

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ–ШКОЛА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра  
по направлению 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,  
профиль подготовки «Геокосмические науки и технологии»

## **Параметрический метод оптимизации траектории перелета с малой тягой**

Выполнил:  
студент группы Б03-005  
*Моргунов*  
*Николай Витальевич*

---

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент  
*Широбоков*  
*Максим Геннадьевич*

---

Москва, 2024

## **Аннотация**

Рассматривается задача оптимизации траектории межпланетного перелета. Для ее решения предлагается прямой параметрический метод. Функция управления описывается полиномиальной функцией и моментами переключения активного и пассивного режимов. Оптимизация проходит в несколько этапов и использует связку метода наименьших квадратов и безградиентных методов оптимизации. Разработанным методом решается задача оптимизации траектории перелета на Марс, результаты сравниваются с результатами, полученными непрямым методом оптимизации.

# Содержание

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
<b>1. Метод оптимизации траектории перелета.....</b>	<b>8</b>
1.1 Постановка задачи.....	8
1.2 Описание метода решения.....	9
1.3 Задача нелинейного программирования.....	12
1.4 Программная реализация метода решения.....	13
<b>2. Исследование и верификация метода.....</b>	<b>17</b>
2.1 Пример применения метода.....	17
2.2 Верификация метода на решенном примере.....	20
2.3 Пример без отлетной скорости.....	21
<b>Заключение.....</b>	<b>24</b>
<b>Список использованных источников.....</b>	<b>25</b>

## Введение

На сегодняшний день все большее распространение в межпланетных перелетах обретают малые аппараты массой до 300 кг. Они доступнее в разработке и могут создаваться даже небольшими научными группами.

В любой космической миссии стоит проблема снижения массы аппарата. Малые космические аппараты (КА) обладают значительными массовыми и энергетическими ограничениями, а значит при их использовании проблема снижения массы стоит наиболее остро. За счет сэкономленной массы можно увеличить полезную нагрузку.

Для сокращения массы можно использовать электрореактивные двигательные установки (ЭРДУ). Они обладают более высоким удельным импульсом, а, значит, более эффективно расходуют топливо. Но в отличие от традиционных химических двигателей, достаточно мощных, чтобы управление можно было считать импульсным, ЭРДУ обладают низкой тягой, что требует постоянного управления во время перелета и создает проблемы при оптимизации процесса управления. Управление с помощью ЭРДУ порождает сложные некеплеровские траектории.

При оптимизации функции управления с использованием двигателей малой тяги возникают следующие проблемы [1]:

- нелинейность динамической системы;
- сложность анализа некеплеровских траекторий;
- неизвестность вида функции управления перед началом оптимизации. Например, наличие и количество пассивных участков на траектории, их расположение.

На сегодняшний день существуют методы, которые находят оптимальную функцию управления, с разным успехом обходя перечисленные проблемы. Методы решения можно условно разделить на две крупные группы: *непрямые* и *прямые*.

Непрямые методы основываются на необходимых условиях оптимальности, в частности, на принципе максимума Понтрягина. В не прямых методах задача поиска оптимального управления сводится к краевой задаче. Преимущество не прямых методов в том, что они позволяют находить оптимальные управления в широком и практически важном классе функций – классе кусочно-непрерывных ограниченных функций.

Однако численное решение краевых задач в не прямых методах вычислительно сложно, поэтому, как правило, не применяются для сложных моделей с большим количеством возмущений и требуют последующей адаптации к высокоточным моделям.

На сегодняшний день краевая задача решается разными методами. В работах [2, 3] она сводится к задаче Коши методом продолжения. В краевую задачу вводится параметр, дифференцирование по которому и порождает задачу Коши. В другом исследовании [4] используется метод стрельбы: параметром является условие выполнения левого краевого условия. В статьях [2, 3, 4] полученную задачу Коши решают методом Ньютона и получают локально оптимальные траектории.

Прямые методы сводят задачу оптимального управления к задаче математического программирования путем параметризации функции управления. Это означает, что имеет место оптимизация конечного числа параметров. Разные способы параметризации функции управления порождают разные методы поиска оптимального управления. Преимущество прямых методов заключается в возможности использовать сколь угодно сложную модель движения, учитывать произвольный набор возмущений, более сложные ограничения на концах траектории, а также промежуточные ограничения.

Примером прямого метода служит метод *дискретизации* управления. Функция управления разбивается на конечное количество участков, на каждом из которых она считается постоянной или линейной. Оптимизируемыми параметрами в этом случае служат компоненты векторов тяги на участках

разбиения. Этот метод требует большой мелкости разбиения, поэтому количество оптимизируемых переменных тоже получается большим, что требует значительных вычислительных мощностей. В работе [5] рассматриваются коллокационные методы. На промежутках разбиения траектория аппроксимируется полиномом. Динамические ограничения заменяются алгебраическими, что позволяет избежать численного интегрирования и сократить количество операций.

Прямые методы имеют локальную сходимость, поэтому при их использовании остро стоит проблема выбора начального приближения. Оно выбирается из представлений исследователя о рассматриваемом перелете и близко к оптимуму. В статье [6] описывается метод регуляризации управления. На основе задачи оптимального перелета формулируется выпуклая задача оптимизации, решение которой приводит к глобально оптимальному управлению.

Увеличение количества участков разбиения позволяет упростить задачу на каждом отдельном участке. В работе [7] на каждом участке траектория независимо оптимизируется с помощью методов линейного программирования. Для уменьшения количества переменных оптимизации управление на каждом из участков выбирается из дискретного набора возможных управлений.

С другой стороны, функцию управления можно не дискретизировать, а описывать набором параметров. Методы, которые используют эти параметры, как переменные оптимизации, можно условно назвать *параметрическими*.

Для поиска глобального оптимума среди траекторий в статьях [8, 9] описывается применение эволюционных нейроконтроллеров. Функция управления представляется в виде нейронной сети, в которой веса нейронов настраиваются эволюционным алгоритмом.

