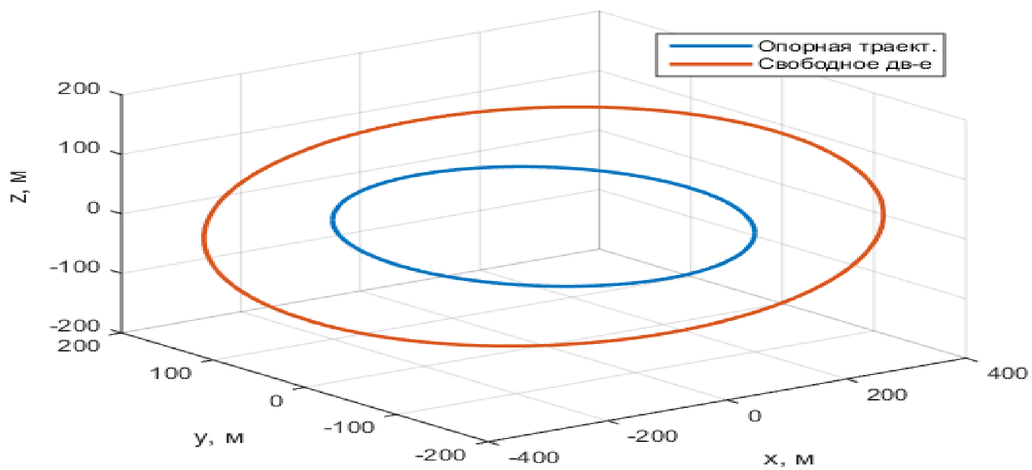
Зависимость функционала от начала маневра

Результаты к Главе 1

- Разработаны два типа алгоритма управления для предотвращения столкновения спутников: линейный алгоритм, оптимальный алгоритм с использованием функции Понтрягина.
- Исследовано зависимость радиуса запретной зоны, максимального угла отклонения от начального положения

Постановка задачи

- С помощью аэродинамических сил перейти на заданную относительную траекторию одного аппарата относительно другого.



Опорная траектория и свободное движение

Модель аэродинамической силы

$\mathbf{f} = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1,$

Модель силы, действующей на один из спутников:

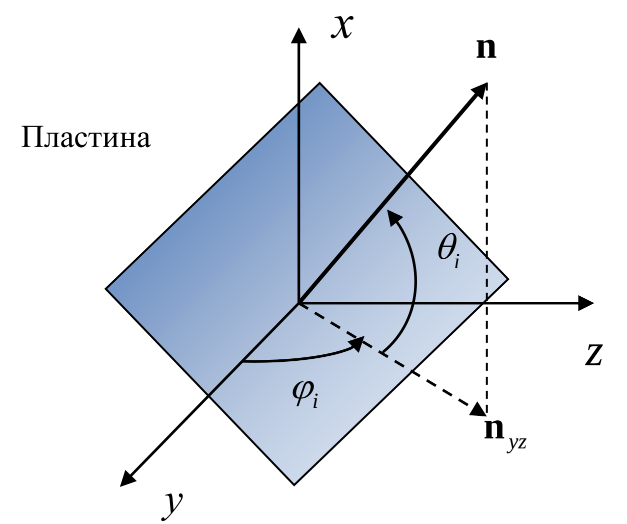
$$\mathbf{f}_i = -\frac{1}{m}\rho V^2 S\{(1-\varepsilon)(\mathbf{e}_V,\mathbf{n}_i)\mathbf{e}_V + 2\varepsilon(\mathbf{e}_V,\mathbf{n}_i)^2\mathbf{n}_i + (1-\varepsilon)\frac{\upsilon}{V}(\mathbf{e}_V,\mathbf{n}_i)\mathbf{n}_i\},$$

ε и υ – коэффициенты взаимодействия молекул атмосферы с поверхностью спутника.

