# Об одном способе разгона космического аппарата до параболической скорости

Выпускная квалификационная работа бакалавра
Охитиной Анны Сергеевны

Научный руководитель: Мирер Сергей Александрович

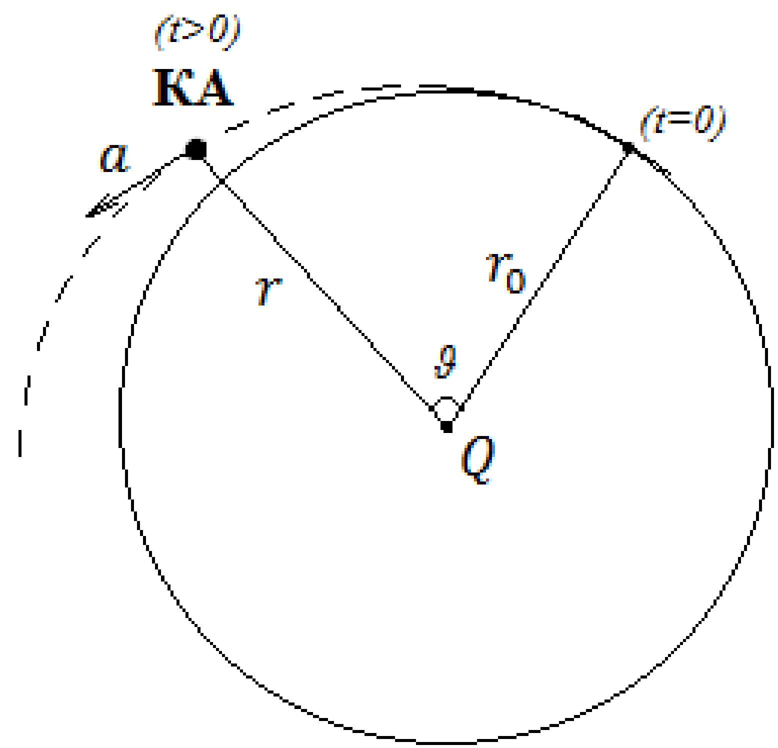
*Москва, 2017*

# Содержание

- постановка задачи
- уравнения движения
- численное решение
- приближенный метод
- сравнение результатов
- заключение

# Постановка задачи

$Q$ – притягивающий центр (Земля)
***a*** – ускорение, сообщаемое касательной силой тяги
$\boldsymbol{r}_0$ – радиус начальной круговой орбиты




В момент достижения параболической скорости <u>определить</u>

1) пройденный путь S,
2) расстояние *r* от притягивающего центра до КА,
3) время нахождения в пути,
4) количество сделанных витков,
5) запас характеристической скорости.

<u>Сравнить</u> результаты с приближенным методом Бэттина

# Обзор литературы


- *Д.Е.Охоцимский, Ю.Г.Сихарулидзе,* Основы механики космического полета. – М: Наука, 1990

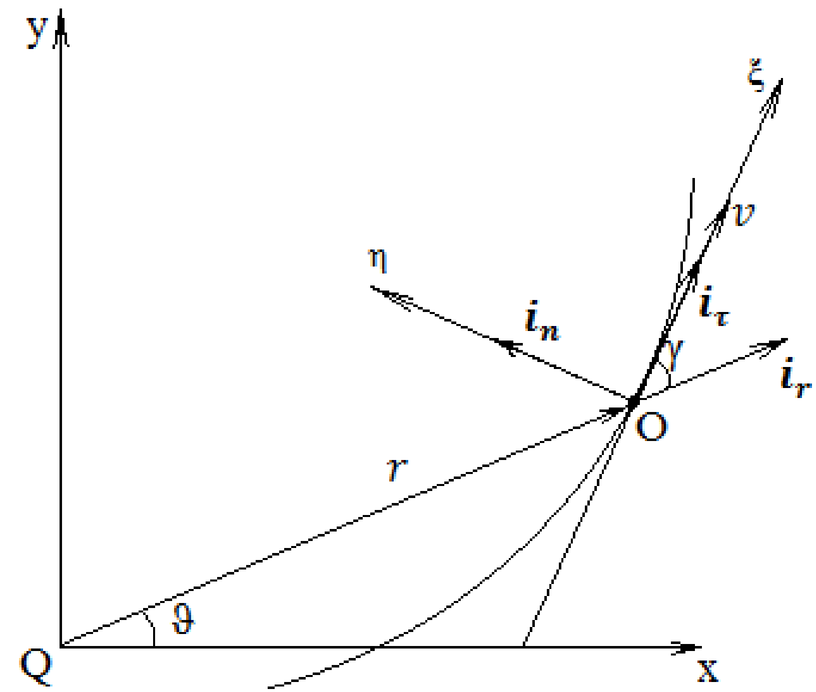
- *Г.Б.Ефимов, Д.Е.Охоцимский,* Об оптимальном разгоне космического аппарата в центральном поле, – Космические исследования, ТIII, вып.6, 1965

- *В.В.Белецкий, В.А.Егоров,* Разгон космического аппарата в сфере действия планеты, – Космические исследования, ТII, вып.3, 1964

- *Richard H. Battin*, **Ph.D.** An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised Edition//AIAA Inc. Publ.,1999

# Системы координат

Так как задача плоская, будем рассматривать только плоскость орбиты, в которой введем следующие системы координат:




1) Инерциальная декартова система координат Qxy с началом Q в притягивающем центре;

2) Неинерциальная система координат Oξη:

   $\boldsymbol{i}_\tau$ – единичный орт вдоль касательной,

   $\boldsymbol{i}_n$ – единичный орт вдоль нормали

# Уравнения движения

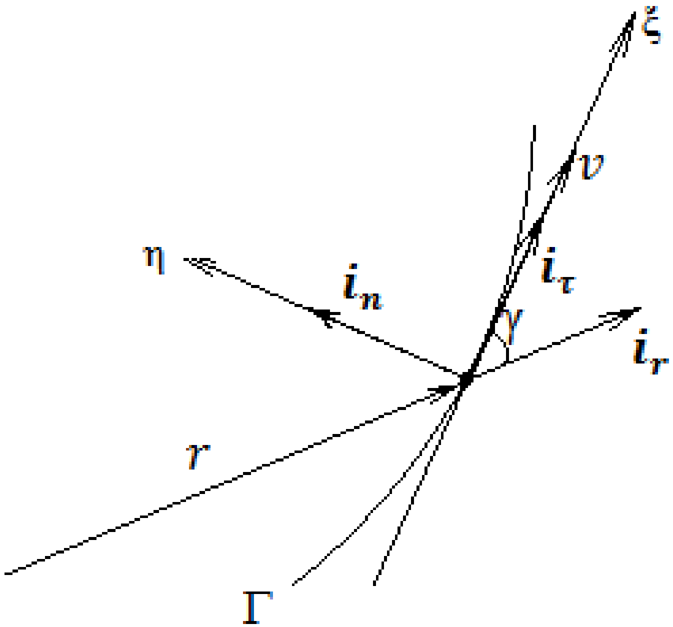
$$\boxed{\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + \mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = a\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{\tau}}}$$