Машинное обучение применяется и в работах [10, 11]. В статьях приводится алгоритм поиска оптимального управления с использованием обучения с подкреплением. Управление взаимодействует с моделью среды и полу-

чает от нее вознаграждение, которое стимулирует его изменение в сторону глобального оптимума.

Параметрические методы требуют априорных знаний о виде функции управления и о форме траектории. С другой стороны, в отличие от методов дискретизации в ряде случаев они требуют меньшего количества переменных оптимизации.

Цель настоящей работы – разработать и верифицировать параметрический метод оптимизации перелета между орбитами для аппаратов с малой тягой.

В первой главе ставится механическая задача перелета и формулируется оптимизационная задача. Описывается предлагаемый метод оптимизации и его программная реализация. Во второй главе исследуется применение метода для конкретных задач, представляются результаты и сравниваются с результатами, полученными непрямыми методами.

# 1. Метод оптимизации траектории перелета

## 1.1 Постановка задачи

Рассматривается движение в поле притягивающего центра. Вводятся две разные орбиты вокруг этого притягивающего центра. На орбитах находятся начальная и конечная точки. Даны положения точек  $R_0$  и  $R_f$ . Известны также скорости начальной и конечной точек  $V_0, V_f$ . Фиксируется время перелета  $T$ . Начальная масса КА обозначается  $M_0$ . Известны также характеристики ЭРДУ: удельный импульс  $I$  и максимальный модуль силы тяги  $F_{max}$ .

Динамика описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = f(x, F, t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (1)$$

где  $x(t)$  – вектор состояния КА, а  $F(t)$  – функция управления. Вектор

состояния  $x(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ v(t) \\ m(t) \end{pmatrix}$ , где  $r(t)$  – положение КА,  $v(t)$  – его скорость,

$m(t)$  – его масса.

В начальный момент времени вектор состояния КА в фазовом пространстве соответствует точке старта, ее скорости и начальной массе КА:

$$x(0) = \begin{pmatrix} r(0) \\ v(0) \\ m(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ V_0 \\ M_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Функция правых частей уравнений динамики имеет вид

$$f(x, F, t) = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{v} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\mu \frac{r}{|r|^3} + \frac{F}{m} + w \\ -\frac{|F|}{I g} \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3)$$

где  $w$  – возмущающее ускорение,  $g$  – величина ускорения свободного падения на уровне моря.



Сформулируем оптимизационную задачу. Функционалом является раз-  
ница между начальной и конечной массами КА:

$$J(\mathbf{x}(T)) = m(0) - m(T). \quad (4)$$

Требуется найти такую функцию управления  $F(t)$ , при которой  
функционал минимален:

$$J(\mathbf{x}(T)) \rightarrow \min_F, \quad (5)$$

ограничения-равенства обеспечивают достижение точки прилета в конечный  
момент времени:

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(T)) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(T) \\ \mathbf{v}(T) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_T \\ \mathbf{V}_T \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

а ограничения-неравенства не позволяют модулю силы тяги выйти за ее мак-  
симальное значение для двигателя:

$$\psi(F, t) = F_{max} - |F(t)| \geq 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7)$$

## 1.2 Описание метода решения

Рассмотрим важное наблюдение, которые подводят нас к разработке ме-  
тода решения задачи, поставленной в 1.1.

Удельный импульс двигателя  $I$  считается постоянным на всем времени  
перелета. Перепишем функционал задачи в форме интеграла от уравнения  
изменения массы КА:

$$J = \int_0^T \frac{|F(t)|}{Ig} dt \rightarrow \min. \quad (8)$$

Функция Гамильтона системы принимает вид

$$H = \lambda^T \mathbf{f} - \frac{|F|}{Ig} = \lambda_r^T \mathbf{v} + \lambda_v^T \left( -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{w} \right) - \lambda_m \frac{F}{Ig} - \frac{F}{Ig}, \quad (9)$$

где  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $F = |\mathbf{F}|$ .

Согласно принципу максимума Понтрягина, если управление оптималь-  
но, гамильтониан (9) максимален. Для максимальной гамильтониана векто-  
ра  $F$  и  $\lambda_v$  должны быть сонаправлены:

$$\mathbf{F} = F \frac{\lambda_v}{|\lambda_v|}, \quad \text{при } \lambda_v \neq 0, \quad (10)$$

где  $\lambda_v = |\lambda_v|$ .

Подставим (10) в гамильтониан:

$$H(F) = \lambda_r^T v + \lambda_v^T \left( -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{w} \right) + \frac{F \lambda_v}{m} - \lambda_m \frac{F}{I_g} - \frac{F}{I_g}. \quad (11)$$

Гамильтониан  $H(F) \rightarrow \max_F$ , если

$$\begin{aligned} \frac{F \lambda_v}{m} - \lambda_m \frac{F}{I_g} - \frac{F}{I_g} &\rightarrow \max_F; \\ F \left( \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m + 1}{I_g} \right) &\rightarrow \max_F. \end{aligned} \quad (12)$$

Из ограничения (7)  $F = |F| \in [0, F_{max}]$ , поэтому в (12)

$$\begin{aligned} \text{если } \left( \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m + 1}{I_g} \right) \leq 0, &\text{ то } F = 0; \\ \text{если } \left( \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m + 1}{I_g} \right) > 0, &\text{ то } F = F_{max}. \end{aligned}$$

Таким образом, оптимальное управление в поставленной задаче должно быть *релейным*, то есть сила тяги в любой момент времени будет либо максимальной, либо нулевой:

$$|F(t)| \in [F_{max}, 0], \quad \forall t \in [0, T]. \quad (13)$$

Пример графика релейной функции представлен на рис. 1.

