

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

**ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ТОЧНОСТЬ
ОРИЕНТАЦИИ ПРИ ОТСЛЕЖИВАНИИ МАРШРУТОВ НА
ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ**

Выпускная квалификационная работа
(магистерская диссертация)

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика
Магистерская программа: Управление динамическими системами

Выполнил:

студент 972 группы

Маштаков Ярослав Владимирович

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Мирер Сергей Александрович

Научный консультант:

к.ф.-м.н.

Ткачев Степан Сергеевич

Москва 2015

Оглавление

Введение.....	3
1. Постановка задачи, системы координат.....	5
1.1 Постановка задачи.....	5
1.2 Особенности оптического сенсора.....	5
1.3 Системы координат.....	7
2. Синтез углового движения КА.....	8
3. Построение управления, влияние возмущений.....	11
3.1 PD-регулятор.....	11
3.2 Влияние возмущений.....	13
3.3 Оценка максимального отклонения.....	18
3.4 Влияние ошибок на качество изображения.....	22
3.5 Влияние кривизны траектории.....	26
4. Компьютерное моделирование.....	28
Заключение.....	38

Введение

При освоении труднодоступных частей планеты нельзя переоценить возможности, которые предоставляет дистанционное зондирование Земли, осуществляемое орбитальными аппаратами. Космическая съемка оказывается незаменимой и при исследовании Арктики (изучение льдов, определение границы паковых льдов, прокладка маршрутов караванов, мониторинг состояния трубопроводов и других линейных протяженных объектов, контроль за состоянием автономно функционирующих элементов наземной инфраструктуры, экологический мониторинг). Для эффективного использования космических средств при решении таких задач необходимо уметь осуществлять съемку не только подспутниковой полосы обзора, но и отслеживать заданные маршруты на поверхности Земли вдоль трассы спутника.

Как правило, для решения задачи космической съемки используются большие аппараты («Ресурс-П» [1] или «WorldView» [2]), которые осуществляют высокодетальную съемку поверхности Земли. Для оперативного мониторинга, например, ледовой обстановки или сложных протяженных объектов они могут и не подходить из-за длительных временных интервалов между последовательными проходами над регионами наблюдения. Для этой цели могут быть использованы малые (до нескольких сотен килограмм) космические аппараты, движущиеся на низких (до 400 км) орбитах. Стоимость и время их разработки и запуска значительно ниже по сравнению с аппаратами массой до нескольких тонн. Возможности каждого из таких аппаратов, естественно, скромнее, чем у больших спутников ДЗЗ, но, с другой стороны, возможен одновременный запуск группировки малых спутников, что приносит качественно новые возможности для решения задач мониторинга.

Если на большом аппарате возможна установка приборов наблюдения (камеры ДЗЗ) в подвесе, то для малых аппаратов

целесообразно обеспечить наведение прибора вместе с аппаратом. В настоящей работе излагается комплексный подход к обеспечению ориентации при осуществлении съемки достаточно произвольных протяженных наземных структур. Строится управление угловым движением космического аппарата, характеризующееся нерегулярностью покрываемых площадей и маршрутов. Задача управления разбивается на два этапа. На первом этапе осуществляется построение программного движения, которое, с учетом характеристик съемочной аппаратуры, реализует отслеживание траектории на поверхности Земли. На втором этапе бортовые средства управления и идентификации обеспечивают реализацию построенного движения с заданной точностью. Таким образом, решается задача управления при наличии ограничений и под действием разного рода возмущений.

Стоит отметить, что схожая задача отслеживания маршрутов на поверхности Земли уже рассматривалась в статьях С.А. Бутырина и С.Е. Сомова [3–5], однако в них применяется численное решение кинематических уравнений для кватерниона ориентации космического аппарата (КА). Также, в них большое внимание уделяется проблеме компенсирования разности скоростей бега изображения в различных частях чувствительного элемента, что является актуальным для аппаратов с широкой полосой обзора, в то время как для малых аппаратов с узкоугольными камерами эта проблема не является критичной. В настоящей же работе рассматривается подход к решению задачи отслеживания траекторий на поверхности Земли, который обеспечивает съемку заданного сложного и протяженного маршрута, а также траекторий достаточно общего вида. Помимо этого, довольно большая часть работы посвящена реализации уже построенного углового движения КА и оценке возникающих при этом ошибках ориентации и стабилизации спутника и их влиянию на качество получаемых изображений.

1. Постановка задачи, системы координат

1.1 Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается комплексная задача обеспечения съемки заданного маршрута на поверхности Земли. При этом предполагаются известными:

- 1) орбитальное движение спутника, т.е. его скорость и местоположение в зависимости от времени;
- 2) тензор инерции космического аппарата (КА);
- 3) параметры камеры, установленной на КА: фокальное расстояние, требуемая скорость бега изображения;
- 4) траектория на поверхности Земли, представляющая собой дважды непрерывно дифференцируемую параметризованную кривую.

Исходя из этих данных требуется построить угловое движение КА и алгоритм его реализации с помощью гироскопической системы управления ориентацией, обеспечивающий заданное качество съемки при наличии внешних возмущений (гравитационного, магнитного и аэродинамических моментов).

1.2 Особенности оптического сенсора

В качестве оптического сенсора, установленного на КА для осуществления съемки, рассматривается ПЗС-линейка. Это накладывает определенные условия на так называемую скорость бега изображения – скорость изображения снимаемой поверхности в фокальной плоскости камеры, где установлен чувствительный оптический элемент (рис. 1). Скорость должна быть постоянной по величине и направлена вдоль некоторого выделенного направления.

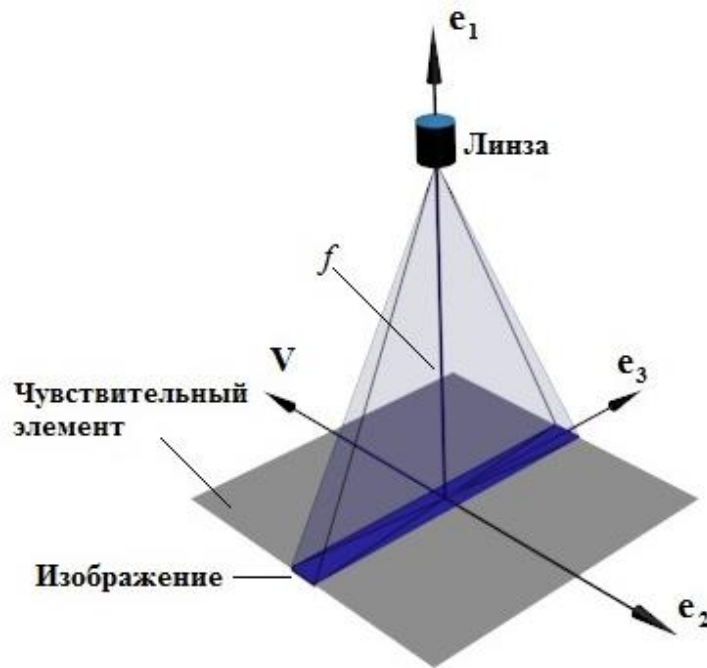


Рис. 1. Схема камеры

Сделать так, чтобы изображения всех точек снимаемой поверхности двигались с одинаковой относительно ПЗС-линейки скоростью невозможно. Выражение для разности скоростей бега изображения центральной точки (точки визирования) и точки края полосы обзора может быть записано в виде

$$\Delta V \leq \|(\boldsymbol{\Omega}_E - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}\| \frac{f}{\rho}.$$

Здесь \mathbf{r} – вектор, соединяющий точку наблюдения и точку границы полосы обзора, $\boldsymbol{\Omega}_E$, $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютные угловые скорости Земли и спутника соответственно, f – фокальное расстояние камеры, ρ – расстояние до точки визирования. В частности, полагая ширину полосы обзора равной 20 км, $\rho = 600$ км, $f = 6$ м, $|\boldsymbol{\omega}| = 10^{-3}$ рад/с, легко получить, что разница скоростей составит всего лишь 10^{-4} м/с. Для сравнения, требуемая скорость бега изображения для камеры, установленной на спутнике ТаблетСат-Аврора (ООО СПУТНИКС) составляет $5 \cdot 10^{-2}$ м/с.

Таким образом, наиболее важным является соблюдение условий на скорость бега изображения точки визирования, что и будет использовано в дальнейшем.

1.3 Системы координат

В работе используются следующие системы координат (рис. 2):

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$ — инерциальная система координат (ИСК): начало O_a расположено в центре масс Земли, $O_a Y_1$ направлена в точку весеннего равноденствия эпохи J2000, $O_a Y_3$ направлена перпендикулярно плоскости экватора, $O_a Y_2$ дополняет систему до правой ортогональной системы координат;

$O_a Z_1 Z_2 Z_3$ — связанная с Землей гринвичская система координат (ГСК): начало O_a расположено в центре масс Земли, $O_a Z_1$ лежит в плоскости экватора и направлена на нулевой меридиан, $O_a Z_3$ направлена перпендикулярно плоскости экватора на северный полюс, $O_a Z_2$ дополняет систему до правой ортогональной системы координат;

$O x_1 x_2 x_3$ — связанная с КА система координат (ССК): начало O расположено в центре масс спутника, оси являются главными центральными осями инерции аппарата;

$S u_1 u_2 u_3$ — визирная система координат (ВСК): начало S расположено в центре чувствительного элемента, ось $S u_1$ параллельна оптической оси прибора, $S u_2$ антипараллельна требуемой скорости бега изображения, $S u_3$ дополняет систему до правой ортонормированной;

$S X_1 X_2 X_3$ — опорная система координат (ОСК): начало S расположено в центре чувствительного элемента, положение ее осей соответствует программному движению КА; в случае идеального управления ВСК должна быть совмещена с ОСК.