$\mu$ – гравитационный параметр Земли

Скорость и ускорение КА в НИСК:

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}\boldsymbol{i}_\tau = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{i}_\tau$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\boldsymbol{i}_\tau + \frac{\mathrm{v}^2}{\rho}\boldsymbol{i}_n$$




С учетом этого уравнение движения в проекциях на направления

<u>тангенциальное:</u> $\frac{d\mathrm{v}}{dt} = a - \frac{\mu}{r^2}\cos\gamma$

<u>нормальное:</u> $\frac{\mathrm{v}^2}{\rho} = \frac{\mu}{r^2}\sin\gamma,$

где $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\left(1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\frac{d^2r}{ds^2}\right)\left(1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right)^{-1/2}$ кривизна кривой Γ

# Уравнения движения

Преобразовав проекцию на тангенциальное направление, получим выражение для квадрата скорости

$$\boxed{v^2 = 2as + \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

При достижении значения $v = \sqrt{2\mu/r}$ (параболическая скорость) получаем выражение для пройденного пути в конце разгона:

$$\boxed{S_{esc} = \frac{\mu}{2ar_0}}$$

Так как $\frac{dt}{ds} = v^{-1}$, то можно получить, что

$$\boxed{\frac{dt}{ds} = \left[2as + \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}}$$

# Уравнения движения

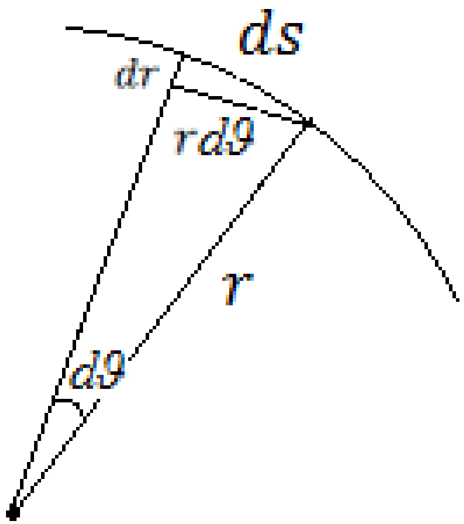
Получим дифференциальное уравнение для нахождения угла истинной аномалии $\vartheta$

Из соотношения (см.рис)

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + (r\,\mathrm{d}\vartheta)^2$$

следует

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{r}\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2} = \frac{1}{r}\sqrt{1-y^2}}$$



# Уравнения движения

Итак, получена система дифференциальных уравнений 1-ого порядка для решения поставленной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{ds} = y \\ \dfrac{dy}{ds} = \left(\dfrac{1-y^2}{r}\right)\left[2as + \mu\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)\right] \Big/ \left[2as + \mu\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)\right] \\ \dfrac{dt}{ds} = \left[2as + \mu\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)\right]^{-1/2} \\ \dfrac{d\vartheta}{ds} = \dfrac{1}{r}\sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

# Численное решение

<u>Начальные данные</u>

$t(0) = t_0 = 0$ – начальный момент времени

$r(0) = r_0 = 7 \cdot 10^6$ м – радиус орбиты в начальный момент времени

$y(0) = 0$ – так как в начальный момент КА находится на круговой орбите

$\vartheta(0) = 0$ – отсчитываем угол истинной аномалии от начального положения r(0)

$S_{esc} = \dfrac{\mu}{2a r_0}$ – пройденный путь до момента достижения параболической скорости

# Численное решение

Траектория космического аппарата (КА) при $a = 0{,}005\,\text{м}/\text{с}^2$

*Количество витков:* $N_{esc} = \dfrac{\vartheta_{esc}}{2\pi} \simeq 64{,}8$

где $\vartheta_{esc} \simeq 407{,}5\,\text{рад}$

*Продолжительность разгона*:

$t_{esc} \simeq 15{,}6\,\text{сут}$

*Пройденный путь*:

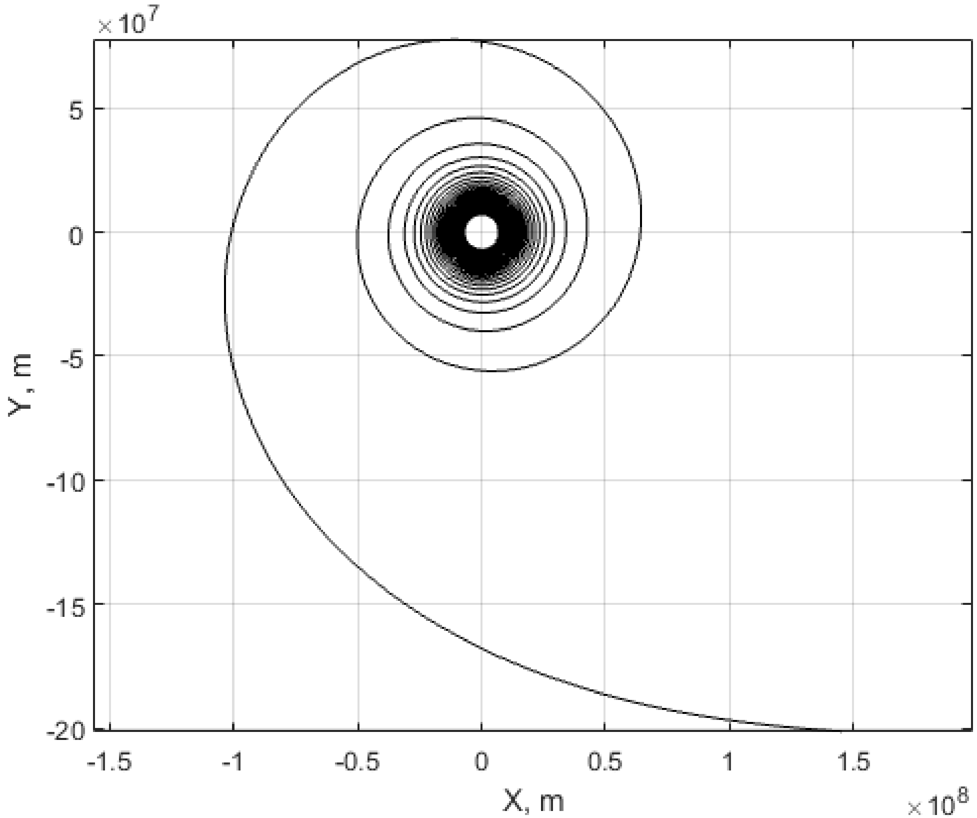
$S_{esc} \simeq 5{,}9 \cdot 10^9\ \text{м}$

*Расстояние от притягивающего центра*:

$r_{esc} = 5{,}5 \cdot 10^8\,\text{м}$

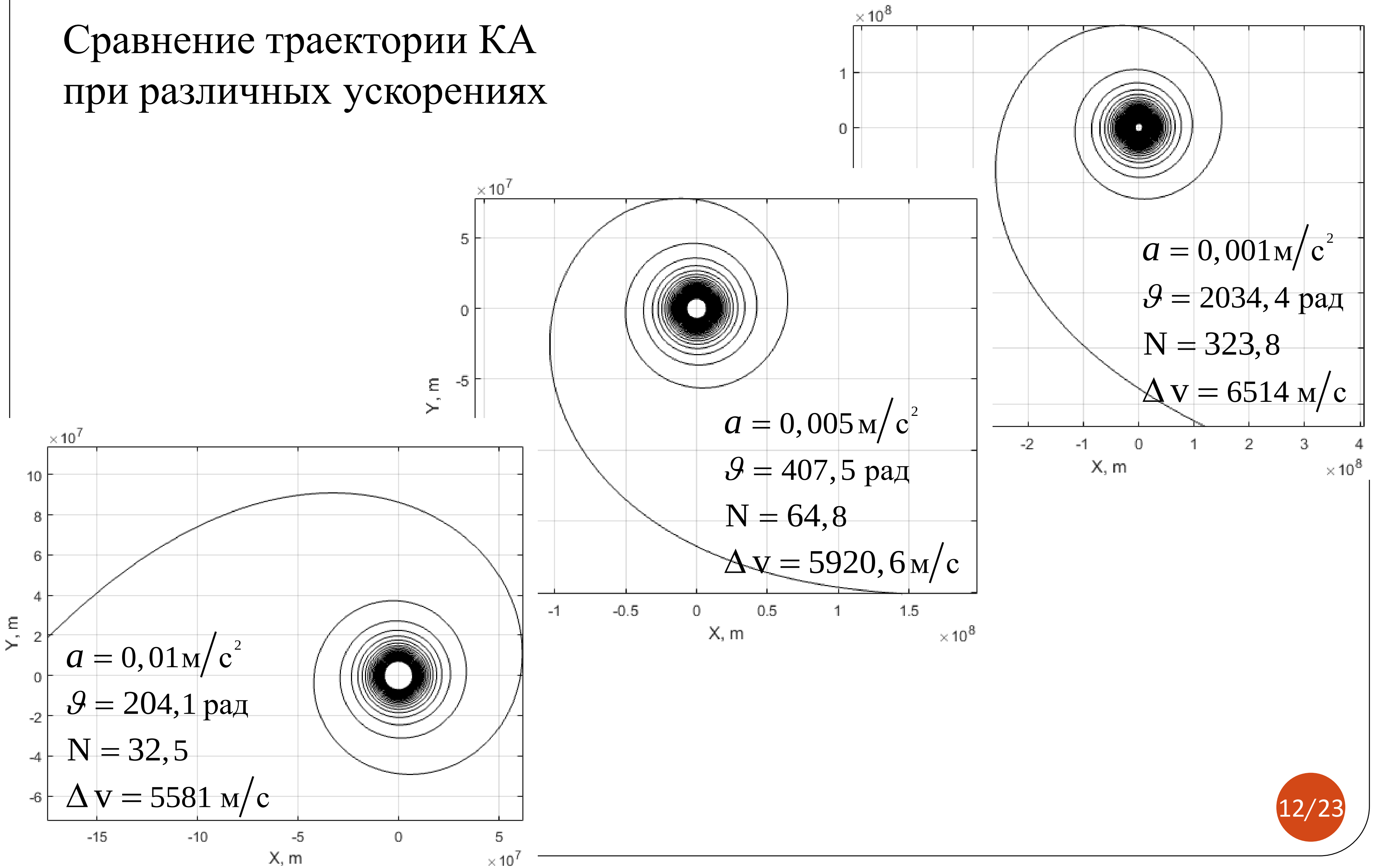
*Запас характеристической скорости*:

$\Delta v = |v - v_0| \simeq 5920{,}6\ \text{м/с}$



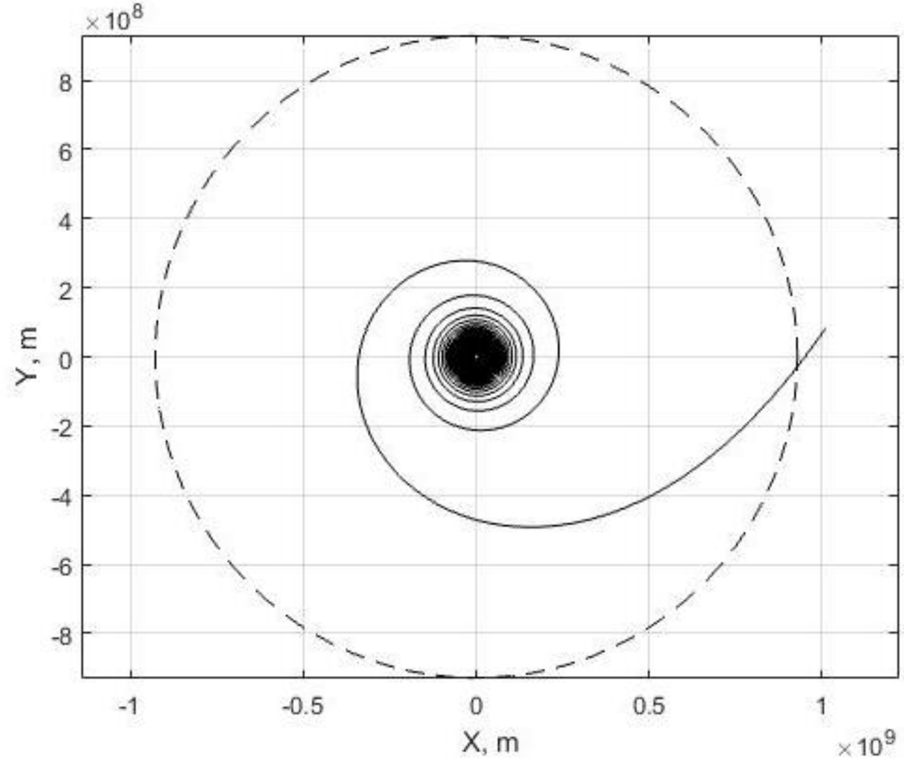
# Численное решение

Сравнение траектории КА
при различных ускорениях

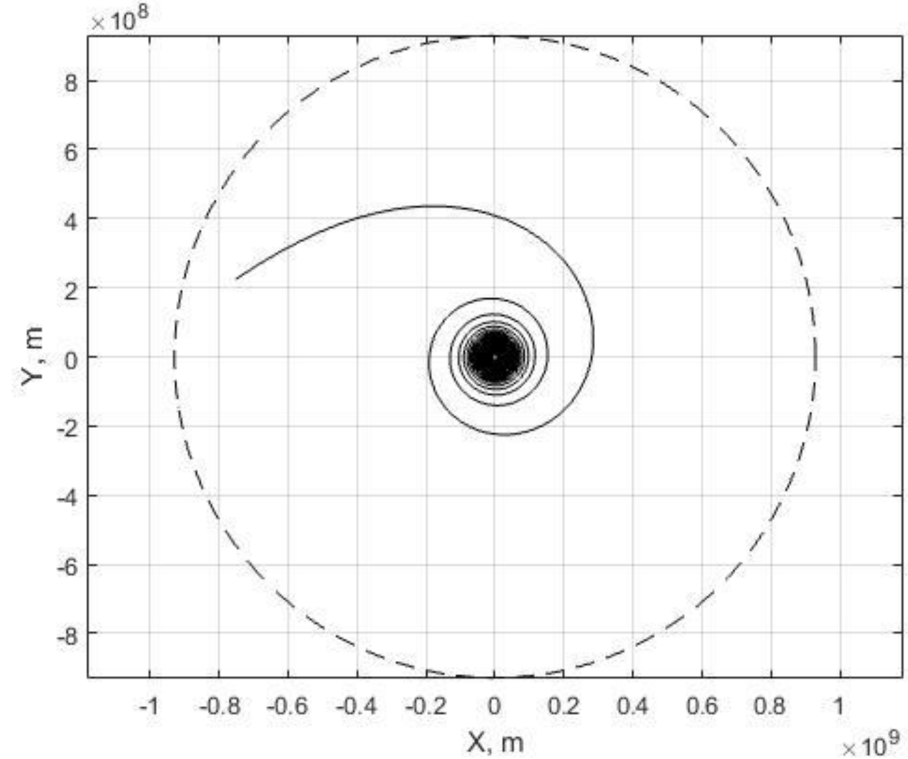


# Выход за сферу действия

$$R_{\text{сф.действ.Земли}} \approx 9,29 \cdot 10^{8}\text{м}$$

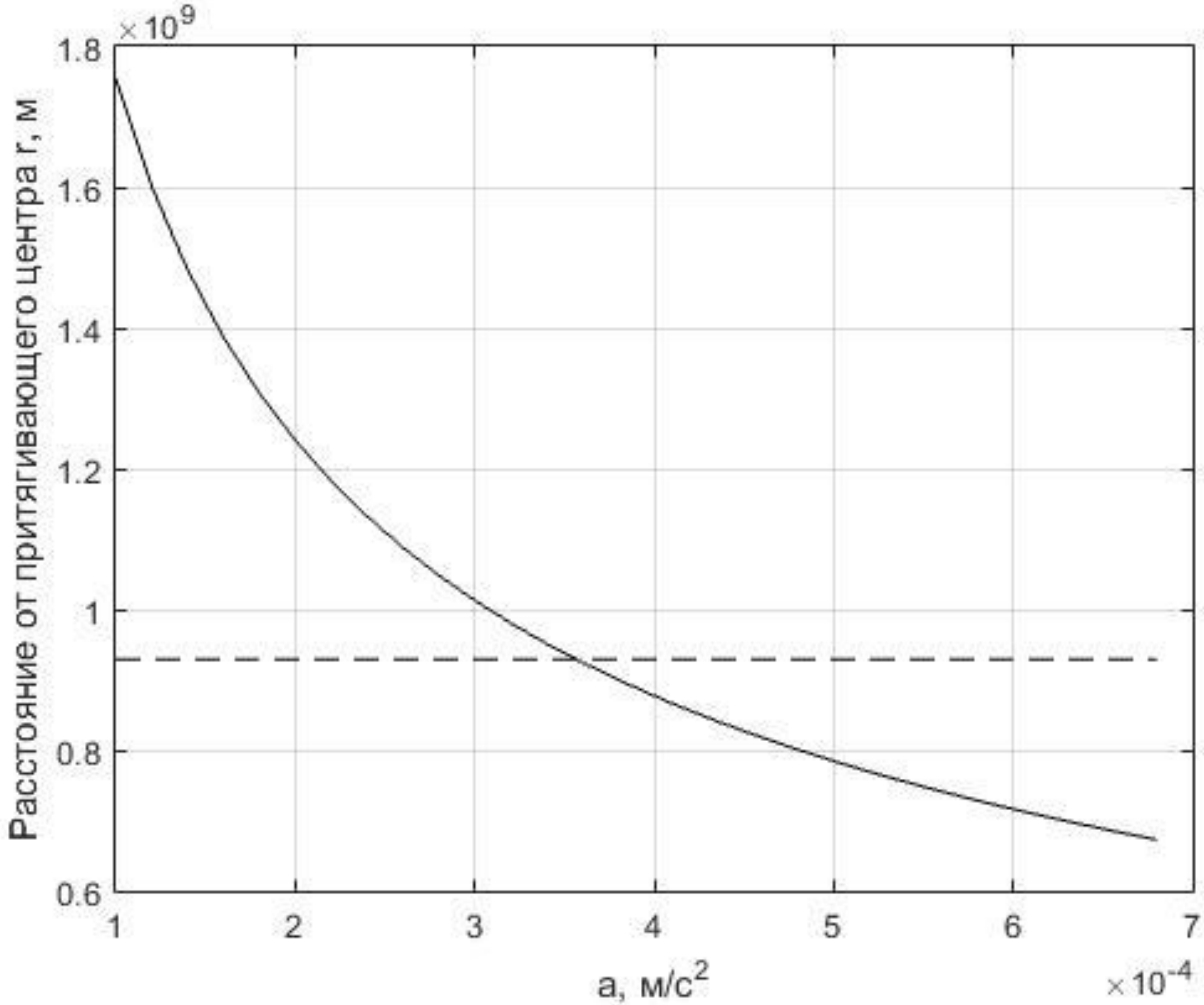



$a = 0,0003 \text{м}/\text{с}^2$




$a = 0,0005 \text{м}/\text{с}^2$

# Выход за сферу действия



# Приближенный метод Бэттина*

Упрощающие предположения:

1) ускорение достаточно мало, так что $\frac{d^2r}{ds^2} = 0$, тогда можно считать, что орбита всегда близка к круговой, скорость КА – круговая:

$$v^2 = \frac{\mu}{r}$$

2) в некоторый момент КА достигает параболическую скорость и выходит на параболическую орбиту:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}$$

* *Battin Richard H.* An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. AIAA Inc. Publ.,1999.