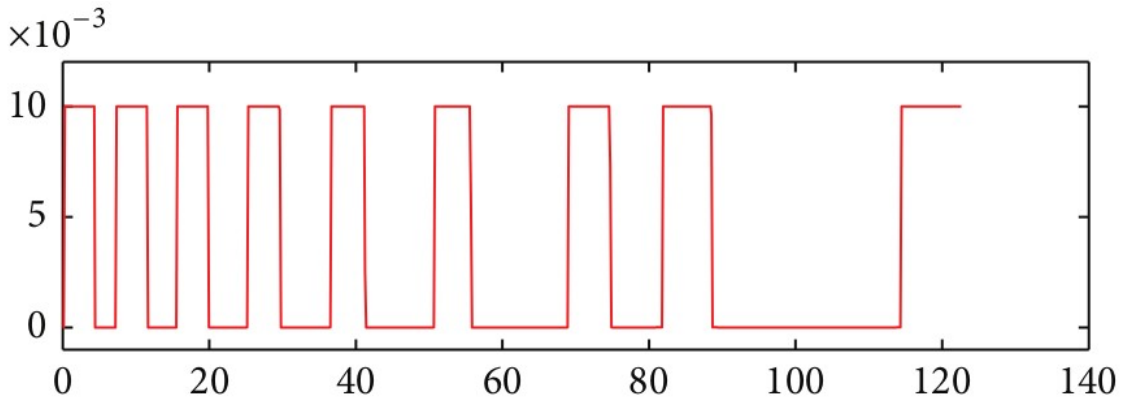


Рис. 1: Пример графика релейной функции (адаптировано из [5])

Значит, на времени перелета есть *пассивные* и *активные* участки. Пусть на траектории перелета есть  $M$  пассивных участков. Каждый пассивный участок  $(t_0, t_f)_i$ ,  $i = \overline{1, M}$  определяется началом  $t_{0i} \in [0, T]$  и концом

$t_{fi} \in [t_{0i}, T]$ . Участки траектории, не относящиеся к пассивным, считаются активными. На пассивных участках управление нулевое, а на активных максимальное по модулю:

$$|\mathbf{F}(t)| = \begin{cases} F_{max}, & \text{если } \exists i = \overline{1, M} : t \in (t_0, t_f)_i; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (14)$$

Согласно (3) расход топлива прямо пропорционален модулю силы тяги. Удельный импульс  $I$  считается постоянным, поэтому топливо либо расходуется с постоянной скоростью на активных участках, либо не расходуется на пассивных. Таким образом задача минимизации топливных затрат (4) сводится к задаче максимизации суммарной продолжительности пассивных участков:

$$J(t_{01}, t_{f1}, \dots, t_{0M}, t_{fM}) = \sum_{i=1}^M t_{fi} - t_{0i} \rightarrow \max_{(t_{01}, t_{f1}, \dots, t_{0M}, t_{fM})}. \quad (15)$$

Направление тяги определяется направлением единичного вектора. Аппроксимируем его компоненты полиномиальной функцией порядка  $K$ . Пусть задача решается в пространстве размерности  $N$ . Тогда вектор направления силы тяги

$$\mathbf{e}(\tau) = \frac{\mathbf{p}(\tau)}{|\mathbf{p}(\tau)|}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad t \in [0, T]; \quad (16)$$

$$\mathbf{p}(\tau) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^K a_{0i} \tau^i \\ \sum_{i=0}^K a_{1i} \tau^i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^K a_{Ni} \tau^i \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^K \begin{pmatrix} a_{0i} \\ a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Ni} \end{pmatrix} \tau^i = \sum_{i=0}^K \mathbf{a}_i \tau^i. \quad (17)$$

Функция управления, которую требуется определить в поставленной задаче выглядит следующим образом:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} F_{max} \mathbf{e}(\tau), & \text{если } \exists i = \overline{1, M} : t \in (t_0, t_f)_i; \\ \mathbf{0}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (18)$$

### 1.3 Задача нелинейного программирования

Функция управления однозначно описывается конечным количеством параметров: коэффициентами полинома, определяющего направление тяги и моментами времени, определяющими моменты переключения режимов управления с активного на пассивный и наоборот:

$$\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_K, t_{01}, t_{f1}, \dots, t_{0M}, t_{fM}. \quad (19)$$

Функционал сформулирован в (15), ограничения-равенства берутся из (6). К ним добавляется ограничение на сумму квадратов всех компонент, чтобы сузить пространство их поиска:

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 - 1 = 0. \quad (20)$$

Ограничения-неравенства (7) вводить не нужно, из определения релейной функции управления оно будет выполняться для любого набора параметров оптимизации.

Однако в такой постановке методы оптимизации, как правило, не решают поставленную задачу. Эксперименты с применением как градиентных, так и безградиентных методов результата не дали – не получается одновременно выйти на ограничения и обеспечить оптимальность решения. Переменные времени остаются вблизи начального приближения и топливные затраты в ходе оптимизации не уменьшаются.

Если зафиксировать пассивные участки, то найти коэффициенты полинома  $\mathbf{p}(\tau)$  и выйти на ограничения получается легко. Функционал зависит только от переменных времени, значит, при фиксированных пассивных участках решается краевая задача попадания в конечную точку (2), (6), которая решается существующими численными методами. Теперь можно изменить пассивные участки и решить краевую задачу для них. Таким образом, для каждого распределения пассивных участков есть своя краевая задача на коэффициенты  $\mathbf{p}(\tau)$ . То есть оптимизация в описываемом методе разделяется на два уровня: *внешний* и *внутренний*.

На внешнем уровне оптимизируются времена переключения режимов управления

$$t_{01}, t_{f1}, \dots, t_{0M}, t_{fM}, \quad (21)$$

а на внутреннем подбираются коэффициенты полинома  $p(\tau)$ , обеспечивающих выход на ограничения при фиксированных временах (21)

$$a_0, \dots, a_K. \quad (22)$$

Возможна ситуация, когда найти решение этой краевой задачи в виде (18) не получается, тогда считается, что решения нет.

