

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика
(магистратура)

Направленность (профиль) подготовки: Управление динамическими системами

**МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО
РАСПОЛОЖЕНИЯ ДВИГАТЕЛЕЙ ДЛЯ
ОДНОВРЕМЕННОЙ КОРРЕКЦИИ ОРБИТЫ И
РАЗГРУЗКИ МАХОВИКОВ**

(магистерская диссертация)

Студент:

Охитина Анна Сергеевна

(подпись студента)

Научный руководитель:

Ткачев Степан Сергеевич,
канд. физ.-мат. наук, доц.

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2019

Аннотация

В работе рассматривается задача оптимального расположения двигателей орбитальной коррекции на борту геостационарного космического аппарата. Необходимо одновременно обеспечивать коррекцию орбиты и разгрузку избыточного кинетического момента маховиков, накопленного из-за действующих на спутник возмущений. Предлагается методика формализации задачи, удобная для получения необходимых и достаточных условий, накладываемых на расположение двигателей, а также методика поиска их оптимального расположения. Приводятся примеры расположения двигателей с учетом всех ограничений и требований, как в случае штатной работы, так и в случае возможного отказа одного из двигателей. Учитывается влияние возможных ошибок установки и смещения центра масс.

Оглавление

Введение.....	4
1. Постановка задачи	9
2. Формализация задачи	11
3. Сведение системы к выпуклой оболочке	13
4. Оптимизация расположения двигателей	20
4.1. Максимизация кинетического момента	20
4.2. Оптимизация расхода топлива.....	25
5. Выход из строя одного из двигателей.....	30
6. Влияние ошибок установки	36
7. Влияние смещения центра масс аппарата	44
Заключение	48
Список использованных источников	49

Введение

В настоящий момент геостационарные спутники широко используются в прикладных и коммерческих целях. Геостационарные орбиты являются одним из наиболее привлекательных классов орбит. Это круговые орбиты, расположенные над экватором Земли (их наклонение равно нулю). Космические аппараты, находящиеся на таких орбитах, обращаются вокруг планеты с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси. Таким образом, геостационарные спутники всегда находятся над заданной точкой над экватором. Это позволяет, например, направить связную антенну или приемную антенну спутникового телевидения, установленную на Земле, на такой космический аппарат (КА) и не менять её ориентацию для отслеживания сигнала, передаваемого со спутника, так как он всегда находится в одном и том же месте на небесной сфере. Неизменность относительного положения Земли и спутника также полезна для решения и задачи дистанционного зондирования, когда нужно длительное время наблюдать за одним и тем же участком поверхности. Примером здесь может послужить спутник Электро-Л [1], который используется для гидрометеорологических наблюдений.

Следует отметить, что геостационарная орбита не является устойчивой. Помимо ошибок приведения в заданную точку орбиты, на эволюцию орбиты КА оказывает влияние ряд внешних возмущений со стороны Луны, Солнца и нецентральности гравитационного поля Земли. С течением времени параметры орбиты меняются, и она перестает быть геостационарной. Эволюция орбиты выражается в двух основных явлениях:

- спутник смещается вдоль орбиты (по направлению его скорости) от своего начального положения в сторону одной из точек устойчивого равновесия [2];
- наклонение орбиты увеличивается (от первоначального нулевого значения) со скоростью порядка одного градуса в год [3].

Для поддержания орбиты и удержания спутника в заданном положении обычно используются реактивные двигатели, которые создают корректирующие импульсы в узлах орбиты: для компенсации роста наклонения в направлении «север-юг» (в плоскости, ортогональной радиус-вектору КА, Рис. 1) и в направлении «запад-восток» для компенсации дрейфа вдоль орбиты. Существенным является тот факт, что для коррекции «север-юг» требуется значительно большее изменение импульса, чем для коррекции «запад-восток».

В общем случае оси тяги двигателей не проходят через центр масс аппарата, поэтому во время коррекции возникают дополнительные моменты сил, которые возмущают угловое движение аппарата. Эти моменты компенсируются системой ориентации. Как правило, в качестве её исполнительных органов рассматриваются двигатели-маховики. Это означает, что при парировании моментов реактивных сил будет накапливаться избыточный кинетический момент. Для разгрузки маховиков также используются двигатели, при этом, очевидно, тоже необходимо потратить топливо.

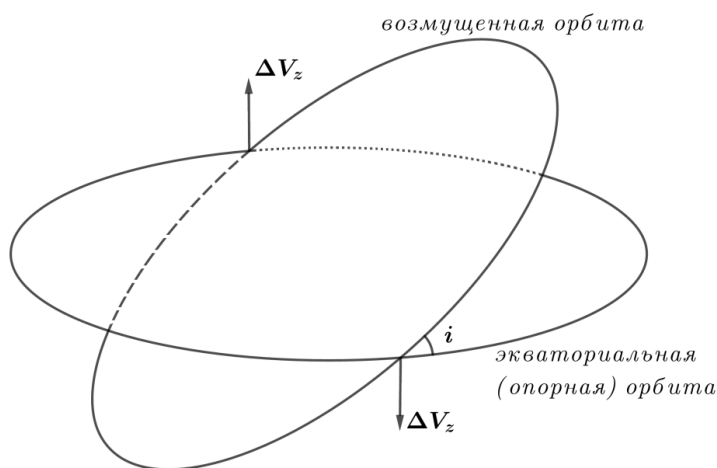


Рисунок 1 – Коррекция орбиты вдоль направления «север-юг» для компенсации роста наклонения

В данной работе предлагается заранее выбрать положение двигателей и направление их осей тяги таким образом, чтобы можно было одновременно

осуществлять коррекцию орбиты и разгружать избыточный кинетический момент, накопленный маховиками. Не ограничивая общности, будем полагать, что коррекция орбиты проводится один раз в сутки. Это позволит установить все двигатели на одной грани аппарата.

Следует отметить, что ранее в литературе рассматривались такие задачи, как, например, проблема одновременной разгрузки избыточного кинетического момента и выдачи необходимого корректирующего импульса (работы [4,5]). В работе [6] предлагается использовать магнитные катушки и двигатели для разгрузки маховиков. Новыми результатами настоящей работы являются рассмотрение ограничений на изменение импульса в направлении «запад-восток» и оптимизация конфигурации двигателей как для случая штатной работы, так и для случая возможного выхода из строя одного из двигателей.

Результаты работы были доложены на следующих научных конференциях, как всероссийского, так и международного уровней:

1. Охитина А.С., Маштаков Я.В., Ткачев С.С. «Оптимизация расположения двигателей коррекции для обеспечения разгрузки маховиков»
60-я Всероссийская научная конференция МФТИ (Диплом победителя), 2017, Москва, Россия.
2. А.С. Охитина, Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев, С.А. Шестаков «Расположение двигателей коррекции с учетом ограничений на изменение импульса в плоскости локального горизонта»
61-я Всероссийская научная конференция МФТИ (Диплом победителя), 2018, Москва, Россия.
3. Anna Okhitina, Yaroslav Mashtakov, Stepan Tkachev “Distribution of correction thrusters under delta-V constraints in local horizontal plane”
IAA SciTech Forum 2018, RUDN University, 2018, Moscow, Russia.

4. А.С. Охитина, Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев, С.А. Шестаков
«Распределение двигателей орбитальной коррекции на геостационарном спутнике»

XLIII Академические чтения по космонавтике, 2019, Москва, Россия.

Также, в ходе проведения работы опубликованы и готовятся к печати следующие статьи:

1. Охитина А.С., Маштаков Я.В., Ткачев С.С. «Оптимизация расположения двигателей коррекции для обеспечения разгрузки маховиков» // Труды 60-й Всероссийской научной конференции МФТИ, Москва-Долгопрудный-Жуковский МФТИ, 2017, с. 133-134.
2. А.С. Охитина, Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев, С.А. Шестаков «Расположение двигателей коррекции с учетом ограничений на изменение импульса в плоскости локального горизонта» // Труды 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ, Москва-Долгопрудный-Жуковский МФТИ, 2018, с. 137.
3. Охитина А.С., Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Оптимизация расположения двигателей коррекции для обеспечения разгрузки маховиков // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. No 19. 31 с.
4. А.С. Охитина, Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев, С.А. Шестаков «Распределение двигателей орбитальной коррекции на геостационарном спутнике» // Сборник тезисов (XLIII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства), Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019, с. 109-110.
5. Anna Okhitina, Yaroslav Mashtakov, Stepan Tkachev “Distribution of correction thrusters under delta-V constraints in local horizontal plane” // Advances in Astronautical Sciences (в печати).

6. Anna Okhitina “Distribution of orbit correction thrusters for the geostationary satellite” // AIP conference proceedings (в печати).
7. Охитина А.С., Маштаков Я.В., Ткачев С.С., Шестаков С.А. Методика построения оптимального расположения двигателей для одновременной коррекции орбиты и разгрузки маховиков // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша (в печати).

Работа имеет следующую структуру: в первой главе описывается постановка задачи, во второй ее формальное определение, в третьей главе определяется минимально необходимое количество двигателей коррекции, используя представление условия задачи в терминах выпуклой оболочки. В первом пункте четвертой главы строится методика подбора расположения двигателей коррекции и направления их осей тяги, которая позволяет оптимизировать возможности системы по разгрузке избыточного кинетического момента, накопленного маховиками. После этого во втором пункте этой же главы предложенная методика адаптируется для оптимизации расхода топлива при сохранении возможности разгрузки маховиков. В пятой главе полученная конфигурация дополняется минимальным количеством двигателей так, чтобы обеспечить работоспособность системы даже в случае выхода из строя одного из них. В шестой и седьмой главах проводится анализ чувствительности конфигурации к ошибкам установки двигателей на аппарате и ошибке смещения центра масс соответственно.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается геостационарный спутник, имеющий несколько двигателей коррекции, которые расположены на одной из его граней. Используются следующие системы координат:

- $OXYZ$ – орбитальная система координат (ОрбСК). Начало координат O находится в центре масс спутника, ось OZ направлена вдоль вектора орбитального кинетического момента, ось OX – вдоль радиус-вектора КА, OY дополняет систему до правой ортогональной;
- $Oxyz$ – связанная со спутником система координат (ССК). Ось Oz перпендикулярна плоскости, в которой установлены двигатели коррекции, оси Ox и Oy дополняют ее до правой тройки.

