

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра
по направлению 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
профиль подготовки «Геокосмические науки и технологии»

Использование метода роя частиц для оптимальной переориентации космического аппарата

Выполнил:

студент группы Б03-0056

Макаров Глеб Русланович

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.

Охитина Анна Сергеевна

Москва, 2024

Аннотация

В работе решается задача построения оптимального по времени разворота космического аппарата, оснащенного маховичной системой управления ориентацией, из некоторого начального положения оптической оси в заданную точку интереса на поверхности Земли. Строится специальное опорное угловое движение, удовлетворяющее ограничениям – маховики имеют ограничения по максимальному управляющему моменту и максимальному запасу кинетического момента. Движение задается сплайном с оптимальными параметрами, которые ищутся с помощью метода глобальной оптимизации – метода роя частиц. Предварительно проводятся исследование алгоритма метода роя частиц на быстродействие и подбор параметров, обеспечивающих его сходимость. Затем на основе функции Ляпунова строится управление, реализующее найденное движение, и производится численное моделирование с учетом внешних возмущений для тестирования полученного алгоритма.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аннотация.....	2
Введение	4
1. Постановка задачи и уравнения движения.....	7
2. Опорное движение и управляющий момент	9
2.1. Параметризация опорного движения	10
2.2. Целевая система координат	14
2.3. Постановка задачи оптимизации	18
3. Метод роя частиц.....	22
3.1. Алгоритм	22
3.2. Настройка гиперпараметров.....	25
4. Численное моделирование	32
4.1. Численный пример	32
4.2. Решение задачи оптимизации	34
4.3. Построение управления на основе функции Ляпунова.....	36
4.4. Результаты моделирования.....	38
Заключение.....	42
Список использованной литературы.....	43
Приложение А. Вывод вспомогательных кватернионов.....	45
А.1. Функции угловой скорости и углового ускорения	45
А.2. Аналитические выражения с использованием 12 параметров	47
А.3. Аналитические выражения с использованием 4 параметров	51

Введение

Малые космические аппараты (КА) широко применяются для решения задач дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), в числе которых: съемка объектов на поверхности Земли в разных диапазонах длин волн, радиолокация, мониторинг физических характеристик местности. В качестве исполнительных органов системы управления ориентацией используются маховики, которые обеспечивают быстроедействие и высокую точность ориентации в заданных режимах движения при выполнении поставленной задачи.

Спутник в процессе съемки находится поочередно в двух режимах. Первый режим обеспечивает непосредственно съемку и определяется особенностями установленной на КА аппаратуры и требованиями на итоговые изображения. Во втором происходит переориентация между выбранными точками интереса с заданными значениями ориентации, угловой скорости и углового ускорения КА в них.

Режим переориентации во многом определяется лишь возможностями маховиков. От скорости такого маневра зависит собранный объем данных. Чем меньше времени занимает разворот от одной точки к другой, тем больше информации сможет собрать КА за время выполнения миссии. Таким образом, время переориентации необходимо минимизировать: либо установить маховичную систему с большим максимальным запасом кинетического момента, либо за счет построения специального алгоритма управления, реализующего оптимальный по быстрдействию разворот КА. Во втором варианте угловое движение КА сначала необходимо параметризовать некоторым образом, а затем поставить и решить соответствующую оптимизационную задачу.

В настоящее время для решения похожих задач используются такие подходы, как параметризация матрицы поворота через вектор оси поворота,

компоненты которого аппроксимируются полиномами, и дальнейшая оптимизация задачи полуопределенного программирования методом внутренней точки [1]. Встречается параметризация углами поворота [2], с помощью которых можно наглядно изобразить и проанализировать полученное опорное движение, однако в некоторых случаях возможно вырождение. Также используется представление компонент кватерниона ориентации в виде полиномов [3], что позволяет упростить математические выкладки, однако кватернион нужно нормировать на каждом шаге численного моделирования. Широко используется алгоритм SLERP [4] – сферической линейной интерполяции [5]. В этом случае нет необходимости нормировать кватернион и накладывать дополнительные условия на параметры, но такая параметризация позволяет учесть только краевые условия ориентации, но не её производных (угловой скорости и ускорения). В данной работе важно обеспечить высокий уровень стабилизации при выполнении съемки, чтобы добиться четкости снимков. Для этого в работе используется параметризация сплайном пятого порядка [6], позволяющая также учесть краевые условия угловой скорости и углового ускорения, параметры которого находятся из решения задачи оптимизации.

От постановки задачи оптимизации будет зависеть выбор метода, которым можно её решить [7]. Безградиентные методы оптимизации имеют преимущество – не нужно вычислять производные целевой функции, что иногда может быть затруднительно. Часто используется симплекс-метод Нельдера-Мида [8,9], однако он является локальным и неэффективен в задачах оптимизации с невыпуклой целевой функцией.

В качестве метода оптимизации в работе выбран метод роя частиц. Метод роя частиц [10] является безградиентным методом глобальной оптимизации, который широко применяется во многих областях науки [11], в том числе и в различных задачах ДЗЗ – для обеспечения оптимальной по

времени переориентации КА [12,13] или для оптимального разбиения снимаемой области между спутниками в группировке КА с целью исключения пересечения областей съемки для разных аппаратов [14]. Этот метод позволяет решать задачи оптимизации, где целевую функцию, а также область поиска сложно представить в аналитическом виде. Метод является прямым методом оптимизации, вычисление целевой функции происходит напрямую на каждом шаге алгоритма, что позволяет также учесть различные ограничения на сами искомые параметры или на некоторые функции, зависящие от них. В данной работе также рассматривается вопрос выбора гиперпараметров метода роя частиц для определения области сходимости метода, а также обеспечения его быстродействия.

Таким образом, с использованием оптимальной параметризации опорного углового движения, найденного с помощью метода роя частиц, в работе решается задача поиска управления, реализующего оптимальный по быстродействию разворот с учетом ограничений на возможности маховичной системы.

1. Постановка задачи и уравнения движения

В работе рассматривается КА, оснащенный маховичной системой управления ориентацией, на котором в качестве целевой аппаратуры установлена камера ДЗЗ. КА движется по круговой орбите с заданными параметрами (высота, долгота восходящего узла, наклонение). Требуется построить управление, обеспечивающее минимальное время переориентации КА из его начальной ориентации в некоторую заданную.

Введем необходимые для описания движения спутника системы координат:

$O_E X_1 X_2 X_3$ – инерциальная система координат J2000 (ИСК), её центр O_E находится в центре масс Земли, ось $O_E X_1$ направлена в точку весеннего равноденствия, ось $O_E X_3$ направлена по оси вращения Земли, ось $O_E X_2$ дополняет систему до правой тройки;

$O_{хуз}$ – связанная со спутником система координат (ССК), центр O ССК совпадает с центром масс КА, оси – с главными центральными осями инерции.

Для описания углового движения КА (движения относительно центра масс) используются динамические уравнения Эйлера (в ССК), а также кинематические соотношения в терминах кватернионов (соотношения Пуассона). Орбитальное движение КА (движение центра масс) соответствует движению точки в ньютоновском гравитационном поле неподвижного притягивающего центра. Система дифференциальных уравнений, описывающая движение КА имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}, \\ \dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{M}_{grav} + \mathbf{M}_{dist}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где \mathbf{r} и \mathbf{v} – радиус-вектор и скорость КА соответственно, \mathbf{Q} – кватернион ориентации ССК относительно ИСК, $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость КА, \mathbf{J} – тензор инерции КА, μ – гравитационный параметр Земли, \mathbf{M}_{dist} – внешний возмущающий момент случайной природы, \mathbf{M}_{ctrl} – управляющий момент, \mathbf{M}_{grav} – гравитационный момент, выражение для которого имеет вид (центральное гравитационное поле):

$$\mathbf{M}_{grav} = \frac{3\mu}{r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{J} \mathbf{r}. \quad (2)$$

2. Опорное движение и управляющий момент

Рассмотрим невозмущенную систему (1), то есть $\mathbf{M}_{dist} = (0,0,0)$. Идеальный управляющий момент, необходимый для обеспечения трехосной ориентации КА, выражается из последнего уравнения системы (1) следующим образом:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_{grav}. \quad (3)$$

Механический момент создается при помощи маховиков – точных механических исполнительных органов – и выражается следующей формулой:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}, \quad (4)$$

где \mathbf{H} – суммарный кинетический момент маховиков, $\dot{\mathbf{H}}$ – его изменение. В конфигурации как минимум из трех актюаторов возможно реализовать механический управляющий момент в любом направлении, однако для маховичной системы всегда существует ограничение на величину суммарного кинетического момента \mathbf{H} и его производной по времени $\dot{\mathbf{H}}$. Эти ограничения считаются известными как характеристики маховиков, установленных на КА. Задачи распределения управляющего момента по маховикам, а также разгрузки избыточного кинетического момента в квалификационной работе не рассматриваются.

Из (3) и (4) видно, что суммарный кинетический момент маховиков и его производная зависят от угловой скорости и углового ускорения, а значит и от ориентации. При этом из-за указанных ограничений на возможности маховичной системы необходимо заранее построить такое угловое движение, которое возможно реализовать установленными на КА маховиками за минимально возможное время.

Далее в разделе описан способ построения такого опорного движения.

2.1. Параметризация опорного движения

Для описания углового движения используется кватернион ориентации, имеющий следующий вид:

$$\mathbf{Q} = (q_0, \mathbf{q}), \quad (5)$$

где q_0 – скалярная часть, \mathbf{q} – векторная часть. Сопряженный кватернион определяется как $\tilde{\mathbf{Q}} = (q_0, -\mathbf{q})$. Отметим, что для задания ориентации тела используются только кватернионы с единичной нормой: $\|\mathbf{Q}\| = \sqrt{q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q}} = 1$.

В тригонометрической форме кватернион принимает вид

$$\mathbf{Q} = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \mathbf{e} \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (6)$$

при этом $q_0 = \cos \frac{\theta}{2}$, $\mathbf{q} = \mathbf{e} \sin \frac{\theta}{2}$, где θ – угол поворота вокруг оси \mathbf{e} .

Определим также операции возведения кватерниона в вещественную степень p , взятие логарифма и экспоненты от кватерниона согласно [15] следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^p &= \exp(p \ln \mathbf{Q}), \\ \ln \mathbf{Q} &= (0, \mathbf{e}\theta), \\ \exp(\ln \mathbf{Q}) &= \mathbf{Q} = (\cos \theta, \mathbf{e} \sin \theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Построим опорное движение, удовлетворяющее заданным краевым условиям ориентации \mathbf{Q}_0 и \mathbf{Q}_1 , которое является решением кинематических уравнений. В [6] предложена следующая функция сплайна:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= \mathbf{Q}_0 \circ (\tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{q}_0)^{p_1} \circ (\tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{q}_1)^{p_2} \circ (\tilde{\mathbf{q}}_1 \circ \mathbf{q}_2)^{p_3} \circ \\ &\circ (\tilde{\mathbf{q}}_2 \circ \mathbf{q}_3)^{p_4} \circ (\tilde{\mathbf{q}}_3 \circ \mathbf{Q}_1)^{p_5}, \end{aligned} \quad (8)$$

где \mathbf{q}_i – вспомогательные кватернионы, p_i – многочлены следующего вида:

$$i = \overline{1,5}: p_i(t) = \sum_{k=0}^5 \alpha_{ik} t^k. \quad (9)$$

Для вычисления угловой скорости и углового ускорения воспользуемся кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}} &= \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\omega}, \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}} \circ \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\quad (10)$$

и выражением для вычисления производной от кватерниона в некоторой степени $f(t)$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}^{f(t)} = f'(t) \mathbf{Q}^{f(t)} \circ \ln \mathbf{Q}, \quad (11)$$

где $f(t)$ – некоторая функция времени. Отсюда, зная $\dot{\mathbf{Q}}(t)$ и $\ddot{\mathbf{Q}}(t)$, получаем выражения на абсолютную угловую скорость КА $\boldsymbol{\omega}$ и абсолютное угловое ускорение КА $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= 2\tilde{\mathbf{Q}} \circ \dot{\mathbf{Q}}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= 2\tilde{\mathbf{Q}} \circ \dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\quad (12)$$

Аналитические выражения для угловой скорости и углового ускорения приведены в Приложении А.1.

Введем безразмерный временной параметр на отрезке времени $[t_0, t_0 + T]$:

$$\tau = \frac{t - t_0}{T} \in [0, 1], \quad (13)$$

где t_0 – начальный момент времени (начало переориентации КА), T – время переориентации. Тогда многочлены (9) перепишутся следующим образом:

$$p_i(\tau) = \sum_{k=0}^5 a_{ik} \tau^k, \quad i = \overline{1, 5}, \quad (14)$$

где коэффициенты a_{ik} не зависят от начального момента времени t_0 и времени переориентации T . Многочлены выбираются таким образом, чтобы

в начальный момент времени значение $\mathbf{Q}(t)$ совпадало с начальным кватернионом \mathbf{Q}_0 , а в конечный – с \mathbf{Q}_1 , то есть

$$\begin{aligned}
p_i(0) &= 0, p_i(1) = 1, i = \overline{1,5}, \\
\mathbf{Q}(0) &= \mathbf{Q}_0 \circ (\tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{q}_0)^0 \circ (\tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{q}_1)^0 \circ (\tilde{\mathbf{q}}_1 \circ \mathbf{q}_2)^0 \circ (\tilde{\mathbf{q}}_2 \circ \mathbf{q}_3)^0 \circ (\tilde{\mathbf{q}}_3 \circ \mathbf{Q}_1)^0 = \\
&= \mathbf{Q}_0 \circ (1, \mathbf{0}) \circ (1, \mathbf{0}) \circ (1, \mathbf{0}) \circ (1, \mathbf{0}) \circ (1, \mathbf{0}) = \\
&= \mathbf{Q}_0, \\
\mathbf{Q}(1) &= \mathbf{Q}_0 \circ (\tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{q}_0)^1 \circ (\tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{q}_1)^1 \circ (\tilde{\mathbf{q}}_1 \circ \mathbf{q}_2)^1 \circ (\tilde{\mathbf{q}}_2 \circ \mathbf{q}_3)^1 \circ (\tilde{\mathbf{q}}_3 \circ \mathbf{Q}_1)^1 = \\
&= (\mathbf{Q}_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_0) \circ (\mathbf{q}_0 \circ \tilde{\mathbf{q}}_0) \circ (\mathbf{q}_1 \circ \tilde{\mathbf{q}}_1) \circ (\mathbf{q}_2 \circ \tilde{\mathbf{q}}_2) \circ (\mathbf{q}_3 \circ \tilde{\mathbf{q}}_3) \circ \mathbf{Q}_1 = \\
&= \mathbf{Q}_1.
\end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, краевые условия ориентации соблюдены по построению.