В ходе вариации пассивных участков удастся либо получить решение внутренней задачи оптимизации, либо определить, что его нет. Таким образом, задача оптимизации на внешнем слое представляет собой исследование пространства пассивных участков и отыскание такого их распределения, чтобы существовало решение задачи внутреннего слоя, а суммарная продолжительность пассивных участков была максимальна.

#### 1.4 Программная реализация метода решения

Метод реализован в виде программного обеспечения на языке программирования Python.

Программная реализация метода решения поставленной задачи повторяет метода нелинейного программирования из внешнего и внутреннего слоев. Зафиксируем количество пассивных участков  $M$ , и степень полинома, определяющего направление тяги,  $K$ . Опишем решение «снизу вверх».

Рассмотрим функцию невязок *constraints*. Аргументы этой функции – набор переменных  $a_0, \dots, a_K, t_{01}, t_{f1}, \dots, t_{0M}, t_{fM}$ , то есть задается функция управления  $F(t)$ . В функции численно интегрируются правые части уравнения (3). Результатом работы функции является вектор невязок, состоящий из правых краевых условий (6) и ограничений на коэффициенты полинома для управления (20).

$$\mathit{constraints}(F) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(T) \\ \mathbf{v}(T) \\ \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_T \\ \mathbf{V}_T \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Интегрирование производится с помощью метода Рунге – Кутты четвертого порядка.

Коэффициенты для направления тяги настраиваются в функции *objective*. Функция представляет собой внутренний уровень оптимизации, которая обеспечивает выход на ограничения-равенства. Она принимает на вход распределение пассивных участков на траектории, в виде их начал и концов  $t_{01}, t_{f1}, \dots, t_{0M}, t_{fM}$  и подбирает такие коэффициенты полинома направлений  $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_K$ , при которых выполняется (23). Решение краевой задачи достигается методом наименьших квадратов (МНК). В данной работе используется реализация МНК из свободно распространяемого пакета SciPy [12].

Считается, что решение для данных пассивных участков найдено, если норма результата работы *constraints*, которую удалось достичь с помощью МНК, не превышает заданной точности  $\epsilon$ . Результат работы функции *objective* – коэффициенты  $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_K$ , отношение конечной массы КА к начальной и сигнал о том, найдено ли решение краевой задачи или нет.

На внешнем слое реализована функция *optim*, с помощью которой ищется оптимальное распределение пассивных участков на траектории в пространстве размерности  $2M$ .

Аргументы *optim* – радиус-вектора начальной и конечной точек траектории, время перелета, начальная масса КА, характеристики его двигателя: удельный импульс и величина максимальной тяги. Результат работы *optim* – оптимальное распределение моментов переключения режимов управления в виде их начал и концов  $t_{01}, t_{f1}, \dots, t_{0M}, t_{fM}$ .

Реализация функция *optim* может использовать разные методы глобальной безградиентной оптимизации, использующие  $t_{01}, t_{f1}, \dots, t_{0M}, t_{fM}$  в качестве переменных оптимизации.

Исследовать пространство пассивных участков можно с помощью метода Нелдера – Мида (НМ). Его реализация так же берется из пакета [12]. НМ формирует симплекс и итеративно двигает его в сторону уменьшения функционала *objective*. Если на каком-то из этапов *objective* сообщает, что решения краевой задачи нет, то в качестве функционала используется его значение с прошлой итерации, что не позволяет симплексу продолжать двигаться в неправильном направлении. На практике в *optim* НМ запускается несколько раз из разных начальных точек, что нивелирует его локальную сходимость.

Другим полезным направлением разработки функции *optim* является внедрение метода дихотомии. Фиксируются все пассивные участки, кроме одного  $(t_0, t_f)_i$ , где  $i \in [0, M]$ . Начало этого участка  $t_{0i}$  меняется по сетке и для каждого из них определяется такой максимальный конец  $t_{fi}$ , что для него получается найти решение внутренней задачи оптимизации. Для этого применяется метод дихотомии. Этот алгоритм реализован в коде (см. рис. 2).

```
l = t0
r = T
res, success, l_dm = objective([t0, t0], x0)
while r - l > accuracy:
    tf = (l + r) / 2
    res, success, dm = objective([t0, tf], x0)
    if success:
        l = tf
        l_dm = dm
    else:
        r = tf

if not success:
    tf = l
    dm = l_dm
```

Рис. 2: Реализация метода дихотомии для определения конца пассивного участка по его фиксированному началу

Здесь

- $l$  и  $r$  – левая и правая границы поиска соответственно;
- $t_0$  – начало пассивного участка;
- $T$  – время перелета;
- $x_0$  – начальный вектор состояния;
- $res$  – коэффициенты  $a_0, \dots, a_k$ ;
- $success$  – логическая переменная сигнализирующая об успехе решения оптимизационной задачи на внутреннем слое;
- $dm$  – отношение конечной массы к начальной при поданном в аргументы *objective* пассивном участке;
- $tf$  – средний между  $l$  и  $r$  момент окончания пассивного участка;
- $accuracy$  – требуемая точность отыскания момента окончания пассивного участка;
- $l\_dm$  – отношение конечной массы к начальной, если окончание пассивного участка совпадает с границей  $l$ . Это значение необходимо хранить и обновлять, чтобы гарантировать, что решение удовлетворяет ограничениям на правом конце краевой задачи, даже если на последней итерации  $success$  будет «ложь».

Таким образом можно получить зависимость  $t_{fi}(t_{0i})$ , изобразить зависимость на графике. Это позволяет понять, какой формой функционал обладает глобально, визуально оценить его оптимум.



## 2. Исследование и верификация метода

### 2.1 Пример применения метода

Рассматривается задача перелета на Марс. Задача решается в трехмерной декартовой системой координат с началом в центре Солнца.

