

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

(Специализация «Прикладная математика и физика»)

## **Об одном способе разгона космического аппарата до параболической скорости**

Выпускная квалификационная работа бакалавра  
студентки 372 группы  
**Охитиной Анны Сергеевны**

Научный руководитель  
д. ф.-м. н. **Мирер Сергей Александрович**

Москва, 2017

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. Постановка задачи</b>	<b>5</b>
1.1 Постановка задачи	5
1.2 Цель работы	6
1.3 Выбор системы координат	6
<b>2. Уравнение движения</b>	<b>7</b>
2.1 Скорость и ускорение КА	7
2.2 Кривизна и радиус кривизны	7
2.3 Уравнение движения	11
<b>3. Численное решение</b>	<b>15</b>
3.1 Начальные условия	15
3.2 Численное интегрирование	15
3.3 Выход за сферу действия Земли при разгоне	23
3.4 Промежуточный итог	26
<b>4. Численный метод Охоцимского</b>	<b>27</b>
4.1 Описание метода	27
4.2 Сравнение результатов	32
<b>5. Приближенный метод Бэттина</b>	<b>35</b>
5.1 Описание метода	35
5.2 Сравнение оценок Бэттина с результатами численного моделирования при фиксированном радиусе начальной круговой орбиты	38

5.3 Сравнение оценок Бэттина с результатами численного моделирования при фиксированном ускорении	44
5.4 Область применимости приближенных формул	50
<b>Заключение</b>	<b>53</b>
<b>Литература</b>	<b>54</b>

## Введение

В работе рассматривается проблема разгона космического аппарата (КА), находящегося в начальный момент на круговой орбите, до параболической скорости с использованием двигателей малой тяги. Эта задача вызывает интерес, так как ускорение, сообщаемое аппарату можно считать постоянным и направленным вдоль касательной к спиралевидной траектории при условиях, что КА на рассматриваемом участке пути теряет небольшое количество массы рабочего тела и при таком разгоне вектор тяги не сильно отклоняется от траектории. Данный подход может быть полезен при решении задачи разгона КА при помощи электрореактивных двигателей, использование которых энергетически выгодно при осуществлении межпланетных и, в дальнейшем, межзвездных перелетов.

Аналитическое решение поставленной задачи для любых значений начальных параметров (радиуса начальной круговой орбиты, ускорения) получить невозможно, поэтому прибегают к численным методам решения. С появлением современной вычислительной техники точность расчетов сильно увеличилась, а временные затраты понизились, что позволяет просчитывать все более сложные модели и учитывать большее количество влияющих факторов и начальных параметров задачи. Таким образом, некоторый интерес представляет исследование методик численного (более точного) моделирования и приближенных методов, используемых ранее. Целью данной работы является нахождение области применения приближенных формул, оценка их точности при различных начальных параметрах и сравнение с методами численного интегрирования, которые могут занимать гораздо больше времени, но давать более точный результат.

Поставленная задача решалась и ранее, однако вычислительные ресурсы позволяли производить расчеты с гораздо меньшей точностью, поэтому часто прибегали к вычислениям по приближенным методам, либо приходилось рассматривать отдельные участки траектории для упрощения интегрирования. Д.Е.Охоцимский и Ю.Г.Сихарулидзе [2] в своей работе исследовали задачу, аналогичную поставленной, но рассматривали разгон до гиперболической скорости, потому что при таком рассмотрении происходит более аккуратно стыковка между участками разгона с круговой орбиты до параболической и с параболической до гиперболической орбиты. Г.Б.Ефимов и Д.Е.Охоцимский [4] рассматривали задачу об оптимальном разгоне КА с малой тягой и сравнивали результат с движением под действием постоянного

касательного ускорения. Р.Бэттин [1] предложил для решения приближенные оценки параметров задачи, то есть приближенную методику решения. В.В.Белецкий и В.А.Егоров [5] исследовали траектории разгона КА внутри сферы действия планеты под действием малого реактивного ускорения и приближенно решали задачу об оптимальном управлении.

В представленной работе предлагается численный метод решения задачи и проводится сравнение с приближенными формулами метода Бэттина.

# 1. Постановка задачи

## 1.1 Постановка задачи

Использование двигателей малой тяги возможно, если космический аппарат (КА) уже выведен на околоземную орбиту. Процесс выведения на орбиту рассматривать не будем, уточним только, что для этого необходимы двигатели большой тяги. Начнем рассмотрение с момента нахождения КА на круговой орбите.

Итак, пусть КА движется по круговой орбите вокруг притягивающего центра  $Q$  (Земля). В некоторый момент времени на КА начинает действовать касательная сила, которая приводит КА к ускоренному движению. Ускорение  $a$ , сообщаемое этой силой, считаем постоянным и направленным в каждый момент времени по касательной к траектории (Рис.1).

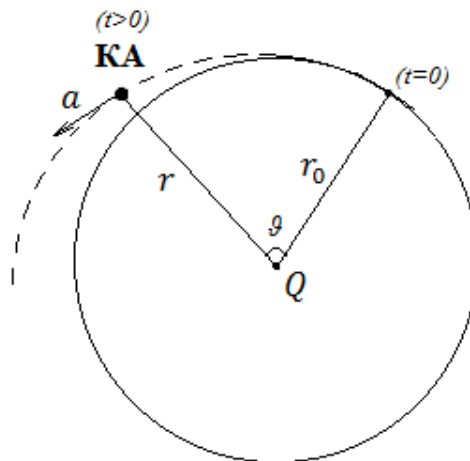


Рис.1 Начало разгона КА под действием постоянного касательного ускорения

Необходимо определить:

- 1) путь  $S$ , который пройдет КА до того момента времени, когда его скорость достигнет значения местной параболической скорости;
- 2) расстояние  $r$  от притягивающего центра до КА в этот момент;
- 3) время нахождения в пути  $t$ ;
- 4) количество витков, сделанных КА при разгоне;
- 5) запас характеристической скорости.

## 1.2 Цель работы

Получив необходимые уравнения движения, численно решить поставленную задачу. Сравнить с результатами, полученными с помощью численного метода Д.Е.Охоцимского [2], а также с приближенным методом Р.Бэттина [1]. Проанализировать, при каких начальных данных приближенная методика дает хороший результат, найти область применимости приближенных формул, основываясь на численном решении.

## 1.3 Выбор системы координат

Для решения задачи введем две системы координат. Так как задача плоская, будем рассматривать только плоскость орбиты (Рис.2):

- 1)  $Qxy$  – инерциальная декартова система координат с началом  $Q$  в притягивающем центре.
- 2)  $O\xi\eta$  – неинерциальная с.к. связанная с КА и с началом  $O$  в центре масс КА, оси которой направлены по касательной к траектории в каждой рассматриваемой точке и по нормали к ней. Орты  $i_r$  и  $i_n$  – единичные вектора вдоль направления касательной и нормали соответственно (локальный базис).

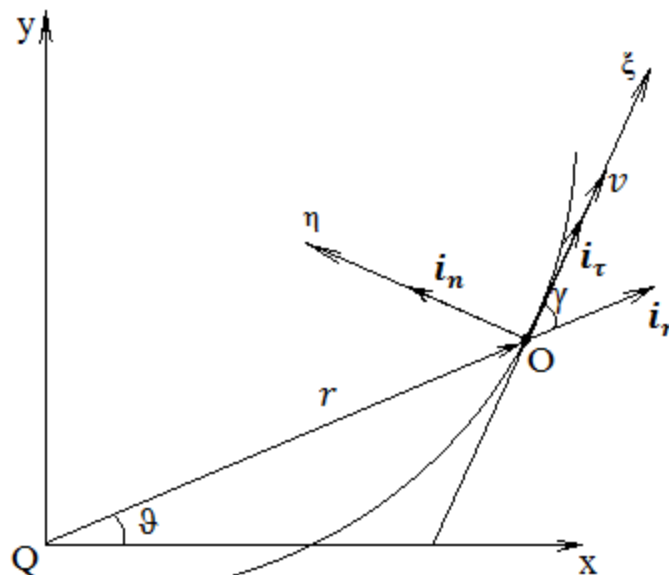


Рис.2 Инерциальная ( $Qxy$ ) и связанная ( $O\xi\eta$ ) системы координат

## 2. Уравнение движения

### 2.1 Скорость и ускорение КА

В неинерциальной системе координат выражения для скорости и ускорения КА принимают следующий вид:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{i}_\tau = \frac{ds}{dt}\mathbf{i}_\tau \quad (1)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{i}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{i}_n \quad (2)$$

где  $\rho$  - радиус кривизны траектории в текущей точке, более подробно о котором будет сказано в следующем пункте текущей главы.

### 2.2 Кривизна и радиус кривизны

Рассмотрим плоскую гладкую кривую  $\Gamma$ . Переместимся по ней из точки А в точку В (Рис.3). При этом радиус-вектор точки изменится на некоторую величину  $dr$  и повернется на угол  $\alpha$ .

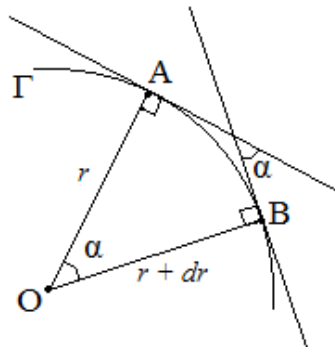


Рис.3

Обозначим  $|\mathbf{AB}| = |\Delta s|$ . Тогда, по определению кривизны кривой  $\Gamma$  называется следующий предел:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{|\Delta s|}.$$



Радиус кривизны, соответственно,  $\rho = \frac{1}{K}$ .

Получим выражение для кривизны  $K = \frac{1}{\rho}$ , которое понадобится при выводе уравнений движения.

Выражение (2) перепишем в виде:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{v^2} \sqrt{a^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

Точка с координатами  $(x, y)$  имеет следующие значения радиус-вектора, скорости и ускорения соответственно:

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}), \quad \mathbf{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}),$$

где точкой обозначена производная по времени  $t$ .

Введем полярные координаты  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \vartheta) = \frac{dr}{dt} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta} = \\ &= \dot{\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r \sin \vartheta) = \frac{dr}{dt} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} = \\ &= \dot{\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d}{dt} \left[ \dot{\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \right) \right] = \ddot{\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \right) + \dot{\vartheta} \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \right) = \\ &= \ddot{\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \right) + \dot{\vartheta}^2 \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \right) = \\ &= \ddot{\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \right) + \dot{\vartheta}^2 \left[ \frac{d^2 r}{d\vartheta^2} \cos \vartheta - 2 \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta - r \cos \vartheta \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= \frac{d}{dt} \left[ \dot{\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \right) \right] = \ddot{\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \right) + \dot{\vartheta} \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \right) = \\
&= \ddot{\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \right) + \dot{\vartheta}^2 \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \right) = \\
&= \ddot{\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \right) + \dot{\vartheta}^2 \left[ \frac{d^2 r}{d\vartheta^2} \sin \vartheta + 2 \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \right];
\end{aligned}$$

На данном этапе выражение для кривизны принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\rho} = \left( r^2 + 2 \left( \frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\vartheta^2} \right) \left( r^2 + \left( \frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (3)$$

Далее воспользуемся соотношением

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\vartheta)^2 \quad (4)$$

которое следует из Рис.4.

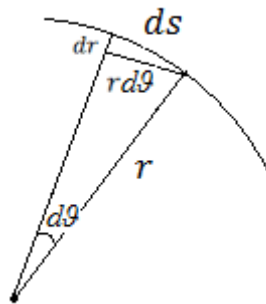


Рис.4

Отсюда

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{r} \sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2}$$

Так как  $\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta}{dr} \frac{dr}{ds}$ , то

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{dr}{ds} r \left( \sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} \right)^{-1}$$

Осталось найти вторую производную  $\frac{d^2r}{d\vartheta^2}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2r}{d\vartheta^2} &= \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \right) = \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{dr}{ds} r \left( \sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} \right)^{-1} \right) = \\
 &= \frac{d}{ds} \left( \frac{dr}{ds} r \left( \sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} \right)^{-1} \right) \frac{ds}{d\vartheta} = \\
 &= \frac{d^2r}{ds^2} r^2 \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} + \frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\vartheta} \frac{d}{ds} \left( r \left( \sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} \right)^{-1} \right) = \\
 &= \frac{d^2r}{ds^2} \frac{r^2}{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} + \frac{dr}{ds} r \left( \sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{ds} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} \right)^{-1} + r \frac{d}{ds} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} \right)^{-1} \right) = \\
 &= \frac{d^2r}{ds^2} \frac{r^2}{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} + \frac{dr}{ds} \frac{r}{\sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2}} \left( \frac{dr}{ds} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2}} + r \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dr}{ds} \frac{d^2r}{ds^2} \right) = \\
 &= \frac{d^2r}{ds^2} \frac{r^2}{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} + \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \frac{r}{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} + \frac{r^2}{\left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^2} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \frac{d^2r}{ds^2} = \\
 &= \frac{r}{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} \left( r \frac{d^2r}{ds^2} + \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right) + \frac{1}{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \frac{d^2r}{ds^2}.
 \end{aligned}$$

Подставляем найденные производные в выражение (3), находим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} &= \left[ r^2 + 2 \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 r^2 \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} - r^2 \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} \left( r \frac{d^2r}{ds^2} + \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \frac{d^2r}{ds^2} \right) \right] \\
&\cdot \left[ r^2 + \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 r^2 \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} \right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{r} \left[ 1 + 2 \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} - \right. \\
&\left. - \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} \left( r \frac{d^2r}{ds^2} + \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \frac{d^2r}{ds^2} \right) \right] \left[ 1 + \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} \right]^{-\frac{3}{2}} = \\
&= \frac{1}{r} \left[ 1 + 2 \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} - \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} \left( r \frac{d^2r}{ds^2} + \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \frac{d^2r}{ds^2} \right) \right] \\
&\cdot \left[ \left( 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right)^{-1} \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - r \frac{d^2r}{ds^2} \right] \cdot \left[ 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Итак, получили выражение для нахождения кривизны, в котором  $r = r(s)$  (радиус-вектор есть функция от переменной длины дуги), что в дальнейшем будет удобно использовать при выводе удобной для численного интегрирования формы уравнений движения:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - r \frac{d^2r}{ds^2} \right] \cdot \left[ 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

### 2.3 Уравнение движения

Уравнение движения в рамках возмущенной задачи двух тел имеет следующий вид:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = a\mathbf{i}_\tau \quad (6)$$

Спроектируем ускорение (2) на тангенциальное и нормальное направления (Рис.5):

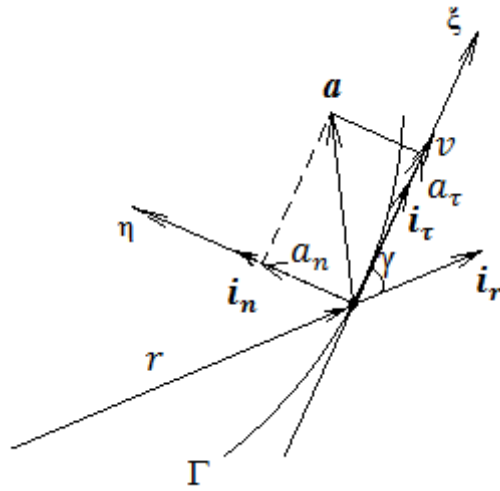


Рис.5 Проекции ускорения на нормальное и тангенциальное направления к траектории

$$\frac{dv}{dt} = a - \frac{\mu}{r^2} \cos \gamma \quad (7)$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma \quad (8)$$

С помощью соотношения (4) получаем, что

$$\cos \gamma = \frac{v_r}{v} = \frac{1}{v} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{v} \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dr}{ds},$$

$$\sin \gamma = r \frac{d\vartheta}{ds} = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \left[ 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Тогда уравнения (7) и (8) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{ds} = a - \frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{ds}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{ds} + \frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{ds} = a \quad (9)$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{\mu}{r^2} \sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} \quad (10)$$

Подставим в (10) выражение (5) для кривизны:

$$v^2 \frac{1}{r} \left[ 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{ds^2} \right] \left[ 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{\mu}{r^2} \sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2}$$

Итак, проекция уравнения движения на нормальное направление на данном этапе имеет вид:

$$v^2 r \frac{d^2 r}{ds^2} + \left( v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \left[ \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (11)$$

Проинтегрируем проекцию уравнения движения на тангенциальное направление (7) от начального положения КА до момента достижения параболической скорости при условии, что  $a = \text{const}$ :

$$\int_{v_0}^v d(v^2) + 2\mu \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = 2a \int_0^s ds,$$

где  $v_0 = v_{\text{кр}} = \sqrt{\mu/r_0}$  – скорость на начальной круговой орбите.