# Приближенный метод Бэттина

Выражения для приближенного определения искомых параметров принимают следующий вид:

$$\mathrm{r}_{\mathrm{esc}} = \frac{\mathrm{r}_0 \mathrm{v}_0}{\left(20a^2 \mathrm{r}_0^2\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\mathrm{S}_{\mathrm{esc}} = \frac{\mathrm{v}_0^2}{2a}\left[1 - \frac{1}{\mathrm{v}_0}\left(20a^2 \mathrm{r}_0^2\right)^{1/4}\right]$$

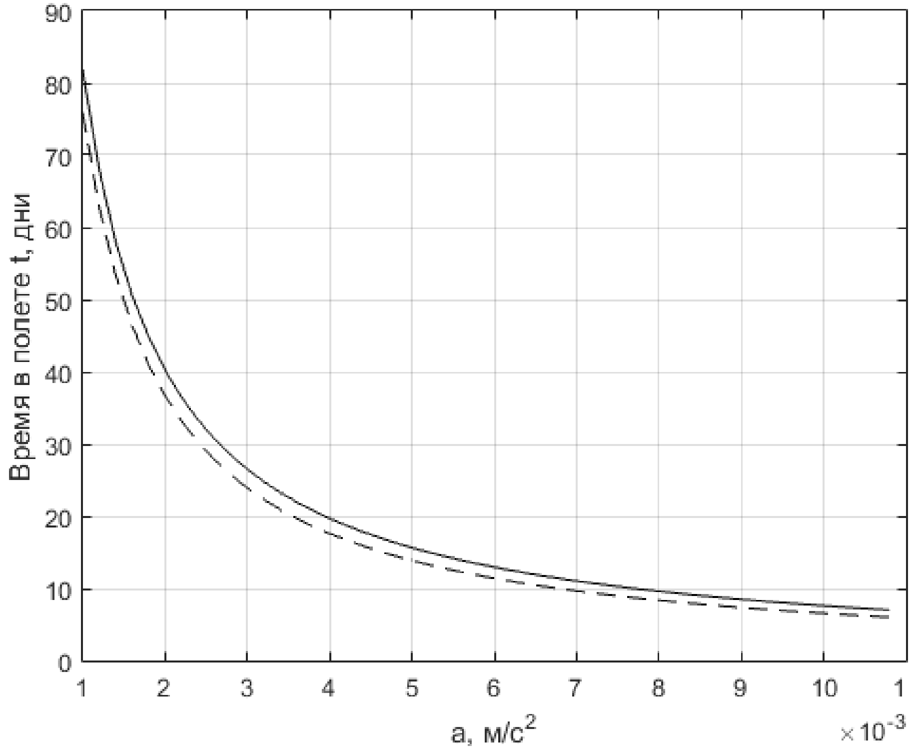
$$\mathrm{N}_{\mathrm{esc}} = \frac{\mathrm{v}_0^2}{8\pi a \mathrm{r}_0}\left(1 - \frac{\sqrt{20}a\mathrm{r}_0}{\mathrm{v}_0^2}\right)$$

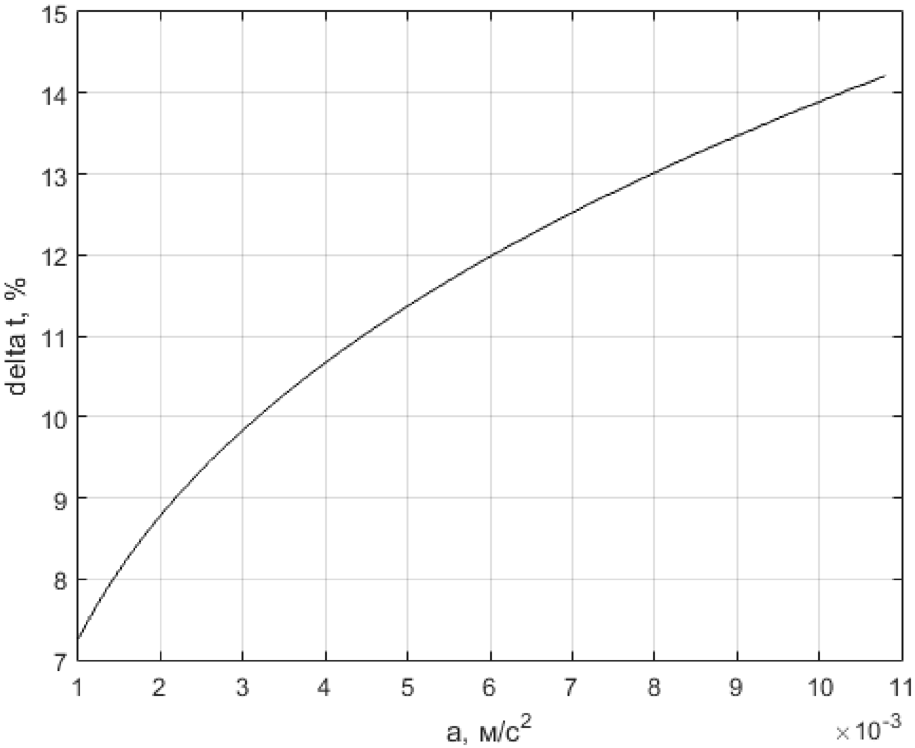
$$\mathrm{t}_{\mathrm{esc}} = \mathrm{t}_0 + \frac{\mathrm{v}_0}{a}\left[1 - \left(\frac{20a^2 \mathrm{r}_0^2}{\mathrm{v}_0^4}\right)^{1/8}\right]$$

$$\Delta \mathrm{v}_{\mathrm{esc}} = \left| \mathrm{v}_0 - \sqrt{\frac{2\mu}{\mathrm{r}_{\mathrm{esc}}}} \right|$$

# Сравнение оценок Бэттина с результатами численного моделирования

**Продолжительность разгона** до параболической скорости и относительная погрешность $\left(r_0 = 7 \cdot 10^6 \text{м}\right)$