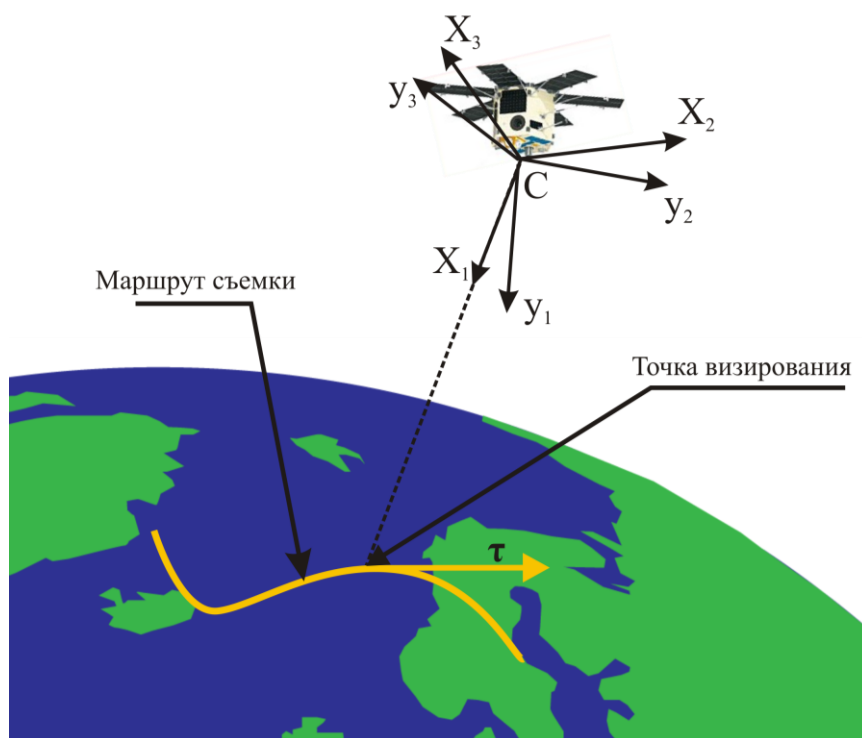


Рис. 2. Визирная и опорная СК

Переходы между этими системами координат осуществляются с помощью матриц направляющих косинусов: матрица \mathbf{F} отвечает за переход из ОСК в ВСК, \mathbf{B} — из ИСК в ОСК, \mathbf{N} — из ГСК в ИСК, \mathbf{D} — из ИСК в ССК, \mathbf{G} из ВСК в ССК (при этом \mathbf{G} является постоянной).

2. Синтез углового движения КА

Угловое движение ОСК строится с помощью уравнений Пуассона для матриц направляющих косинусов

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} &= -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{B}, \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1^T \\ \dot{\mathbf{e}}_2^T \\ \dot{\mathbf{e}}_3^T \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость КА, заданная в ОСК, \mathbf{e}_i — орты ОСК в проекции на оси ИСК. Здесь и далее точка означает производную по времени, а также введено обозначение

$$\forall \mathbf{y} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)^T,$$

$$[\mathbf{y}]_{\times} := \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом легко заметить, что

$$[\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Как указано в п. 1.1, траектория на поверхности Земли представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую параметризованную кривую $\mathbf{r}_p(p)$. Естественным является задание такой кривой в ГСК, поэтому в ИСК эта траектория примет вид

$$\tilde{\mathbf{r}}_p = \mathbf{N} \mathbf{r}_p,$$

где \mathbf{N} , как уже указывалось ранее, является матрицей перехода из ГСК в ИСК.

Требования на скорость бега изображения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_3) \frac{f}{\rho} &= 0, \\ (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_2) \frac{f}{\rho} &= -V, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{V}_{отн} = \mathbf{V}_p - \mathbf{V}_s - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s) = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s),$$

где $\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_s$ – скорости наблюдаемой точки и КА соответственно, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость КА, \mathbf{r}_s – положение центра масс КА, $\rho = \|\boldsymbol{\rho}\| = \|\mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s\|$ – расстояние от спутника до точки наблюдения. Исходя из этих требований можно получить выражения для компонент угловой скорости аппарата

$$\begin{aligned} \omega_2 &= -\frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho}, \\ \omega_3 &= \frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho} + \frac{V}{f}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выражение для ω_1 может быть получено с помощью уравнений (2.1). Базисные векторы ОСК определяются следующим образом (рассматривается случай идеального управления, когда ВСК совмещена с ОСК):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|}, \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial p}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь, в силу малых размеров спутника по сравнению с радиусом орбиты, пренебрегаем разницей между положением центра масс КА и центра чувствительного элемента. Производные базисных векторов в этом случае:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s - (\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}{\rho}, \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= \frac{\dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1 \times (\dot{\mathbf{N}}\boldsymbol{\tau} + \dot{p}\mathbf{N}) - \mathbf{e}_3 (\dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1 \times (\dot{\mathbf{N}}\boldsymbol{\tau} + \dot{p}\mathbf{N}\partial\boldsymbol{\tau}/\partial p), \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|}, \quad (2.5) \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= \dot{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{e}}_1. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (2.1), можно получить следующие выражения для компонент угловой скорости КА:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (\dot{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_3), \\ \omega_2 &= -(\dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_3) = -\frac{(\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho}, \\ \omega_3 &= (\dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{(\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho}. \end{aligned}$$

Сравнивая с выражениями (2.3), а также учитывая $\dot{\mathbf{N}} = [\boldsymbol{\Omega}_E]_{\times} \mathbf{N}$, можно получить следующие уравнения:

$$\frac{(\mathbf{N}\tau\dot{p}, \mathbf{e}_3)}{\rho} = \frac{(\mathbf{N}\tau\dot{p}, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\tau)}{\rho|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\tau|} \equiv 0,$$

$$\dot{p} \frac{(\mathbf{N}\tau, \mathbf{e}_2)}{\rho} = \frac{V}{f}.$$

Из второго выражения легко получить дифференциальное уравнение на параметр траектории p :

$$\dot{p} = \frac{\rho(t, p)V}{f} \frac{1}{(\mathbf{N}\tau(t, p), \mathbf{e}_2(t, p))}.$$

Решение этого уравнения $p(t)$ в совокупности с соотношениями (2.4) и (2.5) полностью определяет требуемое угловое движение аппарата, а точнее ориентацию и угловую скорость ОСК.

3. Построение управления, влияние возмущений

3.1 ПД-регулятор

Для реализации уже полученного углового движения КА в настоящей работе используется подход, основанный на применении функции Ляпунова, также известный как ПД-регулятор [6–8]. Задачей управления является совмещение ВСК и ОСК.

Для вывода закона управления используются динамические и кинематические уравнения движения КА

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{K} &= \mathbf{M}_{внеш} + \mathbf{M}_{упр}, \\ \dot{\mathbf{D}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{abc}]_x \mathbf{D}, \\ \dot{\mathbf{F}} &= -[\mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}_{отн}]_x \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc}$ – кинетический момент КА, $\boldsymbol{\omega}_{abc}$ – его угловая скорость, спроецированная на оси ССК, \mathbf{D} – матрица перехода из ИСК в ССК, $\boldsymbol{\omega}_{отн} = \boldsymbol{\omega}_{abc} - \mathbf{G}\mathbf{F}\mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}_{он}$, $\boldsymbol{\omega}_{он} = \mathbf{G}\boldsymbol{\Omega}_{он}$, $\boldsymbol{\Omega}_{он}$ – угловая скорость ОСК, спроецированная на оси этой системы, $\mathbf{M}_{внеш}, \mathbf{M}_{упр}$ – момент внешних сил

и управляющий момент соответственно. Последнее уравнение, принимая во внимание постоянство матрицы перехода между ВСК и ССК \mathbf{G} и свойство

$$\forall \mathbf{L} \in \text{SO}(3), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow [\mathbf{L}\mathbf{y}]_{\times} = \mathbf{L}[\mathbf{y}]_{\times} \mathbf{L}^T,$$

можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{A}} = -[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}, \mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{F}\mathbf{G}^T.$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова выберем

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{отн}) + k_a(3 - \text{tr}\mathbf{A}), k_a > 0.$$

Легко видеть, что эта функция неотрицательна, а нулю равна только когда ВСК и ОСК совмещены. Дифференцируя V с учетом (3.1), можно получить выражение

$$\dot{V} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн}) - k_a \text{tr} \dot{\mathbf{A}} = (\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abc} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{on} - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{on} + k_a \mathbf{S}),$$

где $\mathbf{S} = (a_{23} - a_{32} \quad a_{31} - a_{13} \quad a_{12} - a_{21})$, a_{ij} – компоненты матрицы \mathbf{A} . Если потребовать

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abc} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{on} - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{on} + k_a \mathbf{S} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{отн}, k_{\omega} > 0,$$

то опорное движение, согласно теореме Барбашина-Красовского [9], будет асимптотически устойчивым. Выражение для управляющих моментов при этом записывается в виде

$$\mathbf{M}_{упр} = -\mathbf{M}_{внеш} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} - \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{on} + \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{on} - k_a \mathbf{S} - k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{отн}. \quad (3.2)$$

Подставляя это выражение в уравнения движения КА можно получить итоговые уравнения относительного движения аппарата

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{отн} + k_a \mathbf{S} &= 0, \\ \dot{\mathbf{A}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

В дальнейшем эта система уравнений может быть использована для оценки влияния возмущений, действующих на КА.

3.2 Влияние возмущений

Как правило, модель внешних моментов не всегда достаточно точна или слишком сложна для вычисления на бортовом компьютере КА. Из-за этого возможны ошибки стабилизации и ориентации аппарата в окрестности опорного движения. При этом уравнения его относительного движения принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{отн} + k_a \mathbf{S} &= \mathbf{M}_{возм}, \\ \dot{\mathbf{A}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

В качестве возмущений в настоящей работе рассматриваются гравитационный и аэродинамический моменты, а также неточность знания тензора инерции КА (при этом подход, изложенный в работе, является универсальным и его применение допустимо и для других возмущений):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{атм} &= -\frac{\rho_{атм} C_x S v^2 r_a \mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_v}{2}, \quad |\mathbf{e}_a| = |\mathbf{e}_v| = 1, \\ \mathbf{M}_{грав} &= 3\omega_{кр}^2 \mathbf{E}_3 \times \mathbf{J}\mathbf{E}_3, \\ \mathbf{M}_{ин} &= \boldsymbol{\omega}_{абс} \times \delta \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{абс} + \delta \mathbf{J} \left(-[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{отн} + \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} \right), \end{aligned}$$

где $\rho_{атм}$ – плотность атмосферы, C_x – коэффициент сопротивления, S – площадь поперечного сечения КА, $v\mathbf{e}_v$ – скорость КА, $r_a \mathbf{e}_a$ – радиус-вектор, соединяющий центр масс и центр давления КА, $\omega_{кр}$ – местная круговая скорость, $\mathbf{E}_3 = \mathbf{r}_s / |\mathbf{r}_s|$, $\delta \mathbf{J}$ – ошибка знания тензора инерции.