Таким образом уравнение (9) принимает следующий вид:

$$v^2 = 2as + \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (12)$$

При достижении КА параболической скорости  $v^2 = \frac{2\mu}{r}$ , найдем из выражения (12) путь, который пройдет КА до этого момента:

$$S_{\text{esc}} = \frac{\mu}{2ar_0}.$$

Вернемся теперь к уравнению (11). Зная выражение для квадрата скорости (12) и обозначив  $\frac{dr}{ds} = y$ , преобразуем (11):

$$v^2 r \frac{dy}{ds} + \left( v^2 - \frac{\mu}{r} \right) (y^2 - 1) = 0$$

$$\frac{dy}{ds} = - \left( \frac{1-y^2}{r} \cdot \frac{v^2 - \frac{\mu}{r}}{v^2} \right)$$

$$\frac{dy}{ds} = \left( \frac{1-y^2}{r} \right) \frac{2as + \mu \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}{2as + \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

Так как  $v = \frac{ds}{dt}$ , то можно получить дифференциальное уравнение для расчета времени полета КА в зависимости от начальных параметров и пройденного пути:

$$\frac{dt}{ds} = v^{-1} = \left[ 2as + \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Также нас будет интересовать значение угла истинной аномалии. Дифференциальное уравнение для вычисления  $\mathcal{G}$  можно получить из (4):

$$\frac{d\mathcal{G}}{ds} = \frac{1}{r} \sqrt{1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2} = \frac{1}{r} \sqrt{1 - y^2}.$$

Итак, получена система из четырех дифференциальных уравнений первого порядка для решения поставленной задачи:

$$\begin{cases} \frac{dr}{ds} = y \\ \frac{dy}{ds} = \left( \frac{1-y^2}{r} \right) \left[ 2as + \mu \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right] / \left[ 2as + \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right] \\ \frac{dt}{ds} = \left[ 2as + \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]^{-1/2} \\ \frac{d\mathcal{G}}{ds} = \frac{1}{r} \sqrt{1-y^2} \end{cases} \quad (13)$$

### 3. Численное решение

#### 3.1 Начальные данные

Для численного интегрирования системы (13) используется программа MATLAB и встроенная функция численного интегрирования ode45 (вложенный метод Рунге-Кутты с переменным шагом интегрирования).

Зададим начальные параметры:

$t(0) = t_0 = 0$  – начальный момент времени,

$r(0) = r_0 = 7 \cdot 10^6$  м – радиус начальной круговой орбиты (при  $t_0$ ),

$y(0) = 0$  – так как в начальный момент КА находится на круговой орбите,

$\vartheta(0) = 0$  – отсчитываем угол истинной аномалии от начального положения  $r_0$

Отрезок интегрирования –  $[0, S_{\text{esc}}]$ , где  $S_{\text{esc}}$  было получено ранее:

$$S_{\text{esc}} = \frac{\mu}{2ar_0}$$

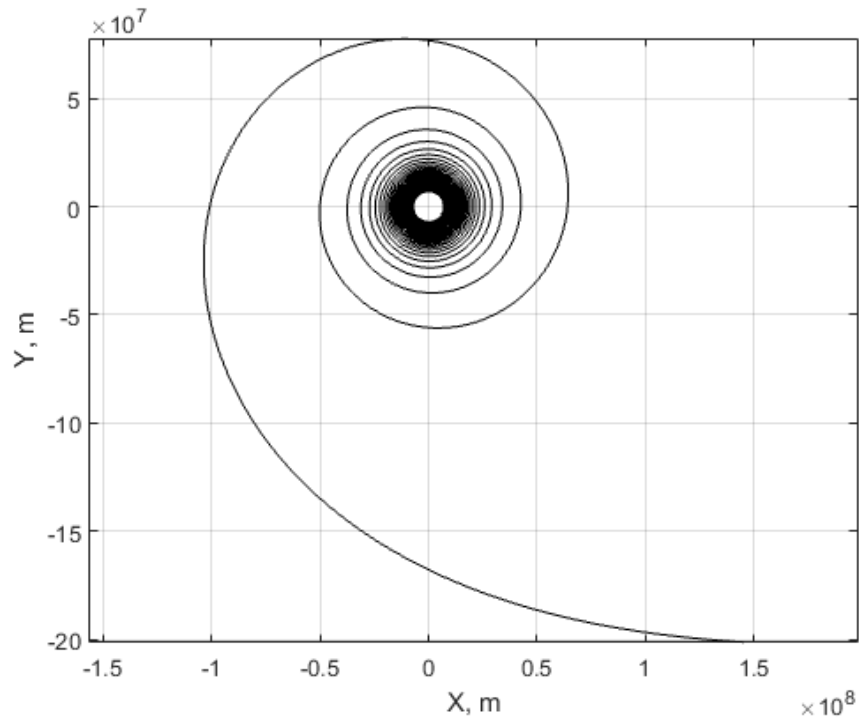
Гравитационный параметр Земли  $\mu \approx 3,986 \cdot 10^{14}$  м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>, ускорение на первом этапе исследования примем равным  $a = 0,005$  м/с<sup>2</sup>.

#### 3.2 Численное интегрирование

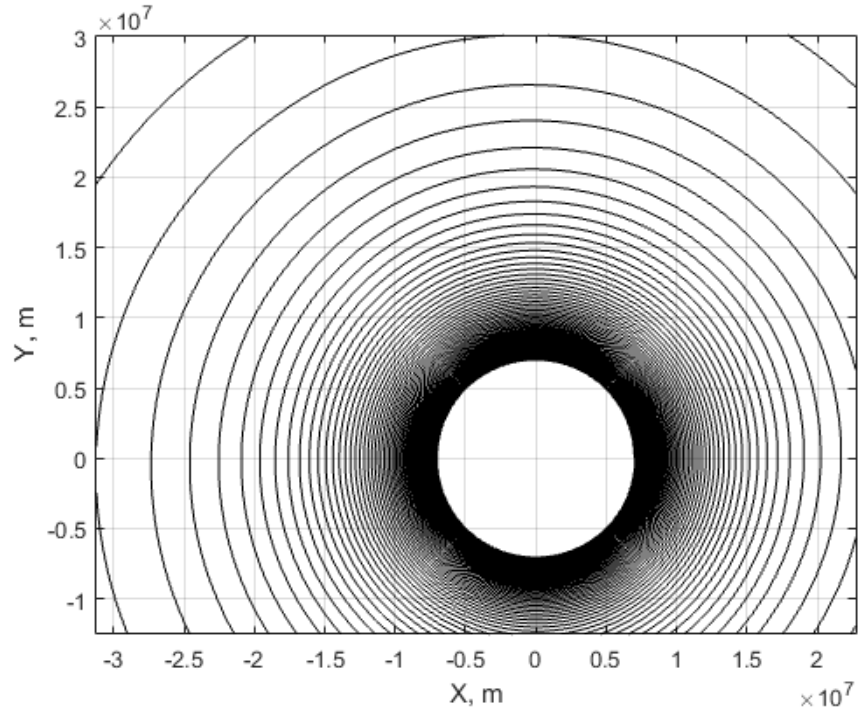
При помощи численного решения системы (13) построим траекторию КА, на который действует касательная сила тяги. Затем определим путь, который пройдет КА до достижения местной параболической скорости, расстояние от притягивающего центра до КА в этот момент, время нахождения в пути, количество витков, которое совершит КА, разгоняясь до местной параболической скорости, а также определим запас характеристической скорости. Затем определим, какой энергией будет обладать КА в конце разгона.



Для ускорения  $a = 0,005 \text{ м/с}^2$  на Рис.6а и Рис.6б показаны соответственно вся траектория и отдельно центральные витки для наглядности – спираль сначала медленно раскручивается, а затем быстрее.



*Рис.6а Траектория движения КА при  $a = 0,005 \text{ м/с}^2$*



*Рис.6б Центральные витки в увеличенном масштабе,  $a = 0,005 \text{ м/с}^2$*

Число витков оценим, разделив конечную величину угла истинной аномалии, полученную с помощью численного интегрирования последнего уравнения в системе (13), на  $2\pi$ :

$$N_{\text{esc}} = \frac{\mathcal{G}_{\text{esc}}}{2\pi} \approx 64,8, \text{ где } \mathcal{G}_{\text{esc}} \approx 407,5 \text{ рад.}$$

Далее, по формуле  $\Delta v = |v - v_0|$ , где  $v_0 = \sqrt{\mu/r_0}$  - скорость на начальной круговой орбите, можем определить запас характеристической скорости в конце разгона:

$$\Delta v = |v - v_0| \approx 5920,6 \text{ м/с.}$$

Энергия КА в момент завершения разгона:

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0,$$

где под  $v$  и  $r$  подразумеваются значения скорости и расстояния от притягивающего центра до КА в конечной точке разгона. Получили  $h = 0$ , что говорит о том, что КА действительно вышел на параболическую орбиту.

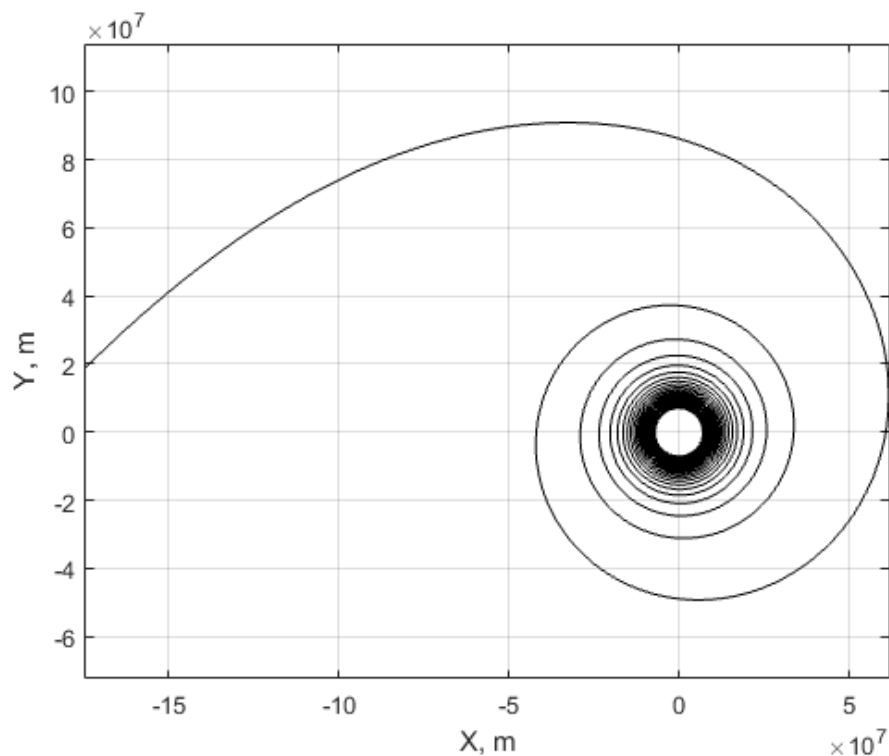
Интересно также посмотреть на изменение полной энергии при разгоне:

$$\Delta h = h - h_0 = 0 - \left( \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} \right) = 2,85 \cdot 10^7 \text{ (Дж)}.$$

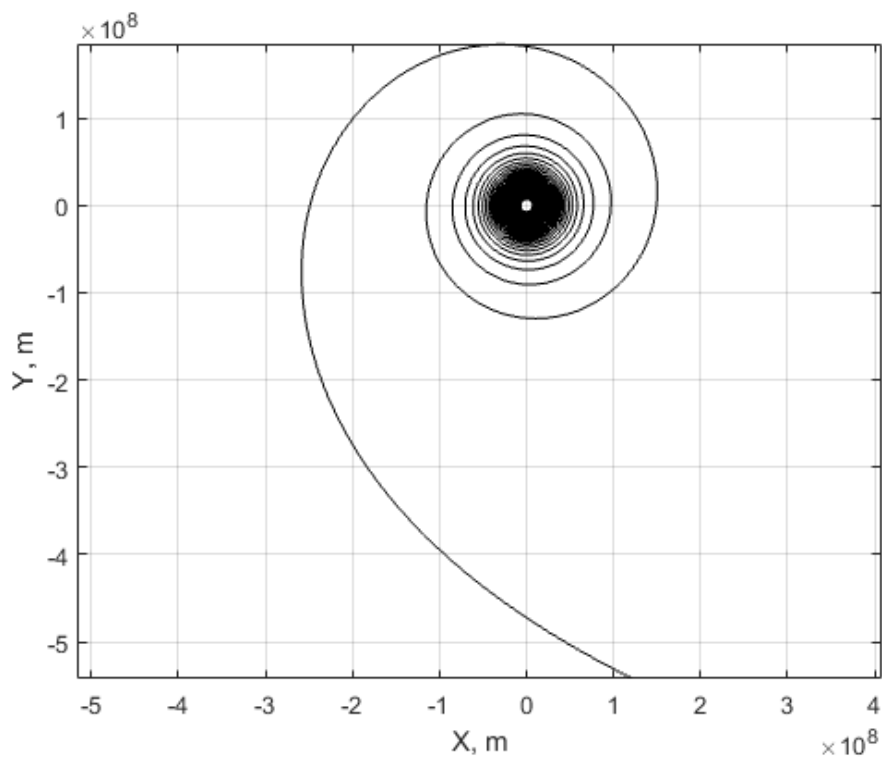
**Таблица 1** Результаты, полученные численным интегрированием при  $a = 0,005 \text{ м/с}^2$

Ускорение	$a = 0,005 \text{ м/с}^2$
Пройденный путь	$S \approx 5,9 \cdot 10^9 \text{ м}$
Расстояние от притягивающего центра	$r = 5,5 \cdot 10^8 \text{ м}$
Время разгона	$t \approx 15,6 \text{ сут}$
Суммарный угол истинной аномалии	$\mathcal{G}_{\text{esc}} \approx 407,5 \text{ рад}$
Число витков	$N_{\text{esc}} \approx 64,8$
Запас характеристической скорости	$\Delta v \approx 5920,6 \text{ м/с}$
Изменение полной энергии	$\Delta h = 2,85 \cdot 10^7 \text{ Дж}$

Для сравнения построим траектории движения КА под воздействием ускорения  $a = 0,01 \text{ м/с}^2$  (Рис.6в) и  $a = 0,001 \text{ м/с}^2$  (Рис.6г), определим количество витков и расстояние от притягивающего центра для каждого случая (см. Таблицу 2).



*Рис.6в Траектория движения КА при  $a = 0,01 \text{ м/с}^2$*



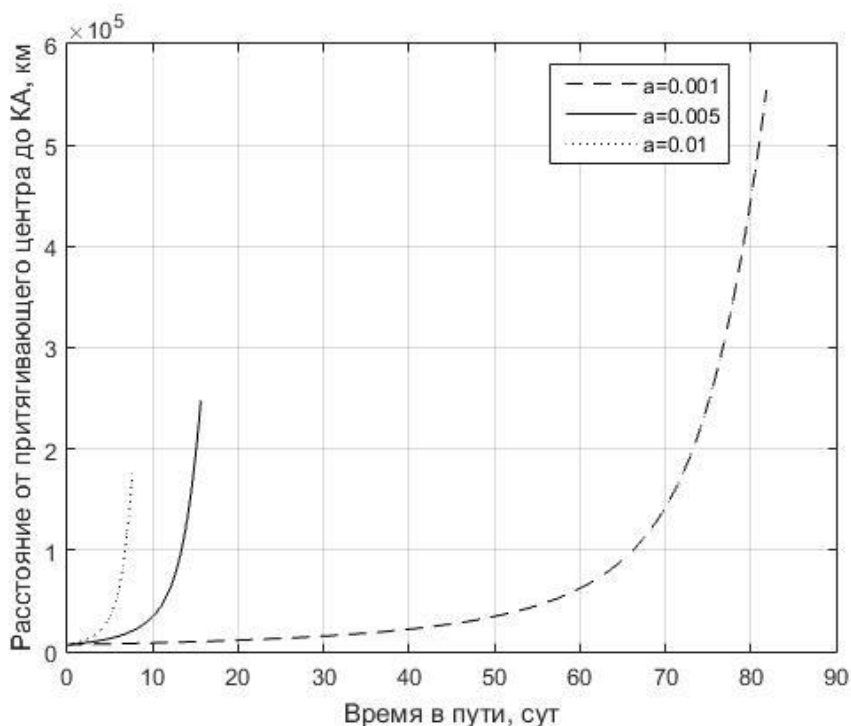
*Рис.6г Траектория движения КА при  $a = 0,001 \text{ м/с}^2$*

**Таблица 2 Результаты для различных ускорений**

Ускорение $a, \text{м/с}^2$	$\vartheta, \text{рад}$	Число витков $N$	Расстояние до притягивающего центра $r, \text{м}$
0,001	2034,4	323,8	$5,5 \cdot 10^8$
0,005	407,5	64,8	$2,5 \cdot 10^8$
0,01	204,1	32,5	$1,8 \cdot 10^8$

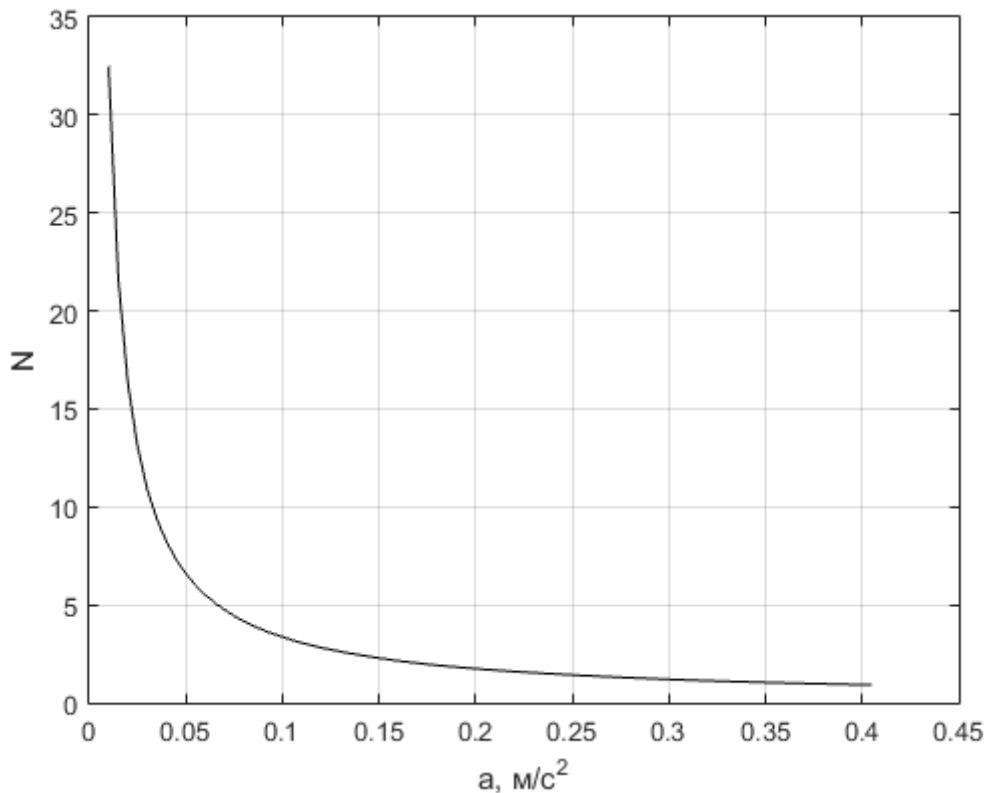
Заметим, что при увеличении значения ускорения все приведенные параметры – суммарный угол истинной аномалии, число витков и расстояние до притягивающего центра – уменьшаются, то есть КА достигает параболическую скорость на меньшем расстоянии от притягивающего центра, совершая при этом меньшее число витков.