С учетом (8), (11), (12) и выкладок, приведенных в Приложении А.1, функция $\boldsymbol{\omega}(t)$ зависит от $p'_i(\tau)$ – первых производных многочленов, а $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ – от $p'_i(\tau)$ и $p''_i(\tau)$ – первых и вторых производных многочленов соответственно. Тогда вспомогательные кватернионы с учетом краевых условий на угловую скорость, угловое ускорение можно выразить, используя соответствующие значения производных на концах: $p'_i(0)$, $p'_i(1)$, $p''_i(0)$, $p''_i(1)$, $i = \overline{1,5}$. Определим коэффициенты a_{ik} при степенях полиномов (14) с учетом следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
p_i(0) &= a_{i0} = 0, \\
p_i(1) &= a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4} + a_{i5} = 1, \\
p'_i(0) &= a_{i1} =: C_{1i}, \\
p'_i(1) &= a_{i1} + 2a_{i2} + 3a_{i3} + 4a_{i4} + 5a_{i5} =: C_{2i}, \\
p''_i(0) &= 2a_{i2} =: C_{3i}, \\
p''_i(1) &= 2a_{i2} + 6a_{i3} + 12a_{i4} + 20a_{i5} =: C_{4i}.
\end{aligned} \tag{16}$$

В матричном виде уравнения (16) можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ C_{1i} \\ C_{2i} \\ C_{3i} \\ C_{4i} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Тогда параметризация вида (8) опорного углового движения задается с помощью 20 параметров C_{ki} ($k = \overline{1,4}$, $i = \overline{1,5}$) – краевых значений первых и вторых производных многочленов:

$$\begin{pmatrix} p'_1(0) & p'_2(0) & p'_3(0) & p'_4(0) & p'_5(0) \\ p'_1(1) & p'_2(1) & p'_3(1) & p'_4(1) & p'_5(1) \\ p''_1(0) & p''_2(0) & p''_3(0) & p''_4(0) & p''_5(0) \\ p''_1(1) & p''_2(1) & p''_3(1) & p''_4(1) & p''_5(1) \end{pmatrix} := \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}. \quad (18)$$

Аналитически получить выражения вспомогательных кватернионов, используя все параметры, не удастся [6]. В Приложении А.2 приведены строгие аналитические выкладки вывода вспомогательных кватернионов с использованием 12 ненулевых параметров. Записать их можно следующей матрицей:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & C_{15} \\ C_{21} & 0 & 0 & 0 & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & 0 & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & 0 & C_{44} & C_{45} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

В Приложении А.3 приведены строгие аналитические выкладки вывода вспомогательных кватернионов с использованием минимально возможного числа ненулевых параметров – 4:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{25} \\ 0 & C_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

После задания параметров в матрице \mathbf{C} вычисляются вспомогательные кватернионы \mathbf{q}_j и коэффициенты многочленов a_{ik} , и опорное угловое движение $\mathbf{Q}(t)$ полностью определено.

2.2. Целевая система координат

Для осуществления съемки достаточно обеспечить одноосную ориентацию КА, направив его оптическую ось в точку интереса. Однако для осуществления маневра переориентации необходимо задать трехосную ориентацию, то есть нужно зафиксировать вращательную степень свободы вокруг оптической оси.

Рассмотрим вспомогательную систему координат (ВСК), одна ось которой совпадает с оптической осью. Направление оптической оси КА определяется следующим выражением:

$$\mathbf{e}_{opt} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_1|}, \quad (21)$$

где \mathbf{R} – радиус-вектор точки интереса в ИСК в конечный момент времени $t_1 = t_0 + T$, \mathbf{r}_1 – радиус-вектор КА в ИСК. Движение центра масс не зависит от движения относительно центра масс, поэтому расчет орбитальной траектории можно сделать предварительно, решив отдельно первые два уравнения системы (1) независимо от последних двух.

Точка интереса задается широтой φ и долготой λ . Для вычисления \mathbf{R} , зная широту и долготу, введем следующую систему координат:

$O_E Y_1 Y_2 Y_3$ – гринвичская система координат ITRF (ГСК), ось $O_E Y_3$ направлена по оси вращения Земли, ось $O_E Y_1$ перпендикулярна $O_E Y_3$ и направлена в гринвичский меридиан, ось $O_E Y_2$ дополняет систему до правой тройки.

В этой системе радиус-вектор точки интереса можно вычислить по формуле [16]

$$\mathbf{R}^{\text{ГСК}} = R_E \sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - e_E^2) \sin^2 \varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Тогда в ИСК

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}^{\text{ГСК}}, \quad (23)$$

где $\theta = \theta_0 + \Omega(t_1 - 2451545)$, R_E – экваториальный радиус Земли, e_E – эксцентриситет полярного сжатия Земли, θ_0 – угол поворота Земли относительно ИСК в эпоху J2000, Ω – угловая скорость вращения Земли.

Второй орт вспомогательной системы координат должен определяться однозначно в области орбиты КА, откуда наблюдается точка интереса на поверхности Земли, то есть где выполняется построение ВСК. Воспользуемся первым интегралом движения – интегралом площадей:

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (24)$$

Вектор \mathbf{c} не будет коллинеарен оптической оси \mathbf{e}_{opt} в области, где проводится целевая съемка (Рис. 1):

$$\mathbf{e}_{opt} \times \mathbf{c} \neq 0. \quad (25)$$

Тогда второй орт ВСК зададим следующим образом:

$$\mathbf{e}_{fix} = \frac{\mathbf{e}_{opt} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{e}_{opt} \times \mathbf{c}|}. \quad (26)$$

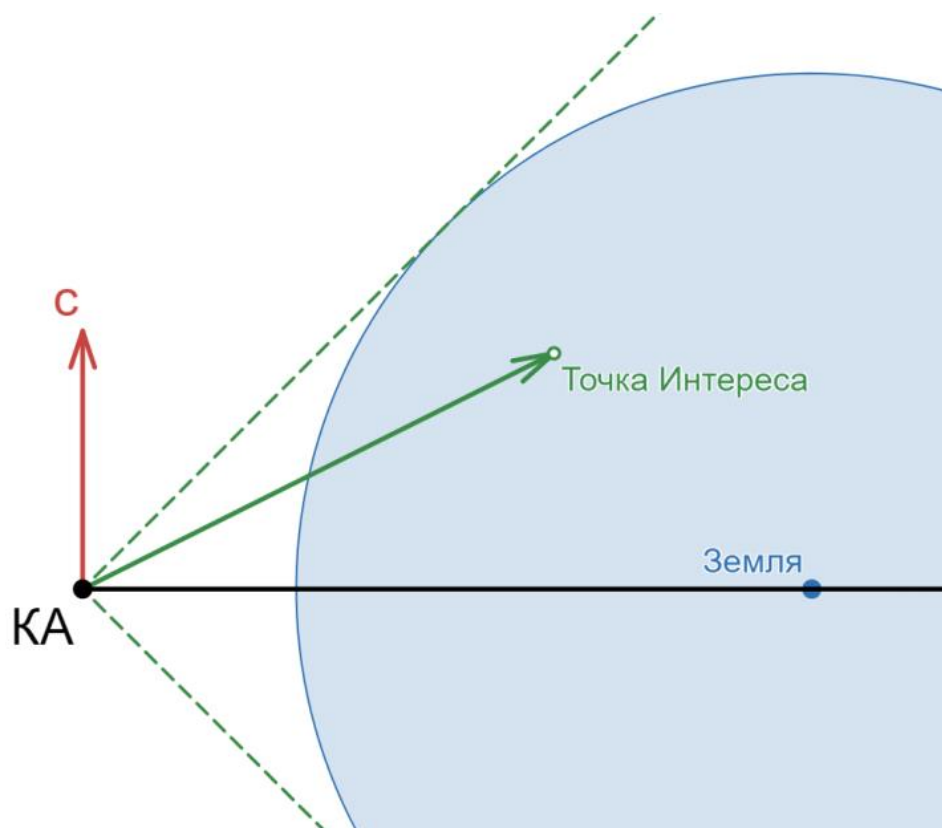


Рис. 1. Направления интеграла площадей (красным) и оптической оси (зеленым)

Таким образом, ВСК построена без вырождений и может быть найдена в любой точке орбиты КА:

Oe_1, oe_2, oe_3 – вспомогательная система координат (ВСК), ось Oe_3 совпадает с направлением оптической оси e_{opt} , ось Oe_1 перпендикулярна Oe_3 и совпадает с направлением фиксирующей оси e_{fix} , ось Oe_2 дополняет систему до правой тройки.

Матрица перехода из ИСК в ВСК

$$\mathbf{B} = (e_{fix}, e_{opt} \times e_{fix}, e_{opt})^T. \quad (27)$$

Соответствующий матрице кватернион обозначим $Q_{ВСК}$.

Целевая система координат может совпадать с построенной вспомогательной системой, однако в общем случае первая и вторая оси этих систем могут быть повернуты друг относительно друга на некоторый угол,

третья ось при этом всегда совпадает с оптической осью. Для решения задачи переориентации КА из произвольного положения в положение с заданным направлением оптической оси целевую систему можно выбирать любым удобным способом. Однако в квалификационной работе решается задача оптимальной переориентации. В этом случае выбор ЦСК с помощью поворота осей ВСК на некоторый угол вокруг оптической оси может уменьшить время переориентации, поэтому угол поворота зададим также параметром задачи.

Кватернион поворота вокруг оптической оси \mathbf{e}_{opt} на угол α задается в тригонометрической форме

$$\mathbf{Q}_\alpha = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \mathbf{e}_{opt} \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (28)$$

Тогда конечный кватернион ориентации можно задать следующим способом (Рис. 2):

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_\alpha \circ \mathbf{Q}_{ВСК}. \quad (29)$$

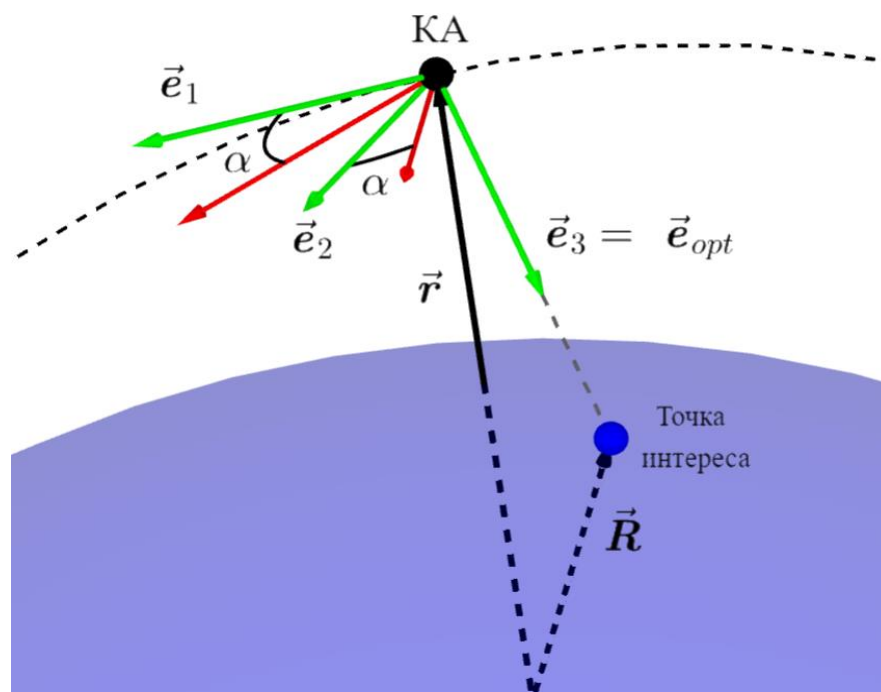


Рис. 2. Вспомогательная (зеленым) и целевая (красным) системы координат

Для получения выражений для угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ запишем кинематические соотношения в терминах матриц:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{B}} &= -\mathbf{B}[\boldsymbol{\omega}]_x, \\ \ddot{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}[\boldsymbol{\omega}]_x[\boldsymbol{\omega}]_x - \mathbf{B}[\boldsymbol{\varepsilon}]_x,\end{aligned}\tag{30}$$

где $[\boldsymbol{\omega}]_x$, $[\boldsymbol{\varepsilon}]_x$ – кососимметрические матрицы векторного произведения, составленные из компонент соответствующих векторов:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\omega}]_x &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ [\boldsymbol{\varepsilon}]_x &= \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{31}$$

Тогда

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\omega}]_x &= -\mathbf{B}^T \dot{\mathbf{B}}, \\ [\boldsymbol{\varepsilon}]_x &= -\mathbf{B}^T \ddot{\mathbf{B}} + [\boldsymbol{\omega}]_x[\boldsymbol{\omega}]_x.\end{aligned}\tag{32}$$

В конечный момент времени t_1 из (32) получаем значения угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ в ИСК. Краевые условия в ССК:

$$\boldsymbol{\omega}_1^{\text{ССК}} = \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_1 \circ \mathbf{Q}_1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\text{ССК}} = \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \circ \mathbf{Q}_1.\tag{33}$$

2.3. Постановка задачи оптимизации

Опорное движение описывается следующим набором параметров:

- \mathbf{p} – вектор краевых значения первых и вторых производных многочленов сплайна (вектор, составленный из 4 или 12 ненулевых параметров матрицы \mathbf{C} (18) построчно),
- T – время переориентации,
- α – угол поворота вокруг оптической оси.

