

**Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра прикладной математики**

**“Синтез углового движения космического аппарата
при дистанционном зондировании Земли”**

**Выпускная квалификационная
работа на степень бакалавра
студента 972 гр.
Маштакова Я.В.**

**Научный консультант:
к.ф.-м.н. Ткачев С.С.
Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Мирер С.А.**

**Работа выполнена в ИПМ им. Келдыша РАН,
г. Москва,
2013 г.**

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Системы координат, постановка задачи	4
1.1 Постановка задачи.....	4
1.2 Системы координат.....	4
Глава 2. Синтез углового движения КА.....	6
2.1 Используемые уравнения движения	6
2.2 Опорная система координат.....	6
2.3 Верификация работы алгоритма.....	9
Глава 3. Синтез управления	12
3.1 Угловое ускорение	12
3.2 Управляющие моменты	13
3.3 Верификация работы управления.....	15
Глава 4. Маховичное управление.	19
4.1 Основные уравнения.....	19
4.2 Модельная задача	20
Заключение.....	22
Список литературы.....	23

Введение

В настоящее время с помощью дистанционного зондирования Земли средствами космических аппаратов (КА) решается большой спектр задач. В частности, это мониторинг состояния окружающей среды (например, [1]), прогнозирование лесных пожаров [2], прогнозирование погоды и многие другие. При этом, для дистанционного зондирования могут использоваться различные типы датчиков, устанавливаемых на КА: микроволновые [3], радарные [4], оптические, а также некоторые другие.

В данной работе рассматривается задача отслеживания некоторой траектории на поверхности Земли. При этом используются оптические датчики. Они в свою очередь также разделяются на несколько типов:

- 1) требуется постоянная скорость бега изображения в фокальной плоскости камеры;
- 2) изображение наблюдаемой точки должно быть неподвижным в фокальной плоскости камеры.

Датчики первого типа довольно требовательны к форме траектории (она должна хорошо приближаться прямой на сфере), к тому же построение углового движения для них довольно трудоемко и основывается на численном дифференцировании (например, [5]). В случае же использования датчиков второго типа на траекторию накладываются несколько более простые ограничения, а построение углового движения, как будет показано в главе 2, оказывается довольно простым и может быть построено аналитически.

Глава 1. Системы координат, постановка задачи

1.1 Постановка задачи

Для отслеживания траектории ее предлагается разбить на участки малой протяженности. При этом на каждом участке выбирается точка, на которую должна быть направлена камера, а также некоторое направление (это делается для того, чтобы изображение не "крутилось" в фокальной плоскости камеры, установленной на спутнике). Таким образом, проходя через каждую из точек, камера снимет всю траекторию. Управление, обеспечивающее переход между точками, строится на основе PD-регулятора [6–8]. В итоге, задача сводится к следующей:

- 1) разбить траекторию на малые участки;
- 2) на каждом участке выбрать некоторую точку \mathbf{P} и направление $\boldsymbol{\tau}$ (например, точкой может быть выбрана середина малого участка, а направлением — касательная к траектории в данной точке);
- 3) для каждой такой точки и направления построить необходимое угловое движение спутника, а также управление, которое позволит его реализовать.

В данной работе будет рассмотрен только пункт 3). Также, полагаются известными:

- 1) движение центра масс спутника, его скорость и ускорение;
- 2) ориентация спутника.

1.2 Системы координат

В настоящей работе используются следующие системы координат (рис.1): $OY_1Y_2Y_3$ — инерциальная система координат (ИСК): начало расположено в центре масс Земли, OY_1 направлена в точку весеннего равноденствия, OY_3 направлена перпендикулярно плоскости экватора, OY_2 дополняет систему до правой ортогональной системы координат;

$Sx_1x_2x_3$ — связанная со спутником система координат (ССК): начало расположено в центре масс спутника, оси являются главными центральными осями инерции аппарата; для простоты выкладок предполагается, что камера расположена на оси Sx_1 ;

$SX_1X_2X_3$ — опорная система координат (ОСК): начало расположено в центре масс спутника, SX_1 направлена на точку визирования \mathbf{P} , SX_2 сонаправлена ортогональной к SX_1 части вектора $\boldsymbol{\tau}$, SX_3 дополняет систему до правой ортогональной.