На Рис.7 показано, как меняется расстояние от притягивающего центра с течением времени для трех рассматриваемых ускорений от начального момента до достижения параболической скорости. Хорошо видны и временные затраты, требуемые на разгон аппарата при разных ускорениях, что тоже является важным параметром при выборе тех или иных начальных условий для осуществления разгона КА.



**Рис.7**

Также можно рассмотреть зависимость числа витков от начального ускорения. Для наглядности полученного результата построим график этой зависимости  $N(a)$  для интервала ускорений  $a \in [0,001; 0,4] \text{ м/с}^2$  (Рис.8).



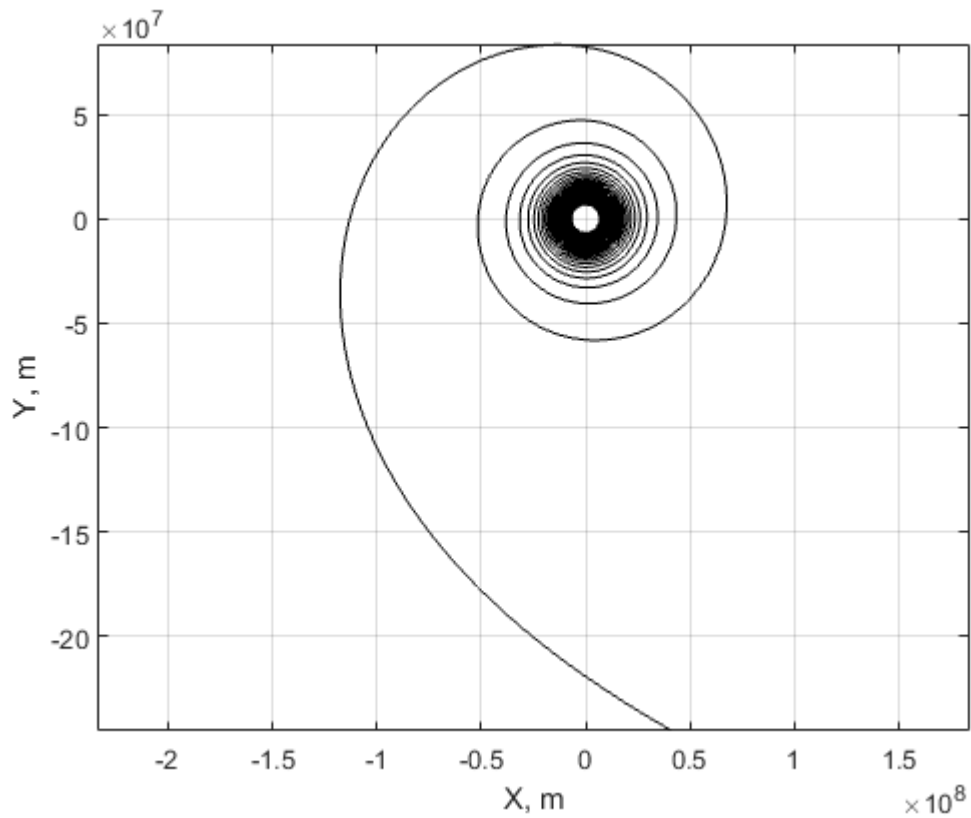
**Рис.8** Зависимость числа витков в конце разгона от ускорения

Зависимость близка к обратной пропорциональности, то есть с увеличением ускорения требуется совершать все меньшее количество витков для достижения необходимого результата – выхода на параболическую орбиту.

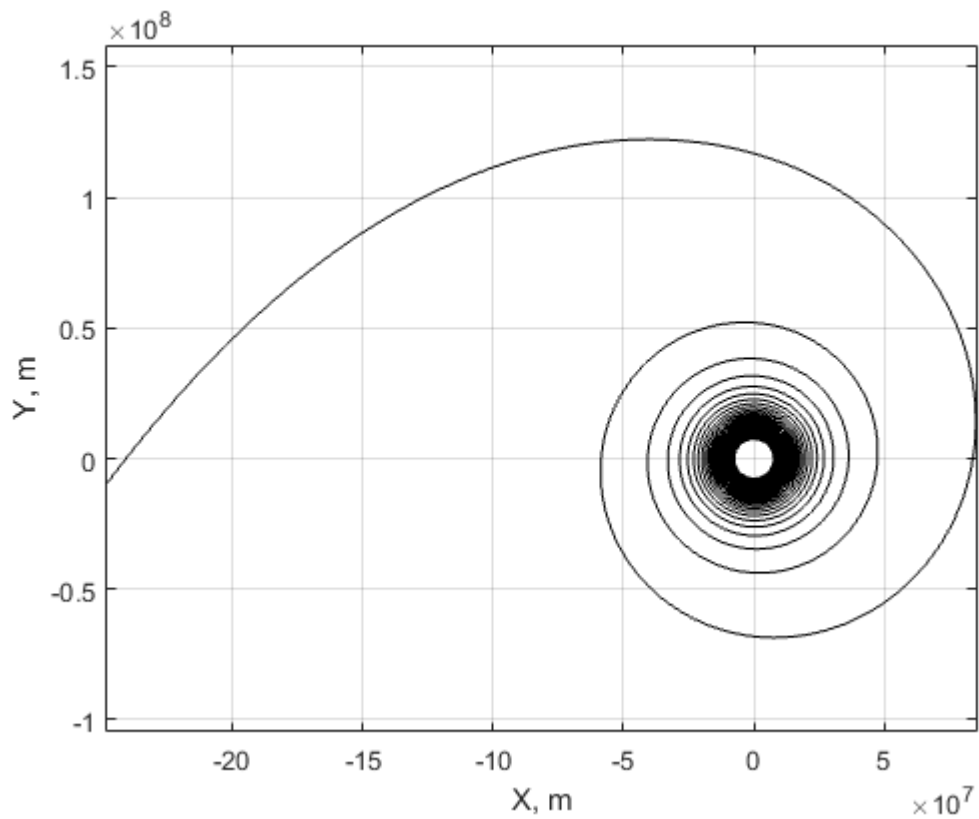
Проведем аналогичное исследование, но варьируя теперь начальную орбиту, то есть значение  $r_0$ , а ускорение оставляя равным  $a = 0,005 \text{ м/с}^2$ . Построим траектории для  $r_0 = 6,7 \cdot 10^6 \text{ м}$  (низкая круговая орбита (Рис.9а)) и  $r_0 = 7,5 \cdot 10^6 \text{ м}$  (высокая круговая орбита (Рис.9б)). Также оценим число витков, которые сделает КА, и на каком расстоянии от притягивающего центра будет КА в момент достижения параболической скорости (см. Таблицу 3).

**Таблица 3** Результаты для различных радиусов начальной орбиты

$r_0 \cdot 10^6, \text{ м}$	$\vartheta, \text{ рад}$	Число витков $N$	Расстояние до притягивающего центра $r, \text{ м}$
$6,7 \cdot 10^6$	444,7	70,8	$2,48118 \cdot 10^8$
$7 \cdot 10^6$	407,5	64,8	$2,48112 \cdot 10^8$
$7,5 \cdot 10^6$	355	56,5	$2,48042 \cdot 10^8$

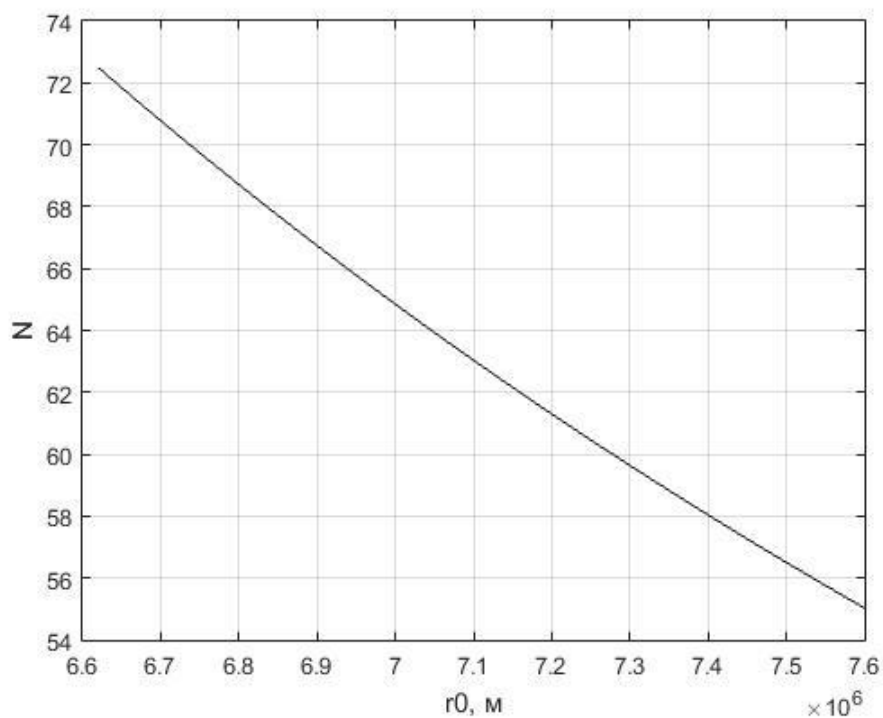


**Рис.9а** Траектория движения КА при  $r_0 = 6,7 \cdot 10^6$  м

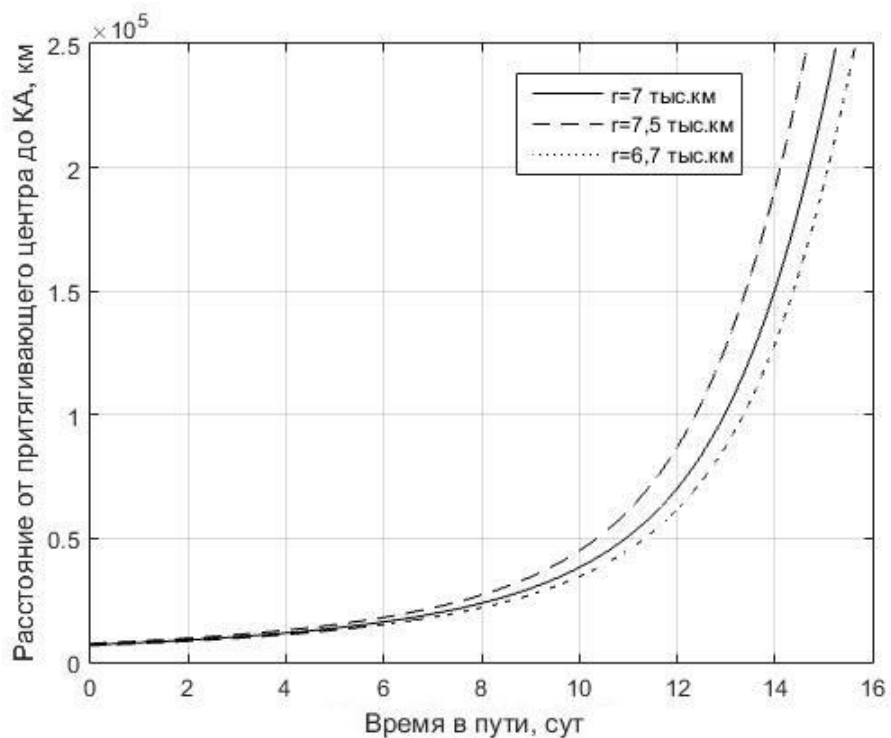


**Рис.9б** Траектория движения КА при  $r_0 = 7,5 \cdot 10^6$  м

Итак, по Таблице 3 видим, что число витков уменьшается с увеличением радиуса начальной круговой орбиты (зависимость близка к линейной, Рис.10а), а расстояние от притягивающего центра в конечной точке разгона во всех случаях практически одинаково (Рис.10б).



*Рис.10а* Зависимость числа витков в конце разгона от начального радиуса



*Рис.10б*

Таким образом, варьируя начальный радиус и ускорение, можно добиться того, чтобы для разгона КА совершил минимальное количество витков, затратил не очень много времени, а также стал энергетически и экономически выгодным.

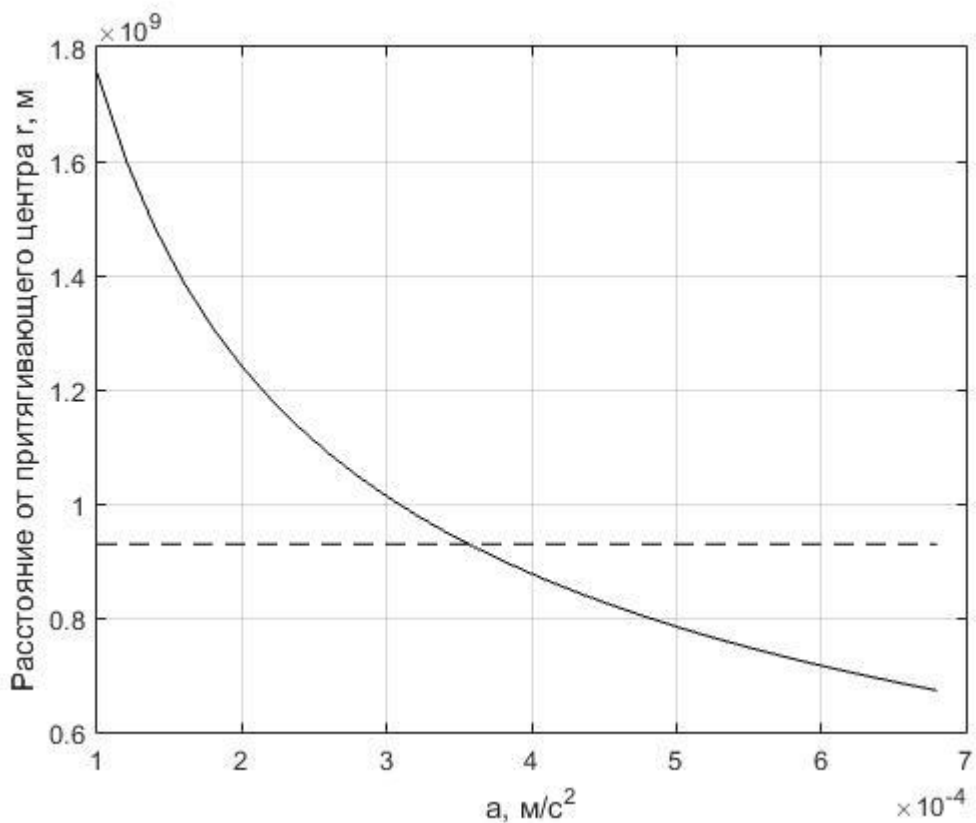
### 3.3 Выход за сферу действия Земли при разгоне

Так как мы рассматриваем задачу в рамках задачи двух тел, то нужно быть осторожными с границами применимости этого приближения. А именно: учесть, что при выходе КА из сферы действия Земли все написанные выше уравнения перестают работать, а, следовательно, и полученный результат становится неверным. Сфера действия – это область пространства вокруг небесного тела, внутри которой главное гравитационное действие на обращающийся по орбите объект исходит от этого тела. Хотелось бы установить ограничение снизу на величину малого ускорения, при котором разгон КА происходит целиком в сфере действия Земли.

Как известно, радиус сферы действия Земли приблизительно равен  $R_{\text{сф.действ.}} \approx 9,29 \cdot 10^8$  м. Чтобы понять, «выходит» ли разгон за ее пределы, то есть пересекает ли траектория (или касается, что тоже плохо) сферу действия, нужно сравнить эту величину (величину радиуса сферы действия Земли) с расстоянием, на котором КА достигает параболическую скорость. В предыдущем п.3.2 были установлены значения конечного расстояния для трех ускорений:  $a = 0,01$  м/с<sup>2</sup>,  $a = 0,005$  м/с<sup>2</sup>,  $a = 0,001$  м/с<sup>2</sup>. Видно, что рассмотренные ускорения удовлетворяют требованию того, чтобы весь разгон происходил в сфере действия планеты Земля. Таким образом, ограничение снизу на величину ускорения будем искать на интервале ускорений меньших  $0,001$  м/с<sup>2</sup>.