Необходимо найти такие параметры, чтобы задаваемое ими опорное движение обеспечивало оптимальный по времени разворот на точку интереса. Поставим соответствующую оптимизационную задачу. Вектор искомых параметров:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p}^T, T, \alpha), \quad (34)$$

где $\mathbf{p} \in (0, 1]^m$, $m = 4$ или $m = 12$ в зависимости от выбранной параметризации в Разделе 2.1, $T \in (0, T_{\max}]$, T_{\max} определяется возможностями маховиков и временным отрезком на орбите КА, откуда наблюдается точка интереса, угол $\alpha \in [0, 4\pi]$, так как кватернион поворота определяется формулой, где функции $\cos \frac{\alpha}{2}$ и $\sin \frac{\alpha}{2}$ 4π -периодические.

Ставится задача поиска оптимального по быстродействию разворота, поэтому в качестве целевой функцией выберем время переориентации. Однако конкретное значение времени реализуемо, если управляющий момент в этом случае удовлетворяет ограничениям на возможности маховиков. Формально это записывается следующим образом:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} T ; \forall k \in \{1, 2, 3\} \quad |H_k(\mathbf{x})| < H_{\max} \cap |\dot{H}_k(\mathbf{x})| < \dot{H}_{\max}, \\ \infty ; \exists k^* \in \{1, 2, 3\} : |H_{k^*}(\mathbf{x})| \geq H_{\max} \cup |\dot{H}_{k^*}(\mathbf{x})| \geq \dot{H}_{\max}, \end{cases} \quad (35)$$

где H_{\max} – максимальный суммарный запас кинетического момента маховичной системы управления ориентацией, \dot{H}_{\max} – максимальный управляющий момент. Значение функции вычисляется следующим образом: по выбранным параметрам \mathbf{x} вычисляются функции $\mathbf{Q}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, далее из уравнения Эйлера вычисляется управляющий момент $\mathbf{M}_{ctrl}(t)$ (3). Функция $\mathbf{H}(t)$ получается из условия сохранения суммарного кинетического момента КА в ИСК (с учетом того, что время переориентации много меньше

орбитального периода, можно пренебречь влиянием гравитационного момента на этом интервале):

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{\text{ИСК}}(t) &= \mathbf{A}^T(t)(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{H}(t)) = \text{const} = \mathbf{K}^{\text{ИСК}}(t_0) = \mathbf{A}_0^T \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_0, \\ \mathbf{H}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{A}_0^T \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}(t),\end{aligned}\quad (36)$$

где $\mathbf{A}(t)$ – матрица поворота, соответствующая построенному кватерниону $\mathbf{Q}(t)$. Из (4) получаем производную суммарного кинетического момента маховиков:

$$\dot{\mathbf{H}}(t) = -\mathbf{M}_{ctrl}(t) - \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{H}(t). \quad (37)$$

При численном моделировании, зная значение вектор-функций $\mathbf{H}(t)$ и $\dot{\mathbf{H}}(t)$ в каждый момент времени, проверяем, выходят ли компоненты этих векторов за ограничения H_{\max} и \dot{H}_{\max} . Если для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ этого не происходит, то время переориентации реализуемо и $F(\mathbf{x}) = T$, иначе $F(\mathbf{x}) = \infty$.

В оптимизации широко используются градиентные методы, но вычисление градиента целевой функции в данной задаче затруднительно – область параметров, которую задают ограничения на управление, невыпукла, а сама функция многоэкстремальна.

Выбор метода оптимизации зависит от вида целевой функции. В теории оптимизации используется прием, позволяющий заранее выявить некоторые свойства многомерной функции – срез по прямой или по плоскости [17,18]. Срез – та же целевая функция, но от меньшего числа параметров:

$$\tilde{F}(\alpha, \beta) = F(\mathbf{y}_0 + \alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2), \quad (38)$$

где векторы $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ имеют ту же размерность, что и аргумент целевой функции, и зачастую выбираются случайно, параметры α, β вещественные и такие, что $\mathbf{y}_0 + \alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2$ принадлежит области поиска.

Удобно использовать срез, если размерность аргумента функции $n > 2$, из-за чего трудно визуализировать зависимость значения функции от всех компонент. При этом некоторые свойства функции сохраняются, например:

если срез не является выпуклой функцией, то и целевая функция не является выпуклой, но обратное в общем случае неверно.

Выделим из целевой функции задачи (35) индикаторную функцию ограничений на управление:

$$I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1; \forall k \in \{1, 2, 3\} & |H_k(\mathbf{x})| < H_{\max} \cap |\dot{H}_k(\mathbf{x})| < \dot{H}_{\max}, \\ 0; \exists k^* \in \{1, 2, 3\}: & |H_{k^*}(\mathbf{x})| \geq H_{\max} \cup |\dot{H}_{k^*}(\mathbf{x})| \geq \dot{H}_{\max}. \end{cases} \quad (39)$$

Таким образом, область допустимого управления определяется уравнением $I(\mathbf{x}) = 1$. На рис. 3 показан срез индикаторной функции (39) по параметрам (x_1, x_4) , где прослеживается свойство невыпуклости области допустимого управления. Отсюда можно заключить, что целевая функция (35) является многоэкстремальной и невыпуклой.

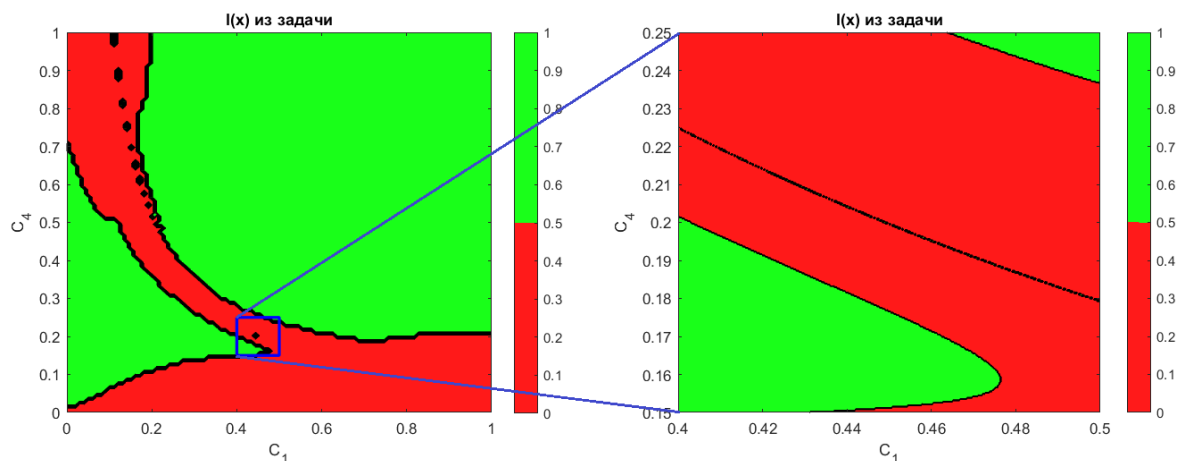


Рис.3. Области допустимого управления (зеленым)

Отметим, что вычислить градиент целевой функции (35) затруднительно, так как аналитически не удастся получить область допустимого управления, поэтому в работе для решения поставленной оптимизационной задачи выбран метод безградиентной оптимизации – метод роя частиц.

3. Метод роя частиц

В данном разделе опишем в общем случае алгоритм метода роя частиц, затем проведем исследование метода для выбора его параметров, необходимых для решения поставленной задачи оптимизации с целью ускорить работу алгоритма метода роя в целом и обеспечить его сходимость.

3.1. Алгоритм

Метод роя частиц основан на наблюдениях, как группы частиц функционируют вместе для улучшения не только коллективного результата в задаче, но и отдельного результата каждой частицы. Частица является математической структурой, в которую входят вектор параметров \mathbf{x}_i^p , вектор смещения $\Delta\mathbf{x}_i^p$ и вектор лучших параметров \mathbf{b}_i^p . Здесь $p = \overline{1, P}$ – порядковый номер частицы в рое, $i = \overline{0, N}$ – номер итерации метода.

Вектор лучших параметров частицы \mathbf{b}_{i+1}^p обновляется и равен \mathbf{x}_{i+1}^p , если вычисленное значение целевой функции в новом векторе параметров лучше, чем за весь предыдущий путь, то есть $\mathbf{b}_i^p = \arg \min_{j=0,i} F(\mathbf{x}_j^p)$. Рой в совокупности хранит вектор параметров \mathbf{g}_i , который является наилучшим из всех векторов параметров частиц за всё время оптимизации, то есть на каждой итерации он определяется как $\mathbf{g}_i = \arg \min_{p=1,P, j=0,i} F(\mathbf{x}_j^p) = \arg \min_{p=1,P} F(\mathbf{b}_i^p)$.

При инициализации частицам присваиваются случайные векторы параметров из пространства поиска и нулевые начальные смещения. Вектор параметров обновляется на каждой итерации по формуле:

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{x}_{i+1}^p = w_I \Delta\mathbf{x}_i^p + w_C \mathbf{u}_b^p \odot (\mathbf{b}_i^p - \mathbf{x}_i^p) + w_S \mathbf{u}_g^p \odot (\mathbf{g}_i - \mathbf{x}_i^p), \\ \mathbf{x}_{i+1}^p = \mathbf{x}_i^p + \Delta\mathbf{x}_{i+1}^p, \end{cases} \quad (40)$$

где w_I, w_C, w_S – весовые коэффициенты (далее – веса), $\mathbf{u}_b^p, \mathbf{u}_g^p$ – случайные векторы с равномерным распределением $U[0,1]$, операция « \odot » обозначает покомпонентное умножение векторов: $\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow a_k b_k = c_k$.

Для обеспечения сходимости метода нужно наложить некоторые ограничения на веса. Из логических соображений, отрицательные значения не подходят, так как в случае инерциального веса это означает колебания частицы и движение против предыдущего направления, а отрицательные когнитивный и социальный веса не дадут частице подойти к точкам собственного и глобального минимума целевой функции, что нарушает процесс минимизации: $w_I \geq 0, w_C \geq 0, w_S \geq 0$.

Рассмотрим одну частицу, перепишем эволюцию ее смещения и ограничим сверху случайные величины единицей:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{x}_{i+1} &= w_I \Delta \mathbf{x}_i + w_C (\mathbf{b}_i - \mathbf{x}_i) + w_S (\mathbf{g}_i - \mathbf{x}_i) = \\
 &= w_I \Delta \mathbf{x}_i + (w_C + w_S) \left(\frac{w_C \mathbf{b}_i + w_S \mathbf{g}_i}{w_C + w_S} - \mathbf{x}_i \right) = \\
 &= K \Delta \mathbf{x}_i + W \bar{\mathbf{x}}_i, \\
 K &= w_I, W = w_C + w_S, \bar{\mathbf{x}}_i = \frac{w_C \mathbf{b}_i + w_S \mathbf{g}_i}{w_C + w_S} - \mathbf{x}_i.
 \end{aligned} \tag{41}$$

В предположении, что $\mathbf{b}_{i+1} = \mathbf{b}_i$ и $\mathbf{g}_{i+1} = \mathbf{g}_i$, то есть векторы наилучших параметров не изменились, эволюция вектора параметров частицы примет вид:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{x}}_{i+1} &= \frac{w_C \mathbf{b}_{i+1} + w_S \mathbf{g}_{i+1}}{w_C + w_S} - \mathbf{x}_{i+1} = \\
 &= \frac{w_C \mathbf{b}_i + w_S \mathbf{g}_i}{w_C + w_S} - \mathbf{x}_i - \Delta \mathbf{x}_{i+1} = \\
 &= \bar{\mathbf{x}}_i - K \Delta \mathbf{x}_i - W \bar{\mathbf{x}}_i = \\
 &= (1 - W) \bar{\mathbf{x}}_i - K \Delta \mathbf{x}_i.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Замена $\bar{\mathbf{x}}_i$ имеет смысл вектора ошибки от частицы до среднего взвешенного наилучших параметров. В момент, когда частицы сходятся к минимуму целевой функции, эта ошибка равна нулю, как и смещение: $\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i = \mathbf{g}_i \Rightarrow \bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}, \Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Запишем линейную систему эволюции роя:

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{i+1} \\ \Delta \mathbf{x}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-W)\mathbf{E}_6 & -K\mathbf{E}_6 \\ W\mathbf{E}_6 & K\mathbf{E}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_i \\ \Delta \mathbf{x}_i \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Она должна иметь асимптотически устойчивое тривиальное решение, которое соответствует нахождению минимума целевой функции методом роя частиц. Исследование устойчивости, которое проведено в [19], сводится к рассмотрению собственных чисел матрицы перехода, откуда появляются дополнительные ограничения на весовые коэффициенты:

$$\begin{cases} 0 < w_I < 1, \\ 4w_I < w_C + w_S < (w_I + 1)^2. \end{cases} \quad (44)$$

Следовательно, при весах, удовлетворяющих приведенным ограничениям, метод роя частиц сходится.

Однако поведение частиц меняется с изменением весов в пределах ограничений. В следующем разделе приведено исследование влияния весов на скорость сходимости метода и найденное значение целевой функции и предложена методика выбора наилучших в указанном смысле весов.