Задаются даты старта и прилета, в том числе в формате юлианских дат  $JD_0$  и  $JD_f$ . Время перелета вычисляется, как разница юлианских дат  $T = JD_f - JD_0$ .

По юлианским датам из эфемерид с помощью инструментов пакета KIAM Astrodynamics Toolbox [13] вычисляется положение и скорость Земли в юлианскую дату старта  $JD_0$ :  $\mathbf{R}_3, \mathbf{V}_3$  и положение и скорость Марса в юлианскую дату прилета  $JD_f$ :  $\mathbf{R}_M, \mathbf{V}_M$ . Начальная масса КА обозначается  $M_0$ . Известна модель ЭРДУ, ее удельный импульс  $I$  и максимальный модуль силы тяги  $F_{max}$ .

Начальная точка траектории совпадает с положением Земли в момент времени  $JD_0$ :

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_3. \quad (24)$$

На практике в межпланетных перелетах на старте КА не имеет скорость Земли. Для преодоления земного притяжения применяются разгонный блок, после чего скорость КА отличается от скорости Земли на величину, называемой *отлетной скоростью*. В данной работе она направляется по вектору направления силы тяги в нулевой момент времени, то есть

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_3 + v_{отл} \mathbf{e}(0), \quad (25)$$

где  $\mathbf{V}_3$  – скорость Земли в дату старта,  $v_{отл}$  – величина отлетной скорости,  $\mathbf{e}(0)$  – оптимальное направление силы тяги в нулевой момент времени, определяемое в (16).

Динамика описывается системой уравнений (3). Из ускоряющих возмущений учитываются только гравитационное притяжение солнца и управление, то есть в  $w=0$ .

Требуется найти такую функцию управления  $F(t)$ , чтобы в конечный момент времени положение и скорость КА совпадали с положением и скоростью Марса в момент времени  $JD_f$ :

$$R_f = R_M, V_f = V_M, \quad (26)$$

а топливные затраты минимальны, то есть минимизируется функционал (4).

Пусть начальная масса КА равна  $M_0=156$  кг. Модель двигателя – SPT50M с удельным импульсом  $I=1250$  с и максимальной тягой  $F_{max}=18$  мН. На старте КА получает  $v_{отл}=3$  км/с. Дата старта – 23 сентября 2024 года, дата прилета – 7 декабря 2025 года, то есть время перелета составляет 440 суток.

Полином  $p(\tau)$  из (17) принимается квадратичным. Рассматриваются управления с одним пассивным участком. Точность, определяющая критерий успешности решения внутренней задачи оптимизации функцией *objective*, составляет  $\epsilon = 10^{-9}$ .

Начальное приближение пассивного участка – случайная точка на плоскости  $t_f(t_0)$  такая, что  $t_f=t_0$ . Начальное приближение компонент векторов  $a_0, \dots, a_k$  – случайное число от 0 до 1.

Результат работы функции *optim*, реализованной с помощью метода Нелдера – Мида – пассивный участок с началом  $t_0=0$  и с концом  $t_f=152$  сут. Полученное управление затрачивает 36 кг топлива, то есть 23% от начальной массы КА.

График полинома  $p(\tau)$ , определяющего компоненты тяги изображен на рис. 3.

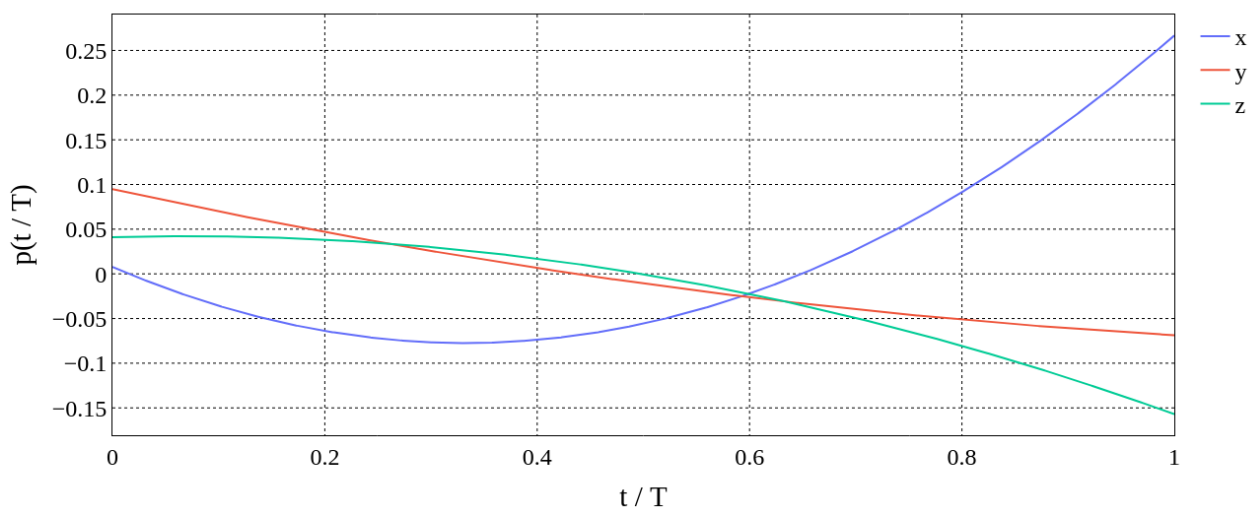


Рис. 3: График компонент полинома  $p(\tau)$

Зависимость компонент вектора тяги от времени с учетом пассивного участка см. на рис. 4.