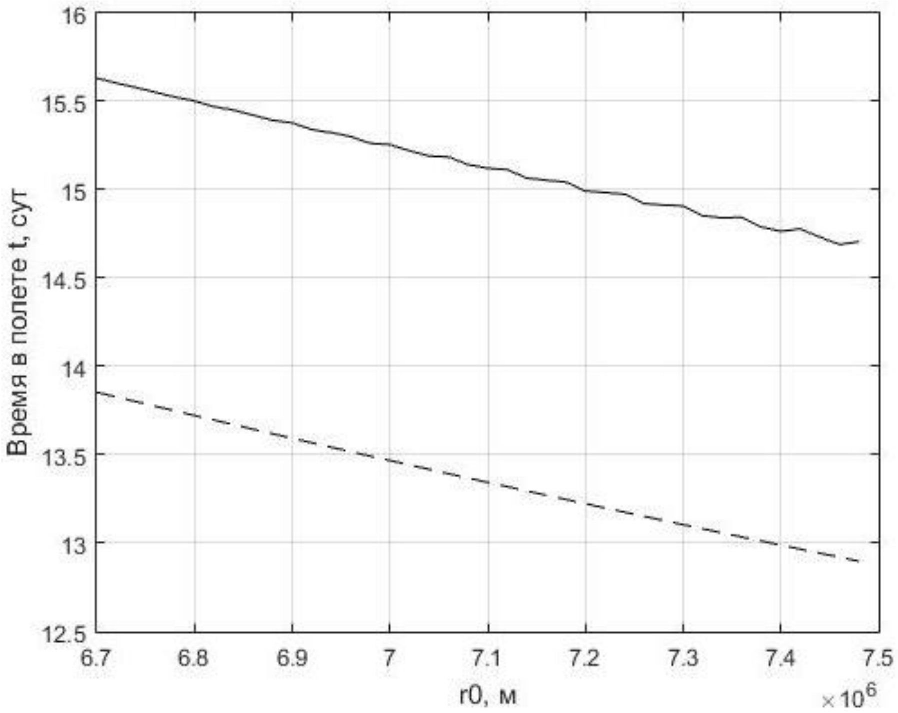



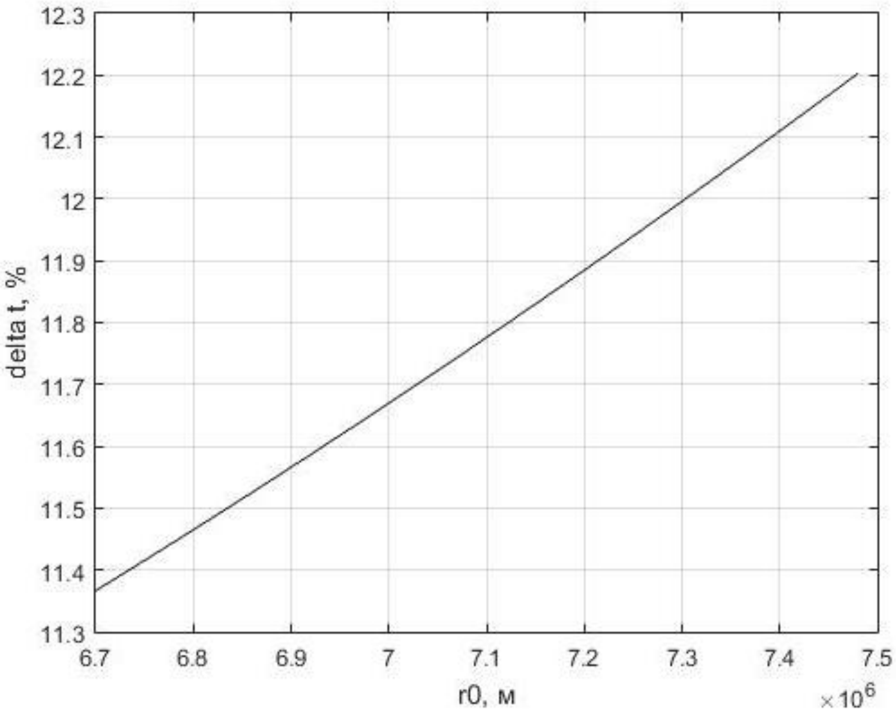

*сплошная линия – численный метод*
*пунктирная линия – приближенный метод*

# Сравнение оценок Бэттина с результатами численного моделирования

**Продолжительность разгона** КА до параболической скорости и относительная погрешность

$\left(a = 0{,}005\ \text{м}/\text{с}^2\right)$

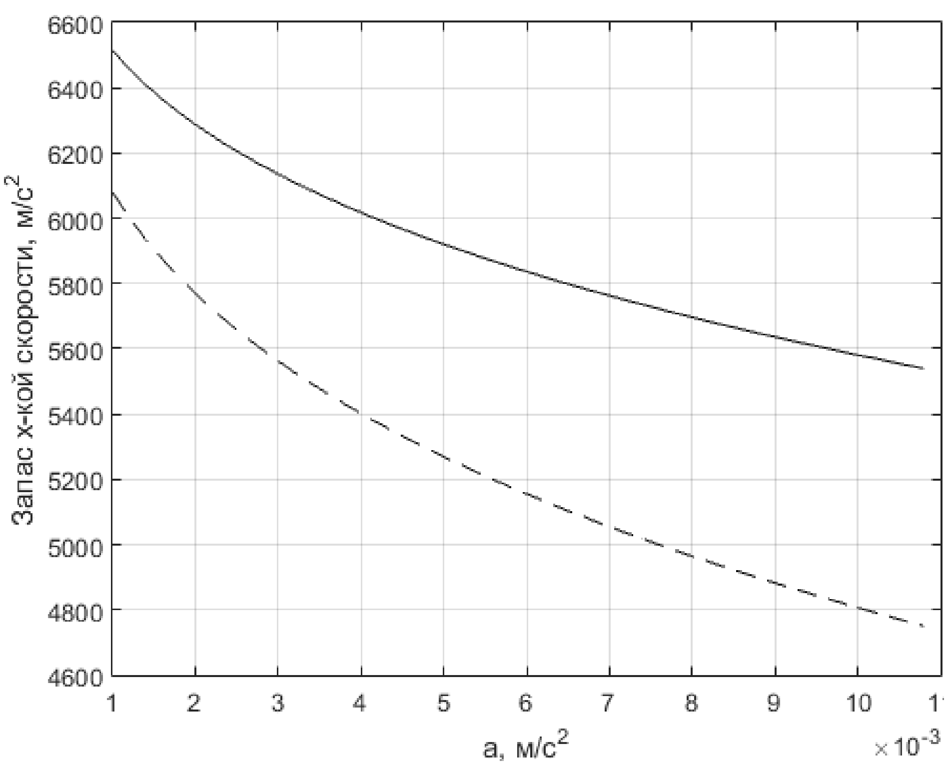


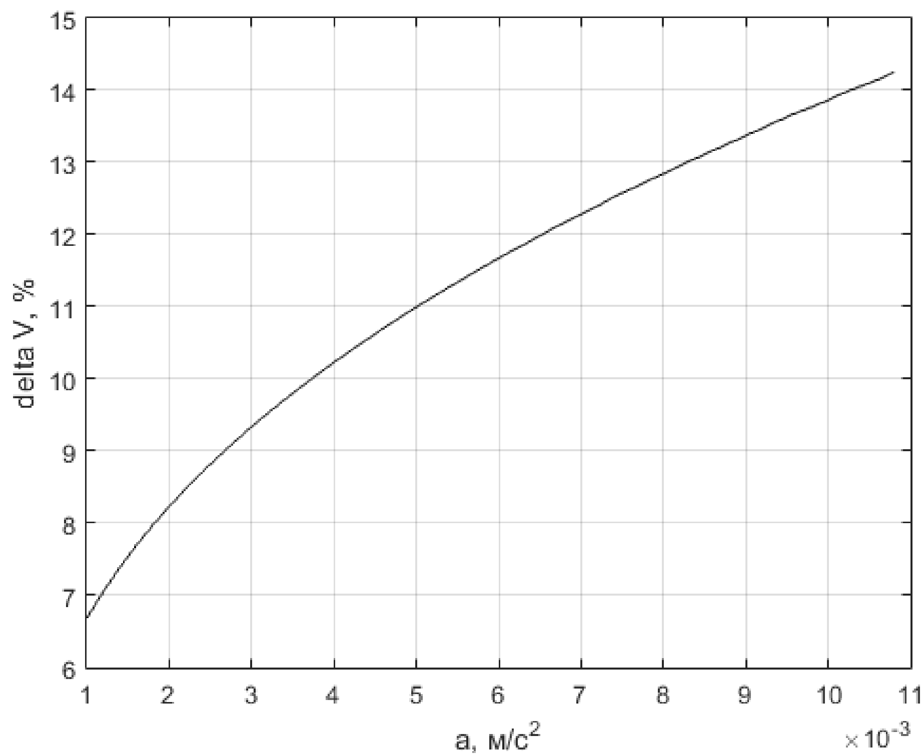




*сплошная линия – численный метод*
*пунктирная линия – приближенный метод*

# Сравнение оценок Бэттина с результатами численного моделирования

**Запас характеристической скорости** и относительная погрешность $\left(r_0 = 7 \cdot 10^6 \text{м}\right)$

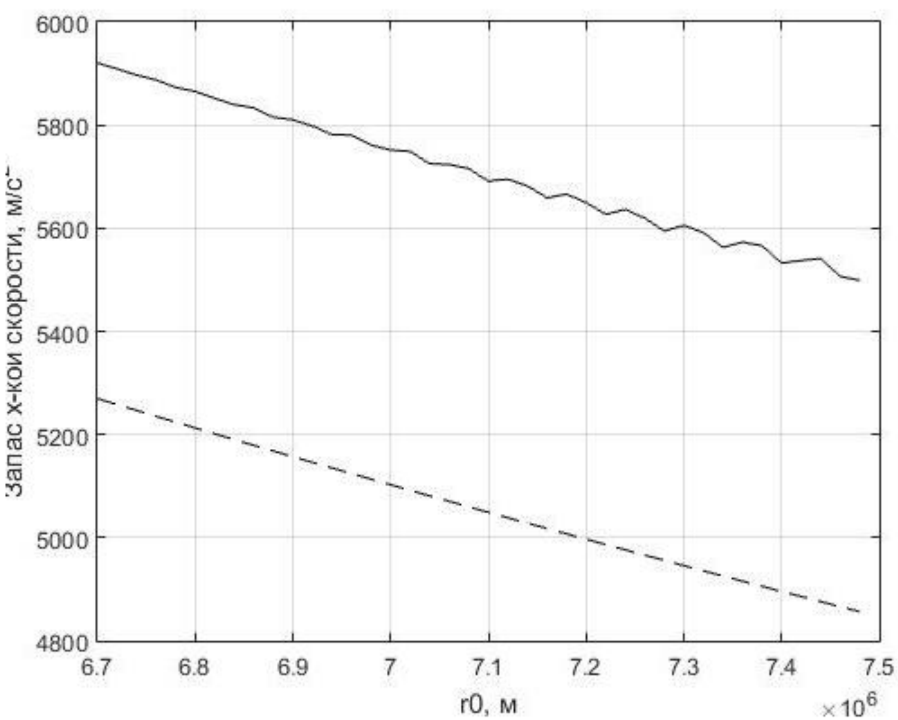