Спутник стабилизирован в орбитальной системе так, что ССК совпадает с ОрбСК в каждый момент времени (Рис. 2).

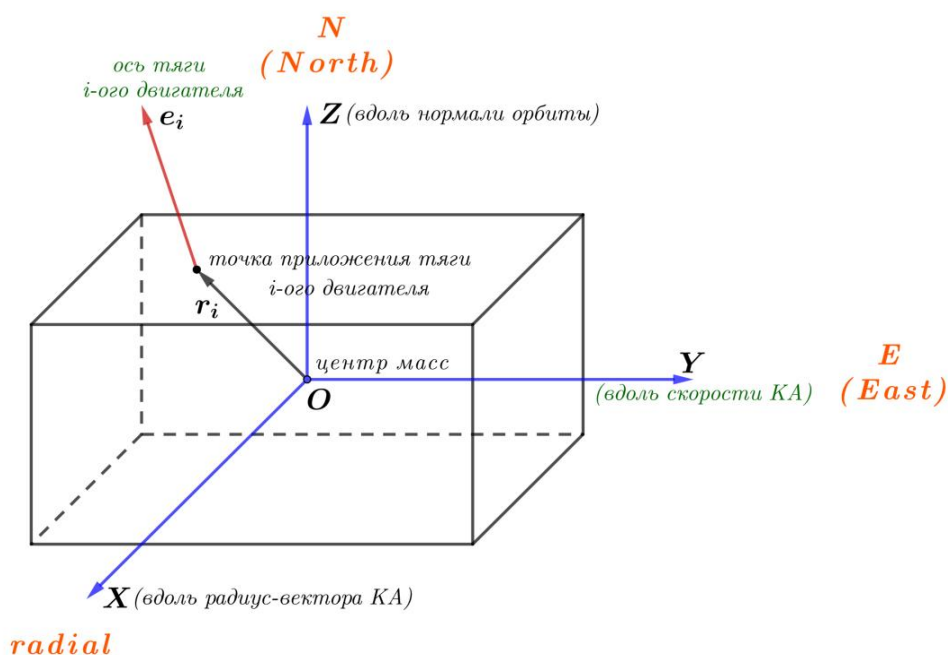


Рисунок 2 – Орбитальная система координат

Чтобы свести наклонение к нулю, двигатели должны выдавать импульс в узлах орбиты вдоль оси OZ . Для коррекции эксцентриситета и фазирования

спутника необходимо создавать корректирующие импульсы вдоль касательной к орбите (по оси OY), то есть вдоль направления скорости КА. Обычно поправки вдоль направления радиус-вектора КА (вдоль оси OX) редки, поэтому будем рассматривать только ограничения на необходимый импульс коррекции в плоскости OYZ . При решении задачи следует учитывать, что:

- в центре грани, на которой устанавливаются двигатели, располагается солнечная панель;
- двигатели имеют конечный размер;
- величина проекции корректирующего импульса ΔV_z на направление нормали к орбите существенно больше, чем на направление скорости.

Перечисленные условия приводят к тому, что на расположение двигателей на аппарате \mathbf{r}_i и направление их осей тяги \mathbf{e}_i (Рис. 2) накладываются ограничения:

- точки крепления двигателей должны быть расположены достаточно далеко от центра грани;
- двигатели должны быть расположены на достаточном расстоянии друг от друга;
- оси тяги двигателей не должны быть направлены на солнечную панель;
- для уменьшения расхода топлива угол между OZ и \mathbf{e}_i должен быть достаточно мал.

С учетом этих ограничений, необходимо определить минимальное количество двигателей, которые способны решить эту задачу, а также выбрать точки их крепления на верхней грани и направление осей тяги. При этом требуется как обеспечить нужное изменение импульса аппарата в плоскости OYZ , так и разгрузить маховики.

2. Формализация задачи

Моменты, создаваемые двигателями коррекции, имеют вид:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_i f,$$

где \mathbf{r}_i – радиус-вектор точки приложения тяги, \mathbf{e}_i – единичный вектор направления оси тяги i -го двигателя (Рис. 2), $f = const$ – величина тяги.

Получим необходимые уравнения и формализуем заданные ограничения для решения поставленной задачи.

Изменение импульса КА вдоль осей OZ и OY описывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^k e_{i,z} \Delta t_i = \frac{\Delta V_z m_s}{f},$$
$$\sum_{i=1}^k e_{i,y} \Delta t_i = \frac{\Delta V_y m_s}{f}.$$

Здесь $e_{i,z}$, $e_{i,y}$ – проекции орта тяги i -го двигателя \mathbf{e}_i на оси OZ и OY соответственно ($i = \overline{1, k}$), ΔV_z – требуемое изменение скорости вдоль оси OZ , ΔV_y – вдоль оси OY , причем $\Delta V_y \in [-0.05\Delta V_z, 0.05\Delta V_z]$ в силу того, что для коррекции «запад-восток» требуется значительно меньшее изменение импульса, m_s – масса аппарата.

В начальный момент времени, суммарный кинетический момент \mathbf{h}_0 , накопленный маховиками, может принимать значения $|\mathbf{h}_0| \leq h_{max}$, где h_{max} – максимальный запас кинетического момента системы маховиков. Тогда для обеспечения разгрузки маховиков необходимо, чтобы диапазон возможных изменений кинетического момента $\Delta \mathbf{h}_z$ содержал в себе некоторую окрестность нуля. Другими словами, должна быть возможность изменения кинетического момента аппарата в любом направлении. Таким образом, область всех возможных изменений кинетического момента записывается в следующем виде:

$$\Delta \mathbf{h}_\Sigma = \sum_{i=1}^k \mathbf{M}_i \Delta t_i, \quad (1)$$

где Δt_i удовлетворяет

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k e_{i,z} \Delta t_i &= \frac{\Delta V_z m_s}{f}, \\ \sum_{i=1}^k e_{i,y} \Delta t_i &= \frac{\Delta V_y m_s}{f}, \\ \Delta t_i &\geq 0 \quad (i = \overline{1, k}), \end{aligned} \quad (2)$$

должна содержать сферу ненулевого радиуса с центром в нуле. При этом ΔV_z , m_s , f заданы, ΔV_y может принимать любые значения из отрезка $[-0.05\Delta V_z, 0.05\Delta V_z]$, а \mathbf{e}_i , \mathbf{r}_i , и, как следствие, \mathbf{M}_i – выбираемые параметры.

3. Сведение системы к выпуклой оболочке

Первый этап в решении задачи – это определение минимально необходимого количества двигателей коррекции. Для этого сделаем замену переменных (введём нормированное время работы двигателей):

$$\begin{aligned} \frac{e_{i,z}f}{\Delta V_z m_s} \Delta t_i &= \Delta \tau_i \\ \Downarrow \\ \Delta t_i &= \Delta \tau_i \frac{\Delta V_z m_s}{e_{i,z}f} \end{aligned} \quad (3)$$

и с учетом замены (3) перепишем (1) и (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i \Delta \tau_i &= \Delta \mathbf{h}_\Sigma \\ \sum_{i=1}^k e_i \Delta \tau_i &= \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \\ \sum_{i=1}^k \Delta \tau_i &= 1, \quad \Delta \tau_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, k}), \\ \Delta V_z &- \text{фиксированное,} \\ \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} &\in [-0.05, 0.05], \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{m}_i = \mathbf{M}_i \frac{\Delta V_z m_s}{e_{i,z}f}$, $e_i = \frac{e_{i,y}}{e_{i,z}}$.

Далее, введем четырехмерные вектора

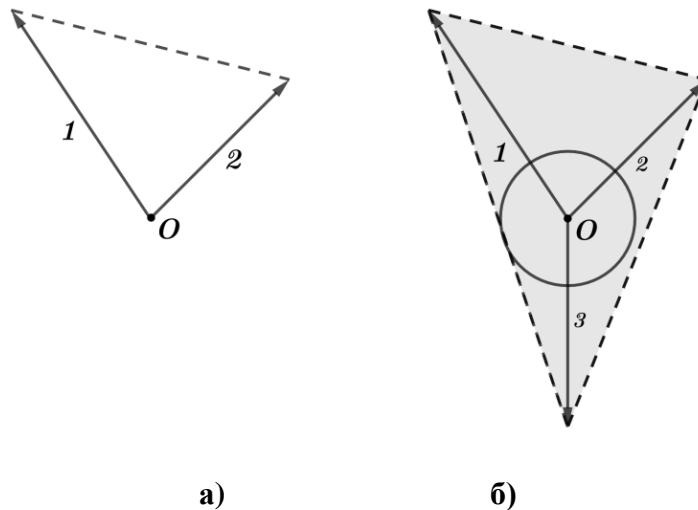
$\Psi_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z}, e_i)^T$, $i = \overline{1, k}$. Тогда (4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \Psi_i \Delta \tau_i &= \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{h}_\Sigma \\ \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \end{pmatrix} \\ \sum_{i=1}^k \Delta \tau_i &= 1, \quad \Delta \tau_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, k}), \\ \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} &\in [-0.05, 0.05]. \end{aligned} \quad (5)$$

Без последнего условия (5) представляет собой выпуклую оболочку векторов ψ_i , то есть область всех возможных значения изменений кинетического момента и скорости. Далее будем обозначать её $С\mathcal{H}$ (от англ. Convex hull). Последнее условие в системе (5), совместно с необходимостью изменения кинетического момента в любом направлении, означает, что на $С\mathcal{H}$ наложено дополнительное ограничение: отрезок

$$\lambda = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3 = 0, -0.05 \leq x_4 \leq 0.05 \}$$

должен целиком лежать внутри выпуклой оболочки, то есть необходимо, чтобы была возможность вписать в $С\mathcal{H}$ гиперцилиндр (декартово произведение отрезка и трёхмерной сферы) с ненулевым радиусом основания, осью которого является отрезок λ . Для этого $С\mathcal{H}$ должна иметь ненулевой объем. Так как выпуклая оболочка векторов ψ_i – это некоторая область в четырехмерном пространстве, то необходимо, по крайней мере, $k=5$ векторов, то есть на один больше, чем размерность пространства. Для наглядности проиллюстрируем этот факт на двумерном случае (Рис. 3).