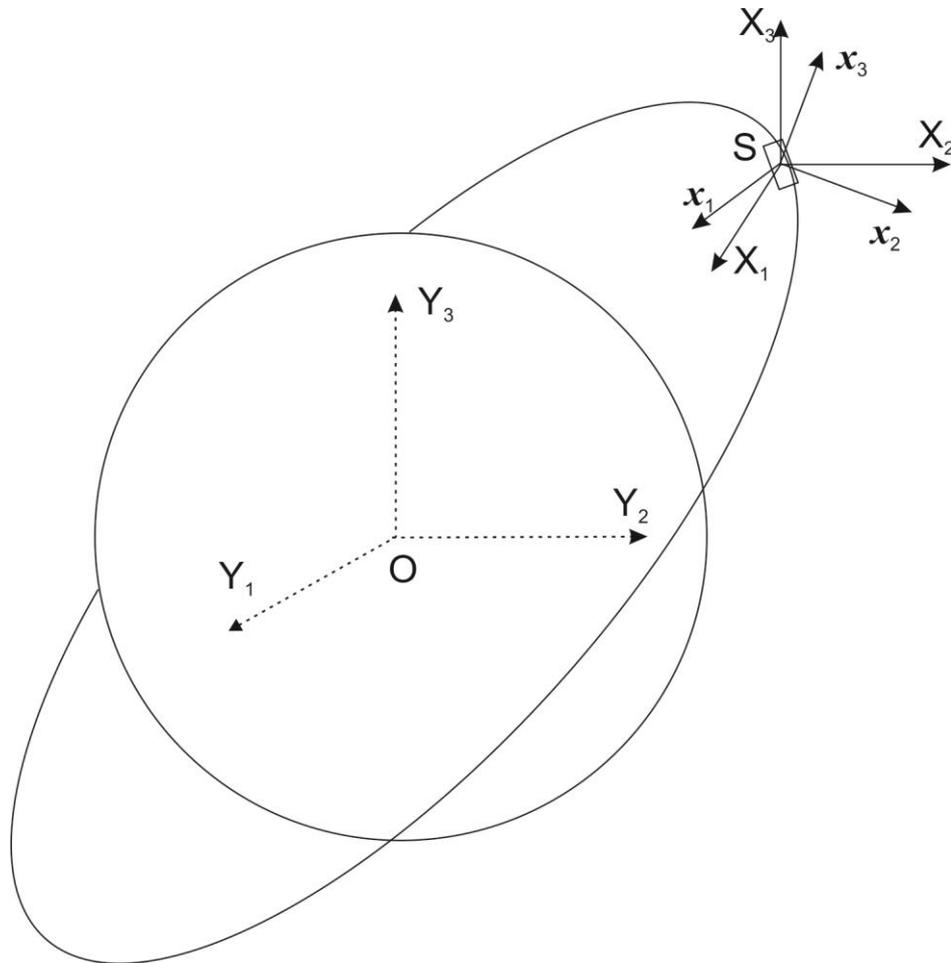


Рис. 1.1. Системы координат

Связь между этими системами координат осуществляется с помощью матриц направляющих косинусов: матрица \mathbf{A} отвечает за переход из ОСК в ССК, \mathbf{B} — из ИСК в ОСК, \mathbf{D} — из ИСК в ССК. Здесь и далее приняты обозначения: заглавные жирные буквы используются для матриц, полужирные строчные и заглавные — для векторов-столбцов.

Глава 2. Синтез углового движения КА

2.1 Используемые уравнения движения

Угловое движение будет строиться с помощью кинематических уравнений Пуассона (подробнее о выводе этих уравнений — [9]):

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{W}\mathbf{B}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{B} есть матрица, связывающая ИСК и ОСК, а \mathbf{W} имеет вид:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Будем искать $\dot{\mathbf{B}}$ и \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1^T \\ \dot{\mathbf{e}}_2^T \\ \dot{\mathbf{e}}_3^T \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Здесь \mathbf{e}_i есть базисные вектора опорной системы координат, разложенные по осям ИСК.

2.2 Опорная система координат

Как следует из постановки задачи, базисные вектора \mathbf{e}_i будем искать в следующем виде (рис.2):

- 1) в качестве \mathbf{e}_1 возьмем вектор единичной длины, параллельный вектору $\boldsymbol{\rho}$, соединяющему центр масс спутника и точку наблюдения;
- 2) в качестве \mathbf{e}_2 возьмем составляющую вектора $\boldsymbol{\tau}$, перпендикулярную \mathbf{e}_1 ;

3) \mathbf{e}_3 дополняет систему до правой ортогональной системы координат.

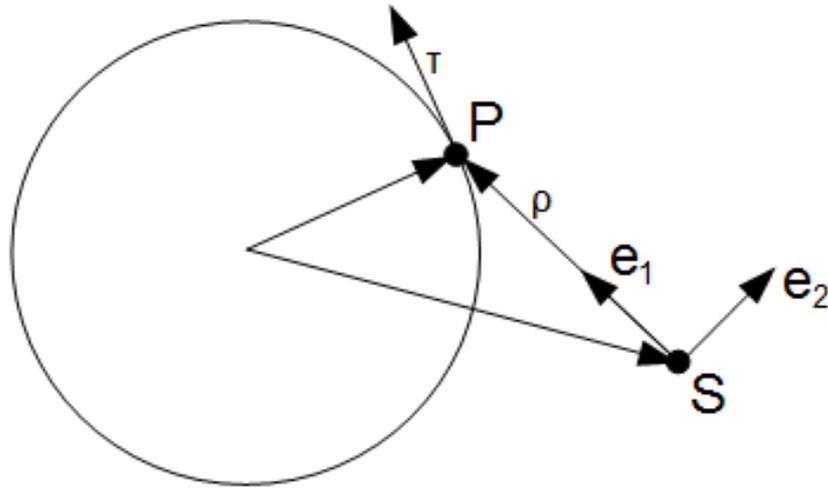


Рис.2.1. Оси опорной системы координат

Таким образом, получаем следующие выражения для базисных векторов:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\|\boldsymbol{\rho}\|}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau})\|}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2. \quad (2.6)$$

Далее, дифференцируя выражения (2.4)-(2.6) по времени, используя то, что

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{OP} - \mathbf{OS},$$

а также предположения, что нам известны местоположение и скорость центра масс спутника в любой момент времени, можем найти из (2.1) угловую скорость спутника для произвольного момента времени. Таким

образом, будет получено движение опорной системы координат. Окончательные выражения для производных базисных векторов:

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \frac{\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{e}_1(\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{e}_1)}{\|\mathbf{p}\|}, \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \frac{\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{e}_2(\dot{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_2)}{\|\mathbf{h}\|}, \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \dot{\mathbf{e}}_2. \quad (2.9)$$

Здесь для сокращения записи введены некоторые обозначения ($\mathbf{\Omega}_E$ — угловая скорость вращения земли):

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau}), \\ \dot{\mathbf{h}} &= \mathbf{\Omega}_E \times \boldsymbol{\tau} - \dot{\mathbf{e}}_1(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{e}_1\{(\mathbf{e}_1, [\mathbf{\Omega}_E \times \boldsymbol{\tau}]) + (\dot{\mathbf{e}}_1, \boldsymbol{\tau})\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Используя (2.1), а также учитывая тот факт, что \mathbf{B} является ортогональной матрицей (подробнее о свойствах матриц — [10]), получаем:

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T. \quad (2.11)$$

Далее, используя (2.3), а также явный вид базисных векторов и их производных (2.4)-(2.9), получаем явный вид матрицы \mathbf{W} . В результате, с учетом (2.2), в произвольный момент времени известно, с какой угловой скоростью должен двигаться спутник, чтобы следить за одной точкой. Таким образом, было построено угловое движение спутника. В следующей главе будет получено необходимое управление.

2.3 Верификация работы алгоритма.