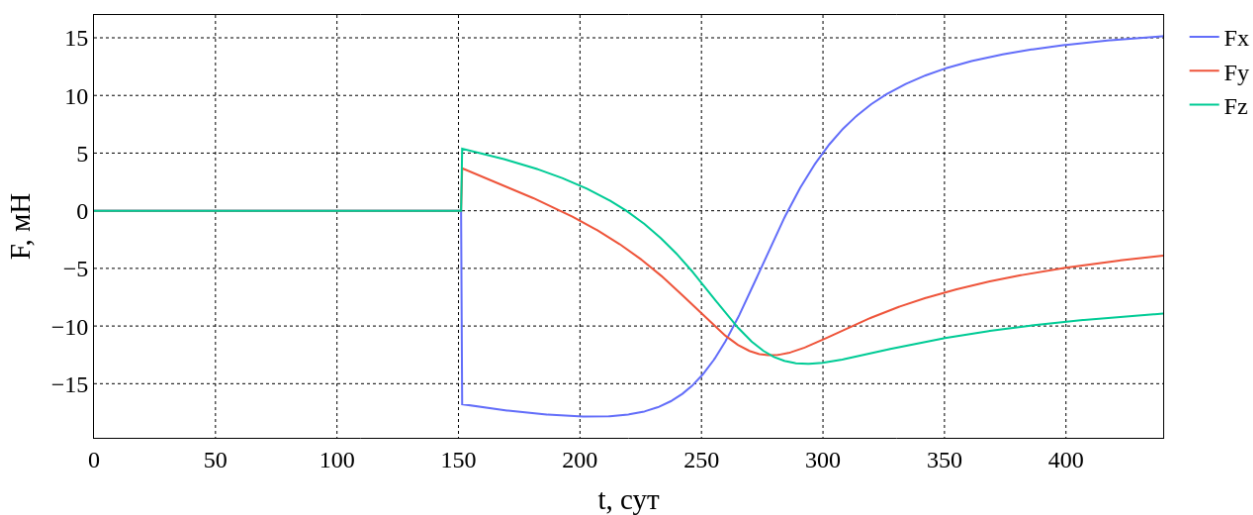


Рис. 4: График компонент силы тяги  $F(t)$

Оптимальная траектория изображена на рис. 5.

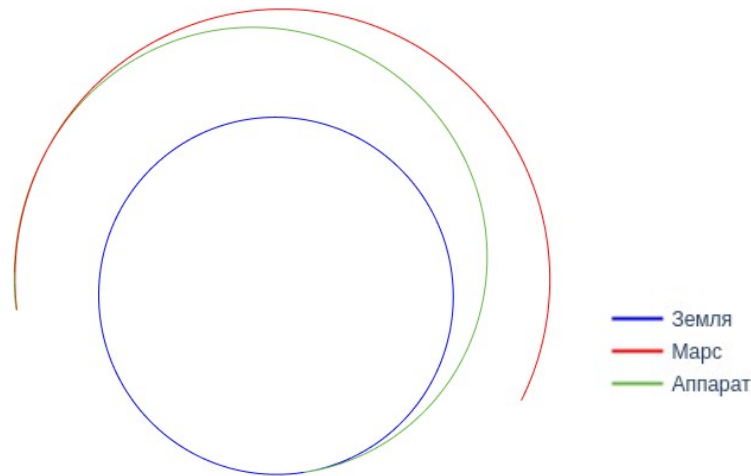


Рис. 5: Пример оптимальной траектории перелета

Рассмотрим крайние значения времени перелета для разных дат старта, для которых удалось найти решение. Результаты представлены в таблице 1.

Дата старта	Дата прилета	T, сут	$t_0$ , сут	$t_f$ , сут	$1 - m(T)/m(0)$ , %
23.09.2024	01.10.2025	373	36	57	29
23.09.2024	10.06.2026	625	0	150	39
01.11.2028	16.12.2029	410	35	69	31
01.11.2028	30.05.2030	575	0	146	35
09.10.2026	09.11.2027	396	42	56	31
09.10.2026	22.11.2028	775	0	202	47

Таблица 1: Результаты исследования границ применимости метода

Для начальных условий за найденными границами МНК перестает сходиться, даже при увеличении степени полинома  $p(\tau)$ . Вероятно, для сходимости на перелетах дольше одного витка нужно более тщательно подбирать начальное приближение.

## 2.2 Верификация метода на решенном примере

Рассмотрим задачу перелета на Марс, которая была решена непрямым методом оптимизации траектории перелета и сравним решения.

Начальные условия принимаются следующими:

- Дата старта: 9 октября 2026 года;
- Дата прилета: 12 декабря 2027 года;
- Величина отлетной скорости:  $v_{отл} = 2.8$  км/с;

- Удельный импульс двигателя:  $I=1250\text{ с}$ ;
- Начальная масса КА:  $M_0=156\text{ кг}$ .

Время перелета составляет 430 дней, то есть пример попадает в границы применимости метода, описываемого в настоящей работе.

Рассматриваются управления с одним пассивным участком и квадратичным полиномом  $p(\tau)$ .

Начальное приближение пассивного участка – случайная точка на плоскости  $t_f(t_0)$  такая, что  $t_f=t_0$ . Начальное приближение компонент векторов  $a_0, \dots, a_k$  – случайное число от 0 до 1.

Результат работы функции *optim*, реализованной с помощью метода Нелдера – Мида – пассивный участок с началом  $t_0=0$  и с концом  $t_f=164$  сут. Полученное управление затрачивает 33 кг топлива, то есть 21% от начальной массы КА. Полученный результат совпадает с результатом работы совпадает с ответом, полученным непрямым методом.

Далее на тех же начальных условиях запускался поиск среди управлений с двумя пассивными участками. Для этого метод Нелдера – Мида в *optim* запускался в четырехмерном пространстве  $t_{01}, t_{f1}, t_{02}, t_{f2}$ . Значимых результатов этот пример не дал: один из пассивных участков вырождается.

### 2.3 Пример без отлетной скорости

В рассмотренных выше примерах с одним пассивным участком оказывалось, что его оптимальное расположение в начале перелета. Объяснить это можно большим значением отлетной скорости. В начале перелета на динамику КА в большей степени влияет не двигатель малой тяги, а импульс, например разгонного блока, величиной порядка нескольких километров в секунду.