Для дальнейшего анализа уравнений углового движения КА приведем их к безразмерному виду:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}' + K_a \mathbf{S} + K_\omega \boldsymbol{\Omega} &= \varepsilon_1 \mathbf{M}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{M}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{M}_3, \\
\mathbf{A}' &= -[\boldsymbol{\Omega}]_\times \mathbf{A}, \\
()' &:= \frac{d}{dq}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_{omn} \sqrt{\frac{M_0}{J_0}}, \quad q = t \sqrt{\frac{M_0}{J_0}}, \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{J}}{J_0}, \\
\delta \mathbf{I} &= \frac{\delta \mathbf{J}}{\delta J_0}, \quad K_a = \frac{k_a}{M_0}, \quad K_\omega = \frac{k_\omega}{\sqrt{J_0 M_0}}, \\
\varepsilon_1 &= -\frac{\rho_{амм} C_x S v^2 r_a}{2M_0}, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_v, \\
\varepsilon_2 &= \frac{3\omega_{кр}^2 J_0}{M_0}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{E}_3 \times \mathbf{I} \mathbf{E}_3, \\
\varepsilon_3 &= \frac{\delta J_0 \omega_{abc}^2}{M_0}, \quad \mathbf{M}_3 = \frac{\boldsymbol{\omega}_{abc} \times \delta \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{abc}}{\omega_{abc}^2} + \frac{\delta \mathbf{I}}{\omega_{abc}^2} \left(-[\boldsymbol{\omega}_{omn}]_\times \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{on} + \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{on} \right),
\end{aligned}$$

где M_0 – максимальный управляющий момент, который способна реализовать система управления КА, $J_0 = \max_{i,j} (J_{ij})$, $\delta J_0 = \max_{i,j} (\delta J_{ij})$. При этом ε_i являются характерными величинами соответствующих возмущающих моментов.

Полагается, что $\varepsilon_i \ll 1$. Это позволяет предположить малое отклонение ВСК от ОСК, что, в свою очередь, делает возможной линеаризацию уравнений движений вблизи устойчивого положения равновесия $\alpha_i = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{omn} = 0$ невозмущенной системы. Для этого используется представление матрицы направляющих косинусов \mathbf{A} с помощью углов Крылова, которые представляют собой последовательность поворотов $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ вокруг второй, третьей и первой осей соответственно. В этом случае матрица \mathbf{A} имеет вид

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos \alpha_2 \cos \alpha_3, \quad a_{12} = \sin \alpha_3, \quad a_{13} = -\sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \\
a_{21} &= -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \sin \alpha_1, \quad a_{22} = \cos \alpha_3 \cos \alpha_1, \\
a_{23} &= \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_1, \\
a_{31} &= \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1, \\
a_{32} &= -\cos \alpha_3 \sin \alpha_1 \\
a_{33} &= -\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_1.
\end{aligned}$$

Линеаризуя эти выражения вблизи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, можно получить выражения для \mathbf{A} и \mathbf{S}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{S} = 2(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)^T = 2\mathbf{a}.$$

Выражение для угловой скорости при этом может быть записано в виде

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{a}', \quad \mathbf{\Omega}' = \mathbf{a}''.$$

Таким образом, линеаризованные уравнения принимают вид

$$\mathbf{I}\mathbf{a}'' + K_\omega \mathbf{a}' + 2K_a \mathbf{a} = \varepsilon_1 \mathbf{M}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{M}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{M}_3.$$

Частное решение этого уравнения может быть представлено в виде суммы независимых частных решений, поэтому целесообразным является рассматривать лишь уравнение общего вида

$$\mathbf{I}\mathbf{a}'' + K_\omega \mathbf{a}' + 2K_a \mathbf{a} = \varepsilon \mathbf{M},$$

где $\varepsilon \ll 1$. В силу малости ε , представляется возможным использовать метод Пуанкаре [10] разложения решения в ряд по степеням малого параметра:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^0 + \varepsilon \mathbf{a}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{a}^2 + \dots$$

Итоговая система уравнений суть

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\boldsymbol{\alpha}^0)'' + K_\omega(\boldsymbol{\alpha}^0)' + 2K_a\boldsymbol{\alpha}^0 &= 0, \\ \mathbf{I}(\boldsymbol{\alpha}^1)'' + K_\omega(\boldsymbol{\alpha}^1)' + 2K_a\boldsymbol{\alpha}^1 &= \mathbf{M}(q, \boldsymbol{\alpha}^0), \\ &\dots \end{aligned}$$

Предполагая диагональный вид \mathbf{I} , эту систему можно переписать в виде (здесь и далее не рассматриваются возмущения второго и большего порядков)

$$\begin{aligned} I_{ii}(\alpha_i^0)'' + K_\omega(\alpha_i^0)' + 2K_a\alpha_i^0 &= 0, \\ I_{ii}(\alpha_i^1)'' + K_\omega(\alpha_i^1)' + 2K_a\alpha_i^1 &= M(q, \boldsymbol{\alpha}^0), \quad i=1,2,3. \end{aligned}$$

Вводя обозначения $2\gamma_i = \frac{K_\omega}{I_{ii}}$, $\omega_i^2 = \frac{2K_a}{I_{ii}}$, $f_i = \frac{M(q, \boldsymbol{\alpha}^0)}{I_{ii}}$, уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} (\alpha_i^0)'' + 2\gamma_i(\alpha_i^0)' + \omega_i^2\alpha_i^0 &= 0, \\ (\alpha_i^1)'' + 2\gamma_i(\alpha_i^1)' + \omega_i^2\alpha_i^1 &= f_i, \quad i=1,2,3. \end{aligned}$$

Решения и первой, и второй группы уравнений зависят от соотношений между γ_i и ω_i .

1. $\gamma_i^2 - \omega_i^2 > 0$

В этом случае решение однородного уравнения представляется в виде

$$\alpha_i^0 = A \exp((- \gamma_i + \varphi_i)q) + B \exp((- \gamma_i - \varphi_i)q), \quad \varphi_i = \sqrt{\gamma_i^2 - \omega_i^2}.$$

Полученное решение подставляется в $f_i(q, \boldsymbol{\alpha}^0)$, так что $f_i(q, \boldsymbol{\alpha}^0(q)) \rightarrow f_i(q)$. Для решения неоднородного уравнения используется метод вариации постоянных. Система дифференциальных уравнений для A, B представляется в виде

$$\begin{aligned}
A' \exp((- \gamma_i + \varphi_i)q) + B' \exp((- \gamma_i - \varphi_i)q) &= 0, \\
(- \gamma_i + \varphi_i)A' \exp((- \gamma_i + \varphi_i)q) + \\
+ (- \gamma_i - \varphi_i)B' \exp((- \gamma_i - \varphi_i)q) &= f_i(q).
\end{aligned}$$

Ее решения суть

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{f_i(q) \exp((- \gamma_i - \varphi_i)q)}{2\varphi_i}, \\
B' &= -\frac{f_i(q) \exp((- \gamma_i + \varphi_i)q)}{2\varphi_i},
\end{aligned}$$

а соответствующее решение неоднородного уравнения

$$\alpha_i^1 = \int_0^q \frac{f_i(p)}{\varphi_i} \exp(-\gamma_i(q-p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(q-p)) dp$$

2. $\gamma_i^2 - \omega_i^2 < 0$

Решение однородного уравнения представляется в виде

$$\alpha_i^0 = A \exp(-\gamma_i q) \cos(\psi_i q) + B \exp(-\gamma_i q) \sin(\psi_i q), \quad \psi_i = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}.$$

Аналогично предыдущему случаю, система для A, B представляется в виде

$$\begin{aligned}
A' \exp(-\gamma_i q) \cos(\psi_i q) + B' \exp(-\gamma_i q) \sin(\psi_i q) &= 0, \\
-\psi_i A' \exp(-\gamma_i q) \sin(\psi_i q) + \psi_i B' \exp(-\gamma_i q) \cos(\psi_i q) &= f_i(q).
\end{aligned}$$

Итоговые выражения для A', B' принимают вид

$$\begin{aligned}
A' &= -\frac{f_i(q) \exp(\gamma_i q)}{\psi_i} \sin(\psi_i q), \\
B' &= \frac{f_i(q) \exp(\gamma_i q)}{\psi_i} \cos(\psi_i q),
\end{aligned}$$

а решение неоднородного уравнения

$$\alpha_i^1 = \frac{1}{\psi_i} \int_0^q f_i(p) \exp(\gamma_i(p-q)) \sin(\psi_i(q-p)) dp.$$

$$3. \gamma_i^2 - \omega_i^2 = 0$$

Решение однородного уравнения представляется в виде

$$\alpha_i^0 = A \exp(-\gamma_i q) + B q \exp(-\gamma_i q).$$

Система для метода вариации постоянных записывается как

$$\begin{aligned} A' \exp(-\gamma_i q) + B' q \exp(-\gamma_i q) &= 0, \\ -\gamma_i A' \exp(-\gamma_i q) + (1 - \gamma_i q) B' \exp(-\gamma_i q) &= f_i(q), \end{aligned}$$

а ее решения в виде

$$\begin{aligned} B' &= f_i(q) \exp(\gamma_i q), \\ A' &= -q f_i(q) \exp(\gamma_i q). \end{aligned}$$

Решение неоднородного уравнения в этом случае

$$\alpha_i^1 = \int_0^q f_i(p) \exp(-\gamma_i (q - p)) (q - p) dp.$$

Наиболее критичным для выполнения задачи съемки траектории является не точное знание движения КА под действием возмущений в каждый момент времени, а значение максимального отклонения угловой скорости и ориентации КА от заданной.