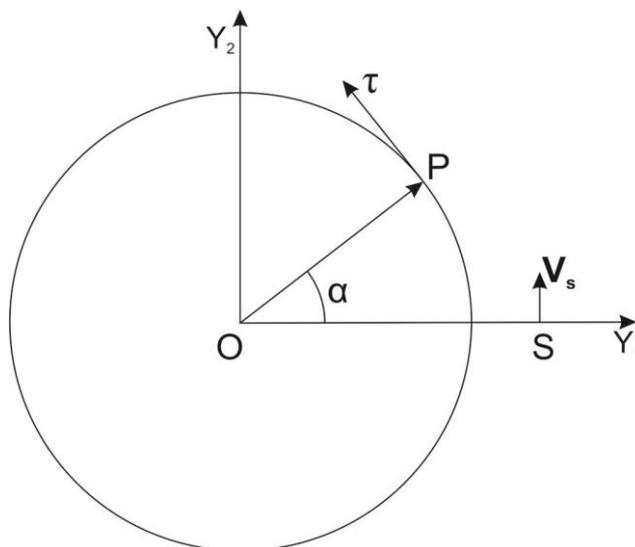


Рис. 2.2. Экваториальная плоскость, S — спутник, V_s — его скорость

Для проверки алгоритма был смоделирован следующий эксперимент (подробнее — рис. 1):

- 1) спутник вращается по круговой экваториальной орбите, радиус орбиты составляет 6800 км, в начальный момент он находится на оси OY_1 ИСК;
- 2) точка наблюдения **P** также находится в экваториальной плоскости, а ее радиус-вектор повернут на угол $\alpha = 0,3$ радиан относительно оси OY_1 ;
- 3) вектор τ расположен в экваториальной плоскости и направлен по касательной к Земле в точке **P**.

Начальные условия задаются таким образом, что в начальный момент времени спутник правильно ориентирован. Далее, на протяжении последующих пяти минут известно местоположение и скорость спутника, а значит можно синтезировать необходимую угловую скорость спутника. После этого, полученная угловая скорость подставляется в (2.11), а сама система интегрируется. В результате, в каждый момент времени будет известна ориентация спутника. Зная ориентацию и местоположение спутника, можно вычислить, в какую точку Земли направлена камера, и,

следовательно, оценить адекватность алгоритма синтеза углового движения по «сдвигу» камеры (рис. 2.3), т.е. по расстоянию между наблюдаемой точкой **P** и точкой на поверхности Земли, куда направлена камера (точкой визирования).

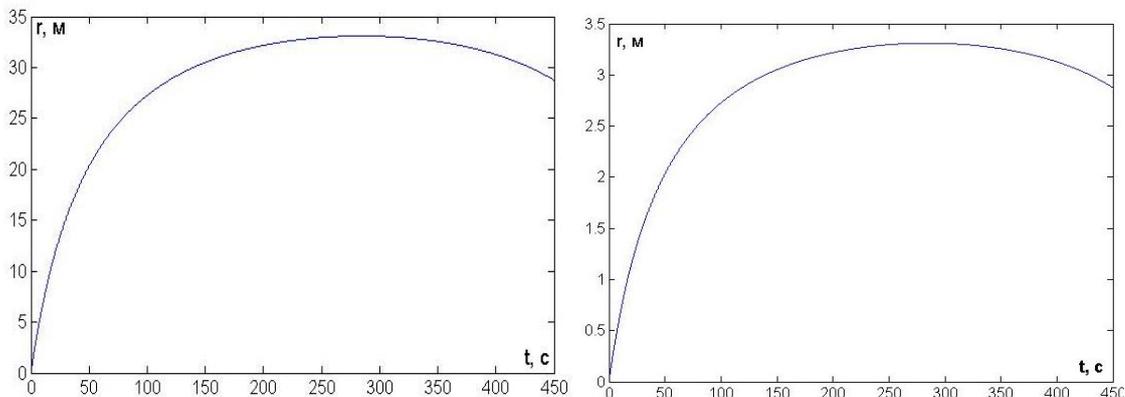


Рис. 2.3. "Сдвиг" камеры в зависимости от времени наблюдения (шаг по времени 0,01 и 0,001 с)

Неточность в направлении камеры связана с ошибками интегрирования, а точнее с тем, что на одном шаге интегрирования мы полагаем угловую скорость спутника постоянной. Из-за симметричности производной угловой скорости относительно времени прохождения точно над точкой наблюдения отклонение камеры имеет также симметричный вид.