Однако в общем случае оптимальный пассивный участок не обязан находиться в начале перелета. Для подтверждения этого рассмотрим пример перелета на Марс при  $v_{oml}=0$ , то есть  $V_0=V_3$ .

Начальные условия принимаются следующими:

- Дата старта: 9 октября 2026 года;
- Дата прилета: 20 февраля 2028 года;
- Удельный импульс двигателя:  $I=1250\text{ с}$ ;
- Начальная масса КА:  $M_0=85\text{ кг}$ .

Этот пример решается перебором по сетке начала пассивного участка  $t_0$  и поиском для каждого из них методом дихотомии конца этого пассивного участка  $t_f$ . Изобразим зависимость  $t_f(t_0)$  на графике (см. рис. 6).

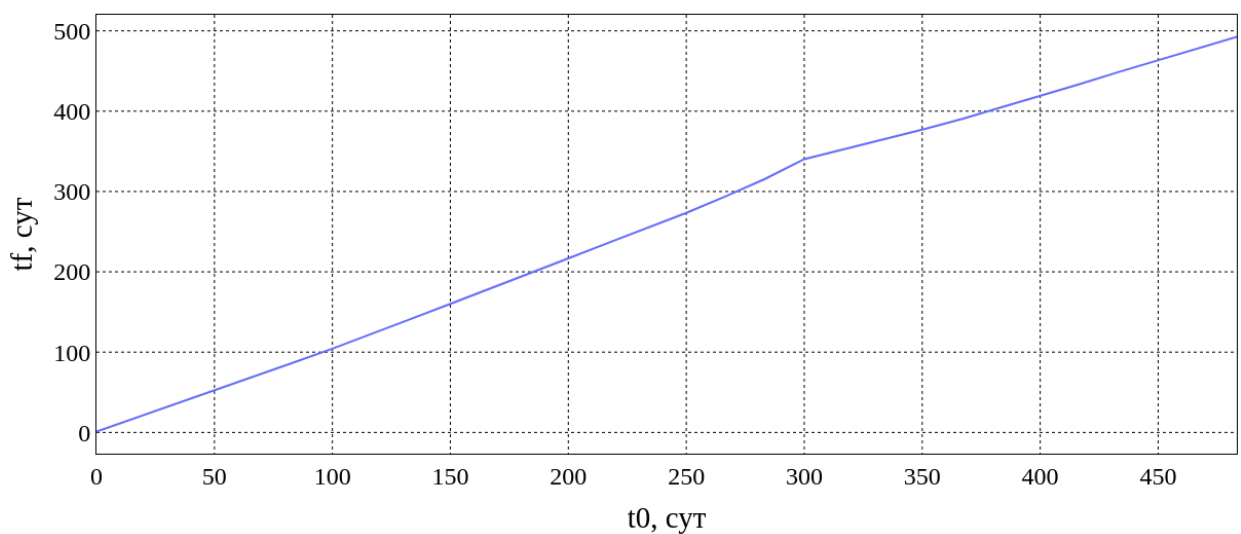


Рис. 6: График зависимости конца пассивного участка от его начала

Изобразим на графике зависимость продолжительности пассивного участка от его начала, то есть разницу  $t_f - t_0$ . Из графика на рис. 7 видно, что самый оптимальный пассивный участок начинается на 300 сутки перелета и продолжается 40 суток.

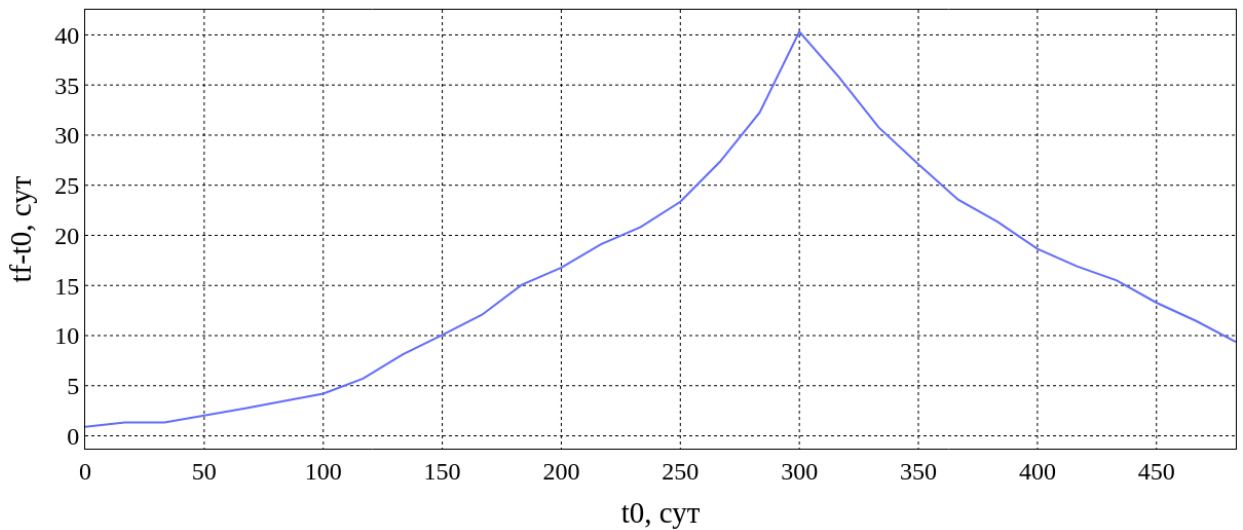


Рис. 7: График зависимости продолжительности пассивного участка от его начала

Поскольку топливные затраты зависят от продолжительности пассивного участка, на графике можно отобразить зависимость затрат топлива от начала пассивного участка. Из графика на рис. 8 видно, что минимальные топливные затраты в этом случае 68% от начальной массы КА или 58 кг.