3.3 Оценка максимального отклонения

Для оценки максимального отклонения ориентации и точности стабилизации КА используются уже полученные выражения для α_i^0, α_i^1 . При этом интерес представляет только возмущение асимптотически устойчивого положения равновесия, и для его нахождения полагаем $\alpha_i^0 \equiv 0$.

$$1. \gamma_i^2 - \omega_i^2 > 0$$

В этом случае, как было показано в предыдущем пункте, решение принимает вид (с точностью до величин порядка ε^2)

$$\alpha_i(t) = \varepsilon \int_0^q \frac{f_i(p)}{\varphi_i} \exp(-\gamma_i(q-p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(q-p)) dp.$$

Угловая скорость КА (в безразмерных переменных) при этом может быть вычислена по формуле

$$\begin{aligned} \Omega_i = (\alpha_i)' = & -\varepsilon \int_0^q \frac{\gamma_i}{\varphi_i} f_i(p) \exp(-\gamma_i(q-p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(q-p)) dp + \\ & + \varepsilon \int_0^q f_i(p) \exp(-\gamma_i(q-p)) \operatorname{ch}(\varphi_i(q-p)) dp. \end{aligned}$$

Таким образом, вводя обозначение $f_{max} = \varepsilon \max_t (|f_i(q)|)$, можно получить оценки точности ориентации и стабилизации КА:

$$\begin{aligned} |\alpha_i(q)| & \leq f_{max} \left| \int_0^q \frac{1}{\varphi_i} \exp(-\gamma_i(q-p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(q-p)) dp \right| \leq \\ & \leq f_{max} \left| \int_0^\infty \frac{1}{\varphi_i} \exp(-\gamma_i x) \operatorname{sh}(\varphi_i x) dx \right| = f_{max} \frac{1}{\gamma_i^2 - \varphi_i^2} \\ |\Omega_i| & \leq \frac{f_{max}}{\varphi_i} \int_0^\infty \left| -\gamma_i \exp(-\gamma_i x) \operatorname{sh}(\varphi_i x) + \varphi_i \exp(-\gamma_i x) \operatorname{ch}(\varphi_i x) \right| dx = \\ & = 2 f_{max} \left(\frac{\gamma_i + \varphi_i}{\gamma_i - \varphi_i} \right)^{\frac{\gamma_i}{2\varphi_i}} \frac{1}{\sqrt{\gamma_i^2 - \varphi_i^2}} \end{aligned}$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям и размерным переменным, выражения для точности ориентации и стабилизации КА записываются в виде

$$\begin{aligned} |\alpha_i(t)| & \leq \frac{M_{max}}{2k_a}, \\ |\omega_i(t)| & \leq \frac{2M_{max}}{\sqrt{2J_{ii}k_a}} \left(\frac{k_\omega + \sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}}{k_\omega - \sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}} \right)^{\frac{-k_\omega}{2\sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}}}, \end{aligned}$$

где $M_{max} = f_{max} M_0 I_{ii}$ – значение максимального возмущающего момента.

$$2. \gamma_i^2 - \omega_i^2 < 0$$

Выражения для углов ориентации и угловой скорости КА принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha_i(q) &= \frac{\varepsilon}{\psi_i} \int_0^q f_i(p) \exp(\gamma_i(p-q)) \sin(\psi_i(q-p)) dp, \\ \Omega_i(q) &= -\varepsilon \frac{\gamma_i}{\psi_i} \int_0^q f_i(p) \exp(\gamma_i(p-q)) \sin(\psi_i(q-p)) dp + \\ &\quad + \varepsilon \int_0^q f_i(p) \exp(\gamma_i(p-q)) \cos(\psi_i(q-p)) dp. \end{aligned}$$

Для получения оценки используется вспомогательное соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(-ax) |\sin(x)| dx &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \exp(-ax) \sin(x) dx = \\ &= \int_0^{\pi} \exp(-ax) \sin(x) dx \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-a\pi k) = \operatorname{cth}\left(\frac{a\pi}{2}\right) \frac{1}{a^2 + 1}. \end{aligned}$$

Значения максимальных ошибок ориентации и стабилизации могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} |\alpha_i(q)| &\leq \frac{f_{\max}}{\psi_i} \int_0^q \exp(\gamma_i(p-q)) |\sin(\psi_i(q-p))| dp \leq \\ &\leq \frac{f_{\max}}{\psi_i^2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\psi_i} x\right) |\sin(x)| dx = \operatorname{cth}\left(\frac{\gamma_i \pi}{2\psi_i}\right) \frac{f_{\max}}{\gamma_i^2 + \psi_i^2}, \\ |\Omega_i(q)| &= \left| -\varepsilon \frac{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}}{\psi_i} \int_0^q f(p) \exp(\gamma_i(p-q)) \sin(\psi_i(q-p) - \theta) \right| \leq \\ &\leq f_{\max} \frac{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}}{\psi_i^2} \exp\left(-\frac{\gamma_i \theta}{\psi_i}\right) \left(\int_{-\theta}^{\infty} \exp\left(-\frac{\gamma_i x}{\psi_i}\right) |\sin(x)| dx \right) \leq \\ &\leq \frac{f_{\max}}{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}} \exp\left(-\frac{\gamma_i \theta}{\psi_i}\right) \left(1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\gamma_i \pi}{2\psi_i}\right)\right), \end{aligned}$$

где

$$\theta = \arccos\left(\frac{\gamma_i}{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}}\right), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Переходя к исходным обозначениям и переменным, эти выражения можно переписать в виде

$$|\alpha_i(t)| \leq M_{\max} \operatorname{cth}\left(\frac{\pi k_\omega}{2\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}}\right) \frac{1}{2k_a},$$

$$|\omega_i(t)| \leq \frac{M_{\max}}{\sqrt{2J_{ii}k_a}} \exp\left(\frac{-k_\omega}{\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}} \arccos\left(\frac{k_\omega}{\sqrt{8k_a J_{ii}}}\right)\right) \left(1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\pi k_\omega}{2\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}}\right)\right).$$

3. $\gamma_i^2 - \omega_i^2 = 0$

Выражения для углов ориентации и угловой скорости КА в этом случае принимают вид

$$\alpha_i = \varepsilon \int_0^q f_i(p) \exp(-\gamma_i(q-p))(q-p) dp,$$

$$\Omega_i = \varepsilon \int_0^q f_i(p) \exp(-\gamma_i(q-p))(1-\gamma_i(q-p)) dp.$$

Оценка сверху для этих параметров может быть записана в виде

$$|\alpha_i| \leq f_{\max} \int_0^\infty \exp(-\gamma_i x) x dx = \frac{f_{\max}}{\gamma_i^2},$$

$$|\Omega_i| \leq f_{\max} \int_0^\infty \exp(-\gamma_i x) (1 - \gamma_i x) dx = 2 \frac{f_{\max}}{e\gamma_i}.$$

В исходных обозначениях эти соотношения записываются в виде

$$|\alpha_i| \leq \frac{M_{\max}}{2k_a},$$

$$|\omega_i| \leq 4 \frac{M_{\max}}{ek_\omega}.$$

Таким образом, получены оценки точности ориентации и стабилизации КА при известных оценках максимального возмущающего момента, действующего на аппарат.

3.4 Влияние ошибок на качество изображения

Как уже говорилось выше, из-за действующих на КА возмущающих моментов невозможно абсолютно точно совместить ВСК и ОСК. Кроме того, как правило, движение центра масс КА тоже известно с некоторой точностью. Все это может негативно сказаться на качестве снимаемого изображения: из-за ошибок ориентации и положения центра масс КА происходит съемка не самого маршрута, а некоторой лежащей рядом с ним области, а ошибки стабилизации и неточность знания скорости движения аппарата могут привести к смазу снимаемого изображения.

Для получения оценок в настоящей работе используется сферическая модель поверхности Земли, что позволяет значительно упростить выкладки по сравнению с использованием модели эллипсоида вращения (например, Красовского или WGS84), и в то же время это не приводит к заметному изменению получаемых оценок.

В случае достаточно малых отклонений ВСК от ОСК матрица перехода из ИСК в ВСК может быть записана в виде

$$\mathbf{N} = \mathbf{FB} \approx \left(\mathbf{E}_3 + \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ -\beta & 0 & \gamma \\ \alpha & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \right) \mathbf{B},$$

где α, β, γ – углы Крылова (последовательность поворотов 2-3-1). Выражение для базисных векторов ВСК могут быть записаны через эти углы и базисные векторы ОСК с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{N}^T (1 \ 0 \ 0)^T = \mathbf{e}_1^0 + \beta \mathbf{e}_2^0 - \alpha \mathbf{e}_3^0 = \mathbf{e}_1^0 + \delta \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{N}^T (0 \ 1 \ 0)^T = \mathbf{e}_2^0 - \beta \mathbf{e}_1^0 + \gamma \mathbf{e}_3^0 = \mathbf{e}_2^0 + \delta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{N}^T (0 \ 0 \ 1)^T = \mathbf{e}_3^0 + \alpha \mathbf{e}_1^0 - \gamma \mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_3^0 + \delta \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь и далее верхним индексом 0 обозначены величины, которые использовались при построении ОСК.