Также в методе роя частиц присутствует критерий останова – условие, при выполнении которого алгоритм оптимизации выходит из цикла итераций и возвращает значение целевой функции. В работе используется критерий, соответствующий определению стационарной точки, но рассматриваются не все параметры, а только один, который отвечает за время переориентации:

- T -координаты всех частиц находятся в δ_T -окрестности,
- Смещение каждой частицы вдоль T -координаты не превосходит по модулю $\delta_{\Delta T}$,

или математически:

$$\forall p = \overline{1, P} \max_{m=1, P} |x_{i,T}^p - x_{i,T}^m| \leq \delta_T \cap |\Delta x_{i,T}^p| \leq \delta_{\Delta T}. \quad (45)$$

3.2. Настройка гиперпараметров

Сходимость метода роя частиц можно оценить по числу итераций, прошедших до срабатывания критерия остановки, и отклонению значения функции в найденной оптимальной точке от известного минимума. Значение этих характеристик может варьироваться для разных наборов весов, поэтому в этом разделе исследуется вопрос выбора весовых коэффициентов в методе роя частиц.

Целевая функция задачи быстродействия требует больших вычислительных затрат, так как для каждого набора параметров интегрируется опорное движение или полностью, или до момента выхода управления за ограничения. Удобнее настраивать веса для функции с быстрым вычислением, поэтому рассмотрим эталонную функцию, подобную по свойствам целевой функции из поставленной задачи:

$$\hat{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_1; \hat{I}(\mathbf{x}) > 0 \\ \infty; \hat{I}(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}, \hat{I}(\mathbf{x}) = \sum_{k=2}^M \left(\frac{1}{10k} - e^{-\left(\frac{x_k}{2k}\right)^2} \cos((k+2)x_k) \right). \quad (46)$$

Здесь индикаторная функция $\hat{I}(\mathbf{x})$ задает ограничения, а значение эталонной функции $\hat{F}(\mathbf{x})$ равно одному из параметров, аналогично времени переориентации в целевой функции задачи (35), когда индикаторная функция положительна. Аналитического выражения для глобального минимума эталонной функции нет, однако из выражения (46) ясно, что чем ближе значение функции к нулю, тем лучше. Срез индикаторной функции по переменным (x_2, x_3) представлен на Рис. 4, где можно проследить ключевое свойство невыпуклости как и у области допустимого управления в целевой функции.

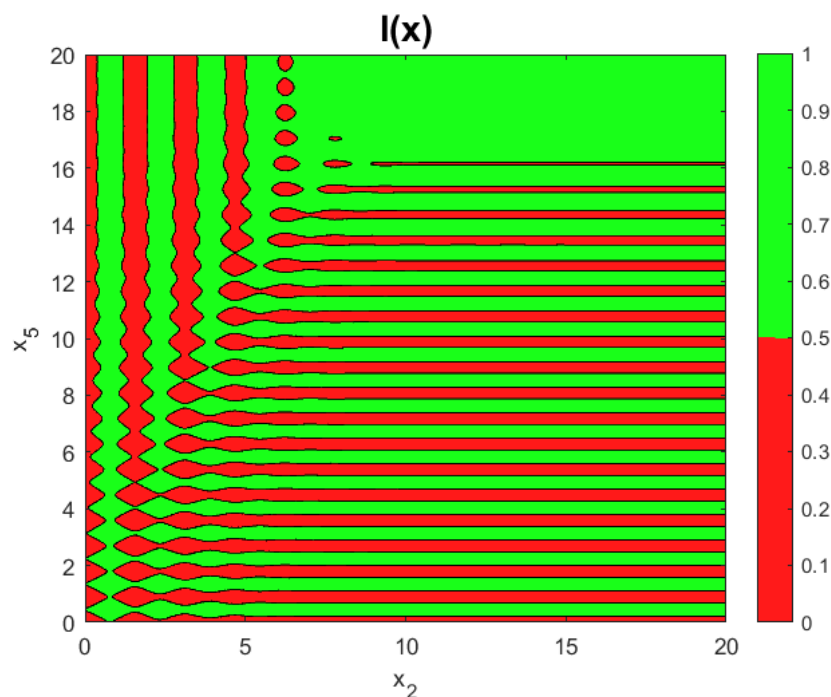


Рис.4. Срез эталонной индикаторной функции

Чтобы понять, какие эффекты возникают при оптимизации методом роя частиц в зависимости от весов, каждый набор (w_I, w_C, w_S) будем выбирать методом Монте-Карло так, чтобы выполнялись ограничения (44). Для каждого набора весов метод роя частиц прогоняется на эталонной функции с использованием $P = 100$ частиц 10 раз, выводится число итераций, прошедших до срабатывания критерия остановки, и значение целевой функции в найденном оптимуме, после чего эти характеристики усредняются для выбранных весов.

Ниже представлены результаты оптимизации эталонной функции (Рис. 5 и Рис. 6):

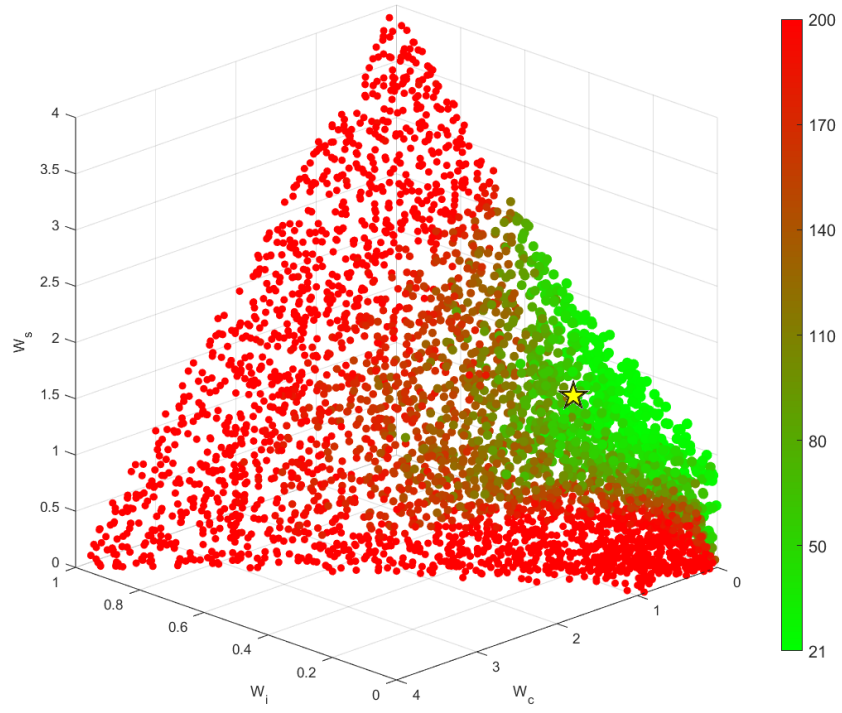


Рис. 5а. Число итераций для размерности 14

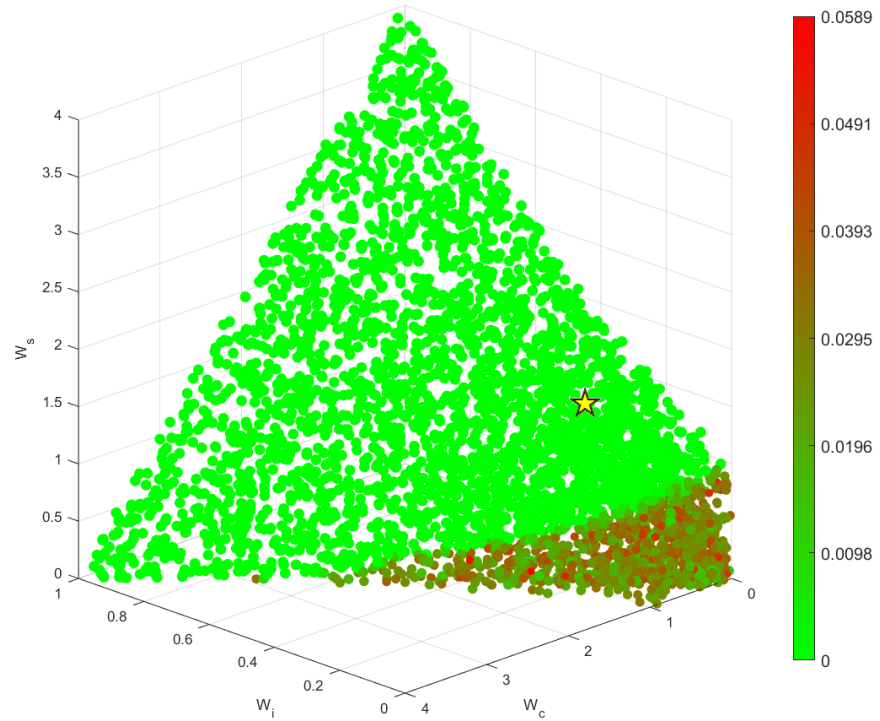


Рис. 5б. Оптимальное значение целевой функции для размерности 14

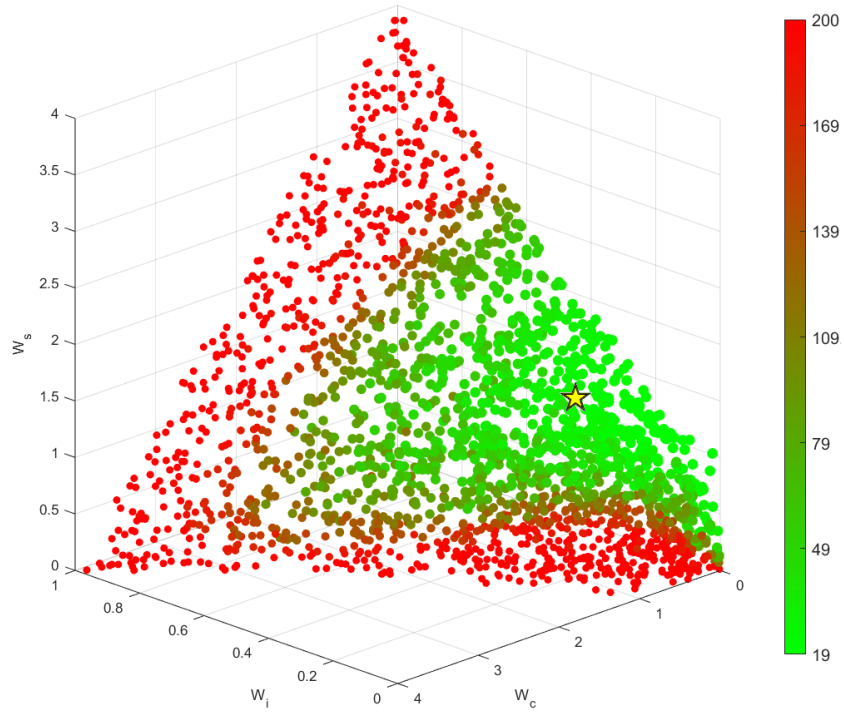


Рис. ба. Число итераций для размерности 6

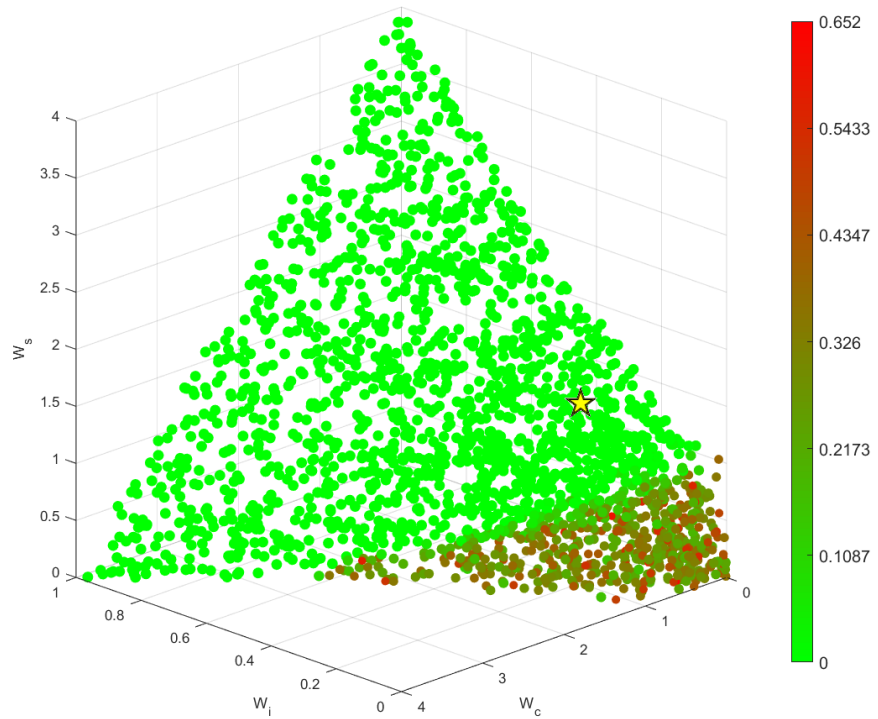


Рис. бб. Оптимальное значение функции для размерности 6

Выделение характеристик цветом на точечных диаграммах (Рис. 5-6) помогает выбрать наилучший набор весов и использовать его для оптимизации целевой функции задачи – чем ближе цвет точки к зеленому, тем лучше будет сходиться метод роя частиц с этим набором весов. Отметим, что область быстрой сходимости на размерности 6 (Рис. 6а) включает в себя область быстрой сходимости на размерности 14 (Рис. 5а). Это означает, что при выборе весов для обеспечения быстрой сходимости можно опираться только на диаграмму для размерности 14. На диаграммах на Рис. 5б и Рис. 6б можно заметить, что с уменьшением w_I и w_C увеличивается нижняя граница области попадания в глобальный минимум эталонной функции по w_S .