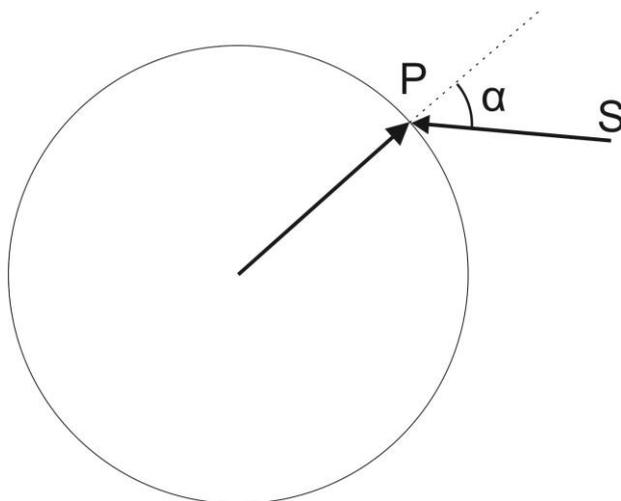


Рис. 2.4. Угол визирования

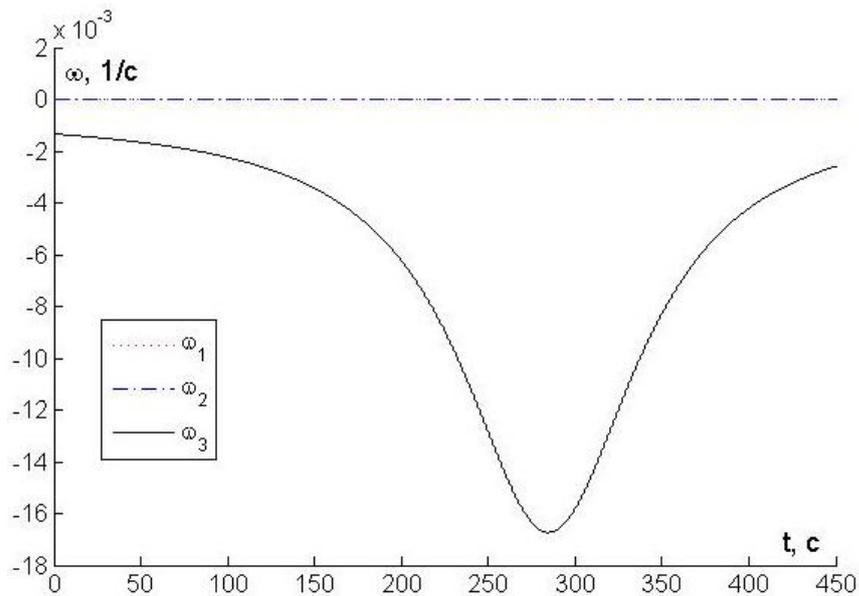


Рис. 2.5. Угловая скорость спутника

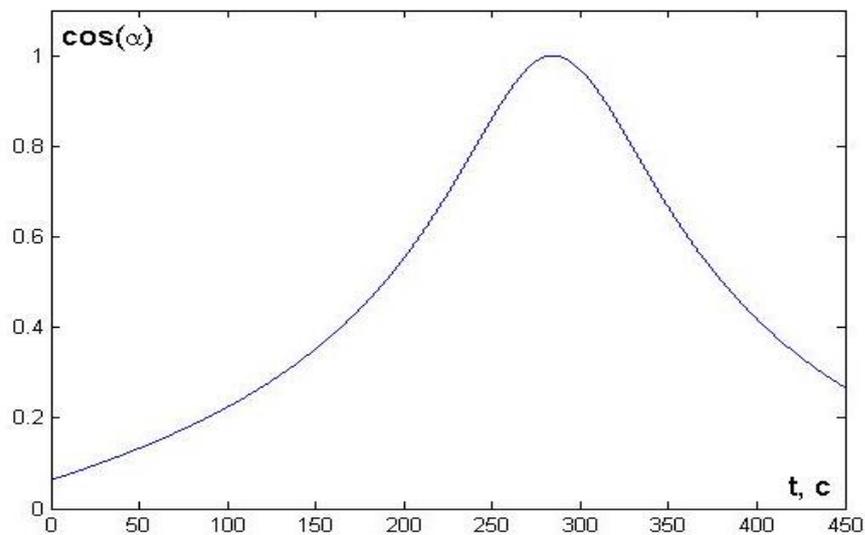


Рис. 2.6. Косинус угла визирования

На рис. 2.5 и 2.6 хорошо видно, что построенное угловое движение хорошо согласуется со здравым смыслом: чем ближе спутник находится к наблюдаемой точке, тем быстрее он должен вращаться. В то же время, у угловой скорости отсутствуют первая и вторая компоненты, что также подтверждает верность алгоритма (важным обстоятельством является то, что угловая скорость вычисляется в опорной системе координат, однако, благодаря постановке задачи, направление Sz_3 ОСК совпадает с направлением Ox_3 ИСК).

Глава 3. Синтез управления

3.1 Угловое ускорение

Для расчета управляющих моментов требуется знание углового ускорения спутника. Для его вывода воспользуемся еще раз уравнением (2.1). Умножая справа на \mathbf{V}^T и дифференцируя по времени, получаем:

$$\dot{\mathbf{W}} = \dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{B}}^T + \ddot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T. \quad (3.1)$$

Учитывая то, что вектор углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, $\dot{\mathbf{W}}$ можно записать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Таким образом, в уравнении (3.1) остается неизвестным только $\ddot{\mathbf{B}}$. Для ее получения продифференцируем выражения (2.7)-(2.9) по времени:

$$\ddot{\mathbf{e}}_1 = \frac{\ddot{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\mathbf{e}}_1(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1\{(\ddot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{e}_1) + (\dot{\boldsymbol{\rho}}, \dot{\mathbf{e}}_1)\}}{\|\boldsymbol{\rho}\|} - \frac{\dot{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{e}_1(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{e}_1)}{\|\boldsymbol{\rho}\|^2}(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{e}_1). \quad (3.3)$$

Для последующих выкладок потребуется еще одно вспомогательное соотношение (оно получается из (2.10) простым дифференцированием по времени):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{h}} &= \ddot{\boldsymbol{\tau}} - \ddot{\mathbf{e}}_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_1) - 2\dot{\mathbf{e}}_1\{(\dot{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{e}_1) + (\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{e}}_1)\} - \mathbf{e}_1\{(\ddot{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{e}_1) + 2(\dot{\boldsymbol{\tau}}, \dot{\mathbf{e}}_1) + (\boldsymbol{\tau}, \ddot{\mathbf{e}}_1)\}, \\ \dot{\boldsymbol{\tau}} &= \boldsymbol{\Omega}_E \times \boldsymbol{\tau}, \quad \ddot{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\Omega}_E \times [\boldsymbol{\Omega}_E \times \boldsymbol{\tau}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь, как и прежде, $\boldsymbol{\tau}$ есть направление, которое должно оставаться неподвижным, $\boldsymbol{\Omega}_E$ - угловая скорость вращения Земли. Далее, используя (3.4), получаем выражение для второго базисного вектора. При этом, $\ddot{\mathbf{e}}_3$ выражается через \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и их производные с помощью(2.9):

$$\ddot{\mathbf{e}}_2 = \frac{\ddot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{e}}_2(\dot{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_2\{(\ddot{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_2) + (\dot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{e}}_2)\}}{\|\mathbf{h}\|} - \frac{\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{e}_2(\dot{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_2)}{\|\mathbf{h}\|^2}(\dot{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_2), \quad (3.5)$$

$$\ddot{\mathbf{e}}_3 = \ddot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{e}_2 + 2\dot{\mathbf{e}}_1 \times \dot{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_1 \times \ddot{\mathbf{e}}_2. \quad (3.6)$$

Таким образом, получаем выражение для $\ddot{\mathbf{B}}$, а, следовательно, и для $\dot{\mathbf{W}}$.