Построим зависимость конечного радиус-вектора КА (расстояния от притягивающего центра до КА в момент достижения местной параболической скорости) от ускорения (Рис.11). Пунктирной линией на Рис.11 отмечено расстояние равное радиусу сферы действия Земли. Также некоторые полученные результаты приведены в Таблице 4.



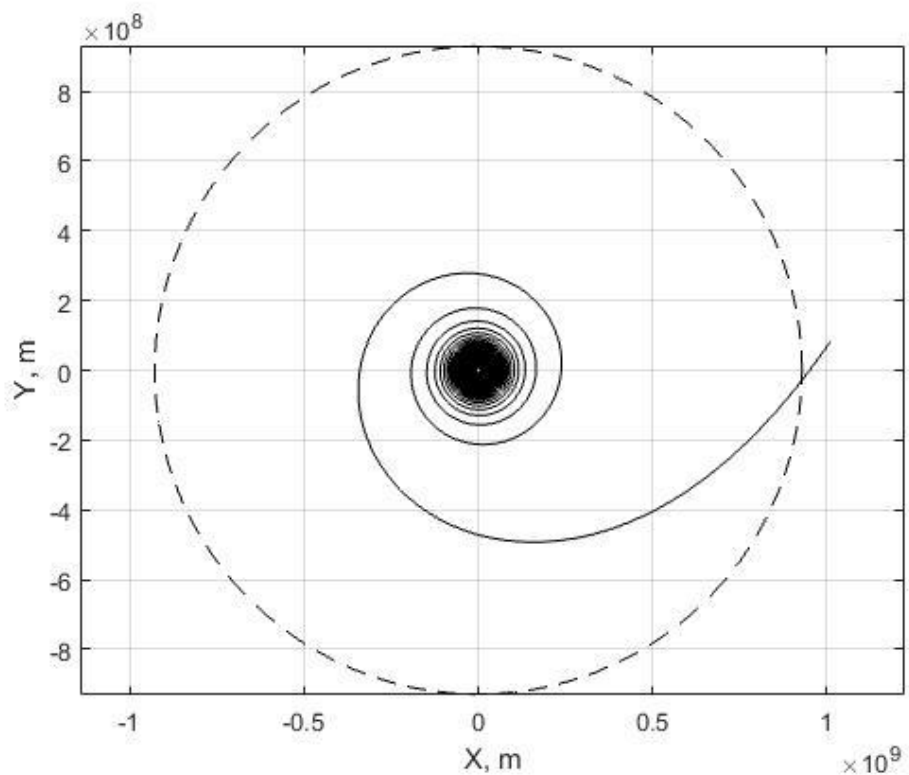


**Рис.11**

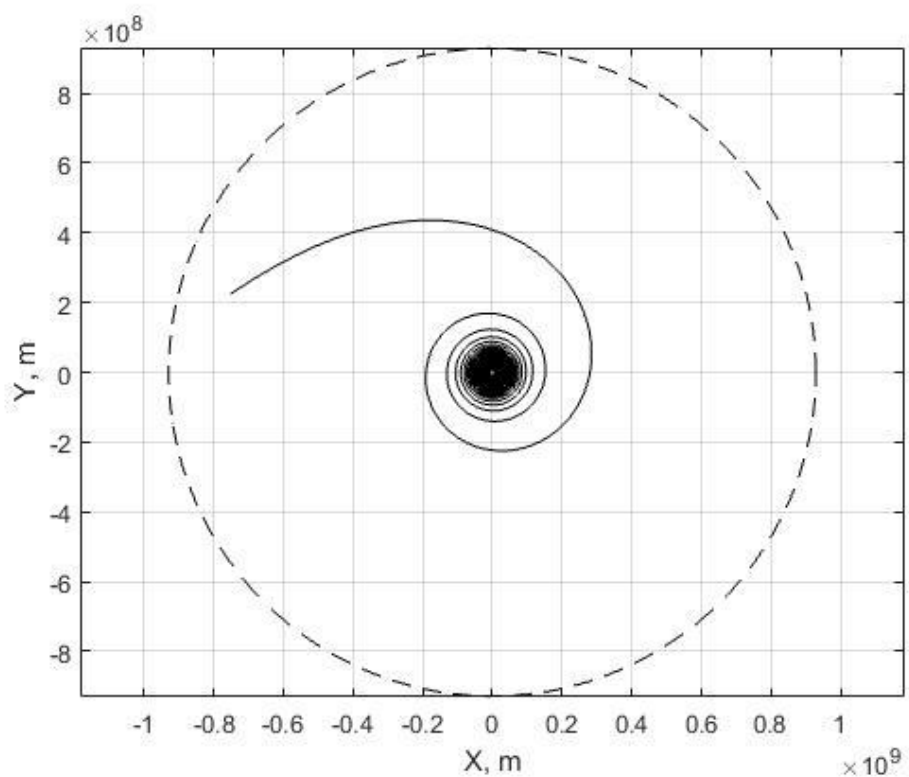
Таким образом, рассматривать значения ускорения меньшие  $0,0004 \text{ м/с}^2$  в рамках поставленной задачи не имеет смысла, иначе мы придем к неверным или неточным результатам.

**Таблица 4** Расстояние от притягивающего центра в конечной точке траектории в зависимости от ускорения

Ускорение, $\text{м/с}^2$	Расстояние от притягивающего центра, м
0,0001	$17,54 \cdot 10^8$
0,0003	$10,12 \cdot 10^8$
0,00032	$9,81 \cdot 10^8$
0,00036	$9,24 \cdot 10^8$
0,0004	$8,77 \cdot 10^8$
0,0005	$7,84 \cdot 10^8$



*Рис.12а Траектория движения КА при  $a = 0,0003 \text{ м/с}^2$  Разгон выходит за пределы сферы действия Земли*



*Рис.12б Траектория движения КА при  $a = 0,0005 \text{ м/с}^2$  . Разгон целиком происходит внутри сферы действия Земли*

На Рис.12а, 12б показаны траектории для близких по величине малых ускорений ( $a = 0,0003 \text{ м/с}^2$  и  $a = 0,0005 \text{ м/с}^2$  соответственно). На первой картинке можно увидеть выход траектории за границу сферы действия Земли. В этом случае уже нужно учитывать влияние Солнца и некоторые другие факторы.

### 3.4 Промежуточный итог

Итак, мы полностью исследовали вопросы, поставленные в задаче. Дальнейшее рассмотрение будем проводить, варьируя ускорения на промежутке  $[0,001; 0,4] \text{ м/с}^2$ . Ускорения большие, чем  $0,4 \text{ м/с}^2$ , рассматривать также не имеет особого смысла, так как двигатели малой тяги не работают со столь большими значениями ускорений. Радиус начальной круговой орбиты также можем брать различным из промежутка  $[6,5 \cdot 10^6; 7,5 \cdot 10^6] \text{ м}$ .

В следующих разделах обсуждаются метод численного решения поставленной задачи, описанный в [2], и приближенные оценки, предложенные в [1]. Проводится сопоставление результатов и определяется область параметров задачи, где приближенные оценки обеспечивают заданную точность.

## 4. Численный метод Охоцимского

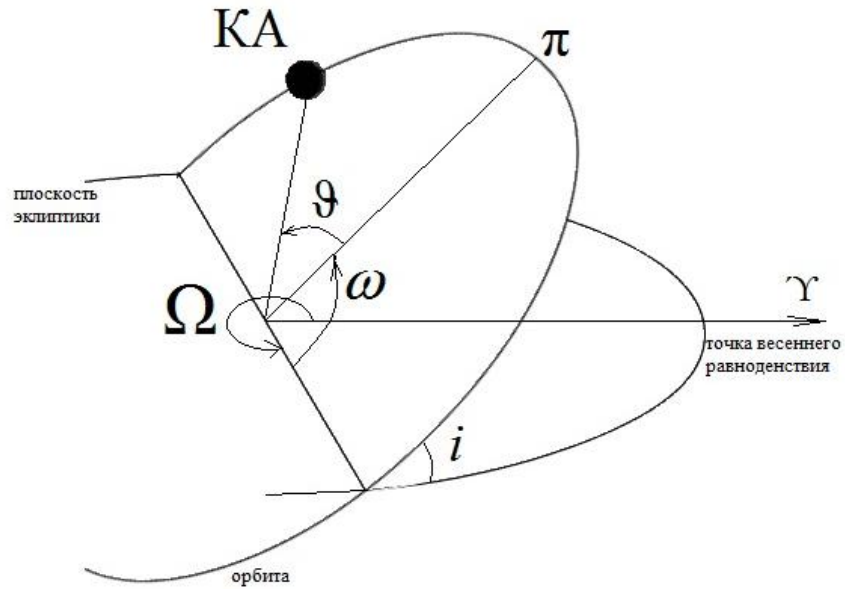
### 4.1 Описание метода

Рассмотрим еще один подход к решению поставленной задачи. Для этого воспользуемся результатами исследований Д.Е.Охоцимского и Ю.Г.Сихарулидзе [2]. Данный подход основан на уравнениях движения в оскулирующих элементах:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= 2a_n r \sqrt{\frac{p}{\mu}} \\
 \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ a_r \sin \mathcal{G} + a_n \left[ \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \mathcal{G} + e \frac{r}{p} \right] \right\} \\
 \frac{di}{dt} &= a_\omega \frac{r}{\sqrt{p\mu}} \cos u \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= a_\omega \frac{r}{\sqrt{p\mu}} \frac{\sin u}{\sin i} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -a_r \frac{\cos \mathcal{G}}{e} + a_n \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin \mathcal{G}}{e} - a_\omega \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right] \\
 \frac{d\tau_\pi}{dt} &= \frac{r^2}{e\mu} \left[ (N \sin \mathcal{G} - \cos \mathcal{G}) a_r + N \frac{p}{r} a_n \right]
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\text{где } N = \frac{1}{1-e^2} \left[ \left(1 + \frac{p}{r}\right) \sin \mathcal{G} - 3e(t - \tau_\pi) \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \right].$$

Элементы орбиты:  $p$  – фокальный параметр,  $e$  – эксцентриситет,  $i$  – наклонение,  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $\omega$  – аргумент перицентра,  $\tau_\pi$  – время прохождения через перицентр (Рис.13); также в уравнениях обозначено:  $a_r, a_n, a_\omega$  – проекции ускорения соответственно на направления радиус-вектора КА, поперечной составляющей скорости и на направление, дополняющее первые два до правой тройки,  $\mathcal{G}$  – угол истинной аномалии,  $\mu$  – гравитационный параметр Земли. Подробный вывод этих уравнений приведен в [3].

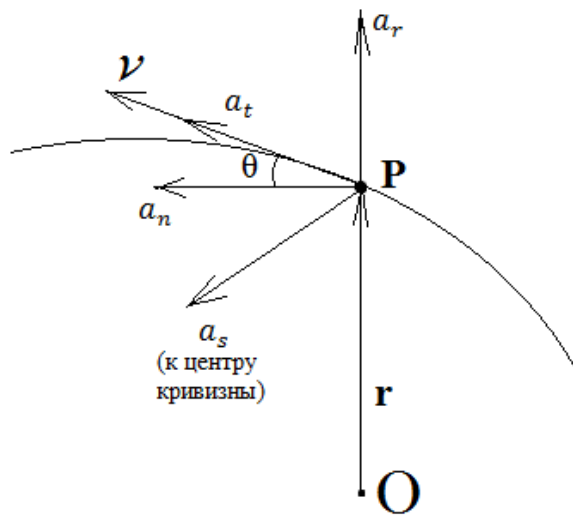


*Рис.13 Элементы орбиты*

Если разложить радиальную и трансверсальную компоненты возмущающего ускорения через компоненты на направления касательной к траектории и нормали к ней (Рис.14):

$$a_r = a_t \sin \theta - a_s \cos \theta,$$

$$a_n = a_t \cos \theta + a_s \sin \theta,$$



*Рис.14 Разложение ускорения на нормальную и тангенциальную составляющие*

и учесть следующие соотношения

$$\sin \theta = \frac{v_r}{v} = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta$$

$$\cos \theta = \frac{v_n}{v} = \frac{1}{v} \frac{\sqrt{\mu p}}{r}$$

то можно преобразовать систему (14) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= 2 \frac{p}{V} a_t \\ \frac{de}{dt} &= 2 \frac{e + \cos \vartheta}{V} a_t \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \frac{2 \sin \vartheta}{eV} a_t\end{aligned}\quad (15)$$

где  $r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$ ,  $V = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1 + e^2 + 2e \cos \vartheta)}$  – определяются формулами невозмущенного движения.

Получили систему из трех уравнений (15), правые части которой не зависят явно от времени  $t$ , поэтому можно его исключить. А так как параметр  $p$  меняется монотонно в процессе разгона, то можно принять его в качестве нового независимого переменного и привести (15) к виду:

$$\begin{aligned}\frac{de}{dp} &= \frac{e + \cos \vartheta}{p} \\ \frac{d\vartheta}{dp} &= \frac{V \sqrt{\mu p}}{2 p r a_t} = \frac{\sin \vartheta}{e p}\end{aligned}\quad (16)$$

Чтобы уменьшить число параметров, можно перейти к безразмерным переменным:

$$p = Lz, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \nu,$$

причем, если выбрать  $L$  так, чтобы  $\frac{\mu}{2L^2 a_t} = 1$ , то в итоге система (16)

преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{de}{dz} = \frac{e + \cos \vartheta}{z} \\ \frac{d \cos \vartheta}{dz} = \frac{1 - \cos^2 \vartheta}{ez} - \frac{\nu(1 + e \cos \vartheta)^2 \sin \vartheta}{z^3} \end{cases}\quad (17)$$

где  $\nu = \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \vartheta}$ ,  $\sin \vartheta = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}$ .

Рассмотрим метод решения системы (17). Предлагается искать решение численно, задав начальные условия с помощью разложения  $e$  и  $\cos \vartheta$  в ряды

по степеням  $z$ . Сделать это не представляет труда с помощью использования рекуррентных соотношений для точного установления необходимого числа коэффициентов соответствующих рядов.

Разложение для эксцентриситета:  $e = z^2 U(z)$ , где  $U(z)$  – функция, равная единице при  $z=0$ , и для косинуса:  $\cos \mathcal{G} = z \frac{de}{dz} - e$ .

Преобразуем последнее:

$$\begin{aligned} \cos \mathcal{G} &= z \frac{de}{dz} - e = z(2zU(z) + z^2 U'(z)) - z^2 U(z) = z^2(2U(z) + zU'(z) - U(z)) = \\ &= z^2(U(z) + zU'(z)) = z^2 W(z) \end{aligned}$$

$U$  и  $W$  предлагается искать в виде рядов по степеням  $z$ :

$$U(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots$$

$$W(z) = 1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots$$

Причем, исходя из обозначения  $U(z) + zU'(z) = W(z)$ , можно установить связь между коэффициентами:  $\beta_j = (1 + j)\alpha_j$ .

Чтобы более подробно понять структуру рассматриваемых рядов, можно получить еще одну связь между рядами и, соответственно, их коэффициентами, подставив разложение  $\cos \mathcal{G}$  и  $e$  в виде рядов в (17):

$$U = \frac{(1 - z^4 W^2) - z^4 \left( 2W + z \frac{dW}{dz} \right) U}{\sqrt{1 - z^4 W^2} \nu (1 + 1 - z^4 U W)^2}, \quad (18)$$

где  $\nu = \sqrt{1 + z^4 U(U + 2W)}$ .

Можно заметить, что разложение правой части (18) в ряд по  $z$  начинается с члена  $z^4$ , следующий ненулевой член разложения -  $z^8$ , и т.д. То есть можно искать  $U$  и  $W$  сразу по степеням  $z^4$ :

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{k=1} u_k z^{4k} \\ W(z) &= \sum_{k=1} w_k z^{4k} \end{aligned} \quad (19)$$

Связь между новыми коэффициентами:

$$u_k = (1 + 4k) w_k$$

Итак, чтобы определить значения  $\cos \vartheta$  и  $\epsilon$ , нужно найти  $U$  и  $W$ , то есть найти все коэффициенты  $u_k, w_k$  до определенного  $k$ , в зависимости от того, какую точность мы хотим получить. Опишем итерационный процесс для нахождения рассматриваемых коэффициентов:

- 1) Задаем произвольные ряды вида (19)
- 2) Подставляем полученные ряды в (18)
- 3) Находим  $u_0$ , а затем по формуле для связи коэффициентов и  $w_0$
- 4) Заменяем в рядах, которые задали произвольным путем, нулевые коэффициенты на верные
- 5) Подставив ряды уже с одним верным коэффициентом в (18), находим следующий

Повторив необходимое число раз, получим желаемое количество верных коэффициентов.

Удобно в п. 1) выбрать все коэффициенты нулевыми. Тогда мы получим ряды, в которых ненулевых слагаемых ровно столько, сколько нам нужно, а остальные будут равны нулю.

В Таблице 5 приведены значения коэффициентов разложений  $u$  центра по степеням  $z^4$ , которые были получены при помощи реализации приведенного метода в программе MATLAB при  $z = 0,1$ .