Исходя из этих выводов, выберем следующие веса (соответствующая точка отмечена звездой на каждой диаграмме на Рис. 5 и Рис. 6):

$$w_I = 0.42, w_C = 0.37, w_S = 1.4 \quad (47)$$

Исследуем также вопрос выбора числа частиц, от которого линейно зависит вычислительная сложность алгоритма, но в случае многоэкстремальной целевой функции чем больше частиц будет сгенерировано алгоритмом, тем больше вероятность попасть в глобальный минимум. Поэтому нужно подобрать некоторое оптимальное количество частиц с точки зрения времени выполнения программы и сходимости.

Выберем несколько значений P , для каждого проведем оптимизацию 20 раз, каждый раз генерируя начальное положение частиц случайно. В течение оптимизации измеряется время выполнения программы в секундах, а в конце сохраняется найденное оптимальное значение эталонной функции.

Результаты построим в виде коробчатой диаграммы на Рис. 7 и Рис. 8.

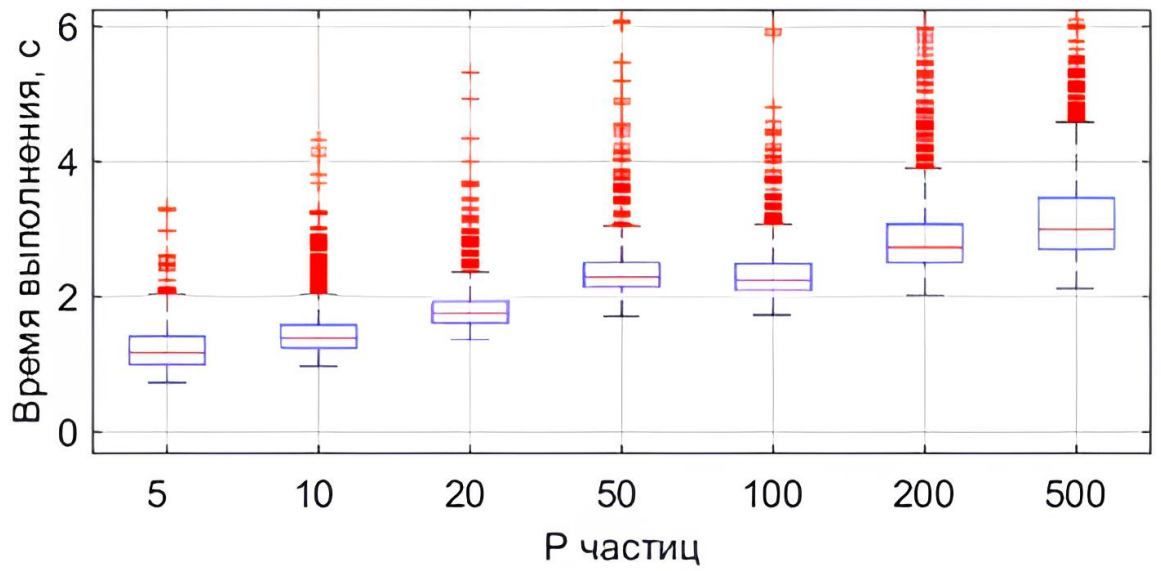


Рис. 7а. Время выполнения оптимизации для размерности 14

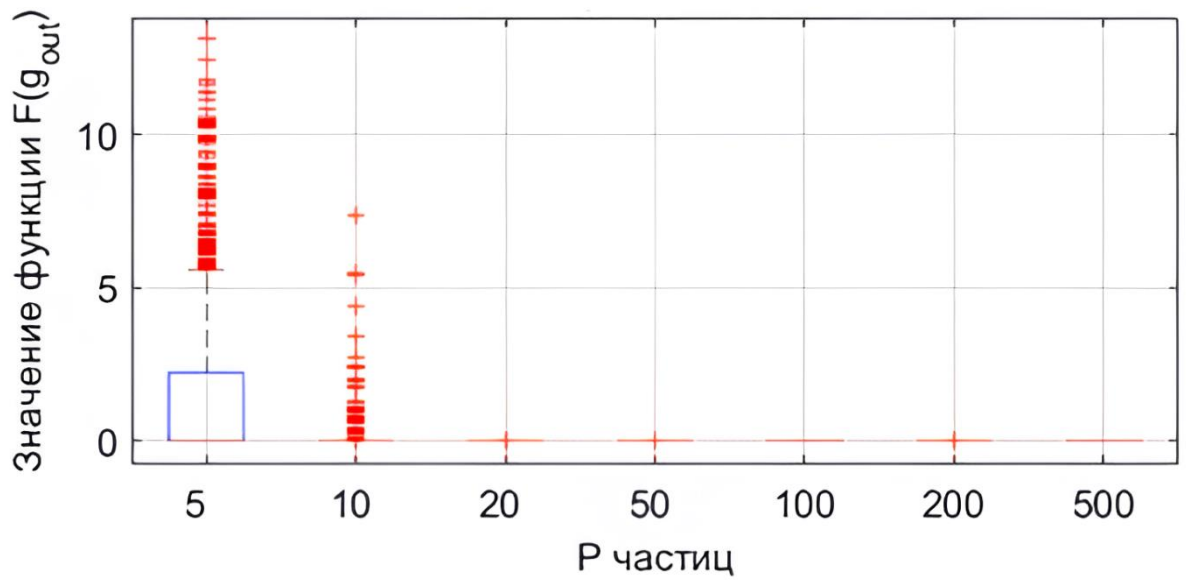


Рис. 7б. Оптимальное значение функции для размерности 14

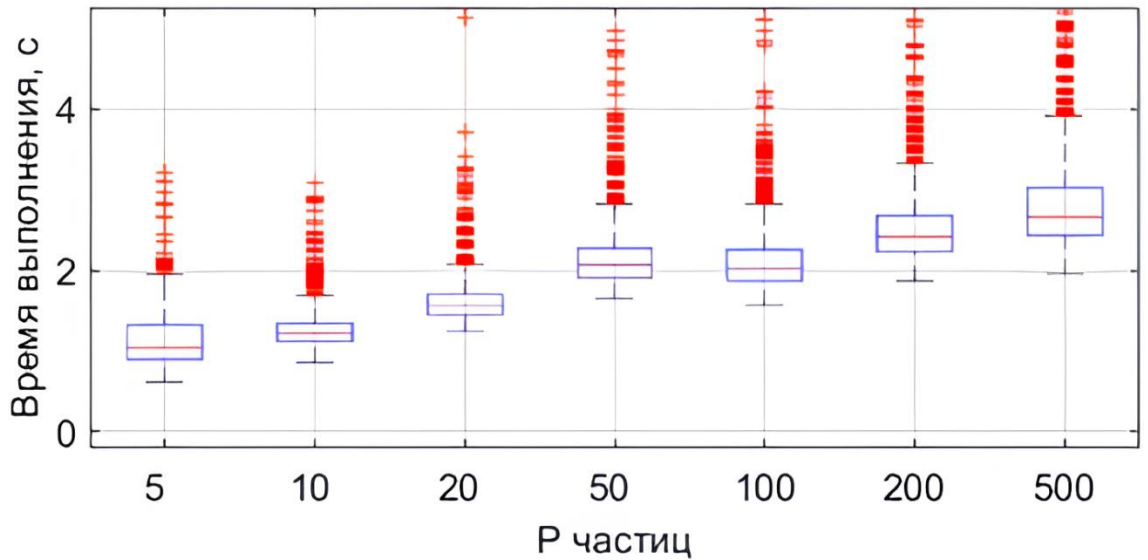


Рис. 8а. Время выполнения оптимизации для размерности 6

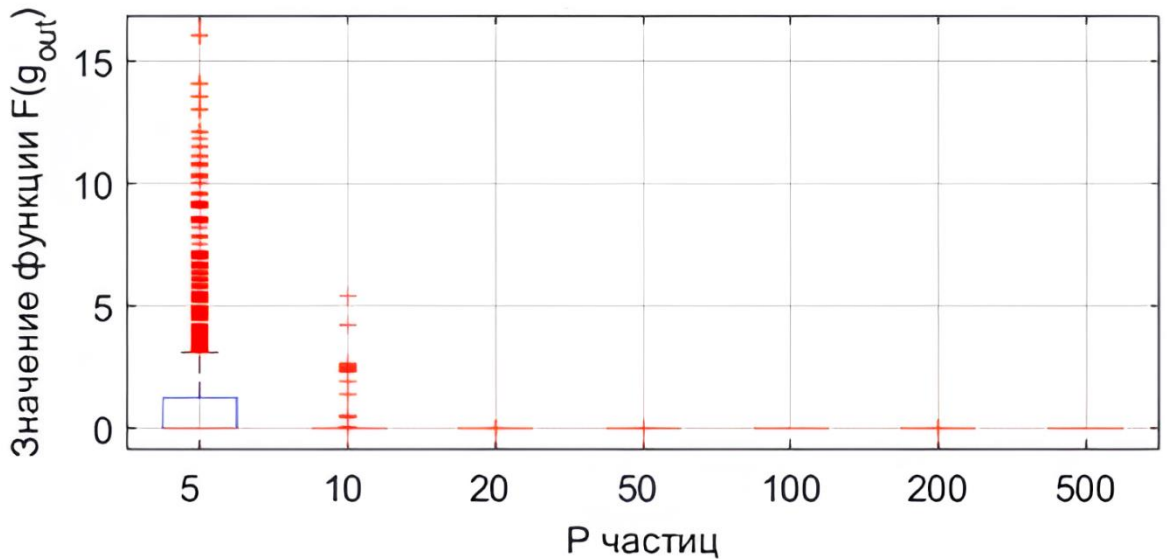


Рис. 8б. Оптимальное значение функции для размерности 6

Заметим, что 20 частиц достаточно для обеспечения сходимости к глобальному минимуму эталонной функции (Рис. 7б и 8б). Но с ростом числа частиц выделяется столбец $P = 100$: в среднем выполнение программы с $P = 50$ и $P = 200$ больше, чем в промежуточном значении (Рис. 7а и 8а). Поэтому для оптимизации целевой функции выберем число частиц $P = 100$.

4. Численное моделирование

4.1. Численный пример

Зададим параметры численного моделирования. Характеристики КА и установленных на нем маховиков:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$
$$H_{\max} = 2 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с},$$
$$\dot{H}_{\max} = 0.05 \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (48)$$

Широта и долгота точки интереса на поверхности Земли, а также начальный момент времени моделирования:

$$\varphi = 55^\circ 46' 34.5144'',$$
$$\lambda = 37^\circ 35' 39.8328'',$$
$$t_0 = 12:00:00 \text{ 21.06.2024}. \quad (49)$$

Параметры круговой орбиты КА:

$$h = 700 \text{ км},$$
$$\Omega = 130^\circ,$$
$$i = 98^\circ, \quad (50)$$

где h – высота орбиты над поверхностью Земли, Ω – долгота восходящего узла, i – наклонение. Положение КА на орбите в начальный момент времени определяется аргументом широты: $u_0 = -51^\circ$. Из этих элементов можно получить начальные радиус-вектор и скорость КА в ИСК следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega & \cos \Omega \cos i & \cos \Omega \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix}, \\
\mathbf{r}_0 &= (r_E + h) \mathbf{G} \begin{pmatrix} \cos u_0 \\ \sin u_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{v}_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_E + h}} \mathbf{G} \begin{pmatrix} -\sin u_0 \\ \cos u_0 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{51}$$

где r_E – средний радиус Земли. При таких начальных условиях КА будет находиться примерно над точкой интереса в заданный начальный момент времени (Рис. 9).

Начальные условия ориентации, угловой скорости и ускорения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_0 &= (0.6, 0.8, 0, 0), \\
\boldsymbol{\omega}_0 &= (0.6, 0, 0)^T \text{ град/с}, \\
\boldsymbol{\varepsilon}_0 &= (0, 0.006, 0)^T \text{ град/с}^2.
\end{aligned} \tag{52}$$

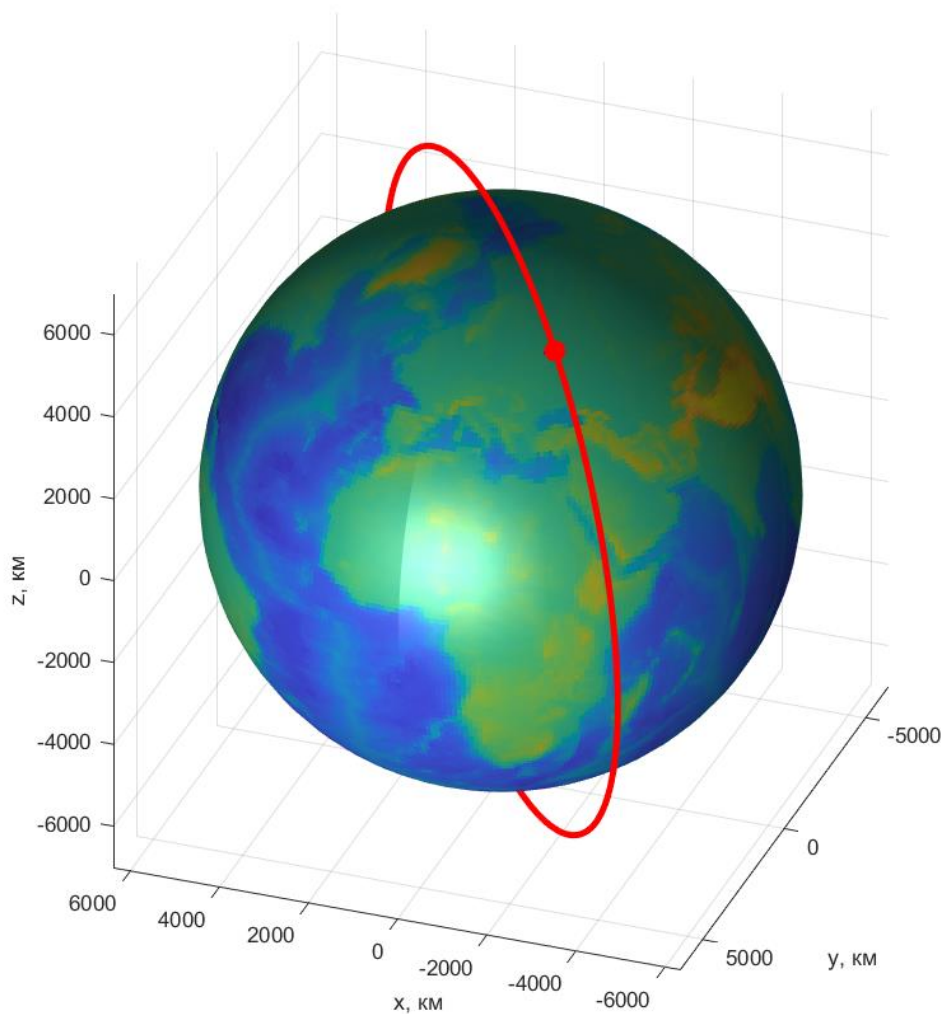


Рис. 9. Круговая орбита и начальное положение КА (схематично)

4.2. Решение задачи оптимизации

Методом роя частиц найдем оптимальные параметры опорного углового движения. На данном этапе не учитывается случайный возмущающий момент в (1) для получения идеального управления (3). Сравним также найденные в Главе 3 весовые коэффициенты (47) с коэффициентами, взятыми из областей с низким качеством работы метода (области точек с цветом, близким к красному, на Рис. 5 и Рис. 6). Используем $P = 100$ частиц, шаг моделирования $\Delta t = 0.1$ с.