Для поиска текущей точки визирования ищется пересечение линии визирования и сферы Земли. Для этого требуется решить квадратное уравнение

$$l^2 + 2(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)l + r_s^2 - R^2 = 0,$$

где l – искомая величина, R – радиус Земли. Интерес представляет только меньший корень, так как необходимо указать первое пересечение линии визирования и сферы Земли:

$$l = -(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1) - \sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)^2 - (r_s^2 - R^2)}.$$

Учитывая неточность знания положения центра масс КА $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s^0 + \delta\mathbf{r}_s$, и ошибку в ориентации аппарата, а также отбрасывая величины второго порядка малости, это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} l &= -(\mathbf{r}_s^0 + \delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0 + \delta\mathbf{e}_1) - \sqrt{(\mathbf{r}_s^0 + \delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0 + \delta\mathbf{e}_1)^2 - ((\mathbf{r}_s^0 + \delta\mathbf{r}_s)^2 - R^2)} = \\ &= -(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0) - (\delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) - (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{e}_1) - \sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)} \times \\ &\quad \times \left(1 + 2 \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)((\delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) + (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{e}_1)) - (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{r}_s)}{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \approx l^0 + \delta l, \\ \delta l &= -(\delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) - (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{e}_1) - \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)((\delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) + (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{e}_1)) - (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{r}_s)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)}}, \\ l^0 &= -(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0) - \sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)}. \end{aligned}$$

Выражение для точки визирования можно записать в виде

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_s + \mathbf{e}_1 l = \mathbf{r}_s^0 + \delta\mathbf{r}_s + \mathbf{e}_1^0 l^0 + \delta\mathbf{e}_1 l^0 + \mathbf{e}_1^0 \delta l = \mathbf{r}_p^0 + \delta\mathbf{r}_s + \delta\mathbf{e}_1 l^0 + \mathbf{e}_1^0 \delta l.$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{x} &= (\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta\omega_1, \delta\omega_2, \delta\omega_3, \delta r_s^1, \delta r_s^2, \delta r_s^3, \delta V_s^1, \delta V_s^2, \delta V_s^3)^T = \\ &= (\delta\boldsymbol{\Psi}^T, \delta\boldsymbol{\omega}^T, \delta\mathbf{r}_s^T, \delta\mathbf{V}_s^T)^T,\end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_{1-3,1}, \mathbf{M}_{1-3,2}, \mathbf{M}_{1-3,3-6}, \mathbf{M}_{1-3,7-9}, \mathbf{M}_{1-3,10-12}]$$

$$\mathbf{M}_{1-3,1} = \mathbf{e}_1^0 \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_3^0)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)}} + \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_3^0) - \mathbf{e}_3^0 l^0,$$

$$\mathbf{M}_{1-3,2} = \mathbf{e}_2^0 l^0 - \mathbf{e}_1^0 \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_2^0)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)}} - \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_2^0),$$

$$\mathbf{M}_{1-3,3-6} = \mathbf{0}_{3 \times 4},$$

$$\mathbf{M}_{1-3,7-9} = \mathbf{E}_{3 \times 3} - \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{e}_1^0)^T + \frac{\mathbf{e}_1^0 (\mathbf{r}_s^0)^T - (\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0) \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{e}_1^0)^T}{\sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)}},$$

$$\mathbf{M}_{1-3,10-12} = \mathbf{0}_{3 \times 3},$$

выражение для точки визирования может быть переписано в виде

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p^0 + \delta\mathbf{r}_p, \quad \delta\mathbf{r}_p = \mathbf{M}\delta\mathbf{x}.$$

Для получения оценок влияния ошибок на смаз изображения используется соотношение для скорости точки визирования относительно КА

$$\mathbf{V}_{отн} = \mathbf{V}_p - \mathbf{V}_s - \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s) = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s - \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s).$$

Наличие множителя $\mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{G}^T$ перед угловой скоростью необходимо здесь для учета того, что угловая скорость задается в ССК, а все остальные величины – в ИСК. Матрица \mathbf{F} , как и при расчете отклонения точки визирования, имеет вид

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{E}_3 + \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ -\beta & 0 & \gamma \\ \alpha & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_3 + \delta\mathbf{F},$$

а угловая скорость записывается в виде $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0 + \delta\boldsymbol{\omega}$. Таким образом, выражение для относительной скорости точки визирования запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{отн} &= \mathbf{V}_{отн}^0 + \delta\mathbf{V}, \quad \mathbf{V}_{отн}^0 = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}_p^0 - \mathbf{V}_s^0 - \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0 \times (\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0), \\ \delta\mathbf{V} &= \left[\boldsymbol{\Omega}_E - \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0 \right]_{\times} \delta\mathbf{r}_p - \delta\mathbf{V}_s + \left[\mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0 \right]_{\times} \delta\mathbf{r}_s + \\ &\quad + \left[\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0 \right]_{\times} \left(\mathbf{B}^T \delta\mathbf{F}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0 + \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \delta\boldsymbol{\omega} \right). \end{aligned}$$

Выражения для скорости бега изображения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{f}{\rho} (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_3) &= \frac{f}{\rho} \left((\delta\mathbf{V}, \mathbf{e}_3^0) + (\mathbf{V}_{отн}^0, \delta\mathbf{e}_3) \right), \\ \frac{f}{\rho} (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_2) &= -\frac{V\rho^0}{\rho} + \frac{f}{\rho} \left((\delta\mathbf{V}, \mathbf{e}_2^0) + (\mathbf{V}_{отн}^0, \delta\mathbf{e}_2) \right), \\ \rho^0 &= \|\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0\|, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s\|} \approx \frac{1}{\rho^0} \left(1 - \frac{(\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{r}_p - \delta\mathbf{r}_s)}{(\rho^0)^2} \right). \end{aligned}$$

Здесь учтены условия на скорость бега изображения, которые выполняются при точном совмещении ВСК и ОСК

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{отн}^0, \mathbf{e}_3^0) &= 0, \\ (\mathbf{V}_{отн}^0, \mathbf{e}_2^0) &= -\frac{V\rho^0}{f}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (3.3), а также вводя обозначения

$$\begin{aligned} \frac{f}{\rho} (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_i) &= V_i^0 + \delta V_i, \quad i = 2, 3, \\ V_2^0 &= -V, \quad V_3^0 = 0, \end{aligned}$$

выражения для ошибок в скорости бега изображения могут быть записаны в виде

$$\delta V_3 = \frac{f}{\rho^0} \left((\delta \mathbf{V}, \mathbf{e}_3^0) + \alpha (\mathbf{V}_{отн}^0, \mathbf{e}_1^0) + \gamma \frac{V \rho^0}{f} \right),$$

$$\delta V_2 = \frac{f}{\rho^0} \left((\delta \mathbf{V}, \mathbf{e}_2^0) - \beta (\mathbf{V}_{отн}^0, \mathbf{e}_1^0) \right) + V \frac{(\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0, \delta \mathbf{r}_p - \delta \mathbf{r}_s)}{(\rho^0)^2}.$$

Полученные выражения достаточно сложны и громоздки для анализа. Для их упрощения, во-первых, можно отбросить ошибку знания положения и скорости центра масс КА, так как эта ошибка никак не зависит от работы системы управления ориентацией. Во-вторых, как правило съемка ведется достаточно близко к надиру. Принимая во внимание эти соображения, выражение для ошибок скорости бега изображения и сдвига точки визирования могут быть записаны в виде

$$|\delta \mathbf{r}_p| \approx \rho^0 |\delta \Psi|,$$

$$|\delta V_3| \approx f |\delta \Psi| (|\boldsymbol{\omega}^0| + |\boldsymbol{\Omega}_E|) + f |\delta \boldsymbol{\omega}| + V |\delta \Psi|,$$

$$|\delta V_2| \approx f |\delta \Psi| (|\boldsymbol{\omega}^0| + |\boldsymbol{\Omega}_E|) + f |\delta \boldsymbol{\omega}|.$$

Полученные выражения могут быть использованы для построения простой связи между параметрами системы ориентации КА и качеством снимаемого изображения.

3.5 Влияние кривизны траектории

В случае сильной кривизны траектории может потребоваться достаточно большая угловая скорость. Из-за ограничений на максимальный управляющий момент, ее не всегда можно реализовать. В частности, максимально возможную угловую скорость, которую может обеспечить система управления ориентацией, можно оценить с помощью соотношения (3.2). В частности, предполагая, что система стабилизирована (т.е. относительная угловая скорость равна нулю, а ВСК совмещена с ОСК), это уравнение можно переписать в виде

$$\mathbf{M}_{упр} = -\mathbf{M}_{внеш} + \boldsymbol{\omega}_{абс} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{абс} + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{он}.$$

Далее, пренебрегая внешними моментами и производными опорного движения, можно получить следующую оценку для максимальной угловой скорости КА:

$$|\omega_{max}| \approx \sqrt{\frac{M_0}{\max_{i,j} |J_{ii} - J_{jj}|}},$$

где M_0 – максимальный управляющий момент.

Чтобы найти ограничения, накладываемые на кривизну траектории, требуется выписать выражения для угловых скоростей

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -(\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_2), \\ \omega_2 &= -\frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N}\mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho}, \\ \omega_3 &= \frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N}\mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho} + \frac{V}{f}.\end{aligned}$$

Используя явный вид выражений для базисных векторов, первое уравнение может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{(\dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1 \times (\dot{\mathbf{N}}\boldsymbol{\tau} + \dot{p}\mathbf{N}\partial\boldsymbol{\tau}/\partial p), \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|} = \\ &= \omega_2 \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{N}\boldsymbol{\tau})}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|} - \frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|} - \dot{p} \frac{(\mathbf{N}\partial\boldsymbol{\tau}/\partial p, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau})}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|^2}.\end{aligned}$$

Упрощая, вводя дополнительную переменную ζ – угол между \mathbf{e}_1 и $\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}$, а также учитывая выражение для кривизны траектории

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\mathbf{N}\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{N}\partial\boldsymbol{\tau}/\partial p}{|\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|^3},$$

итоговое выражение для ω_1 записывается в виде

$$\omega_1 = \omega_2 \text{ctg}(\zeta) - (\boldsymbol{\Omega}_E, \mathbf{e}_1) + (\boldsymbol{\Omega}_E, \mathbf{e}_2) \text{ctg}(\zeta) - \rho \frac{V (\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\kappa})}{f \sin^3 \zeta}.$$

Малым значениям $\sin \zeta$ соответствует съемка близко к горизонту, что на практике, как правило, не реализуется. Таким образом, ограничивая минимальное значение $\sin \zeta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (оно вытекает из того условия, что съемка производится не далее чем в 30° от надира), можно получить условие, при выполнении которого точная съемка траектории является реализуемой:

$$\kappa \leq f 3\sqrt{3} \frac{(\omega_{max} - 2\Omega_E)}{8\rho V}. \quad (3.4)$$

Эта, достаточно грубая, оценка позволяет определить некоторый класс траекторий, которые заведомо могут быть сняты с использованием установленного на КА оборудования.