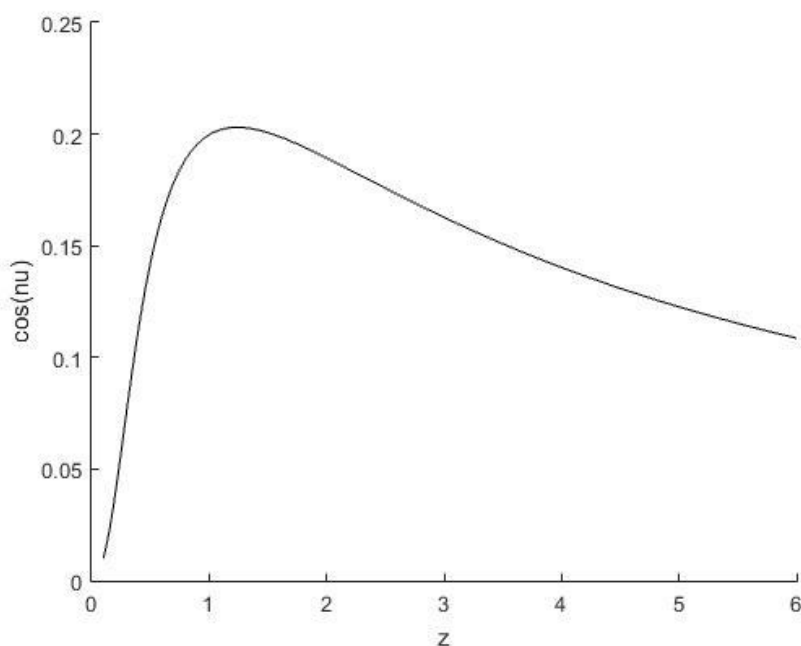
**Таблица 5 Коэффициенты для рядов  $U$  и  $W$**

k	0	1	2	3	4	5	6	7
U	1	-5,998	$3,36 \cdot 10^2$	$-4,42 \cdot 10^4$	$1,06 \cdot 10^7$	$-4,06 \cdot 10^9$	$2,22 \cdot 10^{12}$	$-1,68 \cdot 10^{15}$
W	1	-29,992	$3,02 \cdot 10^3$	$-5,75 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^8$	$-8,45 \cdot 10^{10}$	$5,55 \cdot 10^{13}$	$-4,86 \cdot 10^{16}$

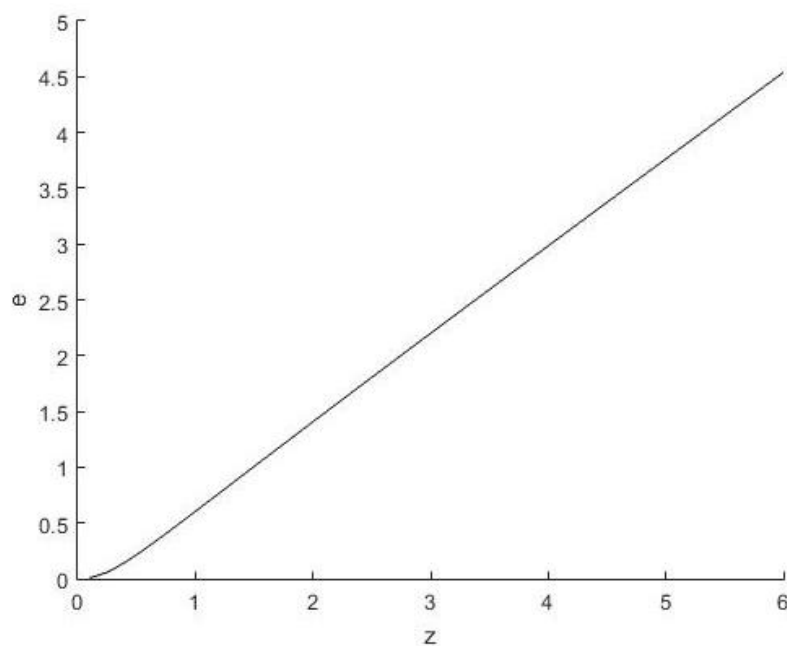
Итак, при фиксированном  $z$  можно определить  $\cos \vartheta$  и  $\epsilon$ . Взяв эти значения как начальные данные для численного интегрирования данной



системы, можем найти  $\cos \vartheta$  и  $e$  при любом значении  $z$ . Зависимости  $\cos \vartheta(z)$  и  $e(z)$  показаны на Рис.15а и Рис.15б соответственно.



*Рис.15а Зависимость косинуса истинной аномалии от параметра  $z$*



*Рис.15б Зависимость эксцентриситета от параметра  $z$*

## 4.2 Сравнение результатов

Чтобы понять, насколько метод, предложенный в Гл.1-3 хорошо моделирует поставленную задачу, сравним значения конечного радиус-вектора КА, полученные при расчете рассматриваемым численным методом и методом, описанным в [2].

Ниже приведены формулы, по которым могут быть вычислены безразмерные значения расстояния и скорости:

$$\rho = \frac{z}{1 + e \cos \vartheta}$$

$$\frac{v}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \vartheta}}{\sqrt{z}}$$

Для того, чтобы получить размерные расстояния и скорости через полученные безразмерные, сделаем следующее. Воспользуемся известными формулами размерных расстояний и скоростей и введенными ранее обозначениями:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \vartheta}$$

$$p = Lz, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} v, \quad \frac{\mu}{2L^2 a_t} = 1$$

Отсюда можно сделать вывод:

$$r = \rho L,$$

$$V = \frac{v}{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{\mu}{L}}, \quad (20)$$

$$L = \sqrt{\frac{\mu}{2a_t}}.$$

Осталось решить вопрос: до какого  $z$  интегрировать систему (17). Нужно найти то значение параметра  $z$ , при котором КА достигает параболическую скорость, и, уже зная его, находить расстояние от притягивающего центра до КА в нужный момент по указанным выше формулам (20).

Поступим следующим образом. Во-первых, мы знаем, что у параболических орбит эксцентриситет  $e=1$ , то есть можно поставить ограничение на достижение этого значения, а после – прекратить численное интегрирование. Во-вторых, также известно, что полная энергия КА на параболической орбите равна 0. В тот момент, когда полная энергия обратится в 0, или, что то же самое, эксцентриситет станет равным единице, получим значение  $z$ , при котором достигается местная параболическая скорость при заданном ускорении.

При реализации этого метода в программе MATLAB были рассмотрены оба варианта. В конечном итоге выбран был первый вариант: достижение  $e=1$ .

В Таблице 6 представлены результаты полученные тремя способами:

1 – результаты, приведенные в [2],

2 – результаты, полученные методом, описанным в [2], реализованным в программе MATLAB

3 – результаты численного интегрирования системы (13)

**Таблица 6** Результаты расчетов, полученные разными методами

Ускорение, м/с <sup>2</sup>	Расстояние от притягивающего центра до КА в момент достижения параболической скорости, м		
	1	2	3
0,0003	$10,128 \cdot 10^8$	$10,123 \cdot 10^8$	$10,127 \cdot 10^8$
0,001	$5,547 \cdot 10^8$	$5,549 \cdot 10^8$	$5,547 \cdot 10^8$
0,003	$3,203 \cdot 10^8$	$3,198 \cdot 10^8$	$3,203 \cdot 10^8$
0,01	$1,754 \cdot 10^8$	$1,751 \cdot 10^8$	$1,754 \cdot 10^8$
0,03	$1,013 \cdot 10^8$	$1,011 \cdot 10^8$	$1,014 \cdot 10^8$
0,1	$0,5547 \cdot 10^8$	$0,5539 \cdot 10^8$	$0,5538 \cdot 10^8$
0,3	$0,3203 \cdot 10^8$	$0,3198 \cdot 10^8$	$0,3137 \cdot 10^8$
1	$0,1754 \cdot 10^8$	$0,1752 \cdot 10^8$	$0,1561 \cdot 10^8$

Видим, что результаты исследуемого нами численного метода хорошо совпадают с результатами, приведенными в [2]. Решение, получаемое с помощью предложенного численного метода, дает хорошее описание поставленной задачи и имеет высокую точность для ускорений из интервала  $[0,001; 0,4]$  м/с<sup>2</sup>, то есть из того промежутка, который мы исследуем.. Воспользуемся теперь полученными в Гл.3 данными для анализа границ применимости приближенного метода, представленного в [1].

## 5. Приближенный метод Бэттина

### 5.1 Описание метода

Рассмотрим приближенный метод Ричарда Бэттина для решения данной задачи. Сделаем несколько упрощающих предположений для системы уравнений (13), полученной в Гл.2 п.2.3.

Если ускорение достаточно мало, так что  $\frac{d^2r}{ds^2}$  по существу равно 0, то уравнение (11) можно переписать в виде

$$v^2 - \frac{\mu}{r} = 0$$

Другими словами, считаем, что орбита КА всегда очень близка к круговой. Следовательно, подставив в уравнение (12) соотношение для  $v^2$  и затем выразив из него  $r$ , получим:

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{2sa}{v_0^2}} \quad (21)$$

В определенный момент, КА достигает местную параболическую скорость, квадрат которой равен  $v^2 = \frac{2\mu}{r}$ . С помощью этого выражения можно переписать уравнение (11) в следующем виде:

$$2r \frac{d^2r}{ds^2} = 1 - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2$$

Подставим сюда выражение для радиус-вектора и преобразуем полученное соотношение:

$$2 \left( \frac{r_0}{1 - \frac{2sa}{v_0^2}} \right) \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{r_0}{1 - \frac{2sa}{v_0^2}} \right) = 1 - \left( \frac{d}{ds} \left( \frac{r_0}{1 - \frac{2sa}{v_0^2}} \right) \right)^2$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{r_0}{1 - \frac{2sa}{v_0^2}} \right) = \frac{r_0 \frac{2a}{v_0^2}}{\left(1 - \frac{2sa}{v_0^2}\right)^2} = \frac{2ar_0}{v_0^2 \left(1 - \frac{2sa}{v_0^2}\right)^2},$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{r_0}{1 - \frac{2sa}{v_0^2}} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{2ar_0}{v_0^2 \left(1 - \frac{2sa}{v_0^2}\right)^2} \right) = \frac{2r_0 \left(1 - \frac{2sa}{v_0^2}\right) \left(\frac{2a}{v_0^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{2sa}{v_0^2}\right)^4} = \frac{2r_0 \left(\frac{2a}{v_0^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{2sa}{v_0^2}\right)^3} =$$

$$= \frac{8r_0 a^2}{v_0^2 \left(1 - \frac{2sa}{v_0^2}\right)^3}.$$

Подставляем:

$$2 \left( \frac{r_0}{1 - \frac{2sa}{v_0^2}} \right) \frac{8r_0 a^2}{v_0^2 \left(1 - \frac{2sa}{v_0^2}\right)^3} = 1 - \left( \frac{2ar_0}{v_0^2 \left(1 - \frac{2sa}{v_0^2}\right)^2} \right)^2$$

$$2r_0 \frac{8r_0 a^2}{v_0^2} = \left(1 - \frac{2sa}{v_0^2}\right)^4 - \left(\frac{2ar_0}{v_0^2}\right)^2$$

$$\frac{20r_0^2 a^2}{v_0^2} = \left(1 - \frac{2sa}{v_0^2}\right)^4$$

Выразим s из получившегося уравнения:

$$s_{\text{esc}} = \frac{v_0^2}{2a} \left[ 1 - \frac{1}{v_0} \left(20a^2 r_0^2\right)^{\frac{1}{4}} \right]$$

$s_{\text{esc}}$  – обозначает пройденный космическим аппаратом путь до достижения местной параболической скорости.

Перепишем выражение для радиус-вектора, подставив в него выражение для  $s = s_{\text{esc}}$ :

$$r_{\text{esc}} = \frac{r_0 v_0}{(20a^2 r_0^2)^{\frac{1}{4}}}$$

Далее, так как  $v = \frac{ds}{dt}$ , то из уравнений (11) и (21)  $v^2 = v_0^2 - 2as$ . Можем вычислить конечное время  $t_{\text{esc}}$  (время, через которое КА достигнет параболическую скорость):

$$t_{\text{esc}} - t_0 = \frac{1}{v} (s_{\text{esc}} - s_0) = \frac{v_0}{a} \left[ 1 - \left( \frac{20a^2 r_0^2}{v_0^4} \right)^{\frac{1}{8}} \right]$$

Также интерес представляет формула приближенного вычисления числа витков, которое совершит КА до достижения параболической орбиты. Получим эту формулу:

$$N_{\text{esc}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_{\text{esc}}} \frac{ds}{r} = \frac{v_0^2}{8\pi a r_0} \left( 1 - \frac{\sqrt{20} a r_0}{v_0^2} \right)$$

Итак, получено четыре формулы приближенного вычисления необходимых параметров полета КА в условиях данной задачи. А именно – расстояние  $r_{\text{esc}}$  от притягивающего центра до КА в момент достижения параболической скорости, пройденный аппаратом путь  $s_{\text{esc}}$  до этого момента и количество витков  $N_{\text{esc}}$ , совершенных КА до этого момента, а также само время  $t_{\text{esc}}$ , которое КА затратил на разгон:

$$r_{\text{esc}} = \frac{r_0 v_0}{(20a^2 r_0^2)^{\frac{1}{4}}} \quad (22)$$

$$s_{\text{esc}} = \frac{v_0^2}{2a} \left[ 1 - \frac{1}{v_0} (20a^2 r_0^2)^{\frac{1}{4}} \right] \quad (23)$$

$$N_{\text{esc}} = \frac{v_0^2}{8\pi a r_0} \left( 1 - \frac{\sqrt{20} a r_0}{v_0^2} \right) \quad (24)$$

$$t_{\text{esc}} = t_0 + \frac{v_0}{a} \left[ 1 - \left( \frac{20a^2 r_0^2}{v_0^4} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \quad (25)$$

## 5.2 Сравнение оценок Бэттина с результатами численного моделирования при фиксированном радиусе начальной круговой орбиты

Сравним результаты, полученные при численном интегрировании и при помощи приближенных формул (22-25), зафиксировав радиус начальной круговой орбиты  $r_0 = 7 \cdot 10^6$  м и варьируя при этом ускорение на интервале  $a \in [0,001; 0,4]$  м/с<sup>2</sup>.

Рассмотрим для начала формулы для нахождения пройденного пути, использующиеся в численном и в приближенном методе соответственно. Удобнее начать рассмотрение именно с них, так как только для пройденного пути получено аналитическое выражение и в численном подходе, и в приближенной методике:

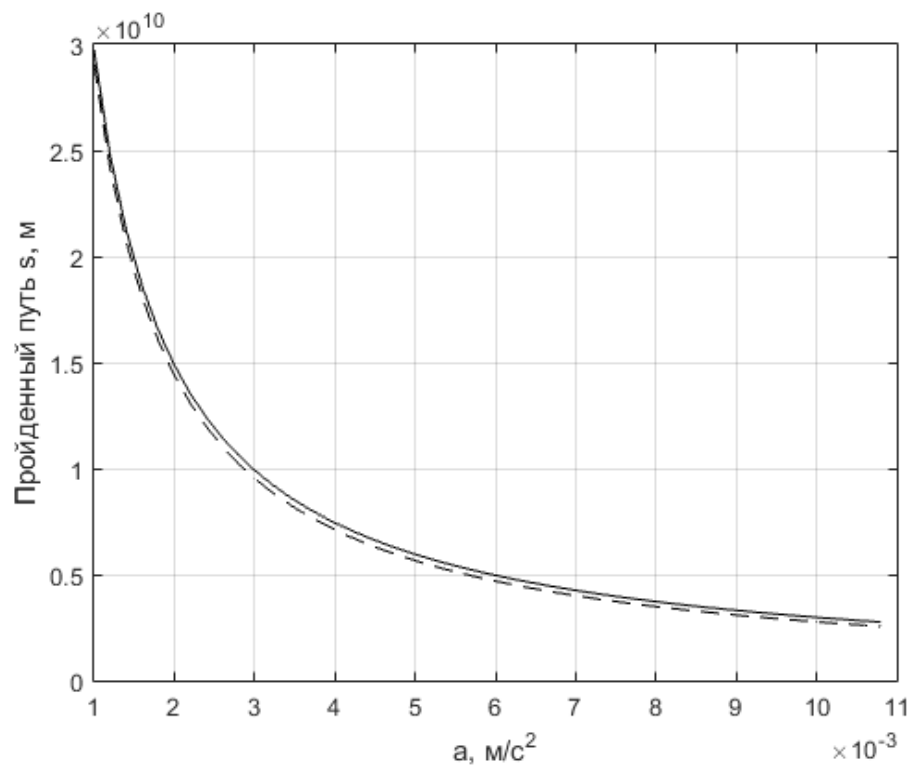
$$S_{\text{esc(числ)}} = \frac{\mu}{2ar_0} = \frac{v_0^2}{2a}$$

$$S_{\text{esc(прибл)}} = \frac{v_0^2}{2a} \left[ 1 - \frac{1}{v_0} (20a^2 r_0^2)^{1/4} \right]$$

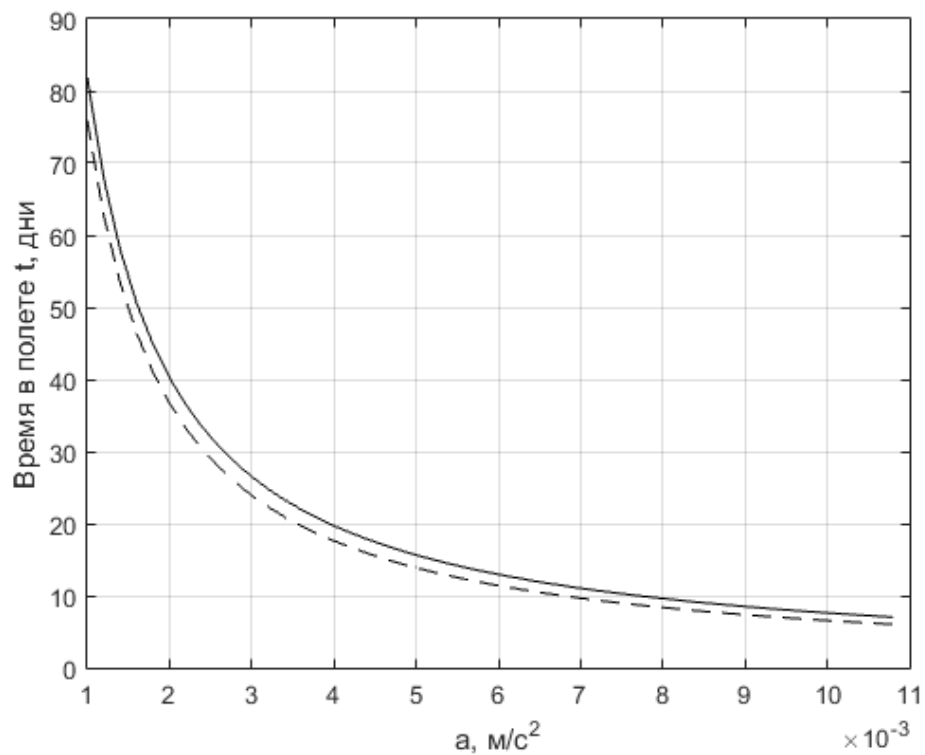
$$\frac{\Delta S}{S_{\text{esc(числ)}}} = \frac{S_{\text{esc(числ)}} - S_{\text{esc(прибл)}}}{S_{\text{esc(числ)}}} = \frac{a^{1/2}}{v_0} (20r_0^2)^{1/4}$$

Видно, что пройденный путь обратно пропорционален ускорению, относительная погрешность пройденного пути прямо пропорциональна корню из ускорения, то есть с увеличением ускорения ошибка приближенного метода увеличивается.