Результаты экспериментов представим в Таблице 1.

Таблица 1. Результаты оптимизации

	Гиперпараметры метода роя частиц			
	С настройкой	Без настройки	С настройкой	Без настройки
$\dim(\mathbf{x})$	14	14	6	6
w_I	0.42	0.6	0.42	0.18
w_C	0.37	1.46	0.37	0.65
w_S	1.4	1.08	1.4	0.39
N_{out}	29	88	27	35
t_{out} , сек	231	709	53	67
C_{11}	0.0916	10^{-6}	0.3890	0.7601
C_{15}	0.8403	0.6564	0	0
C_{21}	0.5540	0.3361	0	0
C_{25}	0.4221	0.3815	0.5286	0.4586
C_{31}	0.3964	0.6521	0	0
C_{32}	0.6052	0.6196	0.6205	0.4331
C_{34}	0.5714	0.5723	0	0
C_{35}	0.4255	0.5661	0	0
C_{41}	0.3190	0.6638	0	0
C_{42}	0.8801	0.8507	0	0
C_{44}	0.2002	0.2034	0.3504	0.7551
C_{45}	0.0786	0.6988	0	0
T , сек	16.4698	16.5000	16.5847	16.6451
α , град	106.6372	106.6498	111.2601	109.2136

Заметим, что результаты для настроенных весовых коэффициентов в методе роя частиц отличаются от результатов с весовыми коэффициентами

без настройки. Улучшение во времени выполнения программы t_{out} значительное – с применением настройки метода можно ускорить работу программы примерно в три раза. Найденное значение времени переориентации T также улучшается с использованием настроенных весовых коэффициентов в методе роя.

4.3. Построение управления на основе функции Ляпунова

Реальное движение КА отличается от опорного, которое реализует идеально рассчитанный управляющий момент, из-за неучтенных или случайных внешних возмущений [20]. В начальный момент времени считаем, что ССК совпадает с опорной системой координат (ОпСК), которая задается в соответствии с полученным кватернионом ориентации опорного движения (8) в Главе 2 в каждый момент времени.

Относительный кватернион ориентации и относительная угловая скорость:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{rel} &= \tilde{\mathbf{Q}}_{ref} \circ \mathbf{Q}_{abs}, \\ \boldsymbol{\omega}_{rel} &= \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}, \end{aligned} \quad (53)$$

где $\mathbf{Q}_{abs}, \boldsymbol{\omega}_{abs}$ – кватернион ориентации и угловая скорость ССК относительно ИСК (абсолютный кватернион ориентации и абсолютная угловая скорость КА), $\mathbf{Q}_{ref}, \boldsymbol{\omega}_{ref}$ – опорное движение ОпСК относительно ИСК, \mathbf{D} – матрица перехода из ОпСК в ССК.

Уравнения относительного углового движения получим из соответствующих уравнений системы (1) с учетом выражений на абсолютную угловую скорость и ее производную:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{abs} &= \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} - \boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref} + \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{ref}. \end{aligned} \quad (54)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{D}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \mathbf{D}, \\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} &= -\boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}] - \mathbf{J}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{ref} + \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{M}_{grav}.\end{aligned}\quad (55)$$

Модельное управление, требуемое для обеспечения трехосной ориентации в заданном положении, строится с использованием функции Ляпунова [21–23].

Рассмотрим кандидат-функцию Ляпунова

$$V = k_q (1 - q_{rel,0}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}), \quad (56)$$

где $k_q > 0$ – положительный скалярный параметр, $q_{rel,0}$ – скалярная часть относительного кватерниона ориентации. Здесь первое слагаемое характеризует относительную ориентацию, а второе – энергию относительного вращательного движения. Для асимптотической устойчивости относительного положения равновесия $(\mathbf{Q}_{rel} = (1, \mathbf{0}), \boldsymbol{\omega}_{rel} = (0, 0, 0))$ по теореме Барбашина-Красовского [24] достаточно обеспечить неположительность производной функции Ляпунова в силу уравнений движения (55)

$$\dot{V}|_{(1)} = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, k_q \mathbf{q}_{rel} + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}) \leq 0, \quad (57)$$

где \mathbf{q}_{rel} – векторная часть кватерниона относительной ориентации.

Введем положительный скалярный параметр $k_\omega = const > 0$ так, чтобы

$$k_q \mathbf{q}_{rel} + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}. \quad (58)$$

Тогда

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, (-k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel})) \leq 0. \quad (59)$$

Таким образом, с учетом (58) и второго уравнения системы (55) получаем выражение для управляющего момента:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{ctrl} &= -\boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}] + \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - \\ &- \mathbf{M}^{grav} - k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} - k_q \mathbf{q}_{rel}.\end{aligned}\quad (60)$$

Динамические уравнения относительного движения в этом случае принимают вид

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = -k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} - k_q\mathbf{q}_{rel}. \quad (61)$$

Таким образом, выбрав в качестве коэффициентов управления k_{ω} и k_q произвольные положительные константы, можно обеспечить асимптотическую устойчивость относительного положения равновесия ($\mathbf{Q}_{rel} = (1, \mathbf{0})$, $\boldsymbol{\omega}_{rel} = (0, 0, 0)$). Выберем следующие коэффициенты управления:

$$k_q = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}, k_{\omega} = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}. \quad (62)$$

4.4. Результаты моделирования

Проведем численное моделирование с найденными оптимальными параметрами из Таблицы 1 и удержанием ориентации КА на опорном движении с помощью управления (60). Учтем случайный возмущающий момент. Возмущения могут в себя включать аэродинамический момент, солнечное давление, возмущения, возникающие из-за несферичности Земли. Но так как управляющий момент по величине превосходит возмущающий, то моделировать его можно в виде равномерно распределенного случайного вектора $\mathbf{M}_{dist} \sim U[-M_{dist}, M_{dist}]^3$, где порядок величины момента $M_{dist} = 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}$. Для численного моделирования выберем первый столбец Таблицы 1, соответствующий размерности 14 и настроенным коэффициентам метода роя. Результаты моделирования представлены на Рис. 10.