4. Компьютерное моделирование

Для демонстрации работы алгоритма проводилось моделирование съемки маршрута на поверхности Земли. Параметры КА соответствуют аппарату ТаблетСат-Аврора компании «СПУТНИКС»:

1. Тензор инерции КА $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.002 & 0.005 \\ 0.002 & 0.579 & 0.009 \\ 0.005 & 0.009 & 0.5 \end{pmatrix}$.
2. Требуемая скорость бега изображения $V = 50 \text{ мм/с}$
3. Фокусное расстояние линзы, установленной на КА – 6 м.
4. Спутник движется по круговой полярной орбите. Ее радиус составляет 7000 км.
5. Максимальный управляющий момент, реализуемый системой управления ориентацией КА, составляет $10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$, а минимальный – $10^{-7} \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Исходя из выбранных характеристик системы ориентации КА, можно получить оценку для максимальной кривизны снимаемой траектории, при которой съемка осуществима (3.4):

$$\kappa \leq 10^{-6} \frac{1}{\text{м}}.$$

Для сравнения, кривизна геодезической линии, т.е. кривой, образованной пересечением сферы Земли и некоторой плоскости, проходящей через центр Земли, составляет $1.5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{м}}$.

Для построения маршрута на поверхности Земли в настоящей работе при компьютерном моделировании использовался эллипсоид Красовского. При этом любая точка на поверхности Земли задается своими координатами (широтой φ и долготой λ) с помощью формул

$$\mathbf{r}_p(p) = h(\varphi) \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$h(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}}.$$

Матрица перехода \mathbf{N} из ГСК в ИСК задается выражением

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_0 + \Omega_E t) & -\sin(\lambda_0 + \Omega_E t) & 0 \\ \sin(\lambda_0 + \Omega_E t) & \cos(\lambda_0 + \Omega_E t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, задавая широту и долготу как дважды непрерывно дифференцируемые функции, можно описать любой маршрут на поверхности Земли в связанной с ней СК. В общем случае для описания таких функций могут быть использованы сплайны, кривые Безье или В-сплайны [11], которые позволяют провести кривую нужной степени гладкости через заданный набор узловых точек. В настоящей работе эти функции являются явно заданными:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\pi}{2} - kp, \\ \lambda &= \alpha \frac{\sin(lp)}{\sin(kp)},\end{aligned}\tag{3.5}$$

где α, l, k – некоторые константы, p – параметр траектории. С помощью этих функций при $\alpha = 0.05$, $l = 1000$, $k = 100$ описывается маршрут, показанный на рисунке 3.



Рис. 3. Маршрут съемки и подспутниковая траектория

При моделировании учитывалось воздействие аэродинамического и гравитационного возмущающих моментов. При этом предполагалось, что в начальный момент времени спутник правильно ориентирован и стабилизирован. Также предполагалось, что ВСК и ССК совмещены, т.е. $\mathbf{G} = \mathbf{E}_3$. Результаты моделирования представлены ниже.