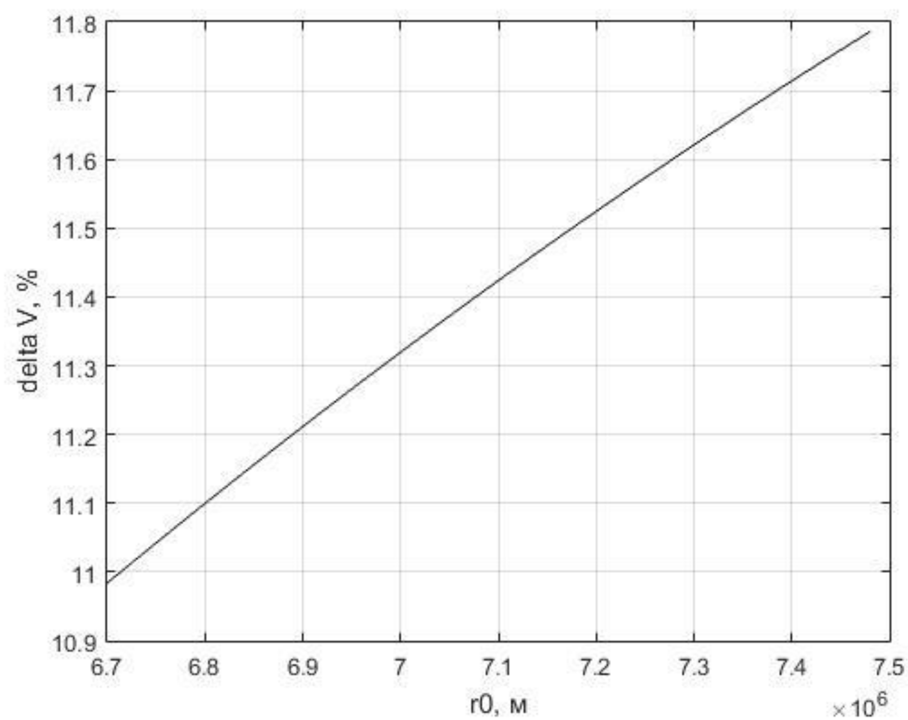




*сплошная линия – численный метод*
*пунктирная линия – приближенный метод*

# Сравнение оценок Бэттина с результатами численного моделирования

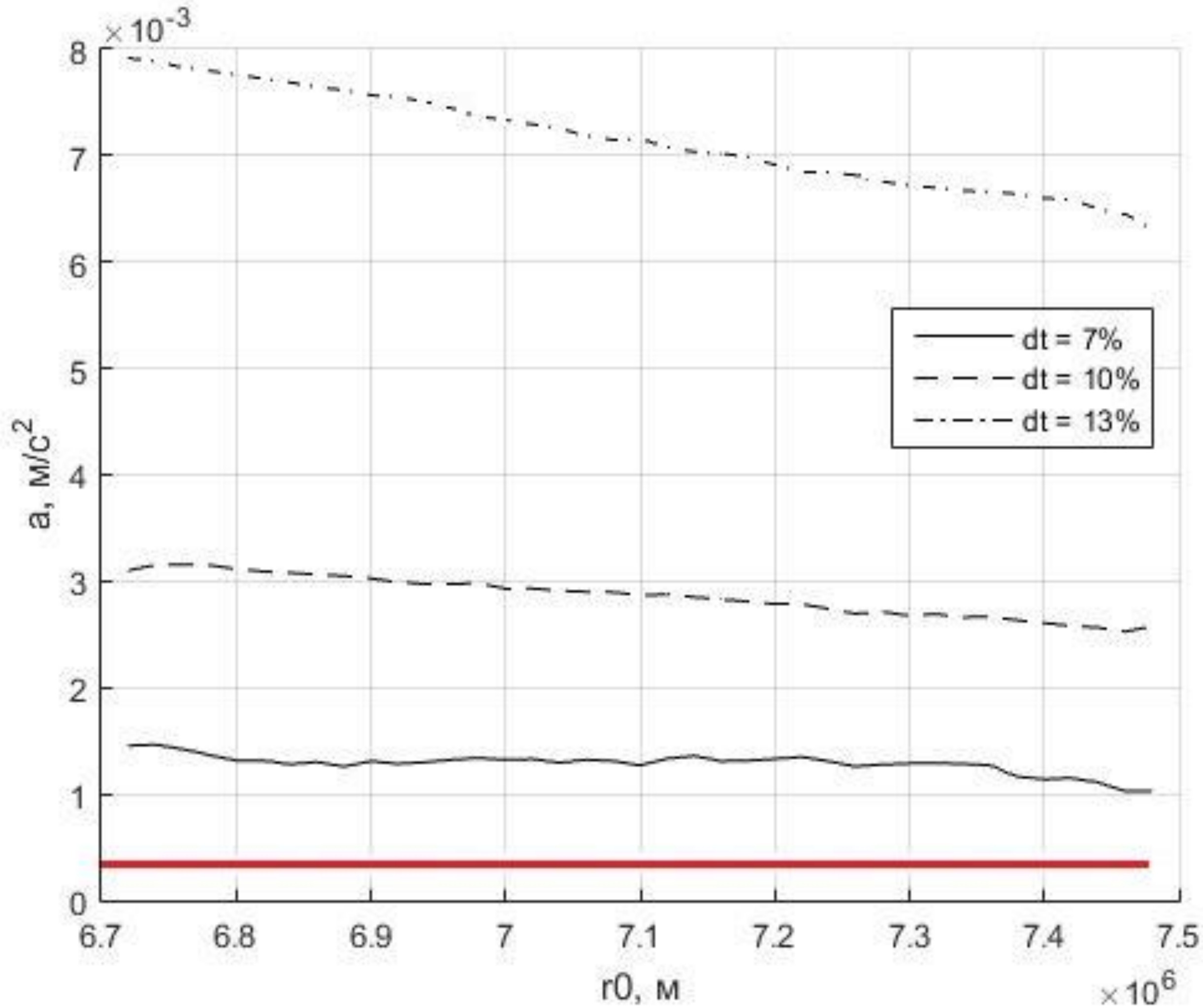
**Запас характеристической скорости** и относительная погрешность $\left(a = 0{,}005\ \text{м/с}^2\right)$



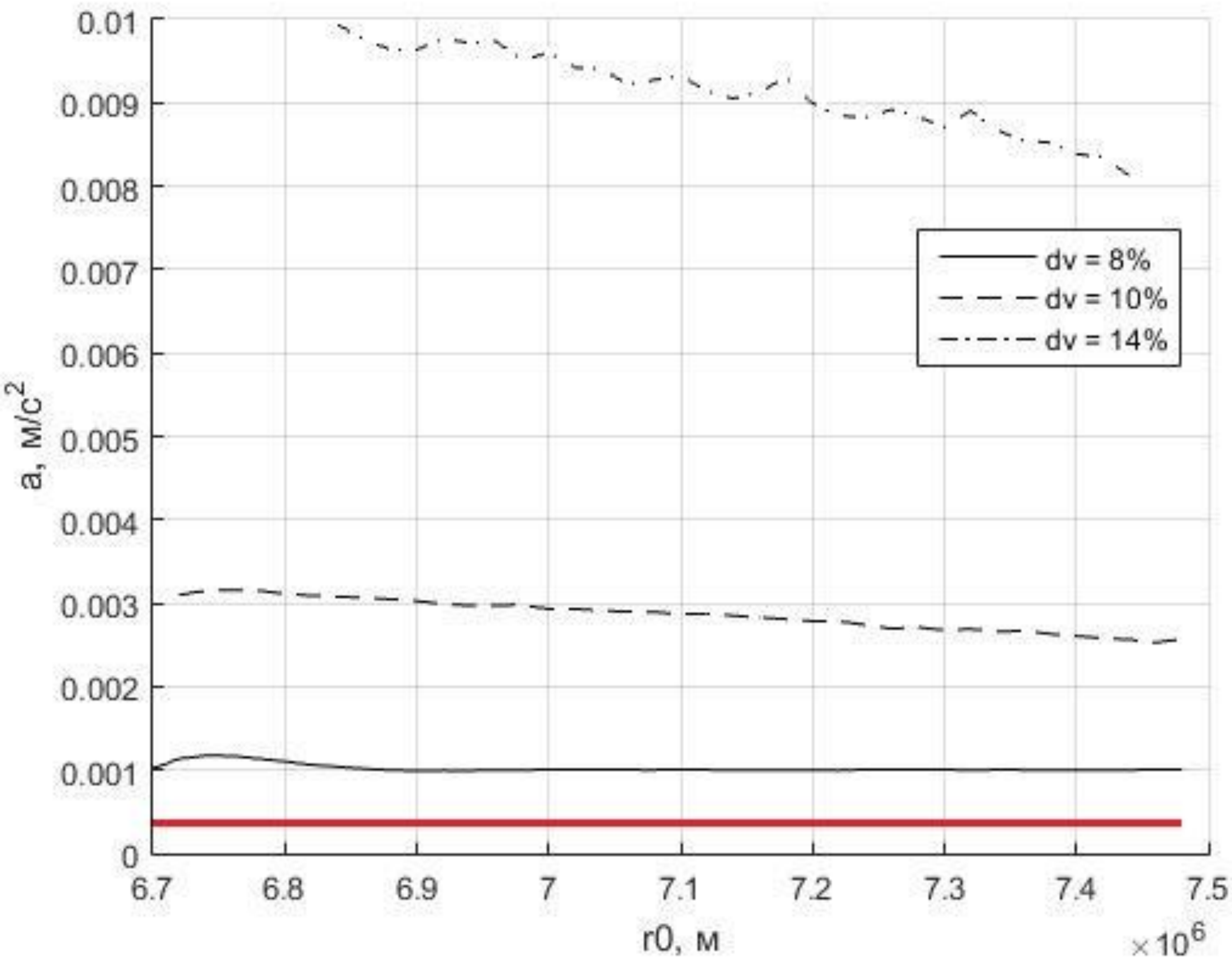

*сплошная линия – численный метод*
*пунктирная линия – приближенный метод*

# Область применимости приближенных формул




*Линии уровня для относительной погрешности продолжительности разгона*

# Область применимости приближенных формул




*Линии уровня для относительной погрешности запаса характеристической скорости*

# Заключение

- Рассмотрена задача разгона космического аппарата (КА), находящегося в начальный момент времени на круговой орбите, до параболической скорости при помощи постоянной касательной тяги

- Выведена специальная форма уравнений движения, удобная для численного моделирования динамики полета КА

- Проведено сравнение результатов численного моделирования с приближенными аналитическими оценками Бэттина, которое позволило определить области параметров задачи, где эти оценки обеспечивают заданную точность

*Охитина А.С., Мирер С.А.*

“Об одном способе разгона космического аппарата до параболической скорости”

Труды 59-й научной конференции МФТИ с международным участием, Москва – Долгопрудный – Жуковский,

URL: http://conf59.mipt.ru/static/reports_pdf/2065.pdf

# Спасибо за внимание!