Построим теперь графики зависимостей для пройденного пути  $s_{\text{esc}}(a)$ , времени полета  $t_{\text{esc}}(a)$ , расстояния от притягивающего центра в конечной точке разгона (в момент достижения параболической скорости)  $r_{\text{esc}}(a)$ , количества сделанных витков  $N_{\text{esc}}(a)$  и запаса характеристической скорости  $\Delta v(a)$  для  $a \in [0,001; 0,01]$  м/с<sup>2</sup> (Рис.16а, Рис.16б, Рис.16в, Рис.16г, Рис.16д, соответственно). Сплошной линией показаны результаты, полученные при численном интегрировании, пунктирной линией изображена зависимость, полученная при использовании приближенных формул Бэттина.

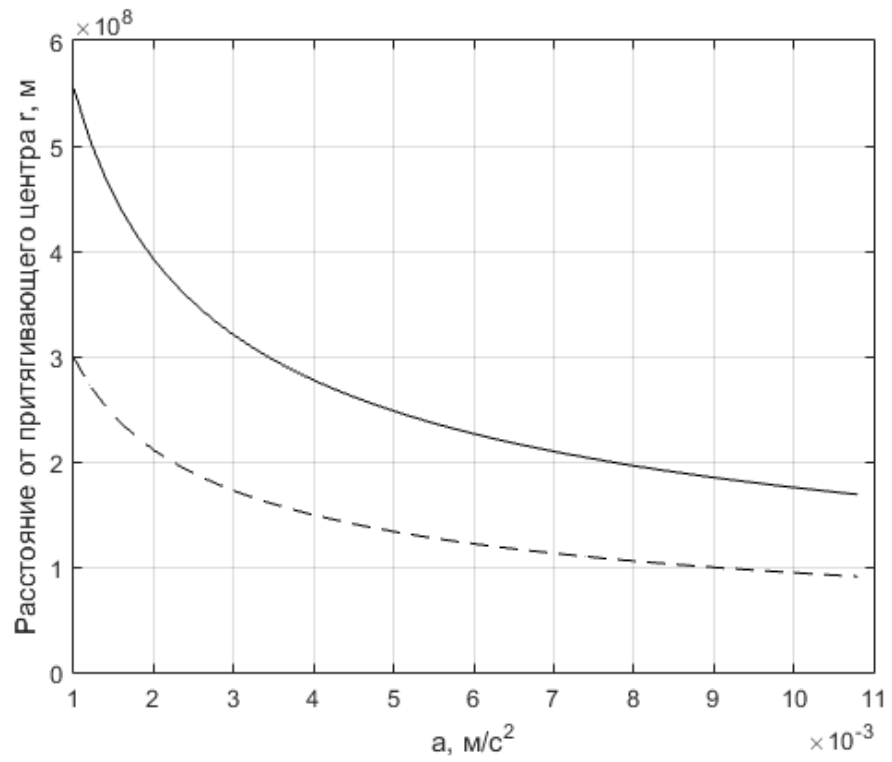


**Рис.16а** Зависимость пройденного пути в момент достижения параболической скорости от начального ускорения

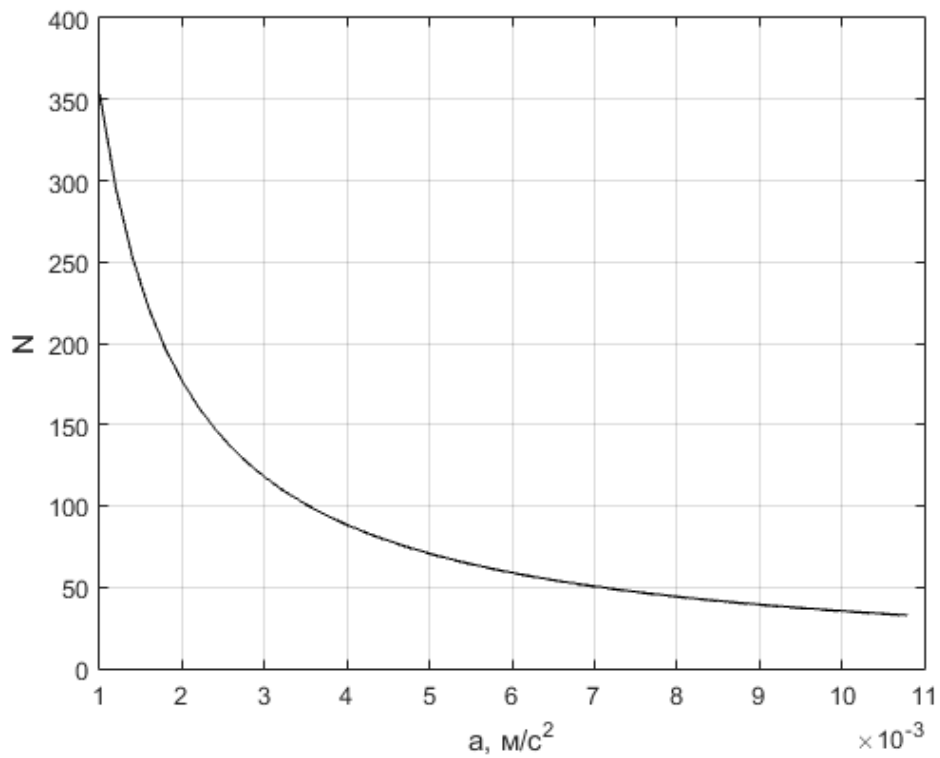


**Рис. 16б** Зависимость времени в пути в момент достижения параболической скорости от начального ускорения

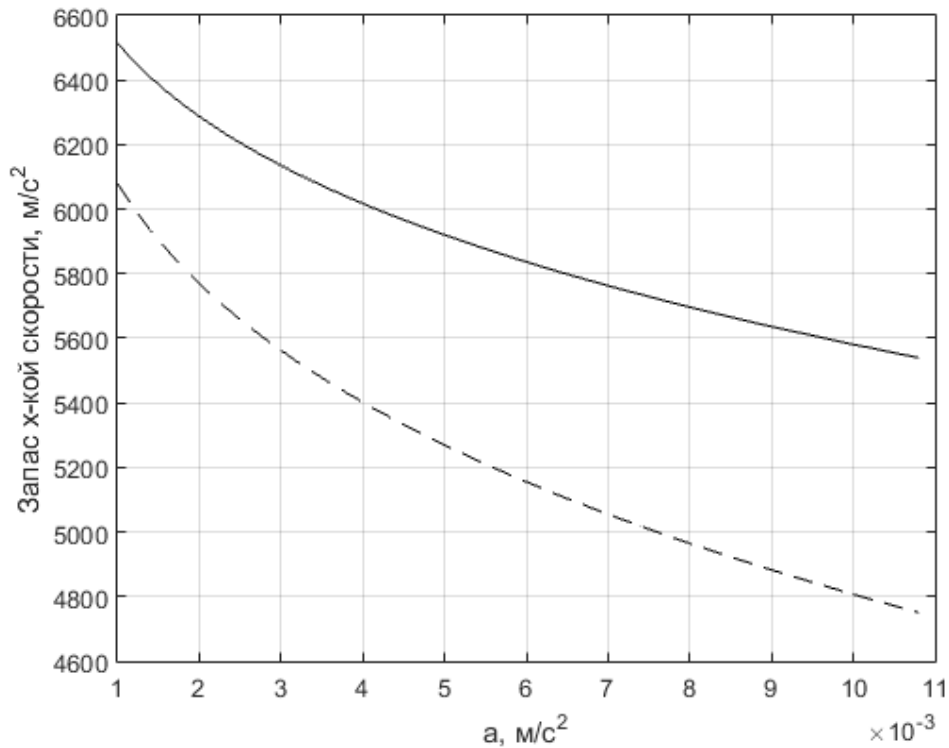




*Рис. 16а* Зависимость расстояния от притягивающего центра в момент достижения параболической скорости от начального ускорения



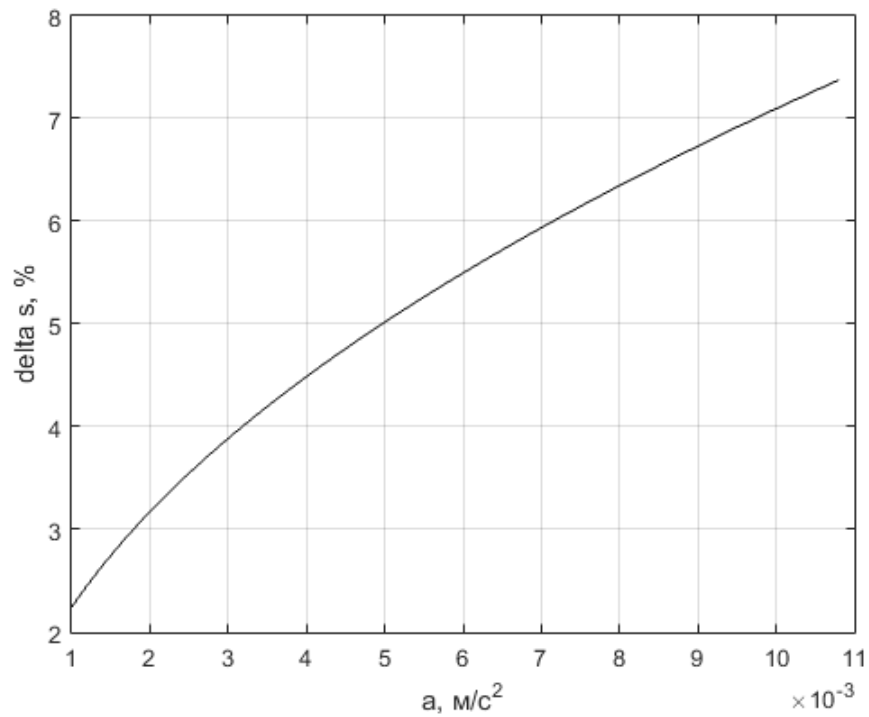
*Рис. 16б* Зависимость времени в пути в момент достижения параболической скорости от начального ускорения



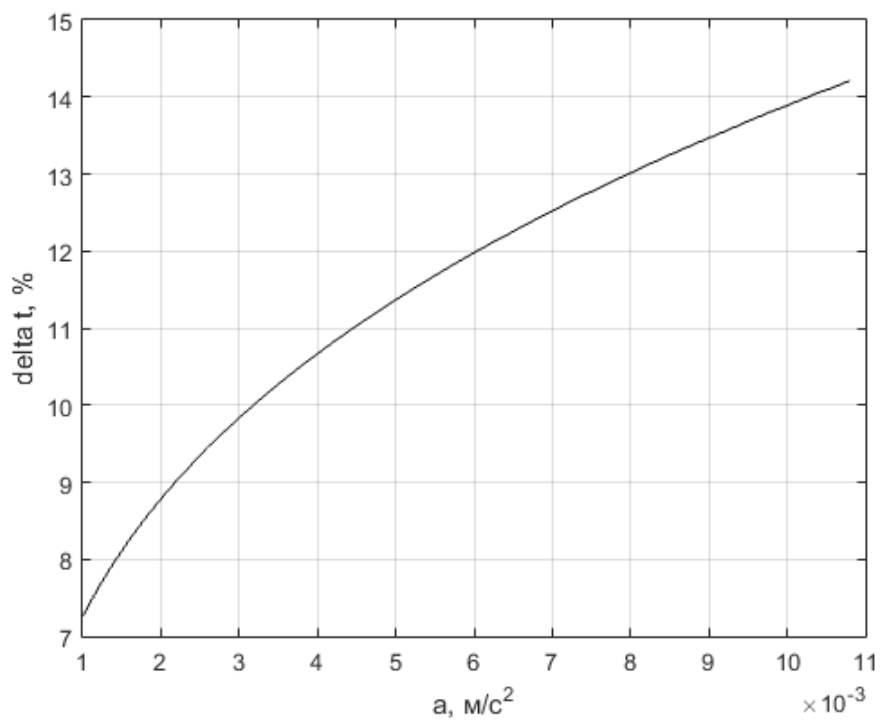
**Рис. 16д** Зависимость запаса характеристической скорости в момент достижения параболической скорости от начального ускорения

По построенным графикам уже можно сделать некоторый вывод о границах применимости приближенного метода и об интервале ускорений, на котором его можно применять с хорошей точностью – зависимости для пройденного пути и времени в полете для численного и приближенного методов совпадают с хорошей точностью на всем исследуемом интервале ускорений. Для расстояния от притягивающего центра до КА зависимости намного хуже соотносятся – отличаются почти в два раза. Для графика зависимости числа витков различить две линии невозможно в рассматриваемом масштабе, что позволяет судить об очень высокой точности.

Но для того, чтобы более строго обосновать приведенные доводы о соответствии приближенных формул численным значениям и выявить интервал ускорений для каждой рассматриваемой величины, найдем относительную погрешность и построим соответствующие графики. На (Рис.17а, Рис.17б, Рис.17в, Рис.17г) изображены зависимости относительных погрешностей от ускорения для  $\delta s_{\text{esc}}(a)$ ,  $\delta t_{\text{esc}}(a)$ ,  $\delta N_{\text{esc}}(a)$ ,  $\delta \Delta v(a)$  соответственно. Результат для  $\delta r_{\text{esc}}(a)$  проанализируем отдельно, ввиду слишком больших отклонений результатов приближенного метода от численного.