$0^\circ \le \theta_i \le 90^\circ,$

$0^\circ \le \varphi_i \le 180^\circ,$

$\mathbf{n} = (\sin\theta_i; \cos\theta_i\cos\phi_i; \cos\theta_i\sin\phi_i).$



Область допустимого управления

Разность действующих сил:

$$\Delta\mathbf{f} = k\begin{bmatrix} p(\theta_1)-p(\theta_2) \\ g(\theta_1)\cos\varphi_1 - g(\theta_2)\cos\varphi_2 \\ g(\theta_1)\sin\varphi_1 - g(\theta_2)\sin\varphi_2 \end{bmatrix} =$$

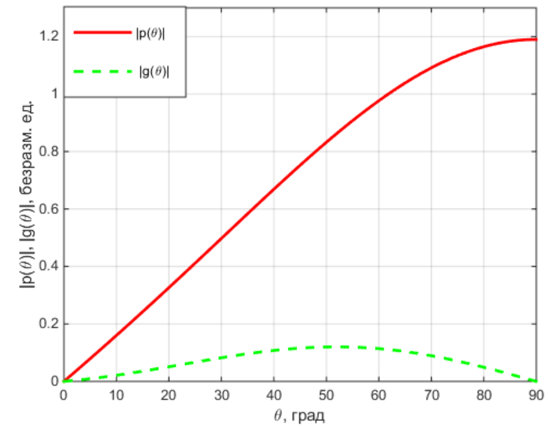
$$= k\begin{bmatrix} p(\theta_1)-p(\theta_2) \\ \left(g(\theta_1)+g(\theta_2)\right)\cos\varphi_1 \\ \left(g(\theta_1)+g(\theta_2)\right)\sin\varphi_1 \end{bmatrix},$$

$$k = \frac{1}{m}\rho V^2 S,$$

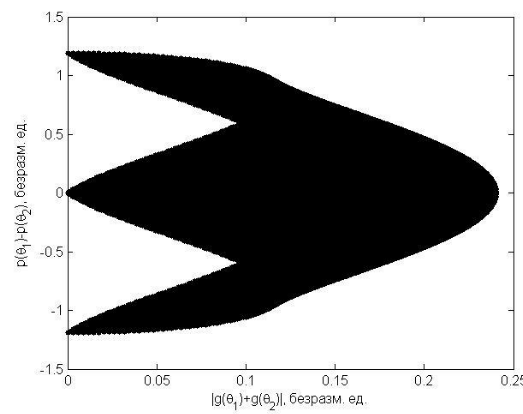
$$p(\theta_i) = -2\varepsilon(\sin\theta_i)^3 + \eta(\varepsilon-1)(\sin\theta_i)^2 + \left(\varepsilon-1\right)\sin\theta_i,$$

$$g(\theta_i) = -\cos\theta_i\sin\theta_i(\eta-\varepsilon\eta+2\varepsilon\sin\theta_i),$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi.$$