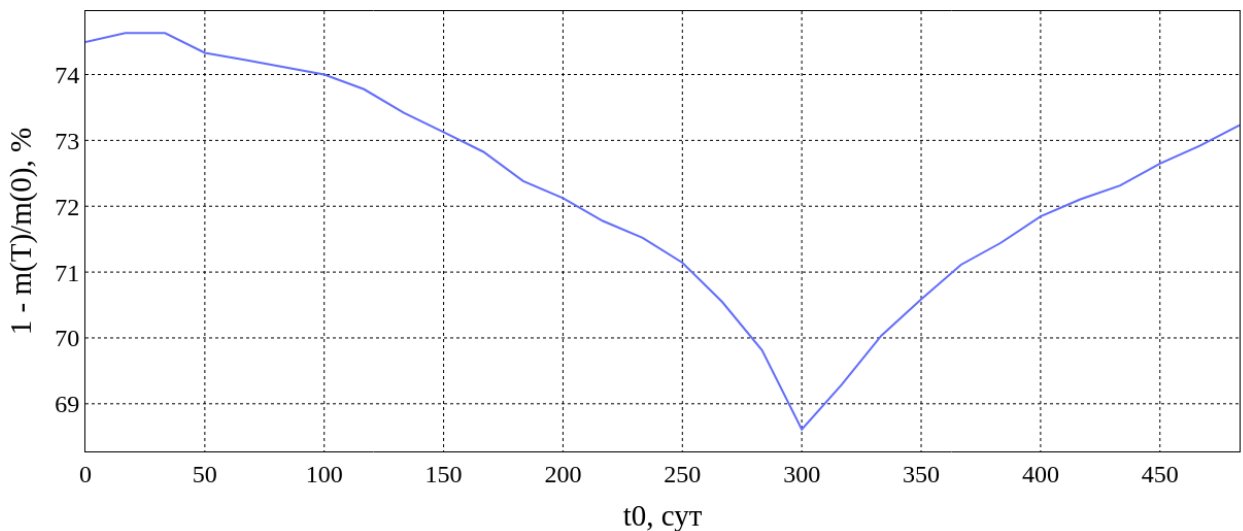


Рис. 8: График зависимости топливных затрат от начала пассивного участка

## **Заключение**

В данной работе представлен параметрический метод минимизации топливных затрат в межпланетном перелете. Чтобы выделить параметры управления, используется свойство релейности оптимальной функции управления, а направление силы тяги аппроксимируется полиномиальной функцией. Таким образом, в качестве переменных оптимизации используются моменты переключения режимов управления и коэффициенты полинома. В результате оптимизационная задача сводится к максимизации суммарной продолжительности пассивных участков.

Было предложено решение проблемы чувствительности методов оптимизации к переменным времени. Решение этой проблемы заключается в разделении оптимизации на два слоя: на внутреннем ищется решение при фиксированных пассивных участках, а на внешнем оптимизируются пассивные участки.

Метод был реализован в виде программного обеспечения на языке Python. В работе приведены результаты использования метода на примерах перелета на Марс и границы его применимости. Метод также был верифицирован на примере, решенном с помощью непрямого метода оптимизации. Результаты применения методов на этом примере сошлись.

Предложенный метод оптимизации траектории является прямым, а, значит, может быть применен к сколь угодно сложным динамическим моделям без дальнейшей адаптации решения.

Одно из основных направлений развития метода – расширение границ его применимости на траектории перелета из нескольких витков и поиск оптимального управления среди управлений с несколькими пассивными участками.



## **Список использованных источников**

1. Conway B. A. (ed.). *Spacecraft trajectory optimization*. – Cambridge University Press, 2010. – Т. 29.
2. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // *Космические исследования*. – 2008. – Т. 46, – №3. – С. 258–270.
3. Петухов В. Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // *Космические исследования*. – 2012. – Т. 50. – №. 3. – С. 258-258.
4. Григорьев И. С. и др. Оптимизация экспедиции к Фобосу с комбинированной тягой с возвращением к Земле // *Инженерный журнал: наука и инновации*. – 2017. – №. 7 (67). – С. 4.
5. Topputo F. et al. Survey of direct transcription for low-thrust space trajectory optimization with applications // *Abstract and Applied Analysis*. – Hindawi, 2014. – Т. 2014. DOI: <https://doi.org/10.1155/2014/851720>.
6. Morelli A. C. et al. Convex Trajectory Optimization Using Thrust Regularization // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2024. – Т. 47. – №. 2. – С. 339-346. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.G007646>
7. Ulybyshev Y. Discrete pseudocontrol sets for optimal control problems // *Journal of guidance, control, and dynamics*. – 2010. – Т. 33. – №. 4. – С. 1133-1142. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.47315>.
8. Dachwald B. Low-thrust trajectory optimization and interplanetary mission analysis using evolutionary neurocontrol // *Doktorarbeit, Institut für Raumfahrttechnik, Universität der Bundeswehr, München*. – 2004.
9. Dachwald B. Optimization of very-low-thrust trajectories using evolutionary neurocontrol // *Acta Astronautica*. – 2005. – Т. 57. – №. 2-8. – С. 175-185.

10. LaFarge N. B. et al. Autonomous closed-loop guidance using reinforcement learning in a low-thrust, multi-body dynamical environment //Acta Astronautica. – 2021. – Т. 186. – С. 1-23.
11. LaFarge N. B., Howell K. C., Folta D. C. Adaptive closed-loop maneuver planning for low-thrust spacecraft using reinforcement learning //Acta Astronautica. – 2023. – Т. 211. – С. 142-154.
12. SciPy. Официальный сайт программной библиотеки SciPy [Электронный ресурс]. URL: <https://scipy.org/> (дата обращения: 08.02.2024).
13. *KIAMToolbox* // GitHub : [Электронная платформа]. URL: <https://github.com/shmaxg/KIAMToolbox> (дата обращения: 04.03.2023).