**Рисунок 3 – Выпуклые оболочки двух и трёх векторов на плоскости:
а) отрезок, б) треугольник**

В дальнейшем будем рассматривать конфигурации из минимально необходимого количества двигателей, то есть пяти. Перед решением задачи

расположения двигателей коррекции и выбора направлений их осей тяги нужно формализовать процедуру проверки того, что конфигурация удовлетворяет заданным требованиям. $C\mathcal{H}$ является многогранником в четырехмерном пространстве. Согласно требованиям задачи, в него должен быть вписан гиперцилиндр с заданной осью λ и ненулевым радиусом основания. Рассмотрим сечение этого многогранника гиперплоскостью, которая задается в виде

$$\Omega_\gamma = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_4 = \gamma\}, \quad \gamma = const, |\gamma| \leq 0.05$$

Если гиперцилиндр может быть вписан внутрь выпуклой оболочки, то для любого γ в пересечении $C\mathcal{H}$ и Ω_γ содержится множество точек (в дальнейшем будем называть его сфера) вида

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_4 = \gamma, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\},$$

где R – радиус основания гиперцилиндра (а его физический смысл – максимальная величина кинетического момента, которую всегда можно разгрузить). Очевидно, что верно и обратное утверждение.

Таким образом, чтобы выяснить, удовлетворяет ли система двигателей заданным ограничениям, необходимым и достаточным является проверка того, что в каждом сечении содержится сфера радиуса R . Однако, требование на проверку всех сечений может быть ослаблено, так как многогранник является выпуклым. Учитывая этот факт, можно проверить лишь сечения гиперплоскостями, которые проходят через основания гиперцилиндра:

$$\begin{aligned} \Omega_{left} &= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_{4,left} = -0.05 \right\} \\ \Omega_{right} &= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_{4,right} = 0.05 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь для удобства перейдем к описанию $C\mathcal{H}$ в виде системы неравенств:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_0 \quad (7)$$

где \mathbf{A}_0 – матрица размера $p \times 4$, \mathbf{x} – вектор в четырехмерном пространстве размера 4×1 и \mathbf{b}_0 – вектор размера $p \times 1$ (p – количество неравенств, описывающих рассматриваемую выпуклую оболочку). Каждое неравенство системы (7) описывает одно из p полупространств, пересечением которых является \mathcal{CH} .

Таким образом, для того чтобы найти сечение \mathcal{CH} гиперплоскостями Ω_{left} и Ω_{right} , нужно зафиксировать четвертую компоненту (покажем на примере правой границы):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & a_{p4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0.05 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} - 0.05 \begin{pmatrix} a_{14} \\ \vdots \\ a_{p4} \end{pmatrix}$$

Обозначим $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_{right} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} - 0.05 \begin{pmatrix} a_{14} \\ \vdots \\ a_{p4} \end{pmatrix}$, тогда система,

описывающая правое сечение выпуклой оболочки, запишется следующим образом:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}_{right}. \quad (8)$$

Аналогично на левой границе:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}_{left}. \quad (9)$$

Итак, сечениями четырехмерной выпуклой оболочки гиперплоскостями являются трехмерные фигуры, которые описываются системами неравенств (8) и (9). В силу того, что \mathcal{CH} – выпуклая фигура, то чтобы определить значение кинетического момента $\Delta \mathbf{h}_\Sigma$, которое

гарантированно можно выдавать в любом направлении, нужно найти максимальные радиусы сфер, которые могут быть вписаны в сечения $С\mathcal{H}$ гиперплоскостями Ω_{left} и Ω_{right} , и выбрать меньший из них. Он и определит Δh_{Σ} .

В качестве примера рассмотрим плоский случай (Рис. 4).

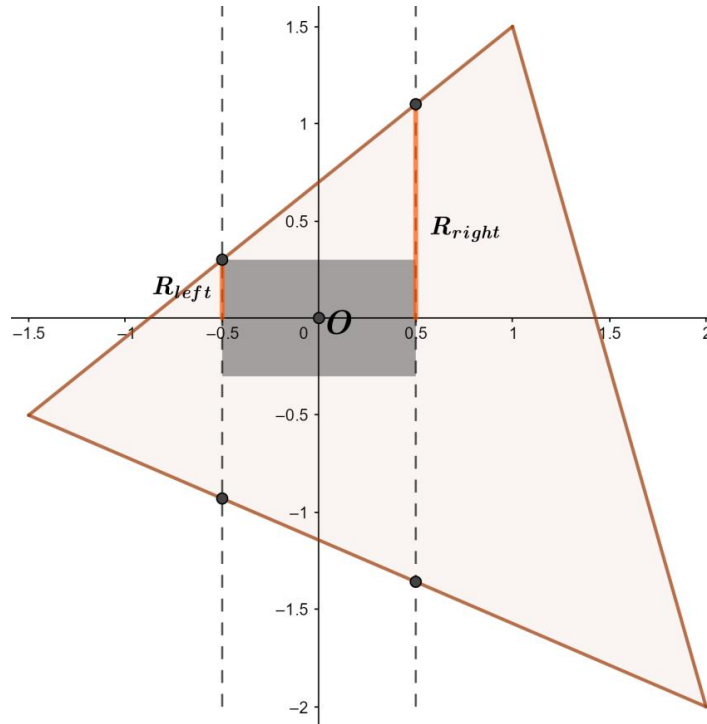


Рисунок 4 – Область всевозможных значений изменения кинетического момента и изменения импульса с учетом заданных ограничений (пример на плоскости)

Здесь выпуклая оболочка представляет собой треугольную область, пунктирной линией обозначены левое и правое сечения. На плоскости сечения представляют собой отрезки, а точки пересечения этих отрезков с осью абсцисс – являются проекциями начала координат на полученные сечения. Красным на каждом из них выделены отрезки, обозначающие наименьшее расстояние от проекций точки O на гиперплоскости Ω_{left} и Ω_{right} до границы выпуклой оболочки на левом и правом сечениях – R_{left} и R_{right} соответственно. Роль максимального радиуса сферы, которая может быть вписана в сечение, и самой сферы на плоскости выполняют эти красные

отрезки. Выбрав минимальный радиус, получаем, что в выпуклую оболочку можно вписать прямоугольник (гиперцилиндр в четырехмерном пространстве), который задает область всевозможных значений изменения кинетического момента и изменения импульса с учетом заданных ограничений. Одна сторона прямоугольника отвечает за диапазон возможных изменений импульса, а другая (назовем ее основанием) за максимально возможное значение изменения кинетического момента в любом направлении.

В четырёхмерном пространстве нужно найти гиперцилиндр, длина оси которого будет отвечать за ограничения на изменение импульса, а в его основании будет находиться сфера максимально возможного радиуса (по аналогии с двумерным случаем). Таким образом, чтобы получить радиусы сфер в левом и правом сечениях, нужно найти минимальное расстояние от соответствующих проекций начала координат до каждой грани, задающей сечения. Грани описываются системой уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_{left}$ для левого сечения и $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_{right}$ – для правого. Перепишем каждое неравенство систем (8) и (9) в таком виде:

$$\left(\frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|}, \mathbf{x} \right) \leq \frac{b_i}{\|\mathbf{a}_i\|} \quad (10)$$

где $\mathbf{a}_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3})^T$.

Чтобы убедиться, что проекция нуля является внутренней точкой соответствующего сечения $S_{\mathcal{H}}$, необходимо проверить, что

$$b_i > 0, \quad i = \overline{1, p} \quad (11)$$

В противном случае проекция начала координат лежит вне сечения или на его границе, что не удовлетворяет условию задачи.

Если условие (11) выполнено, то расстояние от проекции начала координат на правое (левое) сечения до i -ой грани можно найти из (10):

$$R_i = \frac{b_i}{\|\mathbf{a}_i\|}, \quad i = \overline{1, p}$$

Из полученных p значений нужно выбрать минимальное, то есть $R_{right} = \min(R_1, R_2, \dots, R_p)$ – искомый радиус сферы на правой границе. Аналогично находим радиус сферы на левой границе. Из двух полученных значений выбираем также минимальный $R = \min(R_{left}, R_{right})$. Таким образом, получаем максимально возможный радиус сферы, которая является основанием искомого гиперцилиндра, который можно вписать в выпуклую оболочку векторов рассматриваемой конфигурации.