Зависимость компонент аэродинамической силы от угла



Область управления

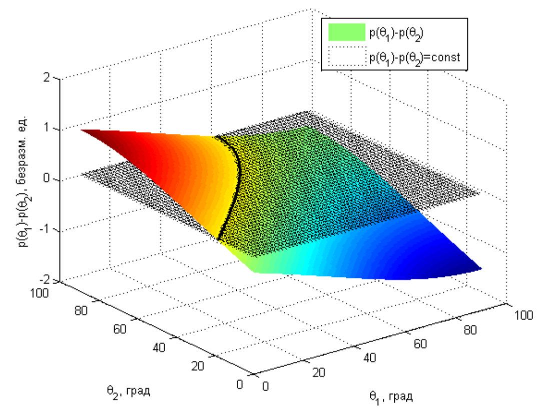
Вычисление ориентации спутников

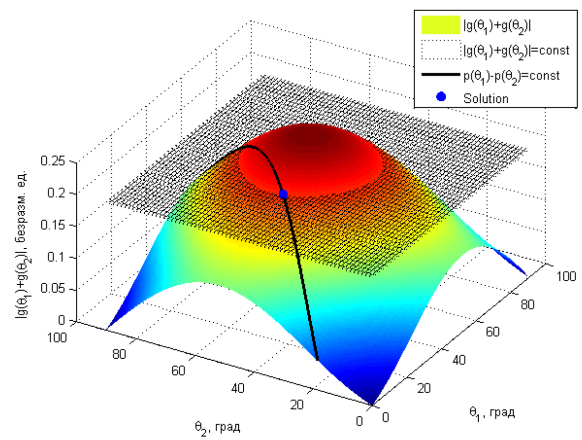
Пусть **u** - управляющее воздействие.

Безразмерный вектор $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/k$.

$$\begin{cases} p(\theta_1) - p(\theta_2) = \tilde{u}_1, \\ \left(g(\theta_1) + g(\theta_2)\right) = -\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{u_3}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}}. \end{cases}$$

Графическое решение системы





Линейно-квадратический регулятор

Линейная система имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},$$

где $\mathbf{x} = [\mathbf{r}^T\ \mathbf{v}^T]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3x3} & E \\ C & D \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{3x3} \\ E \end{bmatrix}.$$

Управление с обратной связью

$$\mathbf{u} = -\mathrm{K}\mathbf{e},$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$.

Минимизируется

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{e}^T \mathrm{Q}\mathbf{e} + \mathbf{u}^T \mathrm{R}\mathbf{u})\, dt,$$

тогда $\mathbf{u} = -\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^T \mathrm{P}\mathbf{e},$

где матрица P есть решение

$$\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^T\mathrm{P} + \mathrm{P}\mathrm{A} + \mathrm{A}^T\mathrm{P} = 0.$$

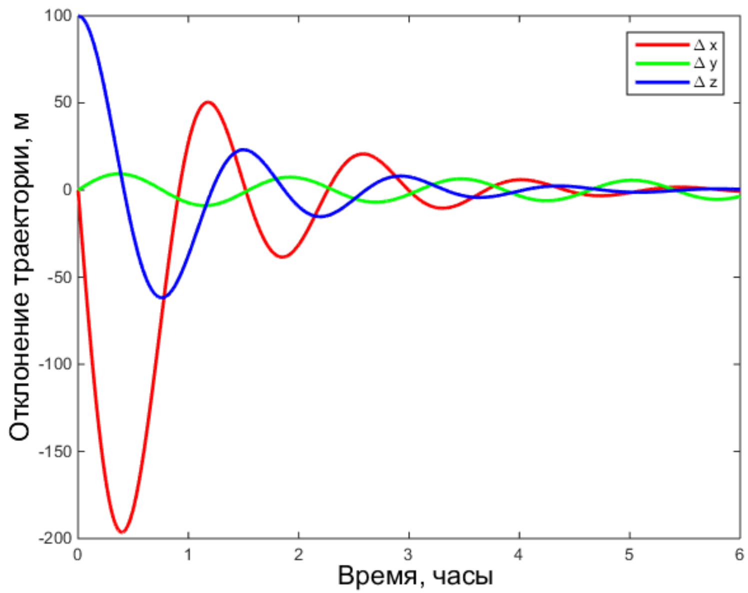
Моделирование управляемого движения—I

Начальная траектория:

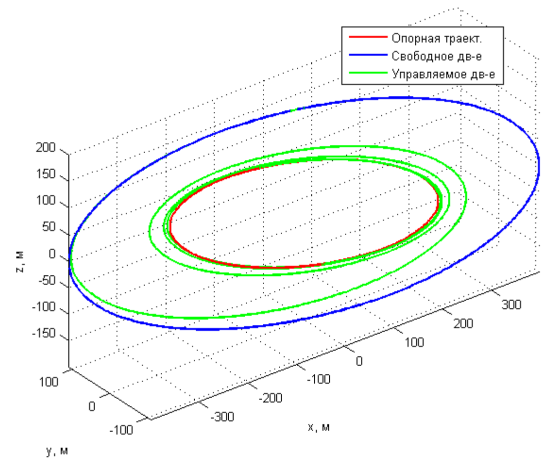
$c_1 = 0\,\text{м},\ c_2 = 0\,\text{м},\ c_3 = 200\,\text{м},\ c_4 = 0\,\text{м},\ c_5 = 20\,\text{м},\ c_6 = 0\,\text{м}.$