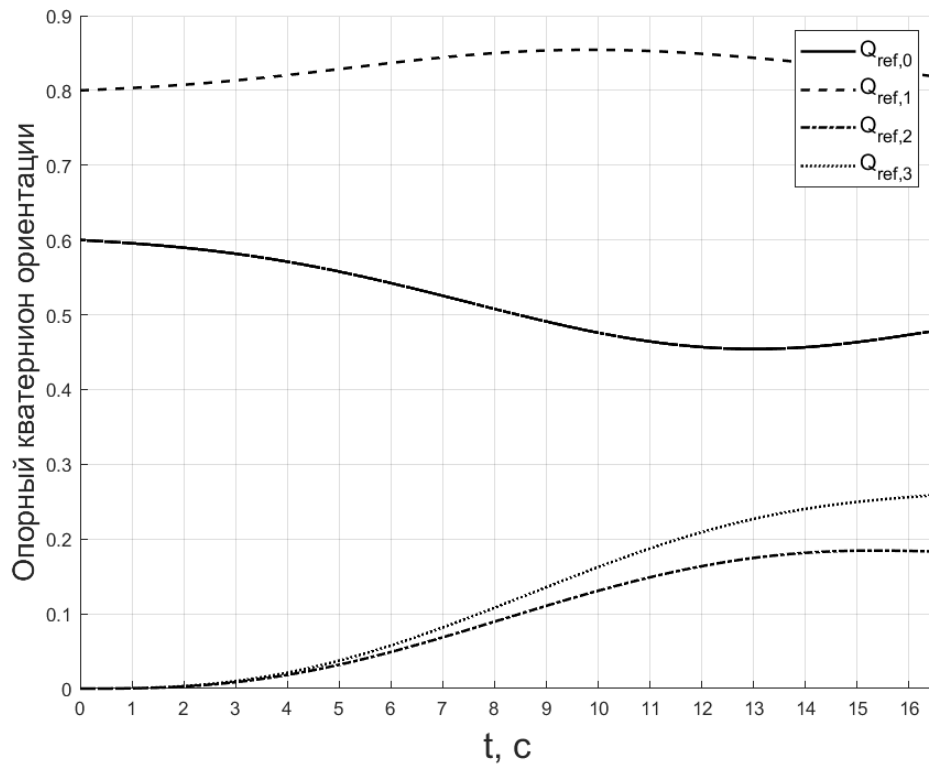


Рис. 10а. Опорный кватернион ориентации

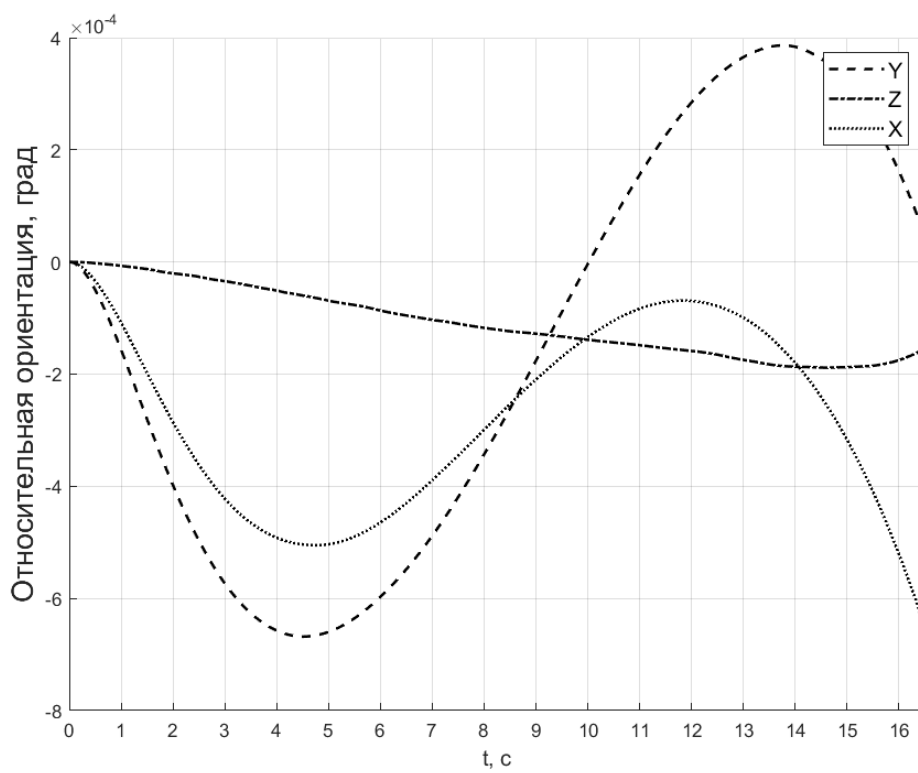


Рис. 10б. Углы относительной ориентации

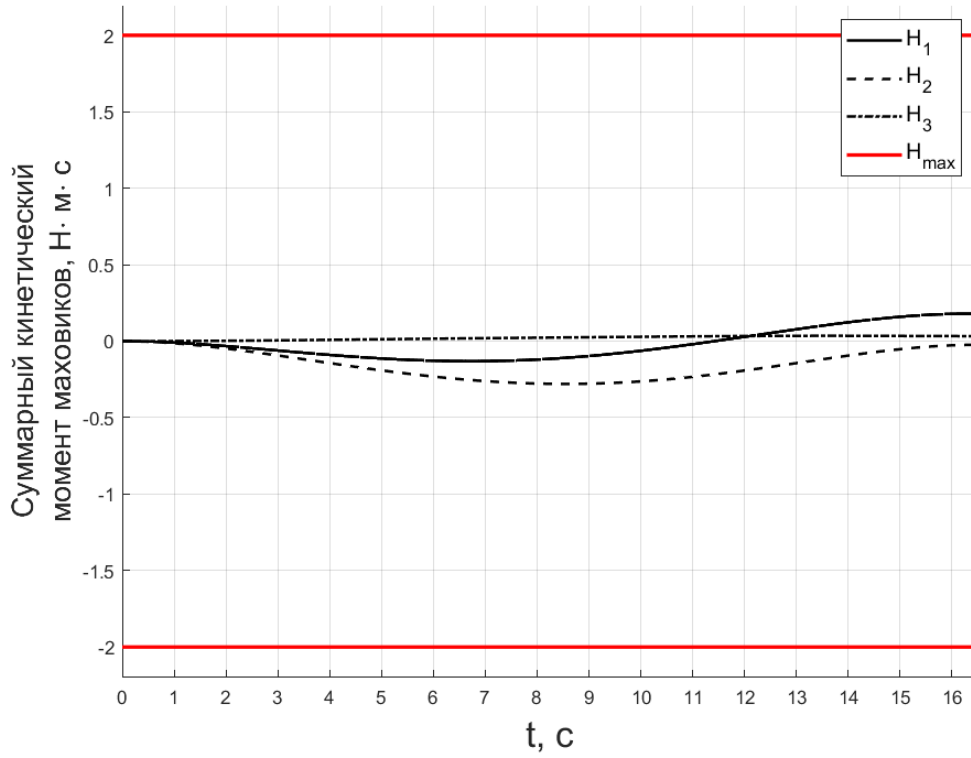


Рис. 10в. Суммарный кинетический момент маховиков

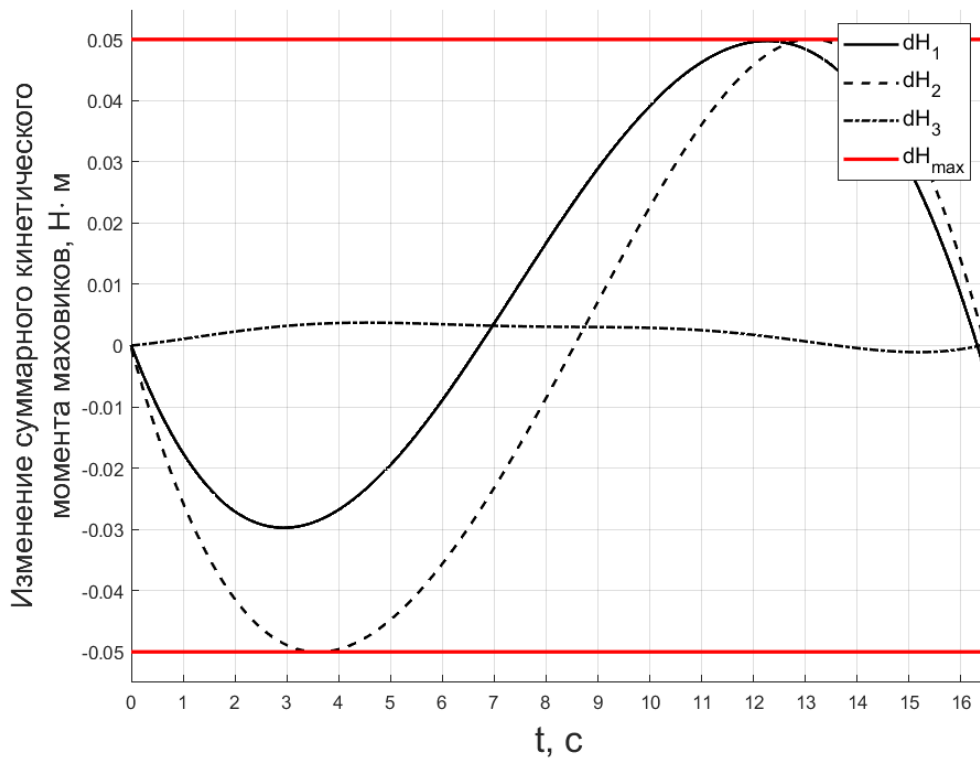


Рис. 10г. Изменение суммарного кинетического момента маховиков

Опорная кватернион ориентации удовлетворяет заданным краевым условиям ориентации (рис. 10а). Точность удержания ориентации КА получена порядка нескольких угловых секунд (Рис. 10б). Суммарный кинетический момент маховиков и его изменение удовлетворяют ограничениям (Рис. 10в-г). Из Рис. 10г видно, что компоненты изменения суммарного кинетического момента достигают максимальных значений в некоторый момент времени, то есть если бы время переориентации было задано меньше, то компоненты \dot{H} вышли бы за ограничения. Отсюда можно сделать вывод, что метод роя частиц нашел наименьшее возможное время переориентации КА.

Заключение

В ходе работы была исследована методика управления, позволяющего реализовать разворот из начального положения в требуемое за наименьшее время. Для построения управления рассмотрена параметризация опорного углового движения с помощью сплайна, выведены аналитические формулы для двух случаев – с использованием 6 и 14 параметров.

Для поиска оптимальных значений параметров применен метод глобальной оптимизации, метод роя частиц. Исследована важность выбора гиперпараметров метода, а также предложена методика выбора таких весовых коэффициентов, которые обеспечивают одновременно сходимость и быстрое действие метода. На численном примере показано, что без настройки весовых коэффициентов метод может медленно сходиться или не сходиться вообще, а результат оптимизации при этом может отличаться от глобального минимума целевой функции.

После проведения настройки весовых коэффициентов метода роя решена задача переориентации КА. Численно с помощью метода роя найдены оптимальные параметры опорного движения, а затем проведено численное моделирование с учетом внешних возмущений, демонстрирующее работоспособность предложенной методики для выполнения реальных прикладных задач.

Рассмотренная методика построения опорного движения и реализующего его управления, адаптированная к задаче переориентации КА, может быть применена в дальнейшем для построения алгоритма управления КА в режиме последовательной съемки нескольких точек интереса. При этом, опираясь на уже полученные в работе результаты, параметризовать опорное движение и настроить метод оптимизации в дальнейшем можно более эффективным способом.

Список использованной литературы

- [1] R. Aucoin, Real-time optimal slew maneuver planning for small satellites, (2019).
- [2] A. Okhitina, D. Roldugin, S. Tkachev, Application of the PSO for the construction of a 3-axis stable magnetically actuated satellite angular motion, *Acta Astronaut.* 195 (2022) 86–97. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.03.001>.
- [3] A. Caubet, J. Biggs, Optimal attitude motion planner for large slew maneuvers using a shape-based method, in: *AIAA Guid. Navig. Control Conf.*, 2013: p. 4719.
- [4] V.E. Kremer, Quaternions and SLERP, in: *Embots. Dfki. de/Doc/Seminar ca/Kremer Quaternions. Pdf*, 2008.
- [5] M. Dong, G. Yao, J. Li, L. Zhang, Research on attitude interpolation and tracking control based on improved orientation vector SLERP method, *Robotica* 38 (2020) 719–731.
- [6] С.С. Ткачев, А.И. Шестоперов, Построение опорной траектории третьего порядка гладкости углового движения космического аппарата, *Математическое Моделирование* 33 (2021) 3–18. <https://doi.org/10.20948/mm-2021-10-01>.
- [7] M.A. Cooper, B. Smeresky, An overview of evolutionary algorithms toward spacecraft attitude control, *Adv. Spacecr. Attitude Control* (2020).
- [8] R.W. Beard, T.W. McLain, F.Y. Hadaegh, Fuel optimization for constrained rotation of spacecraft formations, *J. Guid. Control. Dyn.* 23 (2000) 339–346.
- [9] J.D. Biggs, L. Colley, Geometric attitude motion planning for spacecraft with pointing and actuator constraints, *J. Guid. Control. Dyn.* 39 (2016) 1672–1677.
- [10] J. Kennedy, R. Eberhart, Particle swarm optimization, in: *Proc. ICNN'95-International Conf. Neural Networks*, 1995: pp. 1942–1948.
- [11] J. Tang, G. Liu, Q. Pan, A Review on Representative Swarm Intelligence Algorithms for Solving Optimization Problems: Applications and Trends, *IEEE/CAA J. Autom. Sin.* 8 (2021) 1627–1643. <https://doi.org/10.1109/JAS.2021.1004129>.
- [12] D. Spiller, L. Ansalone, F. Curti, Particle Swarm Optimization for Time-Optimal Spacecraft Reorientation with Keep-Out Cones, *J. Guid. Control. Dyn.* 39 (2016) 312–325. <https://doi.org/10.2514/1.G001228>.
- [13] R.G. Melton, Differential evolution/particle swarm optimizer for constrained slew maneuvers, *Acta Astronaut.* 148 (2018) 246–259. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.04.045>.
- [14] X. Wu, Y. Yang, Y. Sun, Y. Xie, X. Song, B. Huang, Dynamic regional splitting planning of remote sensing satellite swarm using parallel genetic PSO algorithm, *Acta Astronaut.* 204 (2023) 531–551.

- <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.09.020>.
- [15] E.B. Dam, M. Koch, M. Lillholm, Quaternions, interpolation and animation, Citeseer, 1998.
 - [16] D.A. Vallado, Fundamentals of astrodynamics and applications, Springer Science & Business Media, 2001.
 - [17] H. Li, Z. Xu, G. Taylor, C. Studer, T. Goldstein, Visualizing the loss landscape of neural nets, *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* 31 (2018).
 - [18] I. Skorokhodov, M. Burtsev, Loss landscape sightseeing with multi-point optimization, *ArXiv Prepr. ArXiv1910.03867* (2019).
 - [19] D. Simon, *Evolutionary optimization algorithms*, John Wiley & Sons, 2013.
 - [20] Y. Mashtakov, M. Ovchinnikov, S. Tkachev, M. Shachkov, Lyapunov based attitude control algorithm for slew maneuvers with restrictions, *Adv. Astronaut. Sci.* 163 (2018) 355–364.
 - [21] В.И. Зубов, *Лекции по теории управления*, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, М., 1975.
 - [22] P. Tsiotras, New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies, *IFAC Proc. Vol.* 27 (1994) 321–326. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)45820-4](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)45820-4).
 - [23] М.Ю. Овчинников, С.С. Ткачев, С.О. Карпенко, Исследование углового движения микроспутника Чибис-м с трехосным маховичным управлением, *Космические Исследования* 50 (2012) 462–471.
 - [24] Е.А. Барбашин, *Введение в теорию устойчивости*, Наука, Москва, 1967.

Приложение А. Вывод вспомогательных кватернионов

А.1. Функции угловой скорости и углового ускорения

Введем следующие замены кватернионов:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 = \tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{q}_0, \mathbf{R}_2 = \tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{q}_1, \mathbf{R}_3 = \tilde{\mathbf{q}}_1 \circ \mathbf{q}_2, \mathbf{R}_4 = \tilde{\mathbf{q}}_2 \circ \mathbf{q}_3, \mathbf{R}_5 = \tilde{\mathbf{q}}_3 \circ \mathbf{Q}_1, \\ i = \overline{1,5}: \mathbf{L}_i = \ln \mathbf{R}_i, \mathbf{P}_i = \mathbf{R}_i^{p_i(\tau)}. \end{aligned} \quad (63)$$

С такой заменой формула (8) примет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_0 \circ \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5, \\ \tilde{\mathbf{Q}} &= \tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_2 \circ \tilde{\mathbf{P}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_0. \end{aligned} \quad (64)$$

Применим дифференцирование (11):

$$\dot{\mathbf{P}}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{R}_i^{p_i(\tau)} = \frac{dp_i(\tau)}{dt} \cdot \mathbf{R}_i^{p_i(\tau)} \circ \ln \mathbf{R}_i = \frac{p_i'(\tau)}{T} \mathbf{P}_i \circ \mathbf{L}_i. \quad (65)$$

Найдем производные кватерниона ориентации:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{Q}_0 \circ \dot{\mathbf{P}}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \mathbf{Q}_0 \circ \mathbf{P}_1 \circ \dot{\mathbf{P}}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\ &+ \mathbf{Q}_0 \circ \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \dot{\mathbf{P}}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \mathbf{Q}_0 \circ \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \dot{\mathbf{P}}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\ &+ \mathbf{Q}_0 \circ \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \dot{\mathbf{P}}_5 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \mathbf{Q}_0 \circ (p_1'(\tau) \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\ &+ p_2'(\tau) \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\ &+ p_3'(\tau) \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\ &+ p_4'(\tau) \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\ &+ p_5'(\tau) \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 \circ \mathbf{L}_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}} &= \frac{1}{T^2} \mathbf{Q}_0 \circ [p_1''(\tau) \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\ &+ p_2''(\tau) \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\ &+ p_3''(\tau) \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\ &+ p_4''(\tau) \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\ &+ p_5''(\tau) \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 \circ \mathbf{L}_5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (p'_1(\tau))^2 \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + 2p'_1(\tau)p'_2(\tau)\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + 2p'_1(\tau)p'_3(\tau)\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + 2p'_1(\tau)p'_4(\tau)\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + 2p'_1(\tau)p'_5(\tau)\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 \circ \mathbf{L}_5 + \\
& + (p'_2(\tau))^2 \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + 2p'_2(\tau)p'_3(\tau)\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + 2p'_2(\tau)p'_4(\tau)\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + 2p'_2(\tau)p'_5(\tau)\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 \circ \mathbf{L}_5 + \\
& + (p'_3(\tau))^2 \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + 2p'_3(\tau)p'_4(\tau)\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + 2p'_3(\tau)p'_5(\tau)\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 \circ \mathbf{L}_5 + \\
& + (p'_4(\tau))^2 \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + 2p'_4(\tau)p'_5(\tau)\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 \circ \mathbf{L}_5 + \\
& + (p'_5(\tau))^2 \mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 \circ \mathbf{L}_5 \circ \mathbf{L}_5 \Big].
\end{aligned}$$