4. Оптимизация расположения двигателей

4.1. Максимизация кинетического момента

Поскольку радиус полученной сферы напрямую связан с величиной кинетического момента, то есть с конкретной расстановкой двигателей, то рациональным является нахождение такой конфигурации, при которой радиус максимален. Для этого необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$\Phi_1 = \min(R_{left}, R_{right}) \rightarrow \max \quad (12)$$

Следует отметить, что эта задача усложняется тем фактом, что компоненты в каждом из векторов ψ_i , ($i = \overline{1,5}$) не могут быть выбраны независимо друг от друга, так как между ними существует следующее соотношение:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_i f$$

где $\mathbf{M}_i = \mathbf{m}_i \frac{e_{i,z} f}{\Delta V_z m_s}$, $\mathbf{r}_i = (r_{i,x} \ r_{i,y} \ r_{i,z})^T$, $\mathbf{e}_i = (e_{i,x} \ e_{i,y} \ e_{i,z})^T$. Это нужно

учитывать при выборе расположения и направления осей тяги двигателей на спутнике.

Аналитическое решение поставленной задачи, по-видимому, невозможно, поэтому она решается численно с использованием метода внутренней точки [7]. В качестве варьируемых параметров выбираются векторы расположения двигателей на спутнике \mathbf{r}_i , ($i = \overline{1,5}$) и направления их осей тяги \mathbf{e}_i , ($i = \overline{1,5}$). Считаем, что все двигатели установлены на верхней грани КА (Рис. 2), при этом все координаты $r_{i,z}$, ($i = \overline{1,5}$) фиксированы. Проекцию вектора \mathbf{r}_i на плоскость OXY зададим с помощью полярных координат r_i, α_i :

$$r_{i,x} = r_i \cos \alpha_i$$

$$r_{i,y} = r_i \sin \alpha_i$$

$$\mathbf{r}_{i,xy} = (r_{i,x} \quad r_{i,y})^T$$

Векторы \mathbf{e}_i параметризуются двумя углами: φ_i – угол между проекциями векторов \mathbf{r}_i и \mathbf{e}_i на плоскость OXY (Рис. 5), θ_i – угол между \mathbf{e}_i и осью OZ :

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \sin \theta_i \cos(\varphi_i + \alpha_i) \\ \sin \theta_i \sin(\varphi_i + \alpha_i) \\ \cos \theta_i \end{pmatrix}$$

Тогда векторы Ψ_i вычисляются однозначно.

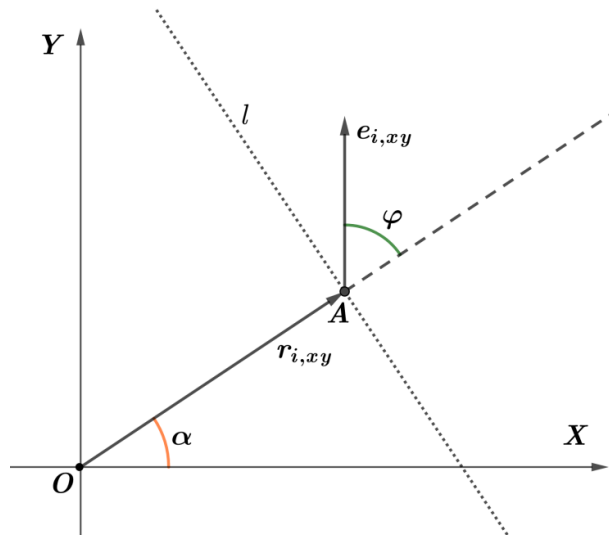


Рисунок 5 – Параметризация вектора \mathbf{e}_i в плоскости OXY ($\mathbf{e}_{i,xy}$), прямая l перпендикулярна прямой, содержащей вектор $\mathbf{r}_{i,xy}$.

Как отмечалось в п. 1, на параметры двигателей должны быть наложены ограничения, связанные как с конечными размерами аппарата, так и с его геометрией:

$$\varphi_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \theta_i \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right],$$

$$0.2 \text{ м} \leq r_i \leq 0.5 \text{ м}, \quad r_{i,z} = 0.5 \text{ м} \quad (13)$$

$$\alpha_i \in [0, 2\pi], \quad i = \overline{1,5}$$

Ограничение для φ_i связано с наличием солнечных панелей, для θ_i – с требованиями по малому расходу рабочего тела на коррекцию в направлении «север-юг», а для r_i – с геометрическими размерами аппарата.

Далее приведены параметры аппарата, используемые для решения численной задачи:

$$m_s = 5000 \text{ кг}, \quad f = 0.1 \text{ Н},$$

$$\Delta V_z = 0.03 \frac{\text{М}}{\text{с}}, \quad \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.05, 0.05]$$

Основная сложность численного решения задачи состоит в корректном выборе начальных данных для оптимизатора, то есть такого начального распределения двигателей, для которого выполняются все указанные ограничения. Сразу подобрать такую конфигурацию не удалось, поэтому был реализован следующий итерационный подход (Рис. 6):

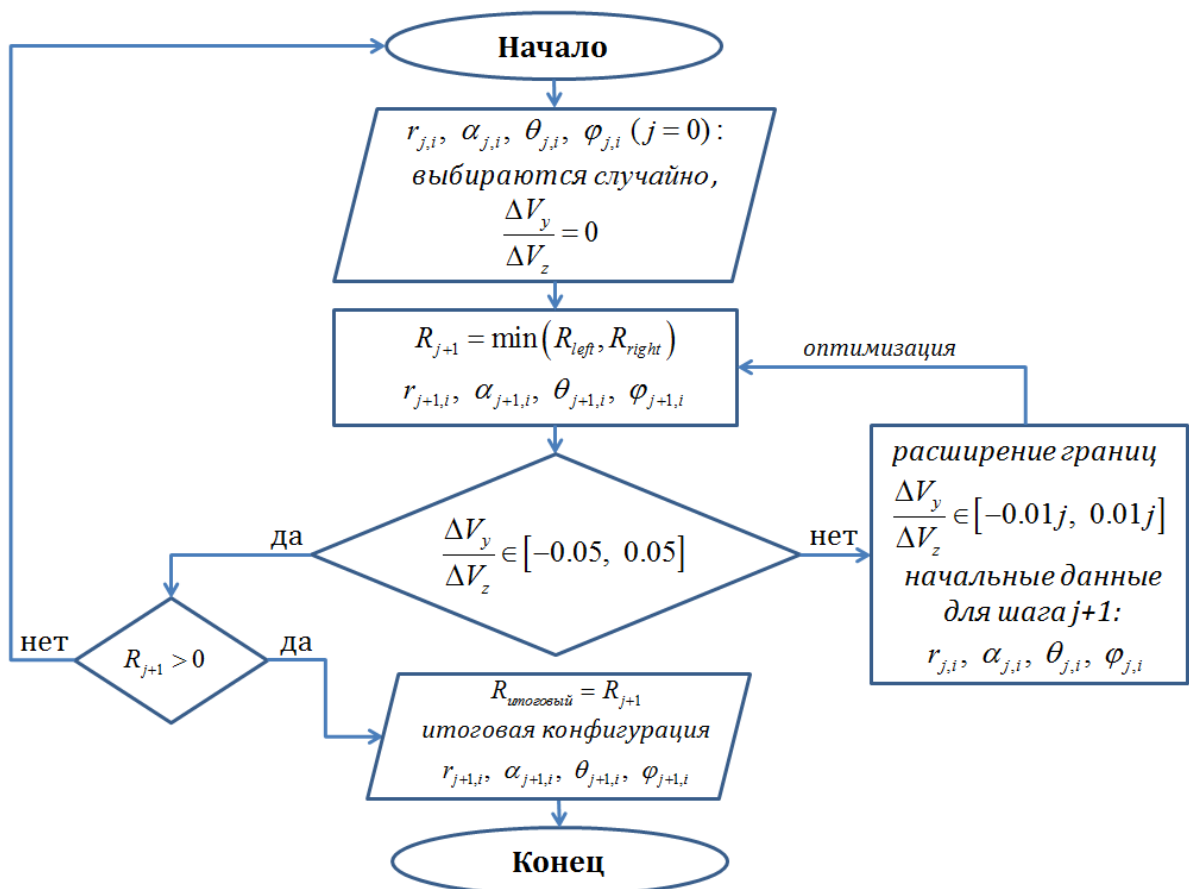


Рисунок 6 – Блок-схема, описывающая итерационный подход к решению оптимизационной задачи

- 1) Варьируемые параметры выбираются на первой итерации для каждого из пяти двигателей случайным образом из интервалов (13), а возможные изменения импульса задаются в виде одного значения:

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} = 0.$$

- 2) Полученные векторы подаются на вход оптимизатору с функционалом (12). Строится выпуклая оболочка для k четырехмерных векторов. Далее она представляется в виде системы неравенств вида (7). Затем находится значение радиуса $R = \min(R_{right}, R_{left})$, как описано в третьей главе. На первой итерации значения левой и правой границ совпадают и равны 0, то есть $x_{4,left} = x_{4,right} = 0$, см. (6). При этом знак b_i может быть как положительным, так и отрицательным, так как при произвольном выборе начальных данных начало координат может оказаться вне выпуклой оболочки, и радиус сферы в этом случае формально будет принимать отрицательное значение в начальный момент. В случае если и после оптимизации итоговое значение R останется отрицательным, такая конфигурация начальных данных считается неудачной и в дальнейшем не рассматривается.
- 3) Границы расширяются на каждой следующей итерации:

$$\begin{aligned}x_{4,left,i} &= x_{4,left,i-1} - 0.01, \\x_{4,right,i} &= x_{4,right,i-1} + 0.01\end{aligned}$$

- 4) Начальные данные для i -ого шага задаются как значения, найденные после оптимизации на $i-1$ шаге.
- 5) Итоговая конфигурация получается после оптимизации с границами $x_{4,left} = -0.05$, $x_{4,right,i} = 0.05$.