Опорная траектория:

$\tilde{c}_1 = 0\,\text{м},\ \tilde{c}_2 = 0\,\text{м},\ \tilde{c}_3 = 100\,\text{м},\ \tilde{c}_4 = 0\,\text{м},\ \tilde{c}_5 = 10\,\text{м},\ \tilde{c}_6 = 0\,\text{м}.$

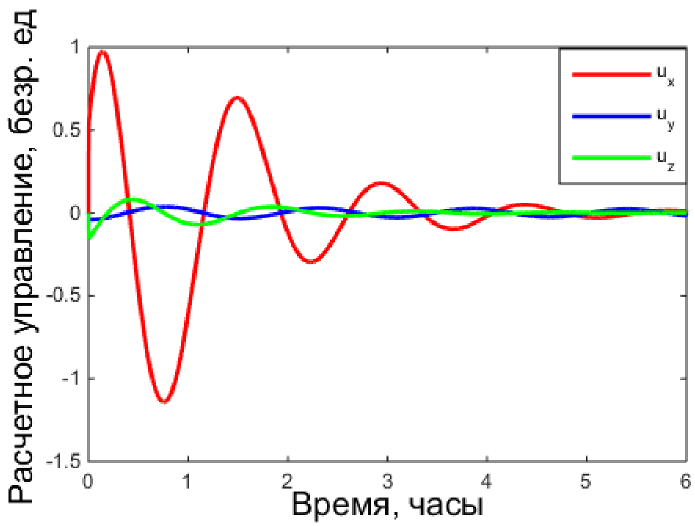


Отклонение траектории и скорости от опорной орбиты

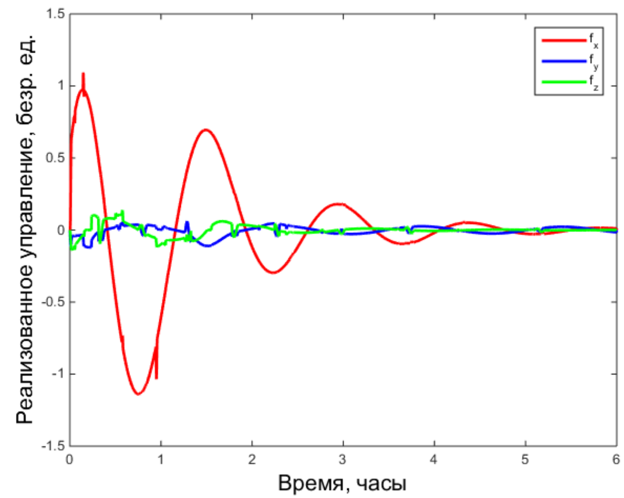


Опорная траектория и управляемое движение

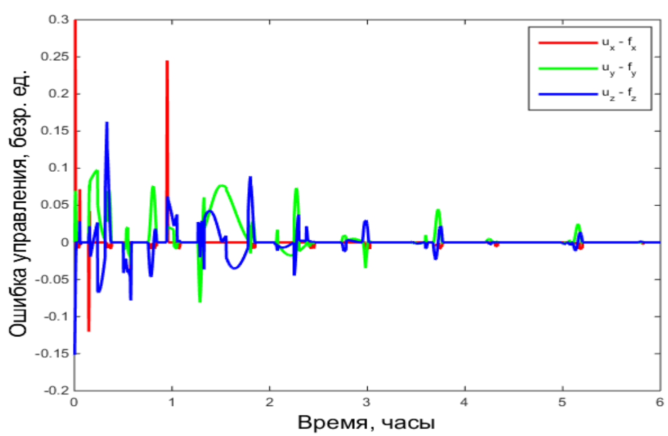
Моделирование управляемого движения—II



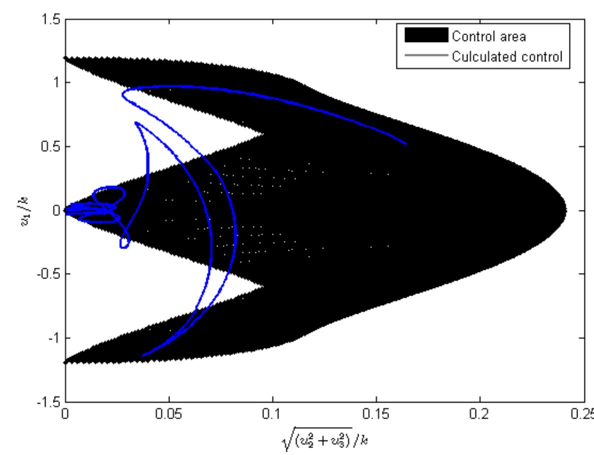
Расчетное управление



Реализованное управление



Разница расчетного и
реализованного управления



Область управления

Исследование алгоритма—I

При выборе параметров управления необходимо учитывать:

1. Ограничение на значение управления
2. Степень устойчивости