3.2 Управляющие моменты

Для поиска управляющих моментов воспользуемся законом изменения кинетического момента в ССК:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_{внеш} + \mathbf{M}_{упр}. \quad (3.7)$$

Здесь $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc}$ есть кинетический момент системы, $\boldsymbol{\omega}_{abc}$ — абсолютная угловая скорость спутника, спроектированная на оси ССК, $\mathbf{M}_{внеш}$ и $\mathbf{M}_{упр}$ — момент внешних сил и управляющий момент соответственно. Управление будем строить таким образом, чтобы совместить ССК и ОСК (движение опорной системы координат было получено в предыдущей главе). В частности, желательным является наличие асимптотической устойчивости такого положения. Для построения такого управления воспользуемся теоремой Барбашина-Красовского (подробнее - [11]). В качестве функции V , фигурирующей в теореме, с учетом вышесказанного, выберем следующую:

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{отн}) + k_a(3 - tr\mathbf{A}), \quad (3.8)$$

где \mathbf{A} — матрица перехода из ОСК в ССК, $k_a > 0$ — некоторый коэффициент. Легко видеть, что $V > 0$ для любого положения спутника, кроме положения равновесия (это напрямую следует из того факта, что тензор инерции \mathbf{J} — положительно определенная матрица, а след матрицы направляющих косинусов равен трем только в случае тождественного преобразования). Рассмотрим производную этой функции, учитывая (3.7), диагональный вид тензора инерции, а также то, что $\boldsymbol{\omega}_{abc} = \boldsymbol{\omega}_{on} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{on}$, где за $\boldsymbol{\omega}_{on}$ обозначена угловая скорость опорной системы координат, спроецированная на оси ОСК:

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{on}, \mathbf{M}_{внеш} + \mathbf{M}_{упр} - \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{A}}\boldsymbol{\omega}_{on} - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{on}) - k_a tr\dot{\mathbf{A}}.$$

Далее воспользуемся аналогом (2.1) для матрицы перехода между ОСК и ССК, чтобы избавиться от производных матрицы \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \mathbf{W}_{on} \mathbf{A}, \\ tr\dot{\mathbf{A}} &= \omega_1(a_{32} - a_{23}) + \omega_2(a_{13} - a_{31}) + \omega_3(a_{21} - a_{12}). \end{aligned}$$

Итоговое выражение для \dot{V} :

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{on}, \mathbf{M}_{внеш} + \mathbf{M}_{упр} - \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} - \mathbf{J}\mathbf{W}_{on}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{on} - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{on} - k_a \mathbf{S}), \quad (3.9)$$

где за \mathbf{S} обозначен вектор $(a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12})^T$.

Согласно теореме Барбашина-Красовского, функция \dot{V} должна быть меньше нуля для любого положения спутника, кроме положения равновесия (в нем значение функции должно быть равно нулю). Таким образом, можно принять:

$$\dot{V} = -k_\omega (\boldsymbol{\omega}_{on}, \boldsymbol{\omega}_{on}), \quad k_\omega > 0. \quad (3.10)$$

Из (3.9), (3.10), а также выражения для абсолютной угловой скорости, получаем выражение для управляющих моментов:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{упр} &= -\mathbf{M}_{внеш} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} + \mathbf{J}\mathbf{W}_{on}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{on} + \\ &+ \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{on} + k_a \mathbf{S} - k_\omega (\boldsymbol{\omega}_{abc} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{on}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Угловые скорость и ускорение ОСК были получены в предыдущей главе. Матрицу направляющих косинусов \mathbf{A} можно получить, зная текущую ориентацию спутника: $\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{B}^T$, где матрица \mathbf{B} соответствует текущему положению опорной системы координат, а \mathbf{D} — текущему положению спутника.

3.3 Верификация работы алгоритма управления

Для проверки работы алгоритма построения управления используется задача, аналогичная рассмотренной в разделе 2.3, за некоторыми исключениями:

- 1) угол наклона орбиты спутника равняется 30° ;
- 2) в начальный момент времени угловая скорость спутника равна нулю;
- 3) матрица направляющих косинусов для ССК:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

- 4) тензор инерции спутника $\mathbf{J} = \text{diag}(2, 3, 4)$
- 5) также пренебрегаем влиянием атмосферы;
- 6) коэффициенты k_a и k_ω в управлении приняты равными 0.1 и 1 соответственно.

Для данной постановки задачи строится орбита спутника, а также вычисляются его угловые скорость и ускорение в каждый момент времени (подробнее о построении орбит — [12]). После этого, учитывая (3.11), численно интегрируется следующая система:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_{внеш} + \mathbf{M}_{упр} \\ \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{W}_{abc} \mathbf{D} \end{cases} \quad (3.12)$$

В результате, для каждого момента времени строится абсолютная угловая скорость спутника и его ориентация. Результаты представлены ниже на рис. 3.1-3.7 (шаг по времени равен 1 с).

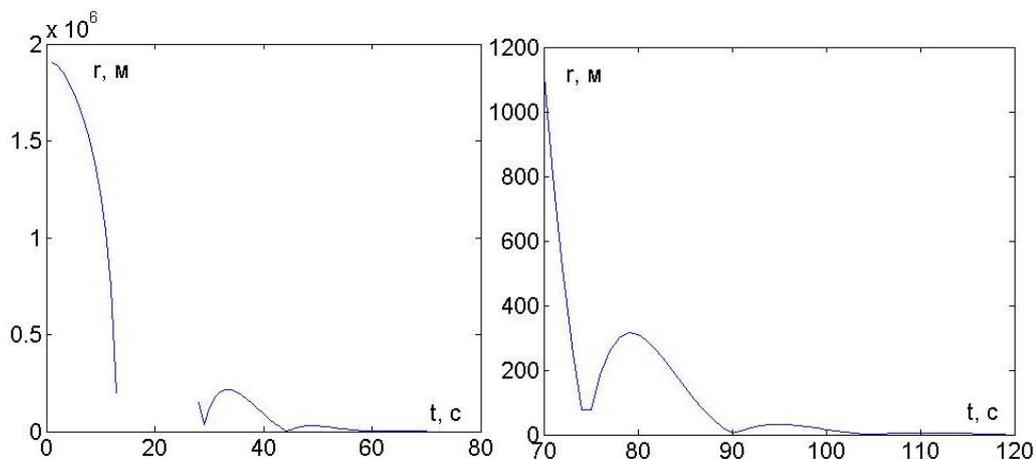


Рис. 3.1. «Сдвиг» камеры в зависимости от времени (переходный процесс). Отсутствующая часть графика соответствует моментам времени, когда камера направлена не на Землю