б) Знак итогового значения R проверяется на последнем шаге. Проводится отбор полученных конфигураций: если после оптимизации искомый радиус оказывается отрицательным, то это означает, что в выпуклую оболочку векторов не удастся вписать гиперцилиндр с заданной осью, и такая конфигурация не рассматривается в дальнейшем.

Пример полученных описанным способом результатов наглядно представлен на Рис. 7, 8, а значения углов, описывающих оси тяги двигателей e_i , и полярные координаты, задающие векторы r_i , приведены в Таблице 1.

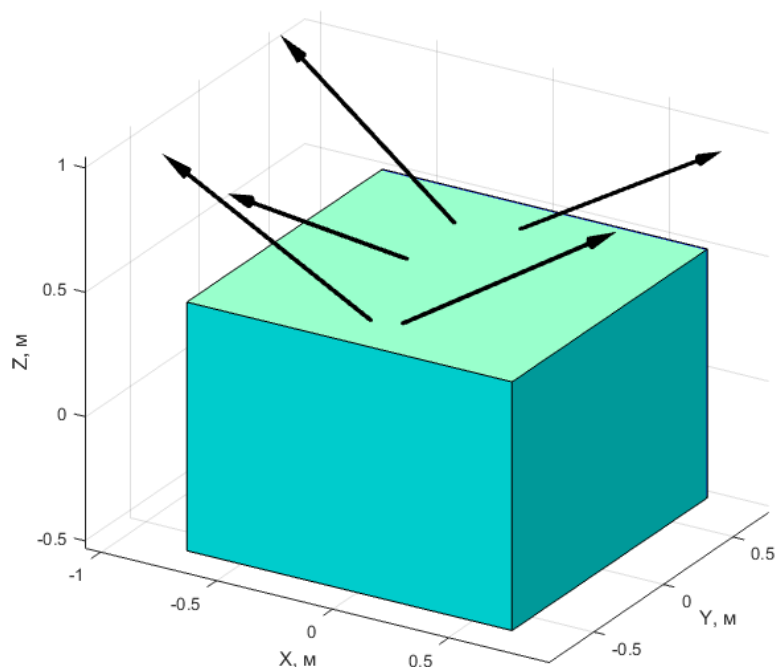
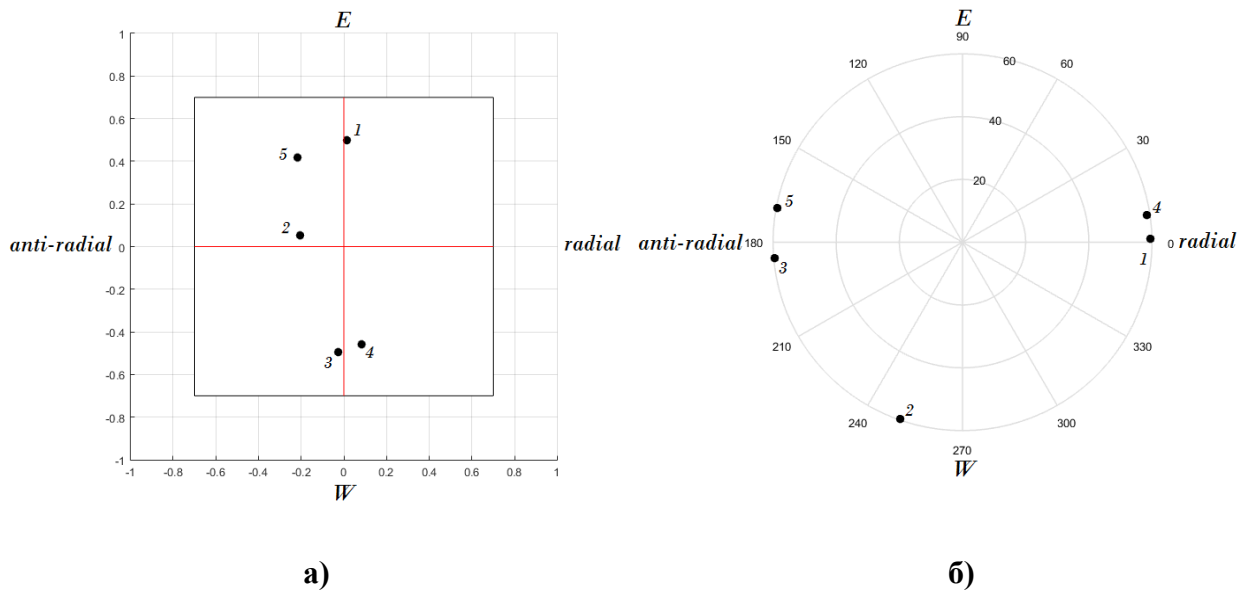


Рисунок 7 – Локальное оптимальное распределение пяти двигателей коррекции

Таблица 1

№	φ_i	θ_i	r_i (м)	α_i
1	-87.42°	59.62°	0.497	88.37°
2	85.17°	59.49°	0.209	165.67°
3	-82.09°	59.69°	0.496	267.03°
4	88.49°	58.98°	0.466	280.25°
5	52.03°	59.71°	0.471	117.49°



а) расположение двигателей \mathbf{r}_i ,
 б) направления осей тяги двигателей \mathbf{e}_i

Для приведенной конфигурации максимально возможный кинетический момент равен $46.01 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. На аппаратах схожей массы обычно используются маховики с максимально допустимым значением кинетического момента $10\text{-}20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, например, ДМ-10-25 ДМ20-250 (АО «Корпорация «ВНИИЭМ», [8]). Таким образом, рассматриваемая конфигурация двигателей позволяет за одну коррекцию целиком разгрузить избыточный кинетический момент, накопленный маховиками. В дальнейшем будем рассматривать маховики с запасом кинетического момента равным $16 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

4.2. Оптимизация расхода топлива

Полученные в предыдущем пункте результаты показывают принципиальную возможность одновременной разгрузки маховиков и выдачи корректирующего импульса. Отметим важный результат: при решении оптимизационной задачи положение двигателей выходит на поставленные ограничения, а именно угол между осями их тяги и

вертикалью становится равным практически шестидесяти градусам (Рис. 8б). Это означает, что на коррекцию наклона орбиты будет тратиться в два раза больше времени (а значит, и топлива), чем в случае использования вертикально расположенных двигателей. Это приводит к необходимости изменения целевого функционала: в дальнейшем будем рассматривать задачу минимизации расхода топлива. При этом требования на возможность выдачи управляющего воздействия в плоскости OYZ и изменения кинетического момента должны быть удовлетворены.

Для того, чтобы найти конфигурацию, при которой затраты на топливо будут минимальны, но при этом сохранится возможность разгрузки маховиков, необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^5 e_{i,z}^2 \rightarrow \max \quad (14)$$

$$R > R_0$$

Физический смысл состоит в следующем: двигатели располагаются так, чтобы суммарная проекция векторов e_i на ось OZ была максимальна. При этом из второго уравнения системы (2), а именно

$$\sum_{i=1}^5 e_{i,z} \Delta t_i = \frac{\Delta V_z m_s}{f}, \quad (15)$$

следует, что при фиксированной правой части уравнения (15), время работы двигателей Δt_i можно уменьшить, то есть израсходовать меньше топлива.

При решении этой оптимизационной задачи также следует учесть то, что нужно уметь выдавать ненулевое значение кинетического момента в любом направлении. В этом случае не обязательно максимизировать сферу возможных изменений кинетического момента, важно лишь гарантированно выдавать значения из некоторого ограниченного диапазона:

$$0 < |\Delta \mathbf{h}_\Sigma| \leq \frac{h_{\max}}{2}, \text{ где } h_{\max} = 16 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$$

Как было показано в п. 4.1, кинетический момент может отличаться заданного ограничения более чем в 5 раз, поэтому все значения, бóльшие $\frac{h_{\max}}{2}$, нужно искусственно обрезать. При этом нужно, чтобы функционал Φ_1 оставался гладким, поэтому сделаем плавный переход, а именно, аппроксимацию кубическим сплайном (Рис.9):

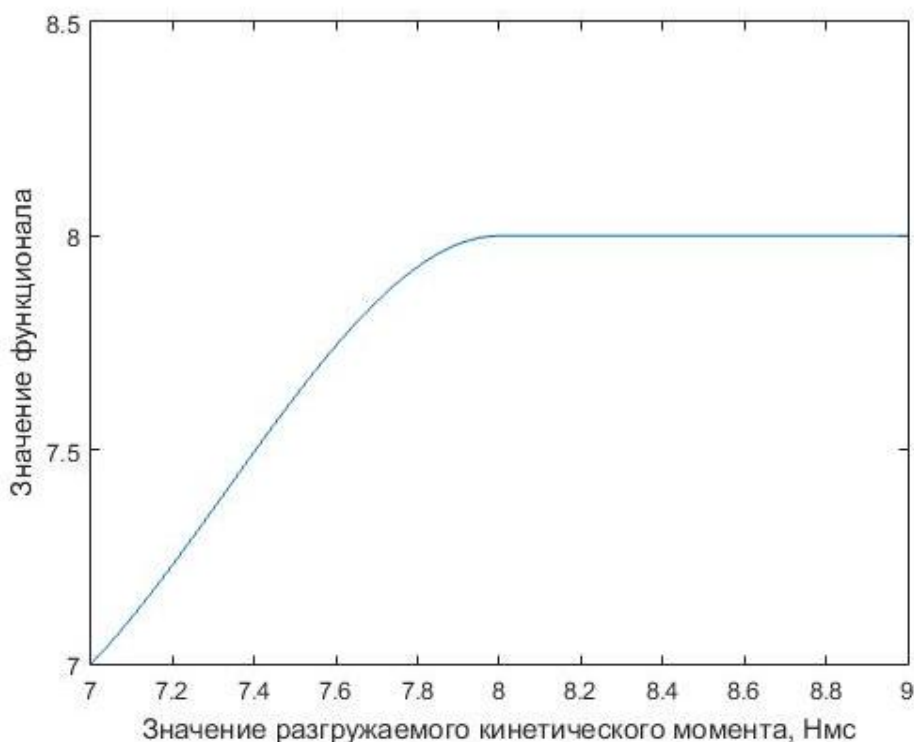


Рисунок 9 – Зависимость значения функционала Φ_1 от значения кинетического момента

Модифицированное выражение для функционала Φ_1 выглядит следующим образом:

$$\Phi_1 = \begin{cases} 8, & \Delta h_{\Sigma} \geq 8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \\ (2t^3 - 3t^2 + 1)p_k + (t^3 - 2t^2 + t)(x_{k_1} - x_k)m_k + \\ \quad + (-2t^3 + 3t^2)p_{k_1} + (t^3 - t^2)(x_{k_1} - x_k)m_{k_1}, & 7 < \Delta h_{\Sigma} < 8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \\ \Delta h_{\Sigma}, & \Delta h_{\Sigma} \leq 7 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \end{cases} \quad (16)$$

где $t = \Delta h_{\Sigma} - 7$, $p_k = 7$, $p_{k_1} = 8$, $x_k = 7$, $x_{k_1} = 8$, $m_k = 1$, $m_{k_1} = 0$.