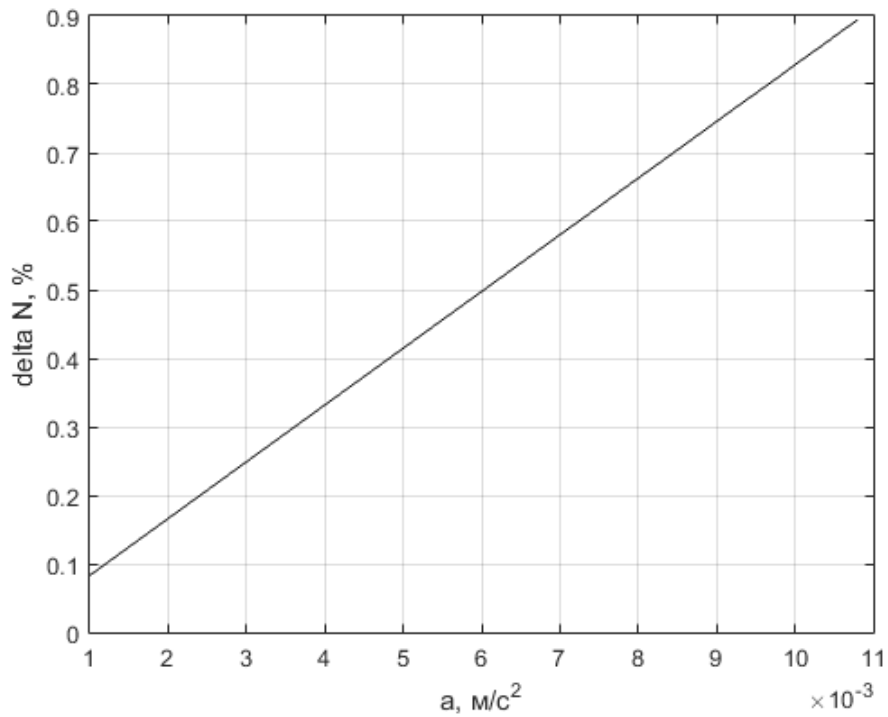


**Рис.17а** Относительная погрешность длины пройденного пути

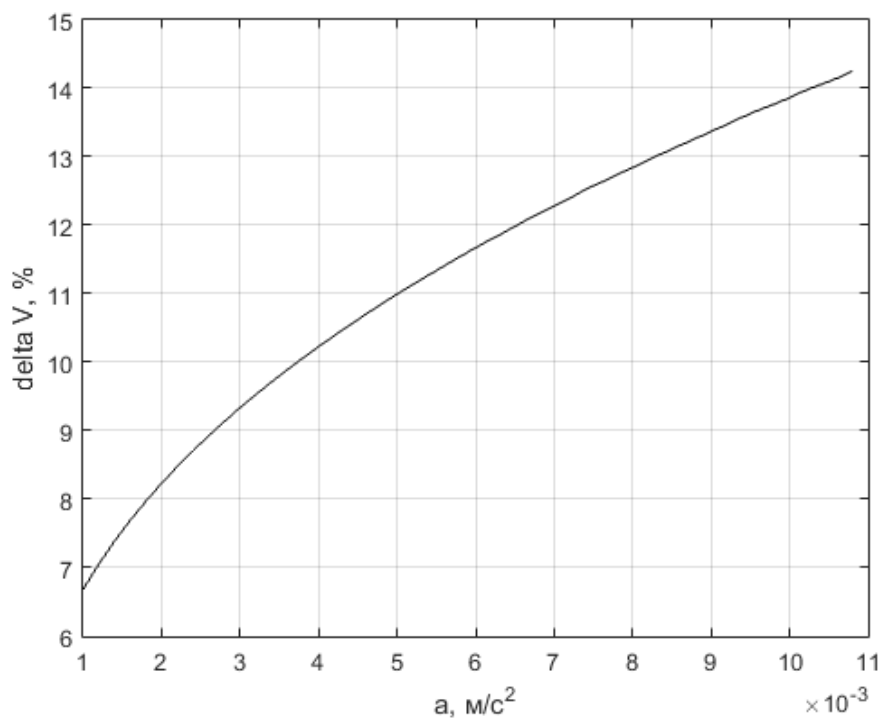


**Рис. 17б** Относительная погрешность времени полета

Как и было сказано ранее, пройденный путь и время в полете с хорошей точностью, а именно до 10-15%, совпадают на всем интервале рассматриваемых малых ускорений (Рис.17а, Рис.17б). Причем чем меньше ускорение, тем точнее приближенные формулы для  $s_{esc}$  и  $t_{esc}$ .



*Рис. 17в Относительная погрешность числа витков*



*Рис. 17г Относительная погрешность запаса характеристической скорости*

Из Рис.17в видно, что с помощью приближенных формул Бэттина можно определить число витков с погрешностью меньше одного процента для любых ускорений из данного интервала. Причем, если увеличить ускорение в несколько раз, то погрешность останется все еще малой – до 5%, что тоже обеспечит хорошую точность результатов.

Что касается расстояния от притягивающего центра до КА – погрешность его определения с помощью приближенной формулы постоянная, но очень большая, примерно 46%, на всем интервале рассматриваемых ускорений, даже очень малых:

$$\delta r_{\text{esc}}(a) = \frac{\Delta r}{r_{\text{esc}}(\text{числ})} = \frac{r_{\text{esc}}(\text{числ}) - r_{\text{esc}}(\text{прибл})}{r_{\text{esc}}(\text{числ})} \approx 0,46$$

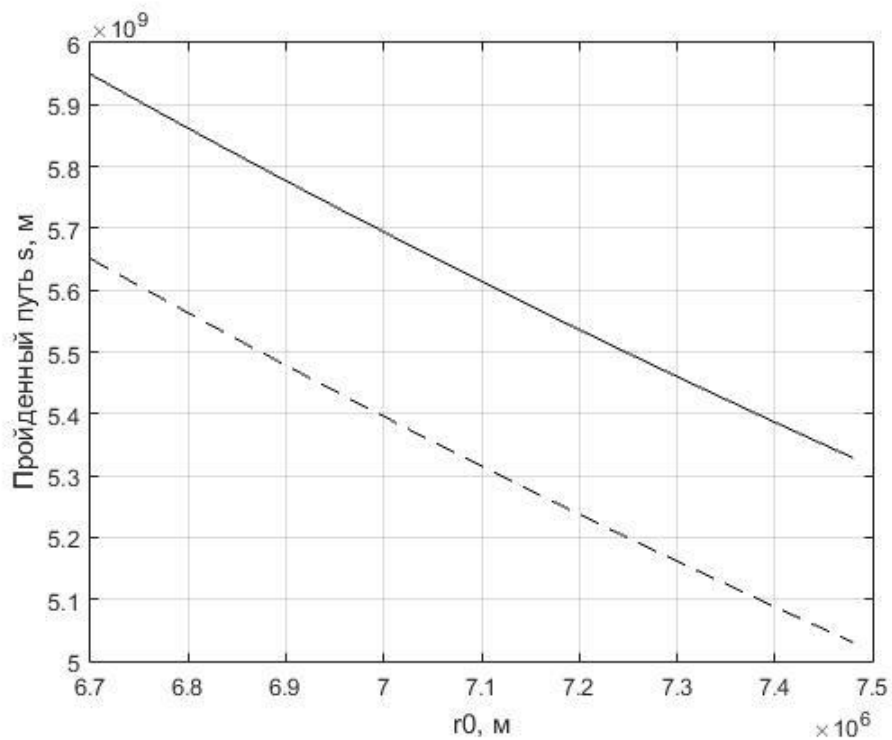
Такая погрешность возникает из-за очень грубых предположений о том, что орбита всегда близка к круговой вплоть до достижения параболической скорости, и только потом считается, что орбита стала параболической.

Итак, при малых ускорениях (до  $0,01 \text{ м/с}^2$ ) все полученные формулы, кроме формулы (22) для  $r_{\text{esc}}$  дают хорошее соответствие с численным методом. Однако, результат напрямую зависит от того, с какой точностью мы хотим определить ту или иную величину, так как при одной и той же заданной точности интервал ускорений для разных искомых величин разный.

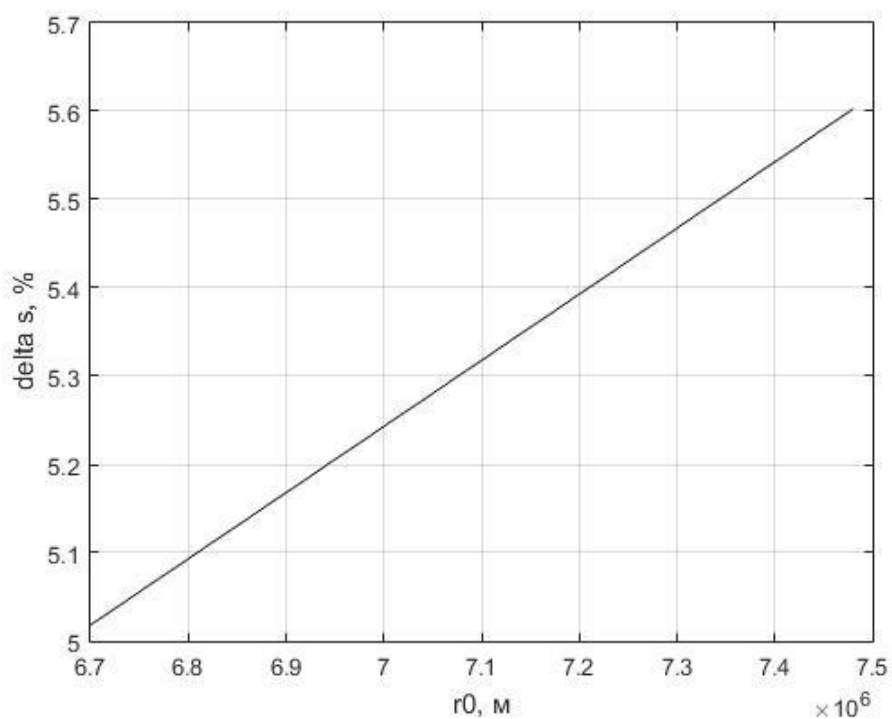
### 5.3 Сравнение оценок Бэттина с результатами численного моделирования при фиксированном ускорении

Проведем аналогичное исследование, зафиксировав начальное ускорение  $a = 0,005 \text{ м/с}^2$  и варьируя при этом теперь уже радиус начальной круговой орбиты на интервале  $r_0 \in [6,7 \cdot 10^6; 7,5 \cdot 10^6] \text{ м}$ .

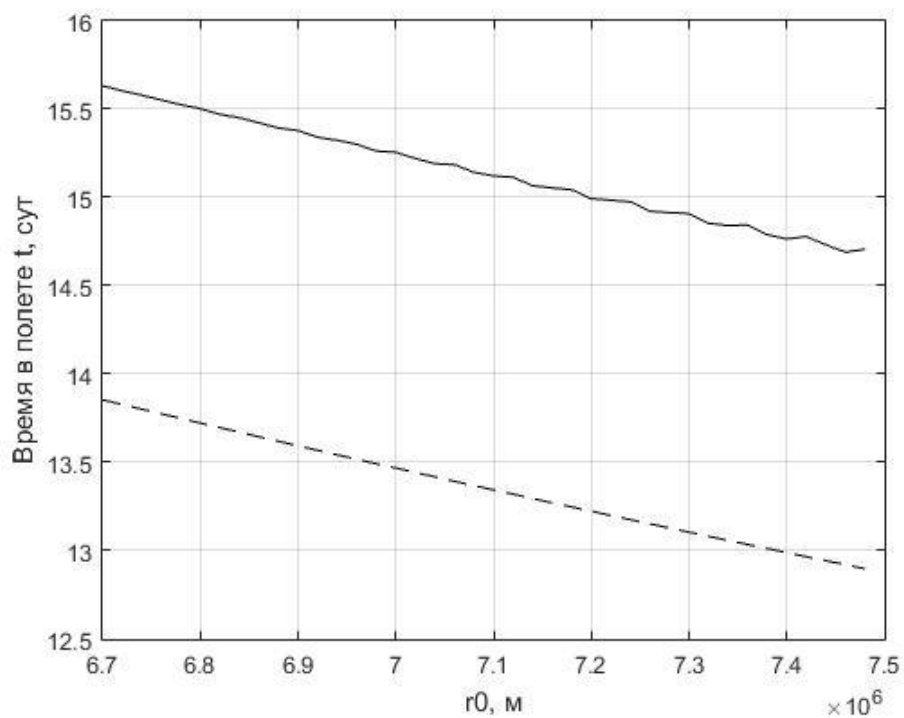
Сравним результаты, полученные при численном интегрировании и при помощи приближенных формул, построив графики зависимостей  $s_{\text{esc}}(r_0)$ ,  $t_{\text{esc}}(r_0)$ ,  $N_{\text{esc}}(r_0)$ ,  $\Delta v_{\text{esc}}(r_0)$ ,  $r_{\text{esc}}(r_0)$  (Рис.18а, Рис.19а, Рис.20а, Рис.21а, Рис.22а), а также графики для относительных погрешностей  $\delta s_{\text{esc}}(r_0)$ ,  $\delta t_{\text{esc}}(r_0)$ ,  $\delta N_{\text{esc}}(r_0)$ ,  $\delta \Delta v(r_0)$  (Рис.18б, Рис.19б, Рис.20б, Рис.21б). Сплошной линией изображены результаты, полученные численным методом, а пунктирной – по приближенным формулам.



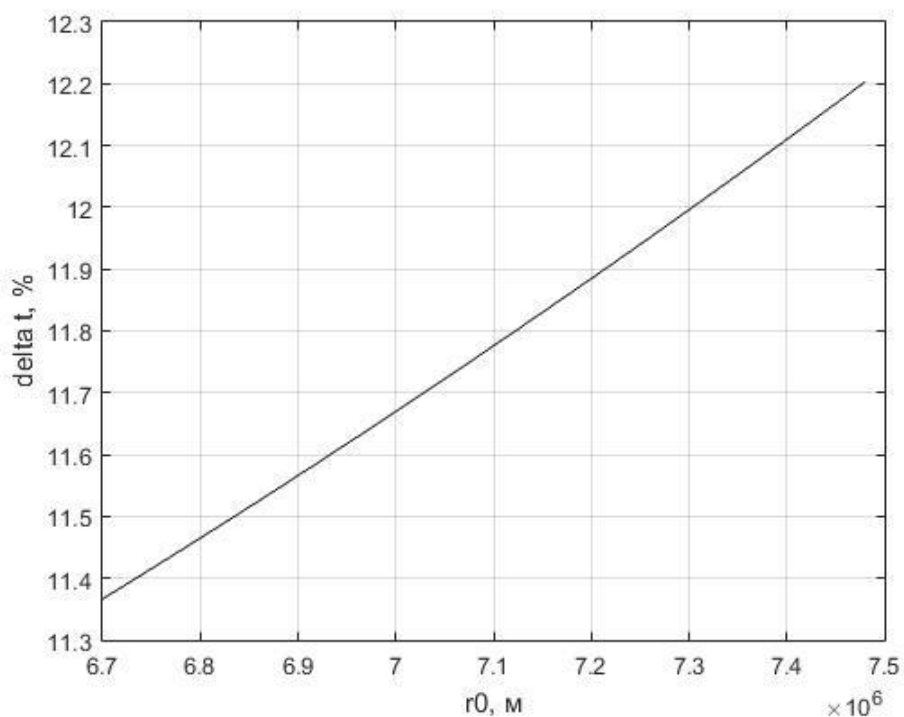
**Рис. 18а** Зависимость пройденного пути в момент достижения параболической скорости от величины радиуса начальной круговой орбиты



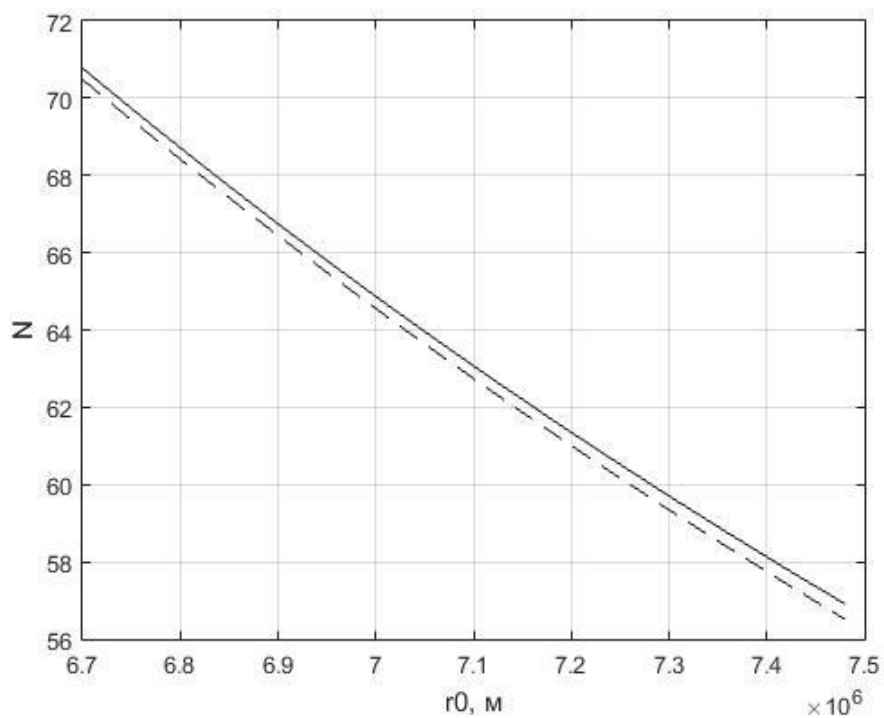
**Рис. 18б** Относительная погрешность пройденного пути



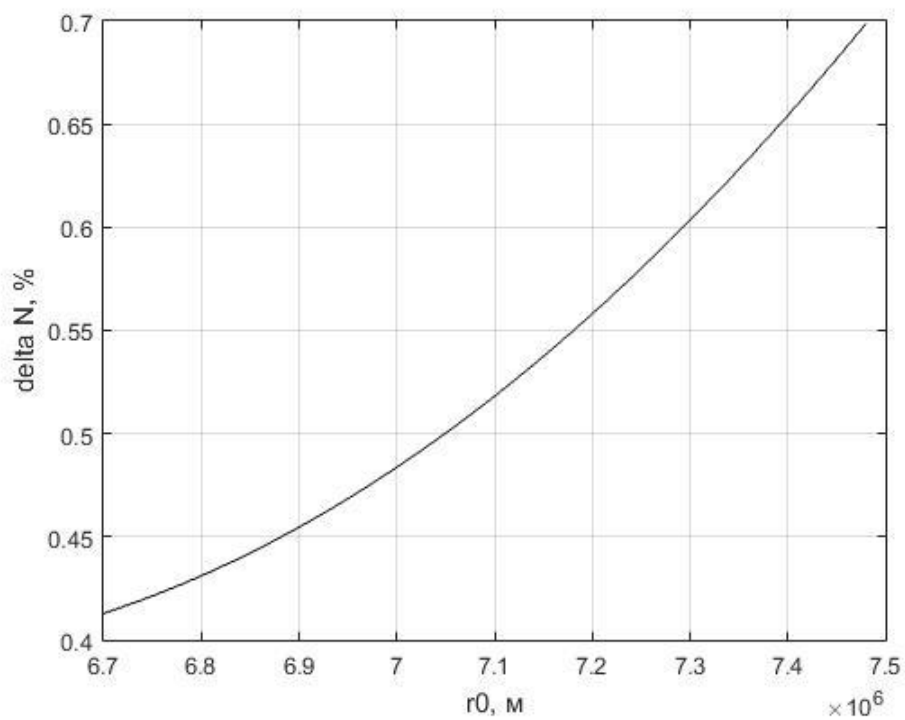
**Рис. 19а** Зависимость времени в полете в момент достижения параболической скорости от величины радиуса начальной круговой орбиты