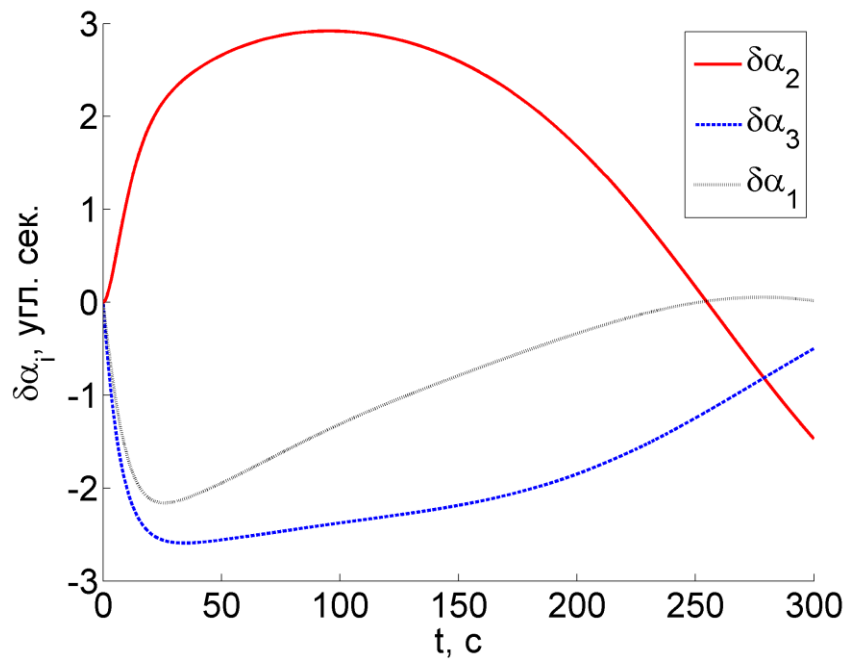


Рис. 4. Ошибка ориентации, углы Крылова

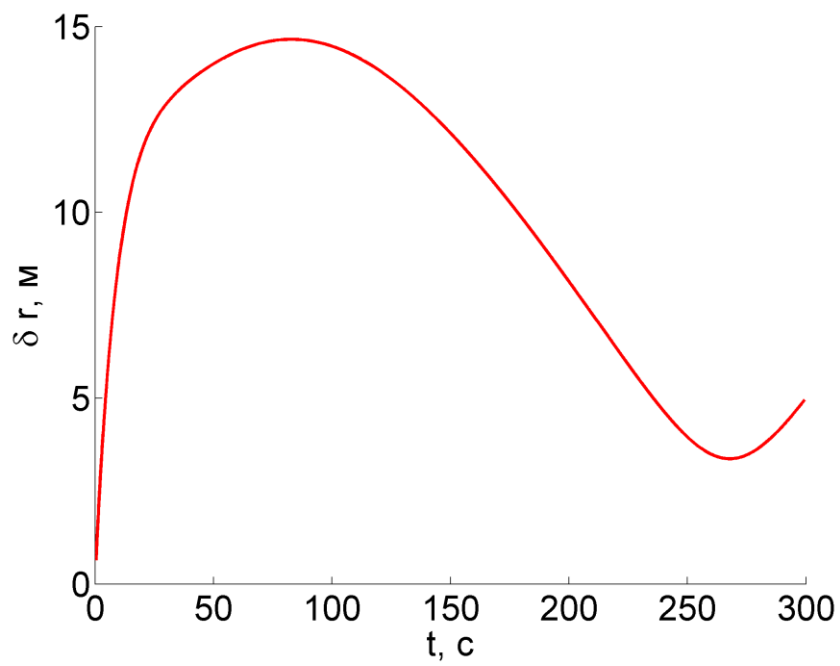


Рис. 5. Отклонение точки визирования

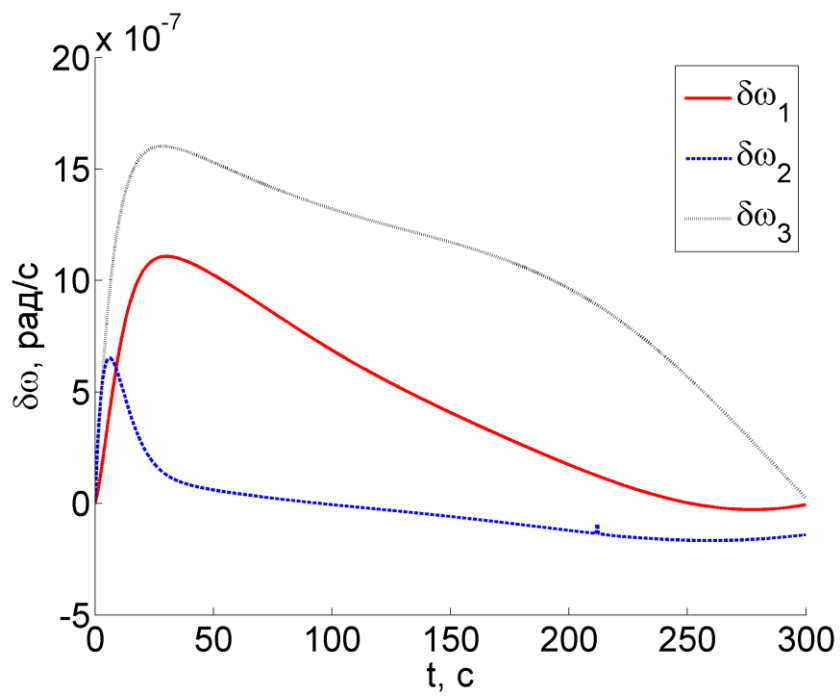


Рис. 6. Относительная угловая скорость

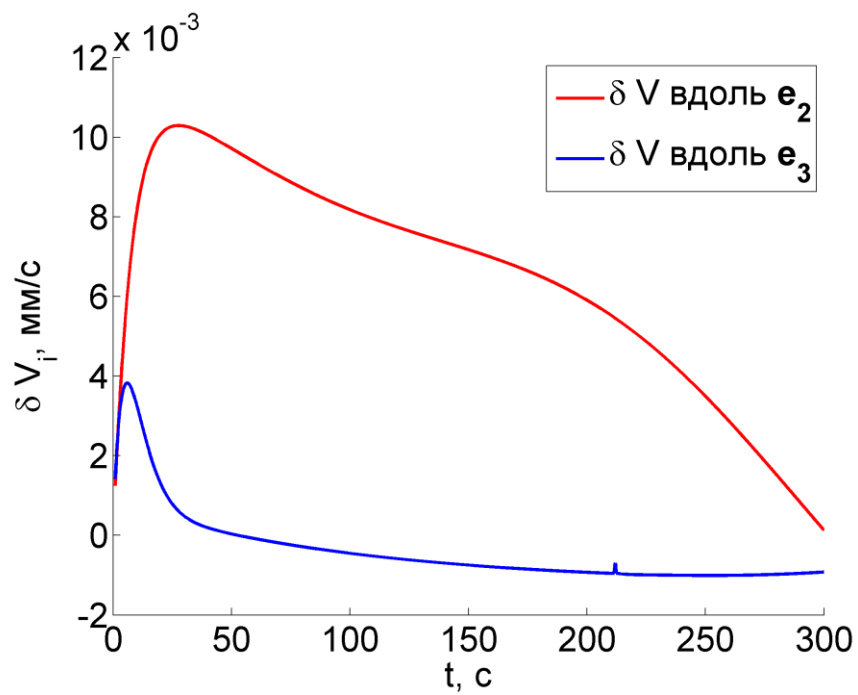


Рис. 7. Ошибка скорости бега изображения

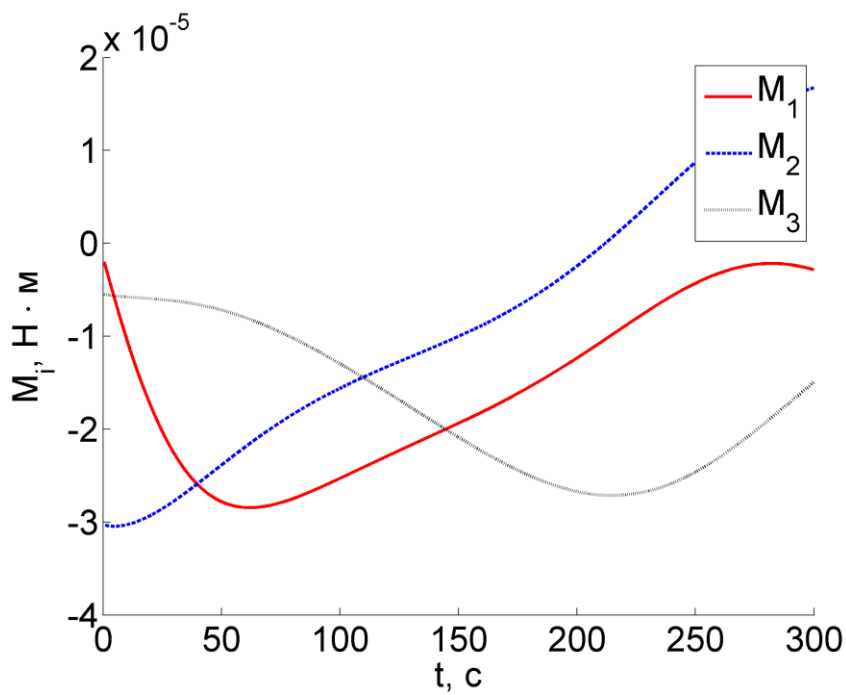


Рис. 8. Управляющие моменты

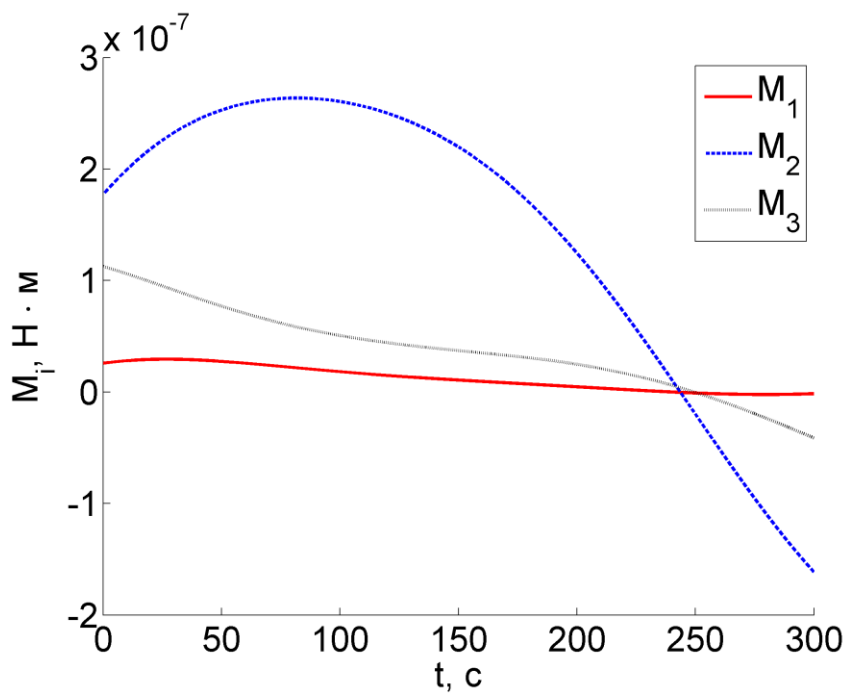


Рис. 9. Возмущения

Как видно из рисунка 7, несмотря на наличие возмущений, ошибка в скорости бега изображения незначительна. Это означает, что смаза изображения практически не происходит. В то же время отклонение точки визирования не превосходит пятнадцати метров, что является вполне приемлемым при выполнении многих миссий ДЗЗ и соответствует

точности российского спутника ДЗЗ Ресурс-П. Небольшие скачки на рис. 6 и 7 происходят из-за того, что управляющий момент, который требуется создать в этот момент времени, настолько мал, что не может быть реализован системой управления ориентацией КА.

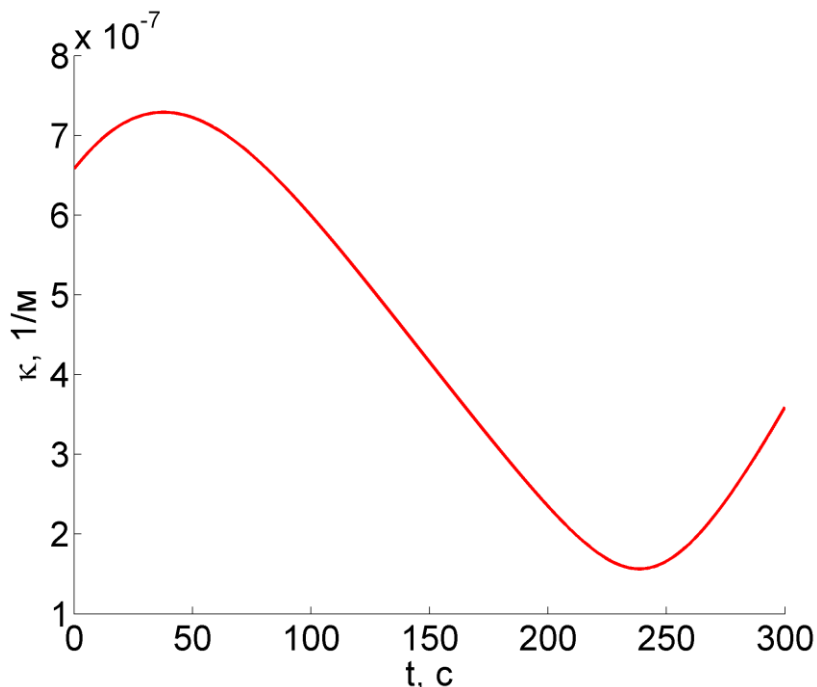


Рис. 10. Кривизна траектории

Как видно из рисунка 10, кривизна траектории не превосходит 10^{-6} , что хорошо согласуется с полученной ранее оценкой. Для примера рассмотрим траекторию с большей кривизной: для этого положим $l = 3000$ в (3.5). Результаты моделирования для этого случая представлены ниже.