Для решения оптимизационной задачи (14) в качестве начальных данных выберем решение описанной в п. 4.1. оптимизационной задачи (12), с учетом модифицированной записи функционала Φ_1 (16). Таким образом, решение этой задачи гарантированно обеспечит возможность разгрузки маховиков в любом направлении, а оптимизация при этом будет направлена только на уменьшение затрат топлива. Итерационный подход по расширению границ здесь использовать не нужно, так как начальные данные выбраны уже с корректными границами.

Пример полученных описанным способом результатов наглядно представлен на Рис. 10, 11, а значения углов и r_i приведены в Таблице 2.

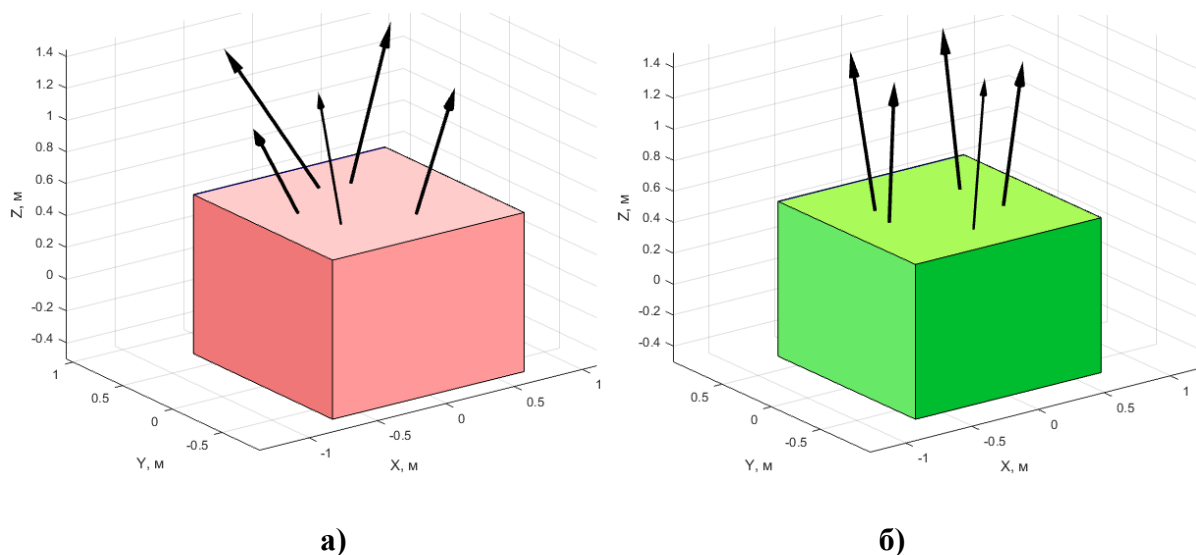


Рисунок 10 – Локальное оптимальное (с точки зрения затрат топлива) распределение пяти двигателей коррекции: а) начальные данные, б) итоговое распределение

Таблица 2

а) начальные данные

№	φ_i	θ_i	r_i (м)	α_i
1	-6.99°	19.62°	0.371	217.51°
2	-33.51°	33.04°	0.351	61.75°
3	43.23°	41.51°	0.394	167.47°
4	-29.11°	24.08°	0.382	297.26°
5	18.08°	40.75°	0.351	95.76°

б) итоговое распределение

№	φ_i	θ_i	r_i (м)	α_i
1	20.99°	4.95°	0.406	264.07°
2	-47.04°	11.99°	0.391	146,71°
3	62.49°	11.75°	0.377	179,72°
4	-62.43°	10.81°	0.394	334,62°
5	48.73°	12.17°	0.378	34,47°

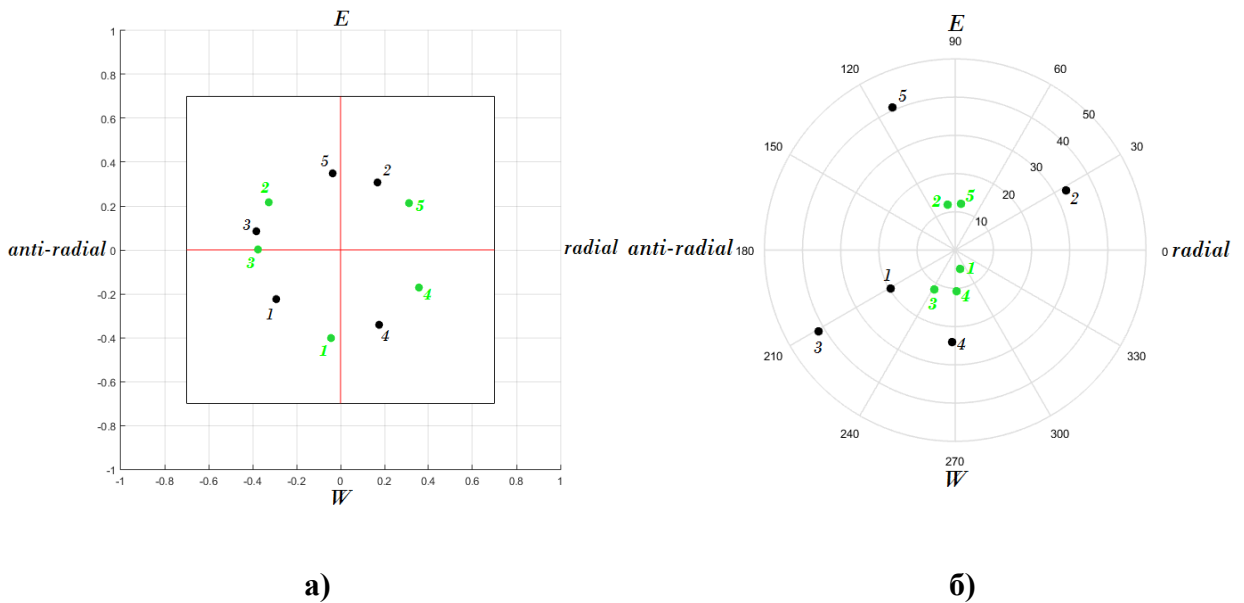


Рисунок 11 – Чёрным – начальные условия, зелёным – итоговое распределение
а) расположение двигателей r_i , б) направления осей тяги двигателей e_i

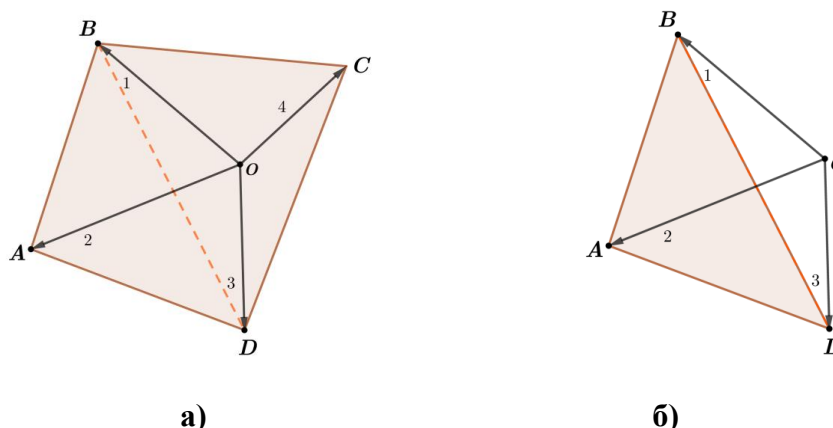
Для начальных данных в этой оптимизационной задаче значение функционала $\Phi_1 = 8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, то есть достигнуто максимально допустимое значения. После решения оптимизационной задачи (14) функционал $\Phi_2 = 4.83$, а $\Phi_1 = 5.65 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. По расходу топлива полученная конфигурация близка к глобальному максимуму функционала Φ_2 без учета ограничений, поэтому её использование является целесообразным. Максимальное значение $\Phi_{2,\max} = 5$, так как он является суммой квадратов проекций единичных векторов e_i ($i = \overline{1,5}$) на ось OZ .

5. Выход из строя одного из двигателей

В предыдущих главах было сказано, что для обеспечения одновременной коррекции орбиты и разгрузки маховиков необходимо установить, по крайней мере, пять двигателей. Однако, в случае выхода из строя одного из них, будет невозможно удовлетворить всем условиям. Поэтому необходимо определить, какое минимальное количество двигателей должно быть установлено на аппарате, чтобы система сохраняла работоспособность даже в случае выхода из строя любого из них. Кроме того, нужно расположить двигатели оптимальным с точки зрения затрат топлива образом.