**Рис. 19б** Относительная погрешность времени полета

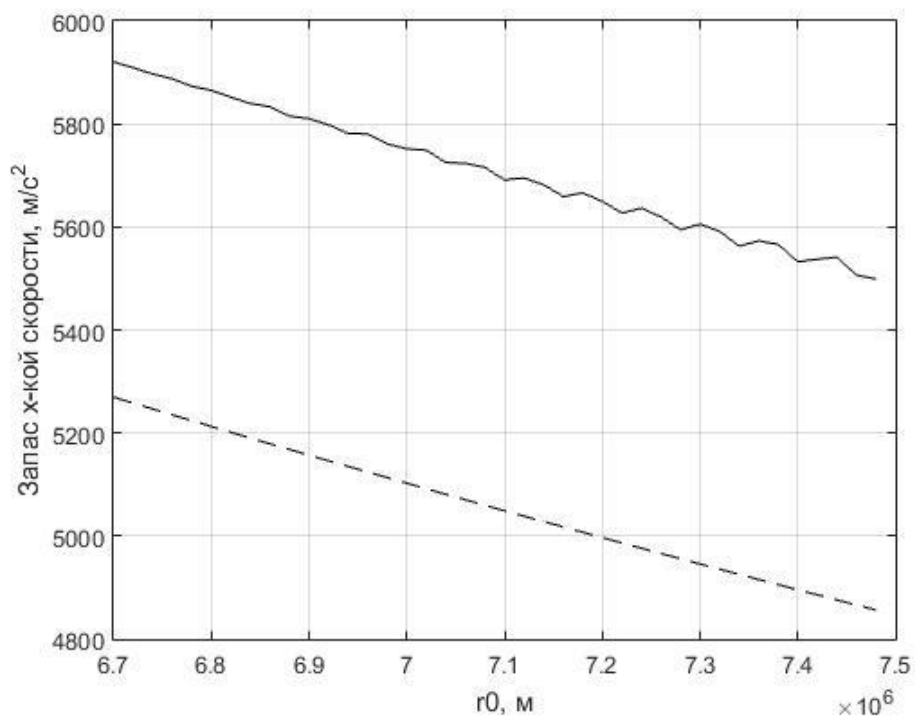


**Рис. 20а** Зависимость числа витков в момент достижения параболической скорости от величины радиуса начальной круговой орбиты

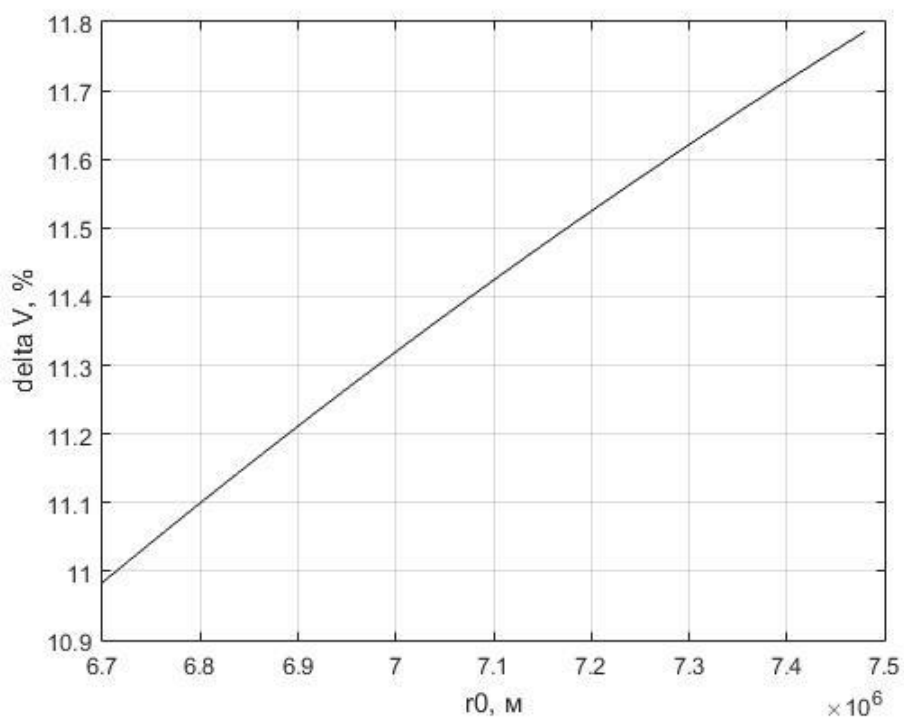


**Рис. 20б** Относительная погрешность числа витков

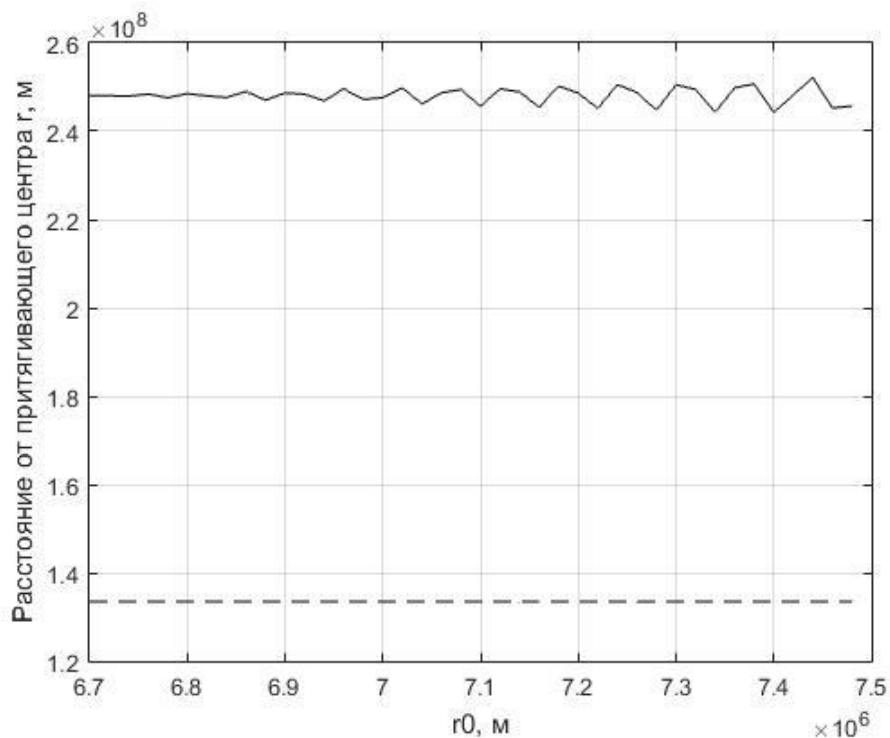




*Рис. 21а* Зависимость характеристической скорости в момент достижения параболической скорости от величины радиуса начальной круговой орбиты



*Рис. 21б* Относительная погрешность запаса характеристической скорости



**Рис. 21а** Зависимость расстояния от притягивающего центра в момент достижения параболической скорости от величины радиуса начальной круговой орбиты

Для относительной погрешности расстояния от притягивающего центра до КА ситуация аналогична случаю с фиксированным радиусом круговой орбиты и переменным ускорением (п.5.2) – во всем рассматриваемом диапазоне значений  $r_0$  относительная погрешность  $\delta r_{\text{esc}}(r_0)$  остается примерно постоянной, но очень большой:

$$\delta r_{\text{esc}}(r_0) = \frac{\Delta r}{r_{\text{esc}}(\text{числ})} = \frac{r_{\text{esc}}(\text{числ}) - r_{\text{esc}}(\text{прибл})}{r_{\text{esc}}(\text{числ})} \approx 0,46 \pm 0,01\%$$

Проанализируем аналитические формулы для пройденного пути, переписав их в несколько другом виде:

$$S_{\text{esc}}(\text{числ}) = \frac{\mu}{2ar_0}$$

$$S_{\text{esc}}(\text{прибл}) = \frac{\mu}{2ar_0} \left[ 1 - \frac{r_0}{\mu^{1/2}} (20a^2)^{1/4} \right]$$

$$\delta S_{\text{esc}}(r_0) = \frac{\Delta S}{S_{\text{esc}}(\text{числ})} = \frac{S_{\text{esc}}(\text{числ}) - S_{\text{esc}}(\text{прибл})}{S_{\text{esc}}(\text{числ})} = \frac{20^{1/4} a^{1/2}}{\mu^{1/2}} r_0$$

Видно, что аналогично ускорению, пройденный путь обратно пропорционален радиусу начальной круговой орбиты, а относительная погрешность при фиксированном ускорении прямо пропорциональна  $r_0$ .

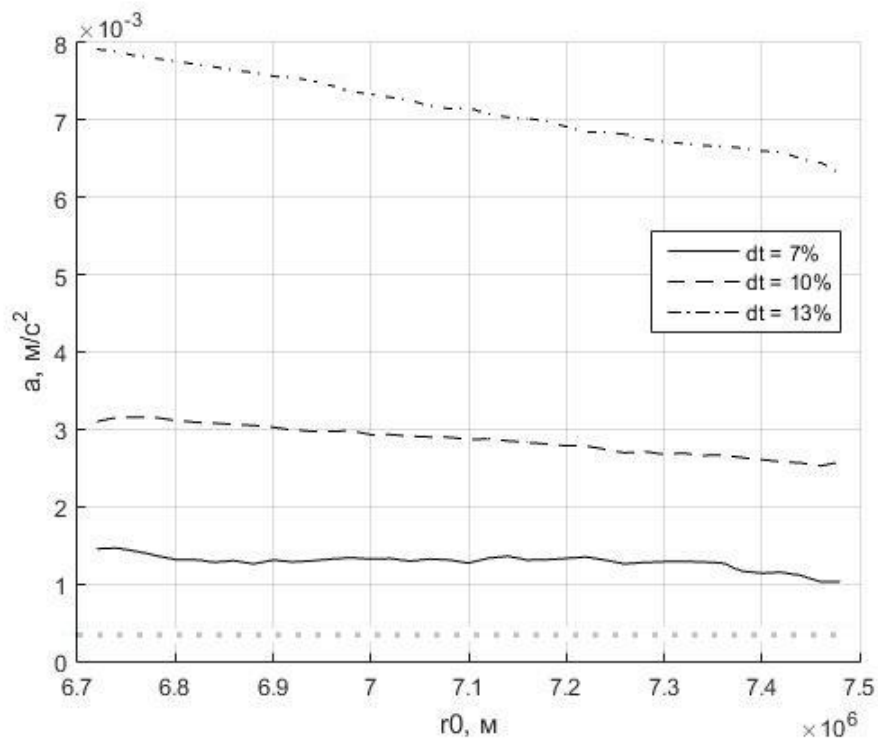
В итоге, чем меньше ускорение и радиус начальной круговой орбиты, тем приближенные формулы дают более точный результат. Аналогичная ситуация наблюдается и для остальных искомых величин: времени в полете, числа витков, запаса характеристической скорости.

#### **5.4 Область применимости приближенных формул**

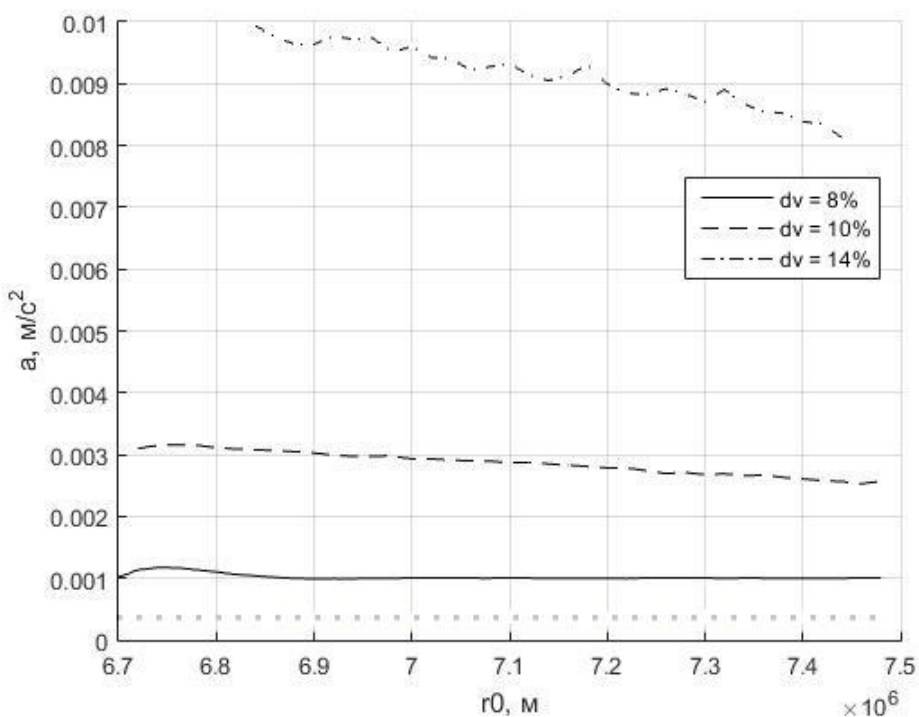
Из предыдущих пунктов следует вывод о том, что при уменьшении ускорения и радиуса начальной круговой орбиты приближенные формулы дают более точный результат.

Найдем теперь область применимости приближенных формул. Под названной областью будем понимать часть параметрической плоскости  $(r_0, a)$ , в которой относительная погрешность величин, определяемых по приближенным формулам, будет составлять не более 10%. Для этого построим линии уровня относительной погрешности для продолжительности разгона и запаса характеристической скорости (Рис.23а, Рис.23б). Эти величины являются наиболее важными и показательными из всех рассматриваемых, так как именно от них зависит расчет топлива, которое необходимо для разгона до параболической скорости при выборе определенных начальных данных. Достаточно будет построить линии для трех значений погрешности. Для времени были выбраны значения 7%, 10% и 13%, а для запаса характеристической скорости – 8%, 10% и 14%.

Учтем также ограничение снизу на ускорение, которое появилось при учете того, что разгон КА должен целиком происходить в сфере действия Земли (см. Гл.3 п.3.3).



*Рис. 23а* Линии уровня для относительной погрешности продолжительности разгона



*Рис. 23б* Линии уровня для относительной погрешности продолжительности разгона

Из построенных кривых на Рис.20а, Рис.20б видно, что линия уровня, отвечающая значению относительной погрешности 10%, близка к линейной функции с небольшим отрицательным наклоном. Это означает, что при меньших ускорениях можно брать большие значения радиуса начальной

круговой орбиты (высокие круговые орбиты), а при больших ускорениях для достижения заданной точности нужно стартовать с низких круговых орбит. Ниже серой пунктирной линии находится область параметров задачи, при которых разгон выходит за пределы сферы действия Земли.

Итак, ниже рассматриваемой линии уровня (10%) и выше серой пунктирной линии, ограничивающей значения ускорения снизу, находится область допустимых значений начальных параметров  $r_0$  и  $a$ , при которых возможно применение приближенных формул.

## Заключение

В данной работе была рассмотрена задача разгона космического аппарата (КА), находящегося в начальный момент времени на круговой орбите, до параболической скорости при помощи постоянной касательной тяги. Для решения поставленной задачи была выведена специальная форма уравнений движения, удобная для численного интегрирования, проведено численное решение этих уравнений при различных значениях начальных параметров. Выявлено ограничение снизу на величину постоянного касательного ускорения в связи с рассмотрением разгона КА в рамках задачи двух тел, то есть определен интервал ускорений, при которых разгон до параболической скорости полностью происходит в сфере действия Земли.

Затем полученные предложенным методом результаты были соотнесены с результатами численного метода Оходимского [2]. Было показано, что расхождение в результатах очень мало, что говорит о высокой точности предложенного в данной работе численного метода.

В заключительной части было проведено сравнение результатов численного моделирования с приближенными аналитическими оценками Бэттина [1], которое позволило определить области параметров задачи, где эти оценки обеспечивают заданную точность. Таким образом, найдена область применимости приближенных формул.

## Литература

1. *Richard H. Battin, Ph.D.* An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised Edition//AIAA Inc. Publ.,1999
2. *Д.Е.Охоцимский, Ю.Г.Сихарулидзе*, Основы механики космического полета. – М: Наука, 1990
3. *С.А.Мирер*, Механика космического полета. Орбитальное движение. *Учебное пособие* – Москва, 2007
4. *Г.Б.Ефимов, Д.Е.Охоцимский*, Об оптимальном разгоне космического аппарата в центральном поле, – Космические исследования, ТП, вып.6, 1965
5. *В.В.Белецкий, В.А.Егоров*, Разгон космического аппарата в сфере действия планеты, – Космические исследования, ТП, вып.3, 1964