Рис. 11. Маршрут съемки

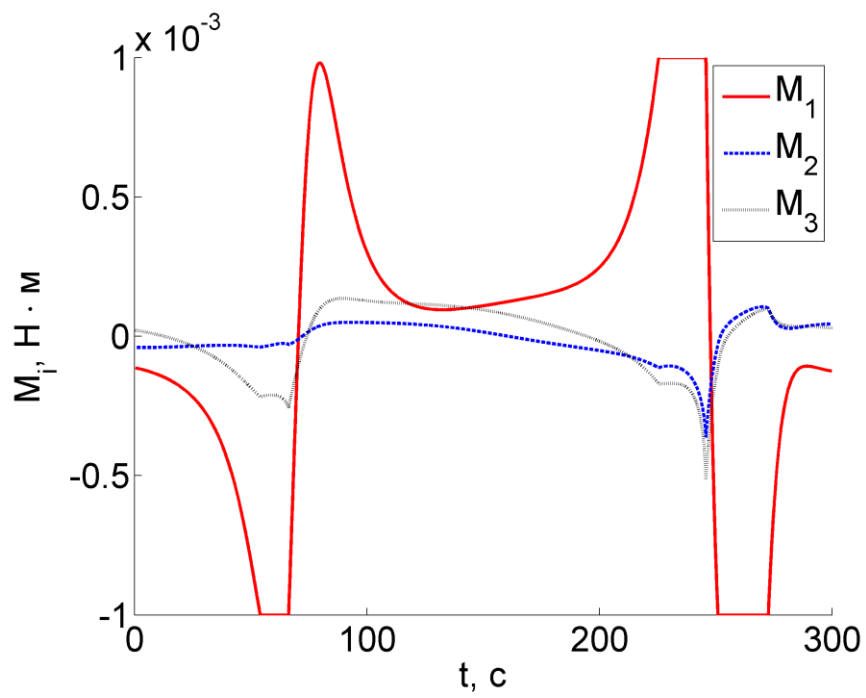


Рис. 12. Управление

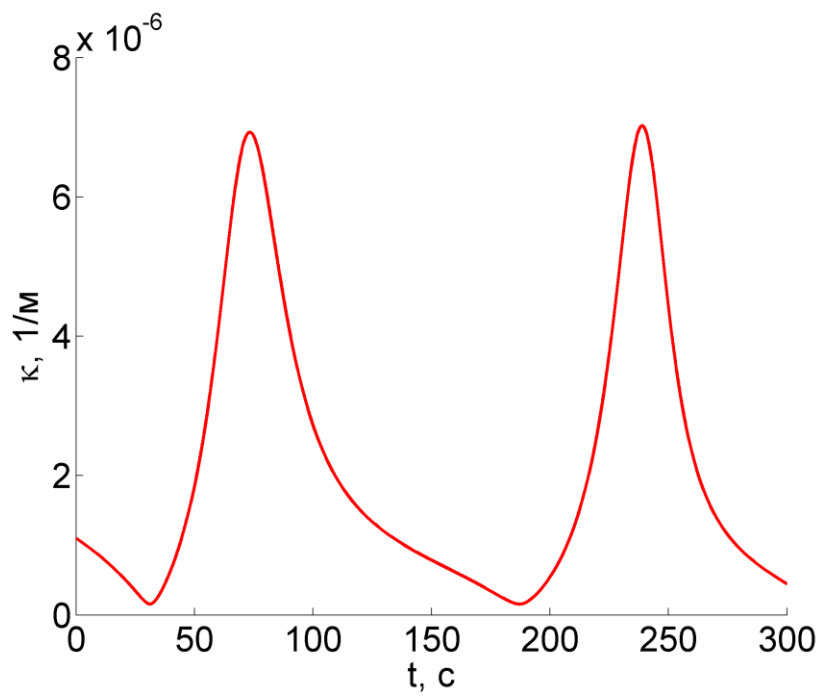


Рис. 13. Кривизна

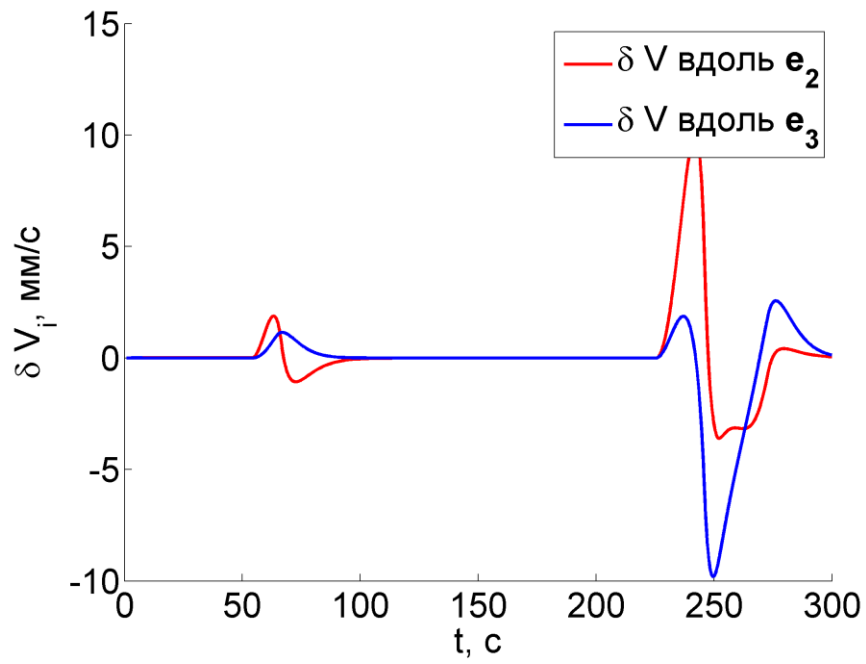


Рис. 14. Ошибка скорости бега изображения

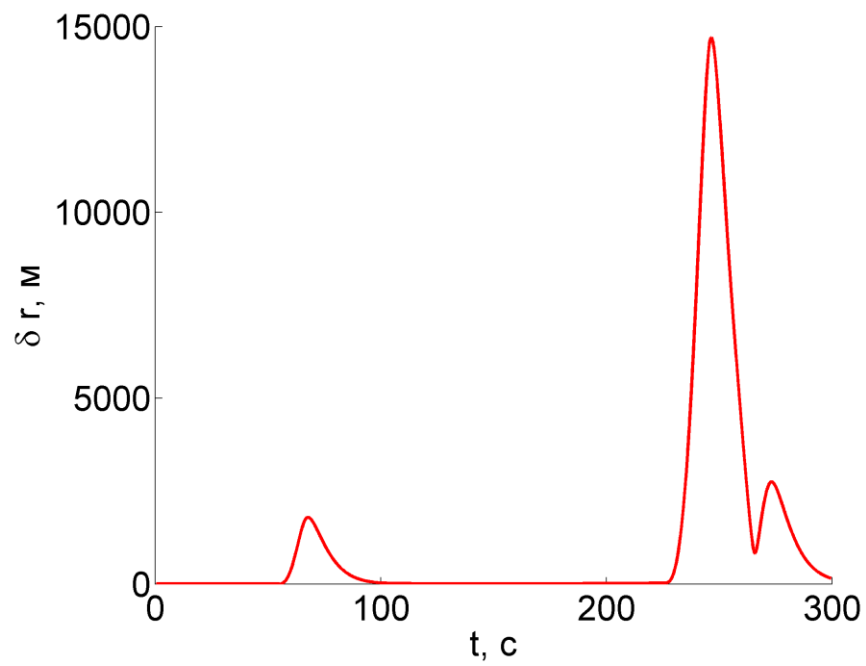


Рис. 15. Сдвиг точки визирования

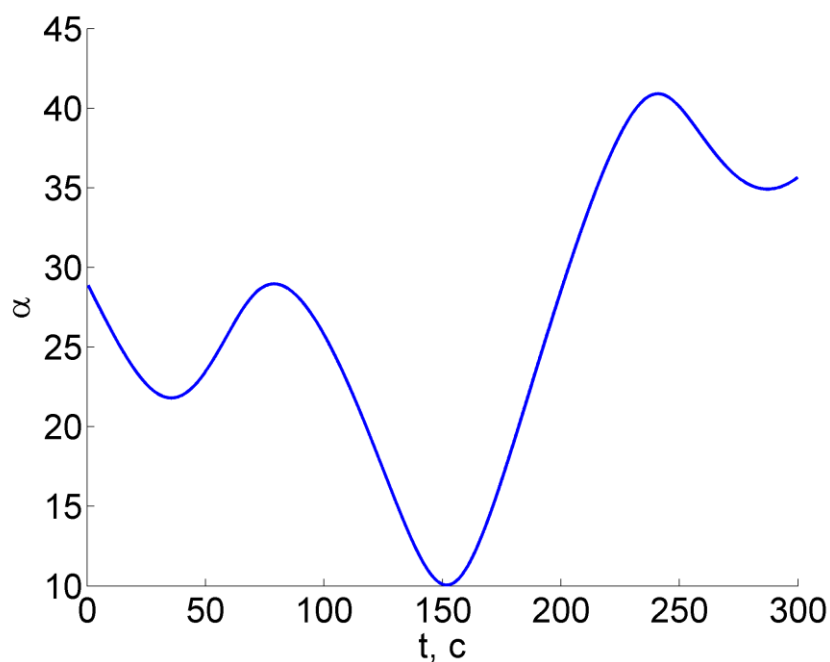


Рис. 16. Угол визирования

Как видно из этих рисунков, кривизна довольно сильно влияет на качество съемки: в частности, при достаточно большой кривизне система управления ориентацией КА уже не способна обеспечить требуемый управляющий момент (рис. 12), и, как следствие, возрастает ошибка наведения и появляется смаз изображения. В то же время, как видно из рис. 14-16, на качество изображения также достаточно сильно влияет насколько близко к надиру ведется съемка.

Заключение

В настоящей работе предложен алгоритм синтеза углового движения космического аппарата при выполнении миссий по отслеживанию различных траекторий на поверхности Земли. Рассмотрена задача реализации полученного углового движения, а также проведен анализ влияния неучтенных возмущений на точность стабилизации и ориентации КА и качество получаемого изображения. Предложены простые оценки для связи параметров системы управления ориентацией КА и качеством съемки. Помимо этого, получена оценка для максимальной кривизны снимаемой траектории, при которой гарантированно возможно проведение съемки в зависимости от возможностей актюаторов.

Стоит отметить, что в настоящей работе никак не освещается вопрос построения оптимального расписания съемки, для как можно большего охвата земной поверхности за как можно меньшее время. Помимо этого, не рассматривалась задача формирования управляющих воздействий при помощи актюаторов (маховичных систем, гиродинов). Все это является предметом дальнейших изысканий.

Список литературы

1. Ресурс-П [Электронный ресурс]. URL: http://samSPACE.ru/products/earth_remote_sensing_satellites/ka_resurs_p/ (Обращение: 08.06.2015).
2. World View [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/WorldView-2> (Обращение: 08.06.2015).
3. Бутырин С.А. Кинематический синтез программного углового движения космического аппарата при оптико-электронной съемке земли // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2007. Т. 9, № 3. сс. 664–670.
4. Бутырин С.А. Программный комплекс для расчета и визуализации маршрутов оптико-электронной съемки Земли // Вестник Самарского государственного технического университета. 2007. Т. 2. сс. 11–17.
5. Сомов С.Е., Бутырин С.А., Сомова Т.Е. Оптимизация законов наведения, имитация а анимация движения спутника землеобзора // XII Всероссийское совещание по проблемам ВСПУ-2014. 2014. сс. 3489–3500.
6. Wie B., Lu J. Feedback control logic for spacecraft eigenaxis rotations under slew rate and control constraints // J. Guid. Control. Dyn. 1995. Vol. 18, № 6. P. 1372–1379.
7. Wie B., Barba P.M. Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. // J. Guid. Control. Dyn. 1985. Vol. 8, № 3. P. 360–365.

8. Tsiotras P. New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies // 13th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace. 1994. P. 316–321.
9. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. М.: БИНОМ, 2004.
10. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е. М.: Едиториал УРСС, 2004. 496 стр.
11. Роджерс Д., Адамс Д. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 стр.