Докажем, что добавление одного двигателя не позволяет решить поставленную задачу. Проведем доказательство в общем случае для n -мерного пространства. Чтобы выпуклая оболочка из k точек в n -мерном пространстве имела ненулевой объем, необходимы как минимум $k = n + 1$ точки. При этом если один двигатель выйдет из строя, то, так как выпуклая оболочка n двигателей в n -мерном пространстве имеет нулевой объем, система перестанет быть работоспособной. Рассмотрим тогда $k = n + 2$ двигателя. Построим для них выпуклую оболочку и проведем в ней внутреннюю (не совпадающую с гранью выпуклой оболочки) гиперплоскость через произвольный набор из n точек. Тогда оставшиеся две точки будут лежать с противоположных сторон от гиперплоскости. Таким образом, гиперплоскость делит выпуклую оболочку на две n -мерные пирамиды с общим основанием, а в случае выхода из строя одного из двух двигателей, расположенных в вершинах, останется только одна пирамида. При этом невозможно гарантировать, что начало координат будет внутри выпуклой оболочки оставшихся точек, она может являться внутренней точкой удаленной пирамиды или может лежать в гиперплоскости, что также не удовлетворяет условиям задачи. Следовательно, добавление одного

двигателя не решает проблему. Для наглядности приведем пример на плоскости (Рис. 12).



**Рисунок 12 – а) выпуклая оболочка $k = 4$ двигателей в двухмерном ($n = 2$) пространстве, BD – внутренняя гиперплоскость, ABD и CBD – 2-мерные пирамиды с общим основанием BD ,
б) четвертый двигатель вышел из строя, начало координат – внешняя точка для выпуклой оболочки оставшихся векторов.**

Покажем, что добавления двух двигателей достаточно. Для этого приведем пример такого расположения семи двигателей коррекции, при котором в случае отказа любого из них система сохранит свою работоспособность. Для получения конфигурации используется подход, аналогичный описанному в п. 4.1, с единственным отличием в том, что в случае семи двигателей с возможностью отказа одного из них нужно проверять каждый набор из шести двигателей в отдельности, имитируя отказ одного оставшегося (Таблица 3 и Рис. 13, 14, назовём полученную конфигурацию «Лебедь»).

Таблица 3

№	φ_i	θ_i	r_i (м)	α_i
1	-1.48°	36.31°	0.486	91.25°
2	75.23°	58.98°	0.405	114.56°
3	-83.04°	54.49°	0.483	223.78°
4	-78.99°	58.33°	0.422	309.72°
5	82.73°	56.21°	0.481	315.31°
6	-68.75°	59.02°	0.403	50.23°
7	76.06°	58.32°	0.439	222.72°

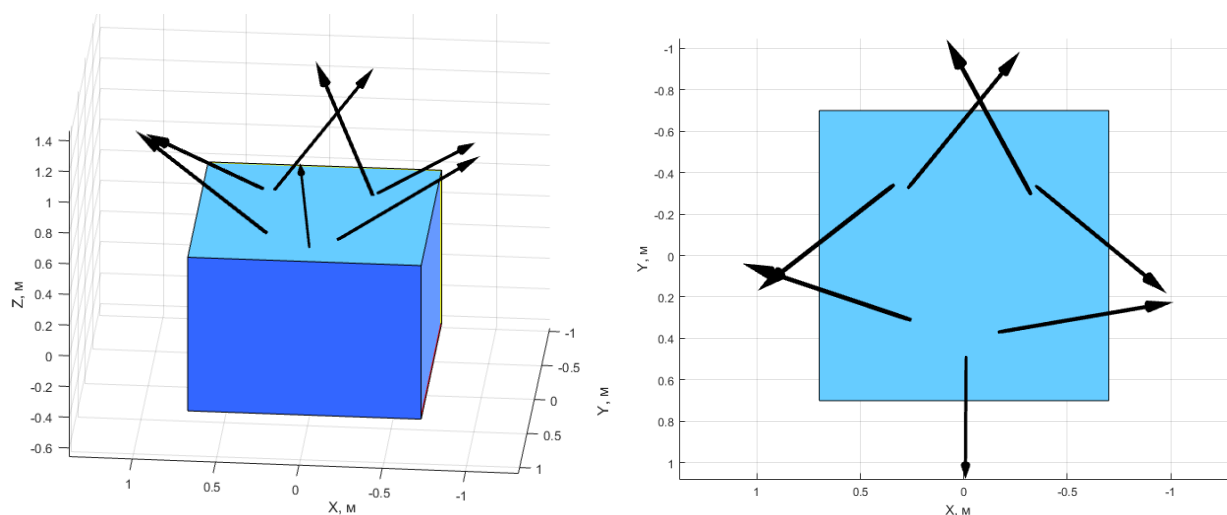
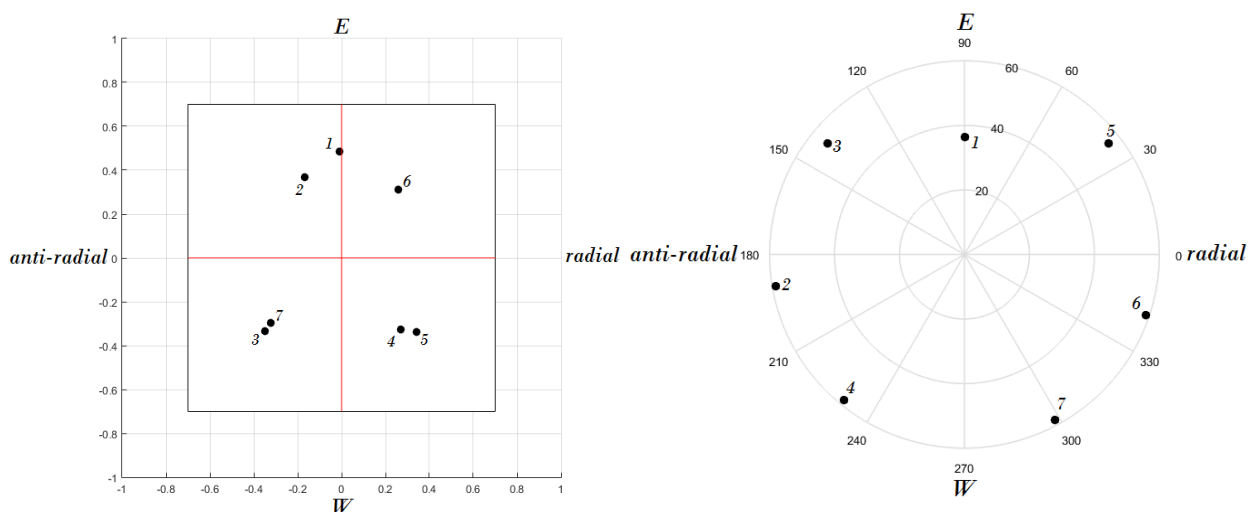


Рисунок 13 – Конфигурация «Лебедь»



а)

б)

Рисунок 14 – а) расположение двигателей r_i ,

б) направления осей тяги двигателей e_i

Функционал и, соответственно, максимально возможный кинетический момент в полученной конфигурации равен $11.27 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, что сильно хуже, чем в случае пяти двигателей. Это связано с тем, что здесь любые шесть из семи двигателей должны обеспечивать выполнение целевой задачи, при этом одновременно увеличивать размер сферы кинетического момента для каждой из шестерок не представляется возможным.

Однако конфигурация «Лебедь» (см. Рис. 13) не является оптимальной с точки зрения затрат топлива. Для того чтобы оптимизировать расположение двигателей, будем использовать численные методы оптимизации и подход, аналогичный описанному в п. 4.2 для пяти двигателей. Здесь также нужно проверять каждый набор из шести двигателей в отдельности. Кроме того, на расстояние между любой парой двигателей наложим дополнительное ограничение:

$$dist_{ij} \geq \rho_0, \quad i \neq j, \quad (17)$$

где $dist_{ij} = |\mathbf{r}_{i,xy} - \mathbf{r}_{j,xy}|$, $\rho_0 = 0.07$ м. Это ограничение связано с тем, что двигатели имеют конечный размер, поэтому они должны быть расположены на достаточном расстоянии друг от друга.

Результаты, полученные таким способом, приведены в Таблице 4 и на Рис. 15, 16.