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \sigma_3\sigma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3\sigma_4 & \sigma_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_6^2 \end{bmatrix},$$

Методика исследования алгоритмов:

$\dot{\mathbf{e}} = \left(A - BK\right)\mathbf{e},$

$\mathbf{e}_0$ – начальное предельное отклонение траектории.

Область допустимых значений управления:

$\tilde{u}_1 \in [-1.19;1.19],\ \sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2} \in [0;0.24].$

Коварицонная матрица:

$P_0 = \mathrm{M}\left(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^T\right).$

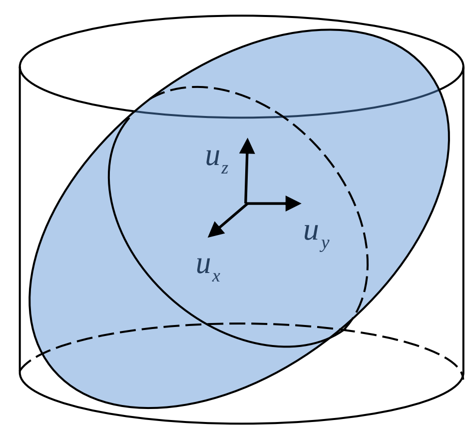
Закон изменения коварицонной матрицы:

$\dot{P} = FP + PF^T$

,где $F = A - BK$

Эллипсоид в пространстве управления:

$\mathrm{P}_u(t) = KPK^T$



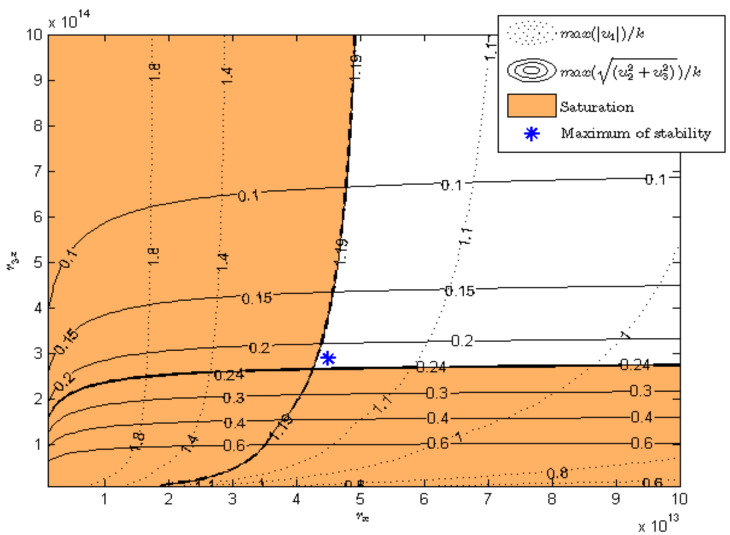
Исследование алгоритма —II

Вессовая матрица:

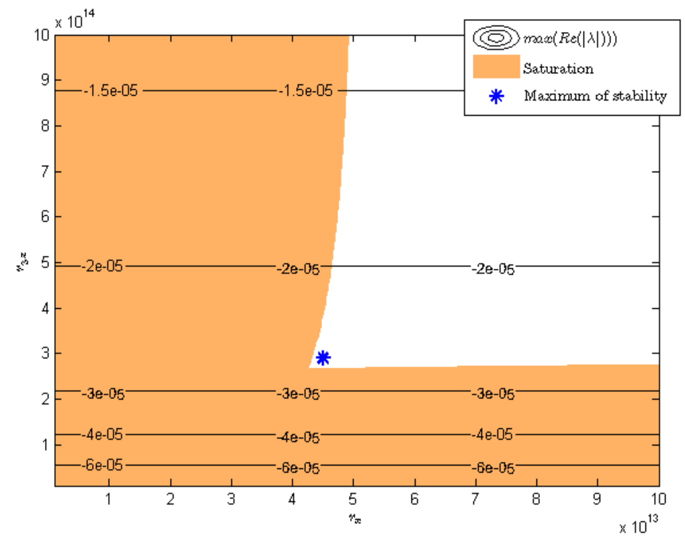
$$R=\begin{pmatrix} r_x & 0 & 0 \\ 0 & r_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & r_{yz} \end{pmatrix}$$

Предельное отклонение траектории в начальный момент:

$\sigma_1=\sigma_3=100$ м, $\sigma_2=10$ м, $\sigma_4=-2\omega\sigma_{z_0}$, $\sigma_5=\sigma_6=0.01$ м/с.



Области параметров, приводящие к насыщению управления



Изолинии степени сходимости при различных значениях коэффициентах

Влияние возмущений—I

Рассматриваемые возмущения:

1. 2ая гармоника разложения грав. поля Земли
2. нелинейная плотность атмосферы.

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}}_i = -\dfrac{\mu}{R_i^3}\mathbf{R}_i + \mathbf{D}_i^{J_2} + \mathbf{F}_i^a, \\ \mathbf{r} = G\left(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\right), \\ \mathbf{v} = G\left[\left(\dot{\mathbf{R}}_2 - \dot{\mathbf{R}}_1\right) + \boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\right)\right], \end{cases}$$

$\mathbf{D}_i^{J_2}$ – возмущение от 2ой гармоники,

$\mathbf{F}_i^a$ – аэродинамическая сила,

G – матрица перехода из ИСК в ОСК.

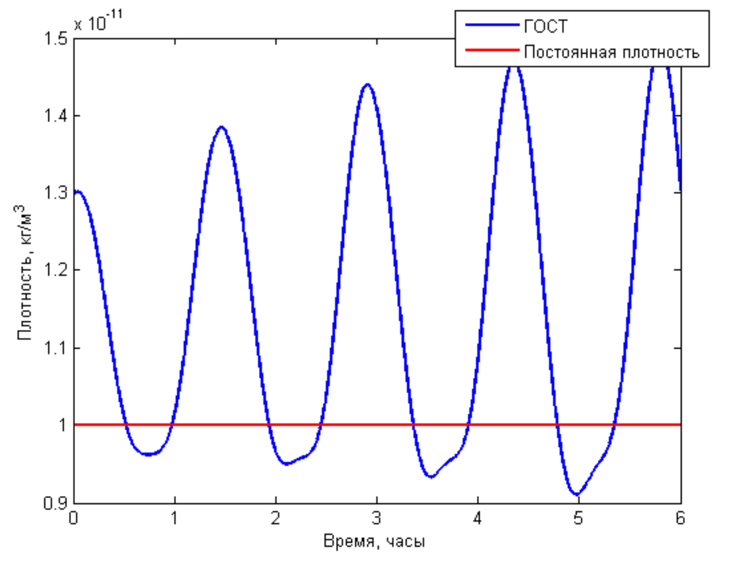
Параметры круговой орбиты для первого спутника:

$i = 51.7^\circ$,

$h = 340$ км,

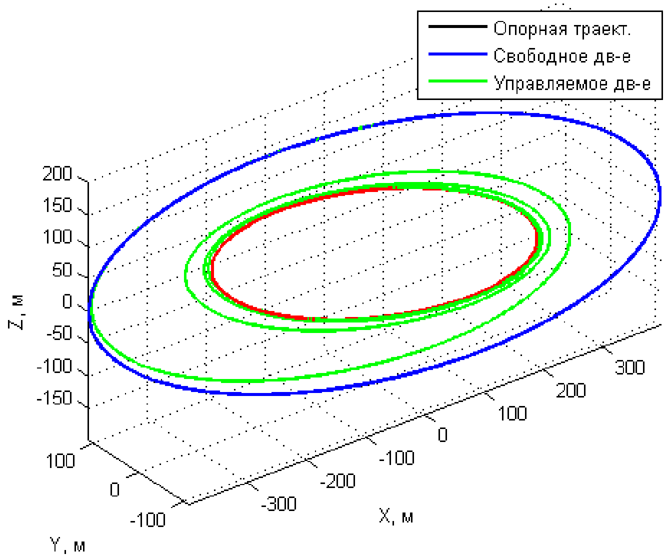
$\mathbf{R}_1$ – в точке воссходящего узла.

t_0 – 1 января 2012 года 0 часов 00 минут.