Подставим производные в (12):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{2}{T} & \left(p'_1(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \right. \\
& + p'_2(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + p'_3(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& \left. + p'_4(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 + p'_5(\tau)\mathbf{L}_5 \right). \tag{66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \frac{2}{T^2} & \left(p''_1(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \right. \\
& + p''_2(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& + p''_3(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& \left. + p''_4(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 + p''_5(\tau)\mathbf{L}_5 + \right. \tag{67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +p'_1(\tau)p'_2(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& +p'_1(\tau)p'_3(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& +p'_1(\tau)p'_4(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& +p'_1(\tau)p'_5(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 \circ \mathbf{L}_5 - \\
& -p'_2(\tau)p'_1(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \mathbf{L}_2 \circ \tilde{\mathbf{P}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& +p'_2(\tau)p'_3(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& +p'_2(\tau)p'_4(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& +p'_2(\tau)p'_5(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 \circ \mathbf{L}_5 - \\
& -p'_3(\tau)p'_1(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \mathbf{L}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 - \\
& -p'_3(\tau)p'_2(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \mathbf{L}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& +p'_3(\tau)p'_4(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& +p'_3(\tau)p'_5(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 \circ \mathbf{L}_4 - \\
& -p'_4(\tau)p'_1(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \mathbf{L}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 - \\
& -p'_4(\tau)p'_2(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \mathbf{L}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 - \\
& -p'_4(\tau)p'_3(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \mathbf{L}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 + \\
& +p'_4(\tau)p'_5(\tau)\tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5 \circ \mathbf{L}_5 - \\
& -p'_5(\tau)p'_1(\tau)\mathbf{L}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \tilde{\mathbf{P}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 - \\
& -p'_5(\tau)p'_2(\tau)\mathbf{L}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \tilde{\mathbf{P}}_3 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 - \\
& -p'_5(\tau)p'_3(\tau)\mathbf{L}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_4 \circ \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_5 - \\
& -p'_5(\tau)p'_4(\tau)\mathbf{L}_5 \circ \tilde{\mathbf{P}}_5 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{P}_5).
\end{aligned}$$

А.2. Аналитические выражения с использованием 12 параметров

Напомним, какие параметры являются ненулевыми:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} p'_1(0) & p'_2(0) & p'_3(0) & p'_4(0) & p'_5(0) \\ p'_1(1) & p'_2(1) & p'_3(1) & p'_4(1) & p'_5(1) \\ p''_1(0) & p''_2(0) & p''_3(0) & p''_4(0) & p''_5(0) \\ p''_1(1) & p''_2(1) & p''_3(1) & p''_4(1) & p''_5(1) \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & C_{15} \\ C_{21} & 0 & 0 & 0 & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & 0 & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & 0 & C_{44} & C_{45} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}.
\end{aligned}$$

Далее нам понадобится следующий прием:

$$\ln \mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} \circ \ln \mathbf{Q} \circ \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \circ \ln \mathbf{Q} \circ \tilde{\mathbf{Q}}.$$

Подставим $t = t_0$ и $t = t_1 = t_0 + T$ (т.е. $\tau = 0$ и $\tau = 1$ соответственно) в (66):

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) = \frac{2}{T} (p'_1(0)\mathbf{L}_1 + p'_5(0)\mathbf{L}_5) = \boldsymbol{\omega}_0,$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}(t_1) &= \frac{2}{T} (p'_1(1)\tilde{\mathbf{R}}_5 \circ \tilde{\mathbf{R}}_4 \circ \tilde{\mathbf{R}}_3 \circ \tilde{\mathbf{R}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_3 \circ \mathbf{R}_4 \circ \mathbf{R}_5 + p'_5(1)\mathbf{L}_5) = \\
&= \frac{2}{T} (p'_1(1)\tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \mathbf{q}_0 \circ \mathbf{L}_1 \circ \tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1 + p'_5(1)\mathbf{L}_5) = \\
&= \frac{2}{T} [p'_1(1)\tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \mathbf{Q}_0 \circ (\tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{q}_0) \circ \ln(\tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{q}_0) \circ (\tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{Q}_0) \circ \tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1 + \\
&+ p'_5(1)\mathbf{L}_5] = \frac{2}{T} (p'_1(1)\tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \mathbf{Q}_0 \circ \mathbf{L}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1 + p'_5(1)\mathbf{L}_5) = \boldsymbol{\omega}_1.
\end{aligned}$$

Логарифмы являются кватернионами с нулевой скалярной частью: $i = \overline{1,5}, \mathbf{L}_i = (0, \mathbf{l}_i)$. Заметим, что в последнем выражении присутствует преобразование координат поворотом на кватернион $\tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1$, что можно заменить умножением вектора на матрицу \mathbf{A}_1 . Не рассматривая скалярную часть, перепишем уравнения в следующем виде:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_0 T = 2C_{11}\mathbf{l}_1 + 2C_{15}\mathbf{l}_5, \\ \boldsymbol{\omega}_1 T = 2C_{21}\mathbf{A}_1\mathbf{l}_1 + 2C_{25}\mathbf{l}_5. \end{cases}$$

Объединив логарифмы в один вектор, а угловые скорости – в другой, получим линейную систему:

$$T \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_0 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} C_{11} \mathbf{E}_3 & C_{15} \mathbf{E}_3 \\ C_{21} \mathbf{A}_1 & C_{25} \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_5 \end{pmatrix},$$

где \mathbf{E}_3 – единичная матрица 3×3 . В случае невырожденной матрицы системы получаем решение:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_5 \end{pmatrix} = \frac{T}{2} \begin{pmatrix} C_{11} \mathbf{E}_3 & C_{15} \mathbf{E}_3 \\ C_{21} \mathbf{A}_1 & C_{25} \mathbf{E}_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_0 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \end{pmatrix}.$$

Из логарифмов выразим вспомогательные кватернионы \mathbf{q}_0 и \mathbf{q}_3 :

$$\mathbf{L}_1 = \ln(\tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{q}_0) \Rightarrow \mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}_0 \circ \exp \mathbf{L}_1,$$

$$\mathbf{L}_5 = \ln(\tilde{\mathbf{q}}_3 \circ \mathbf{Q}_1) \Rightarrow \mathbf{q}_3 = \mathbf{Q}_1 \circ \exp(-\mathbf{L}_5).$$

Теперь подставим $t = t_0$ и $t = t_1 = t_0 + T$ (т.е. $\tau = 0$ и $\tau = 1$ соответственно)

в (67):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(t_0) = & \frac{2}{T^2} [p_1''(0) \mathbf{L}_1 + p_2''(0) \mathbf{L}_2 + p_4''(0) \mathbf{L}_4 + p_5''(0) \mathbf{L}_5 + \\ & + p_1'(0) p_5'(0) \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_5 - p_5'(0) p_1'(0) \mathbf{L}_5 \mathbf{L}_1] = \boldsymbol{\varepsilon}_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = & \frac{2}{T^2} [p_1''(1) \tilde{\mathbf{R}}_5 \circ \tilde{\mathbf{R}}_4 \circ \tilde{\mathbf{R}}_3 \circ \tilde{\mathbf{R}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_3 \circ \mathbf{R}_4 \circ \mathbf{R}_5 + \\ & + p_2''(1) \tilde{\mathbf{R}}_5 \circ \tilde{\mathbf{R}}_4 \circ \tilde{\mathbf{R}}_3 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{R}_3 \circ \mathbf{R}_4 \circ \mathbf{R}_5 + \\ & + p_4''(1) \tilde{\mathbf{R}}_5 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{R}_5 + p_5''(1) \mathbf{L}_5 + \\ & + p_1'(1) p_5'(1) \tilde{\mathbf{R}}_5 \circ \tilde{\mathbf{R}}_4 \circ \tilde{\mathbf{R}}_3 \circ \tilde{\mathbf{R}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_3 \circ \mathbf{R}_4 \circ \mathbf{R}_5 \circ \mathbf{L}_5 - \\ & - p_5'(1) p_1'(1) \mathbf{L}_5 \circ \tilde{\mathbf{R}}_5 \circ \tilde{\mathbf{R}}_4 \circ \tilde{\mathbf{R}}_3 \circ \tilde{\mathbf{R}}_2 \circ \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_3 \circ \mathbf{R}_4 \circ \mathbf{R}_5] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \frac{2}{T^2} [p_1''(1) \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \mathbf{q}_0 \circ \mathbf{L}_1 \circ \tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1 + p_2''(1) \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \mathbf{q}_1 \circ \ln(\tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{q}_1) \circ \tilde{\mathbf{q}}_1 \circ \mathbf{Q}_1 + \\ & + p_4''(1) \tilde{\mathbf{R}}_5 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{R}_5 + p_5''(1) \mathbf{L}_5 + \\ & + p_1'(1) p_5'(1) \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \mathbf{q}_0 \circ \mathbf{L}_1 \circ \tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{L}_5 - \\ & - p_5'(1) p_1'(1) \mathbf{L}_5 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \mathbf{q}_0 \circ \mathbf{L}_1 \circ \tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T^2} \left[p_1''(1) \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \mathbf{Q}_0 \circ \mathbf{L}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1 + p_2''(1) \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \mathbf{q}_0 \circ \mathbf{L}_2 \circ \tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1 + \right. \\
&\quad + p_4''(1) \tilde{\mathbf{R}}_5 \circ \mathbf{L}_4 \circ \mathbf{R}_5 + p_5''(1) \mathbf{L}_5 + \\
&\quad + p_1'(1) p_5'(1) \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \mathbf{Q}_0 \circ \mathbf{L}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{L}_5 - \\
&\quad \left. - p_5'(1) p_1'(1) \mathbf{L}_5 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \mathbf{Q}_0 \circ \mathbf{L}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1 \right] = \boldsymbol{\varepsilon}_1.
\end{aligned}$$

Обозначим \mathbf{A}_2 – матрица перехода, соответствующая кватерниону $\tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{Q}_1$,
 \mathbf{A}_3 – матрица перехода, соответствующая кватерниону \mathbf{R}_5 , и векторы:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}_0 &= C_{31} \mathbf{I}_1 + C_{35} \mathbf{I}_5 + 2C_{11} C_{15} [\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_5], \\
\boldsymbol{\lambda}_1 &= C_{41} \mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1 + C_{45} \mathbf{I}_5 + 2C_{21} C_{25} [\mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_5].
\end{aligned}$$

Здесь было явно использовано определение перемножения кватернионов:

$$\mathbf{L}_1 \circ \mathbf{L}_5 - \mathbf{L}_5 \circ \mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_5) - (\mathbf{I}_5 \cdot \mathbf{I}_1) \\ \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_5 - \mathbf{I}_5 \times \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_5 \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_0 T^2 = 2C_{32} \mathbf{I}_2 + 2C_{34} \mathbf{I}_4 + 2\boldsymbol{\lambda}_0, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 T^2 = 2C_{42} \mathbf{A}_2 \mathbf{I}_2 + 2C_{44} \mathbf{A}_3 \mathbf{I}_4 + 2\boldsymbol{\lambda}_1. \end{cases}$$

Решим линейную систему:

$$\begin{aligned}
T^2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} C_{32} \mathbf{E}_3 & C_{34} \mathbf{E}_3 \\ C_{42} \mathbf{A}_2 & C_{44} \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}_1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_{32} \mathbf{E}_3 & C_{34} \mathbf{E}_3 \\ C_{42} \mathbf{A}_2 & C_{44} \mathbf{A}_3 \end{pmatrix}^{-1} \left(\frac{T^2}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}_1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Из логарифмов выразим вспомогательные кватернионы \mathbf{q}_0 и \mathbf{q}_3 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_2 &= \ln(\tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{q}_1) \Rightarrow \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 \circ \exp \mathbf{L}_2, \\
\mathbf{L}_4 &= \ln(\tilde{\mathbf{q}}_2 \circ \mathbf{q}_3) \Rightarrow \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 \circ \exp(-\mathbf{L}_4).
\end{aligned}$$

Таким образом, были определены все вспомогательные кватернионы.

А.3. Аналитические выражения с использованием 4 параметров

В этом случае ненулевых параметров меньше:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p'_1(0) & p'_2(0) & p'_3(0) & p'_4(0) & p'_5(0) \\ p'_1(1) & p'_2(1) & p'_3(1) & p'_4(1) & p'_5(1) \\ p''_1(0) & p''_2(0) & p''_3(0) & p''_4(0) & p''_5(0) \\ p''_1(1) & p''_2(1) & p''_3(1) & p''_4(1) & p''_5(1) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{25} \\ 0 & C_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}. \end{aligned} \quad (68)$$

Каждое краевое условие угловой скорости и углового ускорения можно рассмотреть отдельно. Воспользуемся формулами (66) и (67) в начальный и конечный моменты времени:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t_0) &= \frac{2}{T} p'_1(0) \ln(\tilde{\mathbf{Q}}_0 \circ \mathbf{q}_0) = \boldsymbol{\omega}_0, \\ \mathbf{q}_0 &= \mathbf{Q}_0 \circ \exp \frac{\boldsymbol{\omega}_0 T}{2C_{11}}. \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t_1) &= \frac{2}{T} p'_5(1) \ln(\tilde{\mathbf{q}}_3 \circ \mathbf{Q}_1) = \boldsymbol{\omega}_1, \\ \mathbf{q}_3 &= \mathbf{Q}_1 \circ \exp \left(-\frac{\boldsymbol{\omega}_1 T}{2C_{25}} \right). \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(t_0) &= \frac{2}{T^2} p''_2(0) \ln(\tilde{\mathbf{q}}_0 \circ \mathbf{q}_1) = \boldsymbol{\varepsilon}_0, \\ \mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}_0 \circ \exp \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0 T^2}{2C_{32}}. \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(t_1) &= \frac{2}{T} p''_4(1) \ln(\tilde{\mathbf{q}}_2 \circ \mathbf{q}_3) = \boldsymbol{\varepsilon}_1, \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_3 \circ \exp \left(-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1 T^2}{2C_{44}} \right). \end{aligned} \quad (72)$$

Таким образом, вспомогательные кватернионы определены с использованием минимального количества ненулевых параметров.