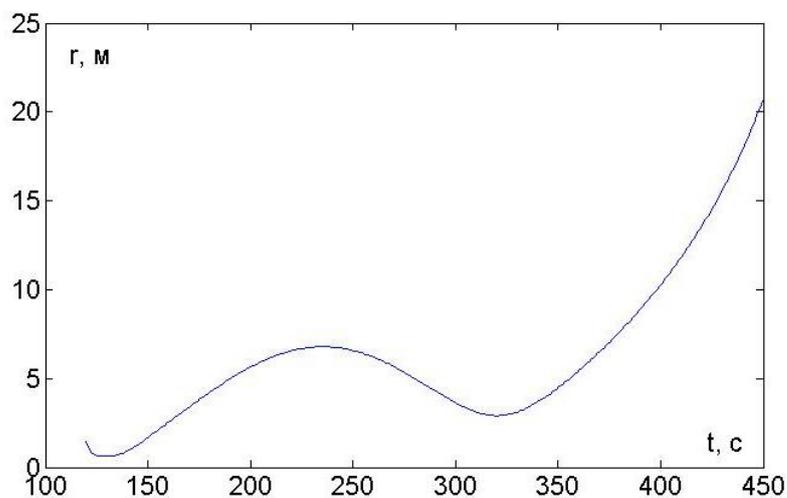


Рис. 3.2. «Сдвиг» камеры в зависимости от времени (установившееся движение).

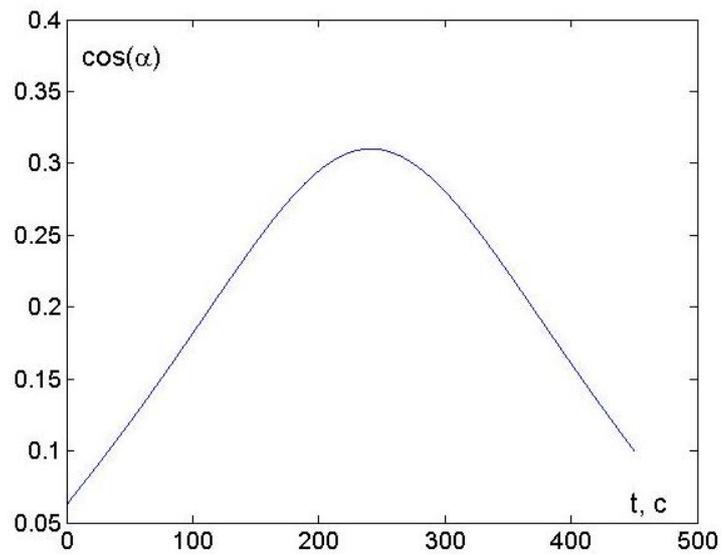


Рис. 3.3. Косинус угла визирования

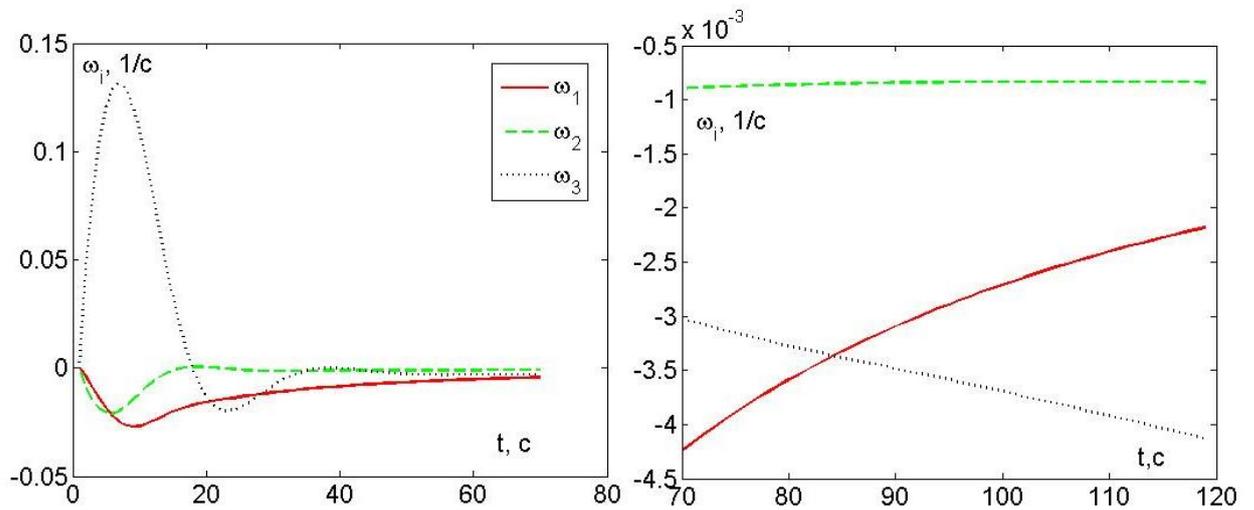


Рис. 3.4. Угловая скорость спутника (переходный процесс)