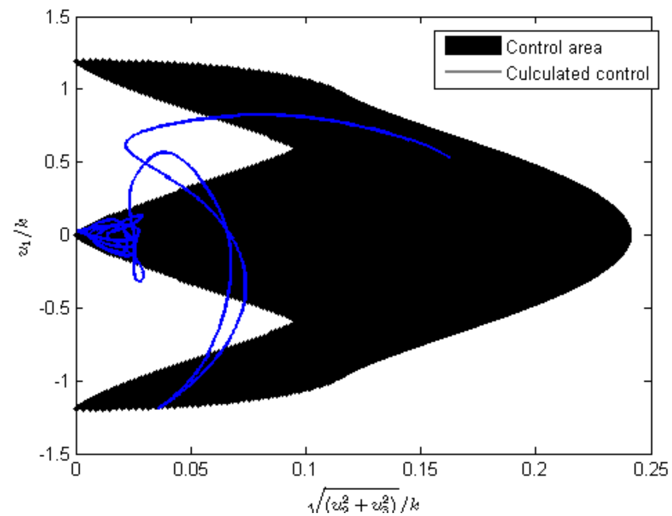


Плотность атмосферы по модели ГОСТ и принятая постоянная плотность

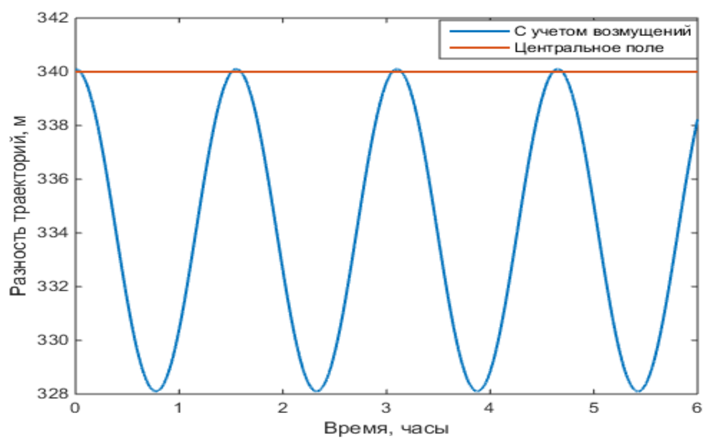
Влияние возмущений—II



Опорная траектория и управляемое движение

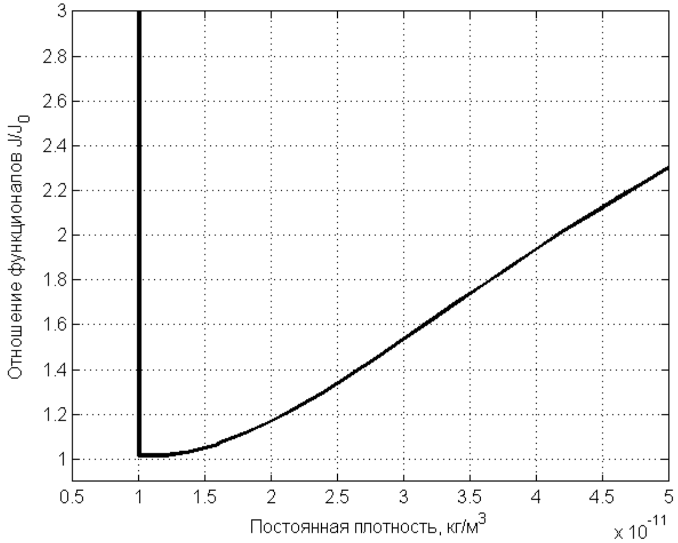


Область допустимого управления и расчетное управление

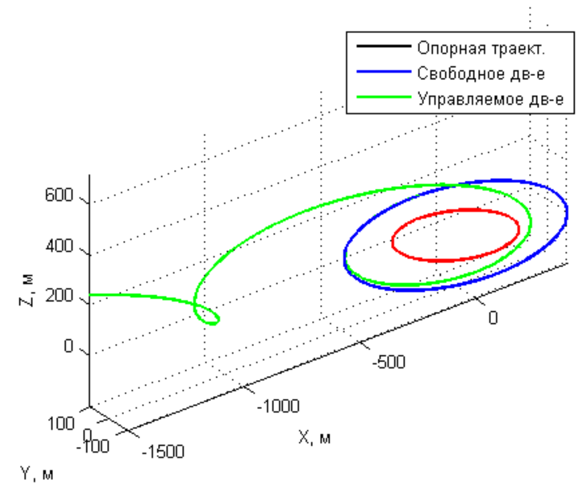


Высота орбиты в центральном поле и с учетом полярного сжатия

Влияние возмущений—III



Отношение функционала при изменении плотности



Относительная траектория при $\rho = 6 \cdot 10^{-12}\ {}^{кг}\!/_{м^3}$

Результаты Главы 1

- Рассмотрена пространственное управление с помощью аэродинамической силы сопротивления
- Проведено моделирование работы алгоритма с ограничением на величину управления для конкретного маневра относительного движения
- Исследовано зависимость степени устойчивости системы от весовых коэффициентов
- Исследовано влияние возмущений J2 и неточности знания плотности атмосферы

Заключение

- Рассмотрены несколько моделей аэродинамической силы в качестве управления
- Предложена методика исследования параметров алгоритма
- Рассмотрено влияние возмущений J2 и неточности знания плотности атмосферы
- Получены несколько алгоритмов для предотвращения столкновения спутников

Спасибо за внимание!

Публикации

- Кушнирук М.С., Иванов Д. С. Исследование алгоритмов управления движением группы спутников с помощью аэродинамической силы сопротивления // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. No 28. 30с
- Кушнирук М.С., Иванов Д. С. Алгоритмы управления движением группы спутников с использованием аэродинамической силы сопротивления для предупреждения столкновений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. No 99. 30с