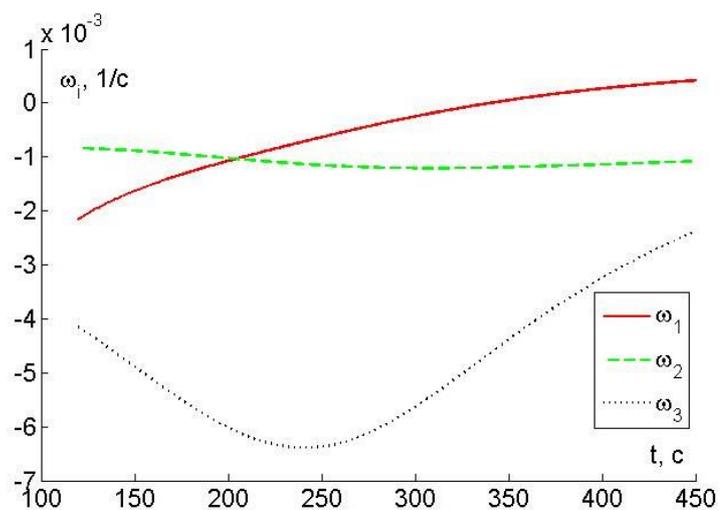


Рис. 3.5. Угловая скорость спутника (установившееся движение)

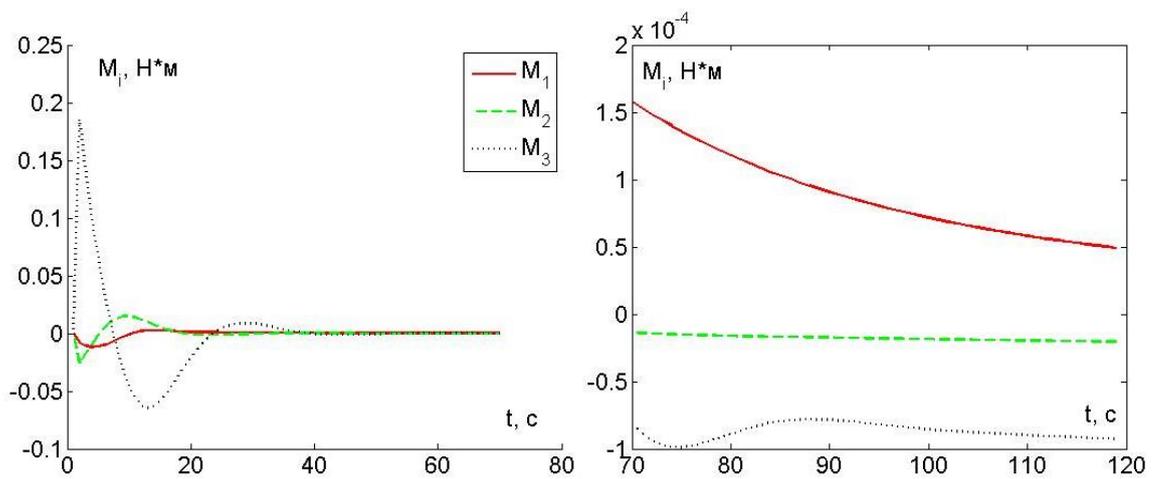


Рис. 3.6. Управляющие моменты во время переходного момента

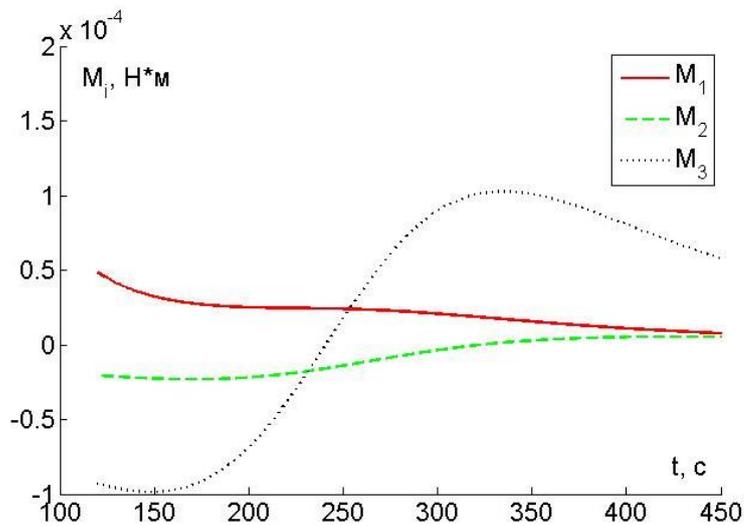


Рис. 3.7. Управляющие моменты во время установившегося процесса

Как видно из рис. 3.3, угол визирования довольно мал и при этом сдвиг камеры в установившемся процессе несущественен. В начальный момент времени угловая скорость довольно мала, а когда движение спутника устанавливается, приближается к значению орбитальной угловой скорости, т.е. $\sim 10^{-3}$ 1/с.

Глава 4. Маховичное управление.

4.1 Основные уравнения

Для построения управления с помощью маховиков воспользуемся законом сохранения кинетического момента для спутника:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_{внеш},$$
$$\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} + \mathbf{H}.$$

Здесь $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc}$ есть кинетический момент спутника, а \mathbf{H} — кинетический момент маховиков. Подставляя выражения для \mathbf{K} находим:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abc} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} = \mathbf{M}_{внеш} - \dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{H}$$

Сравнивая с (3.7), находим уравнение для управляющего момента:

$$\mathbf{M}_{упр} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{H} \quad (4.1)$$

Подставляя в (4.1) найденные в главе 3 выражения для управляющего момента (3.11), получаем итоговую систему дифференциальных уравнений, из которой находим моменты маховиков:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{H} = & \mathbf{M}_{внеш} - \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} - \mathbf{J}\mathbf{W}_{отн}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{он} - \\ & - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{он} - k_a\mathbf{S} + k_\omega(\boldsymbol{\omega}_{abc} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{он}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

В частном случае уже установившегося движения (оси ОСК и ССК совпадают), когда требуется лишь удерживать КА в правильной позиции, уравнения приобретают следующий вид:

$$\dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega}_{он} \times \mathbf{H} = \mathbf{M}_{внеш} - \boldsymbol{\omega}_{он} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{он} - \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{он} \quad (4.3)$$

Эта формула будет использована в следующем разделе.

4.2 Модельная задача

Для демонстрации работы алгоритма рассматривается задача идентичная модельной задаче из раздела 2.3:

- 1) спутник вращается по круговой экваториальной орбите радиуса 6800 км, в начальный момент он находится на оси OY_I ИСК;
- 2) точка наблюдения \mathbf{P} также находится в экваториальной плоскости, а ее радиус-вектор повернут на угол $\alpha = 0,3$ радиан относительно оси OY_I ;
- 3) вектор $\mathbf{\tau}$ расположен в экваториальной плоскости и направлен по касательной к Земле в точке \mathbf{P} ;
- 4) рассматривается задача удержания спутника в нужном положении, т.е. в начальный момент времени КА правильно ориентирован и имеет нужную угловую скорость;
- 5) тензор инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(2, 3, 4)$.

Для нахождения моментов маховиков численно интегрируется уравнение (4.1). Результаты представлены на рис. 4.1 и 4.2.

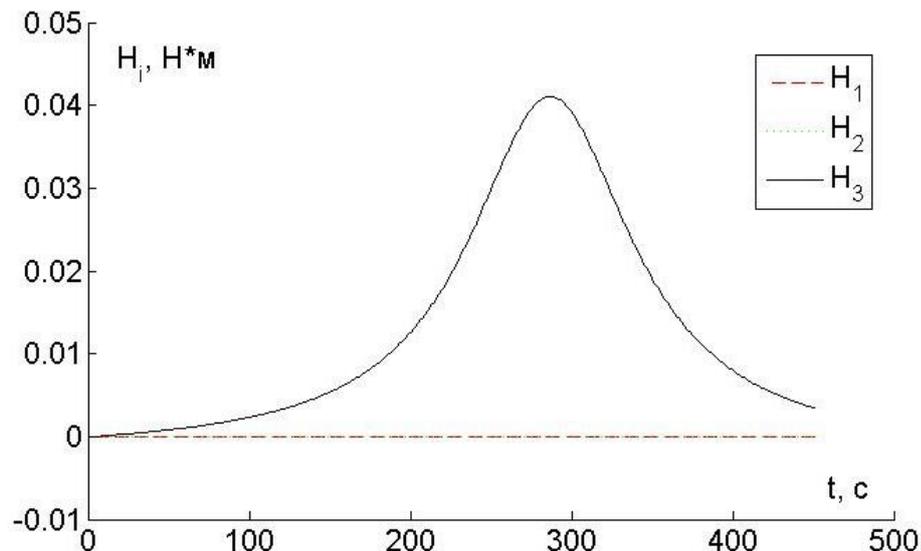


Рис. 4.1. Моменты маховиков

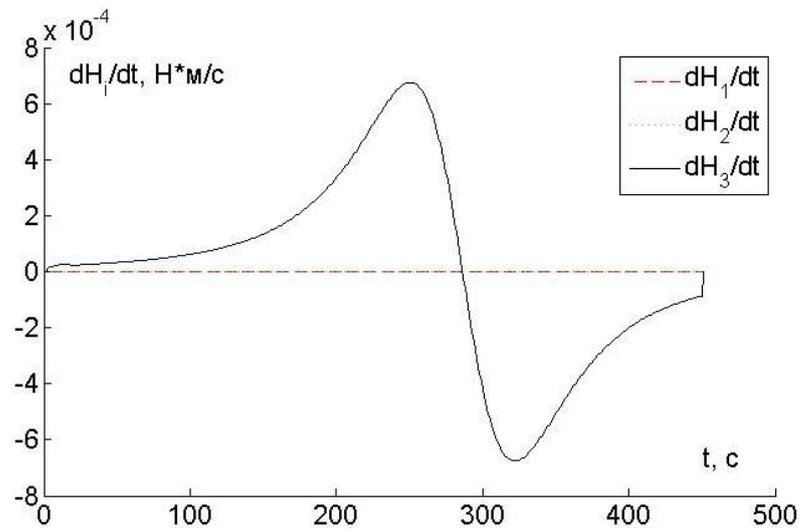


Рис. 4.2. Производные моментов маховиков

Результаты интегрирования полностью соотносятся со здравым смыслом: только третья компонента момента маховиков ненулевая, а максимальный момент наблюдается в момент прохода КА над точкой наблюдения (согласно рис. 2.1 второй главы момент прохода над точкой соответствует ≈ 300 с).

Заключение

В работе был предложен и реализован алгоритм синтеза углового движения космического аппарата. Также, была решена задача построения управления для заданного углового движения. Были рассмотрены две модельные задачи, и в ходе их компьютерного моделирования была продемонстрирована работоспособность этих алгоритмов.

Необходимо отметить, что за бортом данной работы осталась задача разбиения траектории на малые участки. Также не проводилось дополнительного исследования устойчивости работы алгоритмов по отношению к неточностям входных данных. Все это является целью дальнейших изысканий.

Список литературы

1. Kwok R. Satellite remote sensing of sea-ice thickness and kinematics: a review // *Journal of Glaciology*. 2010. Т. 56. № 200. С. 1129–1140.
2. Knorr W. и др. Combined use of weather forecasting and satellite remote sensing information for fire risk , fire and fire impact monitoring // *Computational Ecology and Software*. 2011. Т. 1. № August 2007. С. 112–120.
3. Jones M.O. и др. Satellite passive microwave remote sensing for monitoring global land surface phenology // *Remote Sensing of Environment*. 2011. Т. 115. № 4. С. 1102–1114.
4. Kimball J.S. и др. Satellite radar remote sensing of seasonal growing seasons for boreal and subalpine evergreen forests // *Remote Sensing of Environment*. 2004. Т. 90. № 2. С. 243–258.
5. Бутырин С.А. Кинематический синтез программного углового движения космического аппарата при оптико-электронной съемке земли // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2007. Т. 9. № 3. С. 664–670.
6. B. Wie, J.Lu. Feedback control logic for spacecraft eigenaxis rotations under slew rate and control constraints // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1995. Т. 18. № 6. С. 1372–1379.
7. B.Wie, P.M.Barba. Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. // *Journal of Guidance Control, and Dynamics*. 1985. Т. 8. № 3. С. 360–365.

8. P.Tsitorias. New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies // Proceedings of 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Palo Alto, CA, , 1994. С. 316–321.

9. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Издательство “Наука”, 1973.

10. Гантмахер Ф.Р. Теория Матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

11. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. М.: БИНОМ, 2004.

12. Мирер С.А. Механика космического полета. Орбитальное движение: учебное пособие. М.: Резолит, 2007.