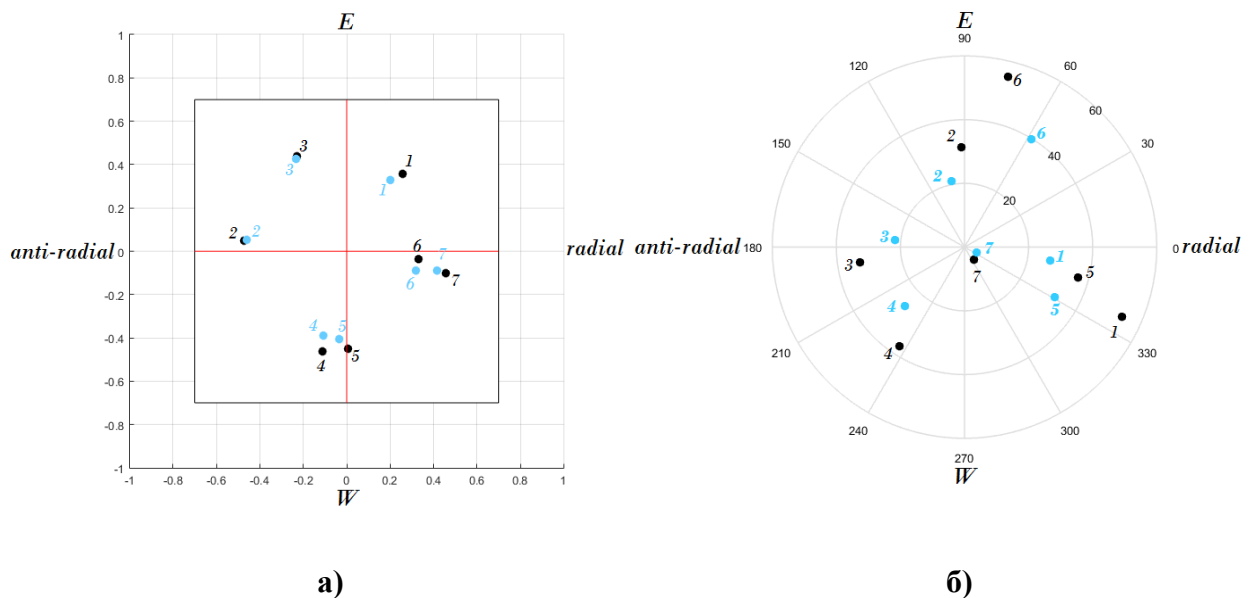


Рисунок 15 – Чёрным – начальные условия, голубым – итоговое распределение

а) расположение двигателей \mathbf{r}_i ,

б) направления осей тяги двигателей \mathbf{e}_i

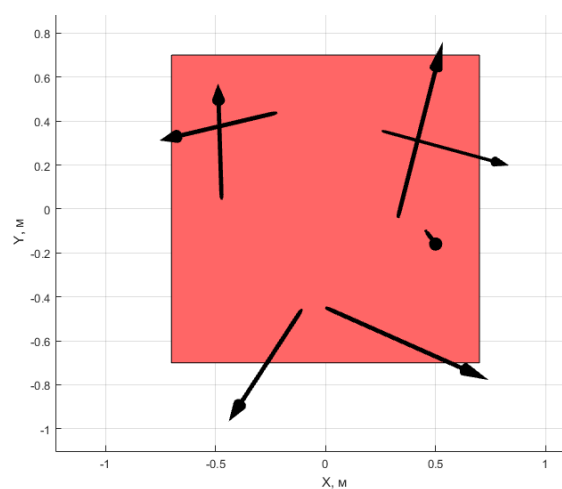
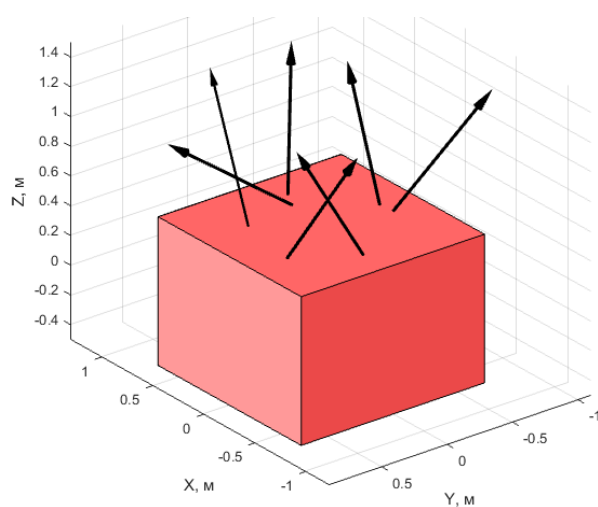
Таблица 4

а)

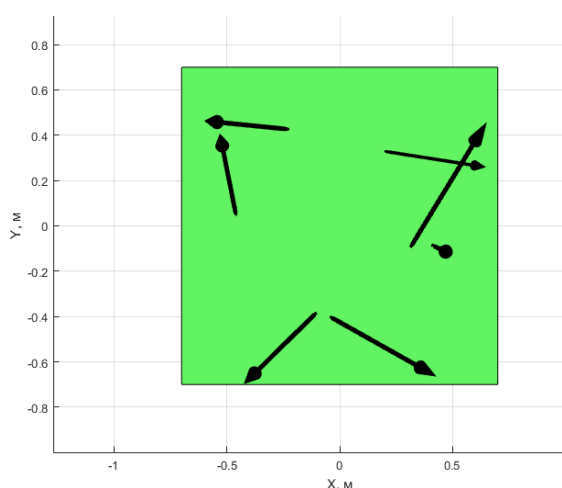
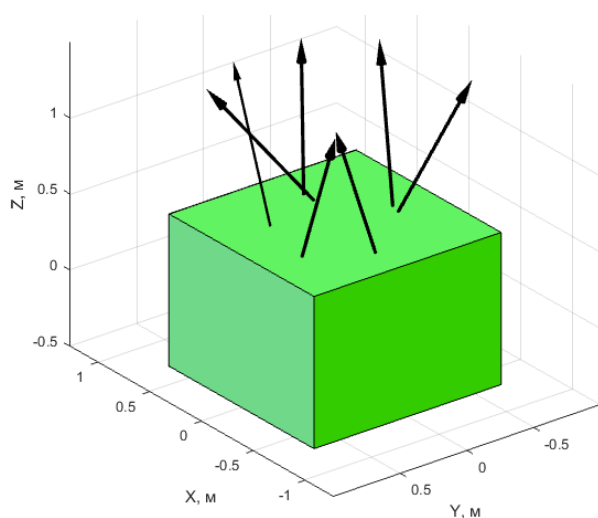
№	φ_i	θ_i	r_i (м)	α_i
1	-69.24°	36.68°	0.439	54°
2	-82.29°	31.43°	0.475	174.12°
3	75.89°	32.86°	0.493	117.55°
4	-19.58°	37.06°	0.474	256.61°
5	65.49°	53.76°	0.450	270.71°
6	81.87°	55.18°	0.332	354.04°
7	-40.19°	4.74°	0.469	347.48°

б)

№	φ_i	θ_i	r_i (м)	α_i
1	-67.60°	26.96°	0.384	58.73°
2	-72.03°	21.09°	0.464	173.37°
3	55.72°	21.67°	0.486	118.65°
4	-29.94°	26.23°	0.403	254.48°
5	65.86°	32.18°	0.406	265.05°
6	74.11°	39.88°	0.329	344.64°
7	-13.72°	4.09°	0.424	348.27°



а)



б)

Рисунок 16 – Конфигурация «Пьеро»

а) начальные данные, б) итоговое распределение

Для начальных данных в этом случае значение кинетического момента равно $5.39 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, что в два раза меньше результатов конфигурации «Лебедь». Это связано с наложением дополнительного ограничения (17) на расстояния между любыми двумя парами двигателей. В итоговом распределении $\Phi_1 = 3.15 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, а $\Phi_2 = 5.63$, что составляет около 83% от глобального максимума без учета ограничений (в случае 7-ми двигателей $\Phi_{2,\max} = 7$).

6. Влияние ошибок установки

Рассмотрим итоговую конфигурацию для пяти двигателей, приведенную на Рис. 10б и в Таблице 2б, а также конфигурацию для семи двигателей, представленную на Рис. 15б и в Таблице 4б. Исследуем эти конфигурации на устойчивость (чувствительность к ошибкам установки). Будем произвольно в заданном диапазоне варьировать все компоненты (20 параметров для пяти двигателей и 28 параметров для семи двигателей) и вычислять значения функционалов Φ_1 и Φ_2 . Зададим формально диапазон отклонений для i -го двигателя. Переведем (r_i, α_i) в декартовы координаты $(r_{i,x}, r_{i,y})$:

$$r_{i,x} = r_i \cos \alpha_i$$

$$r_{i,y} = r_i \sin \alpha_i$$

«Зашумленные» значения $(r_{i,x,noise}, r_{i,y,noise})$ получим следующим образом:

$$r_{i,x,noise} = N(r_{i,x}, \sigma^2)$$

$$r_{i,y,noise} = N(r_{i,y}, \sigma^2)$$

где $N(\mu, \sigma^2)$ – нормальное распределение, μ – математическое ожидание, $\sigma = 3$ мм – среднеквадратичное отклонение.

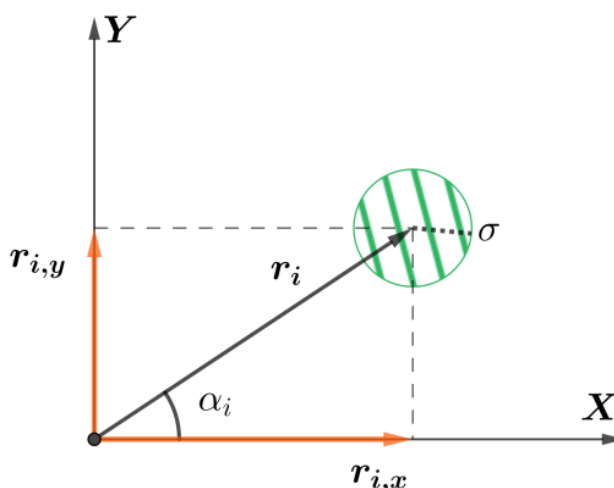


Рисунок 17 – Диапазон возможных ошибок для (r_i, α_i)

После этого возвращаемся к исходным параметрам:

$$r_{i,noised} = \sqrt{r_{i,x,noised}^2 + r_{i,y,noised}^2}$$

$$\alpha_{i,noised} = \arctg\left(\frac{r_{i,y,noised}}{r_{i,x,noised}}\right) \in [0, 2\pi)$$

Для (θ_i, φ_i) диапазон зададим иначе, так как эти параметры описывают уже трехмерный вектор. Сначала перейдем в декартову систему координат (с.к.), в которой вектор \mathbf{e}_i сонаправлен с третьей координатной осью. Обозначим через

$$\mathbf{e}_{i,new} = \mathbf{T}\mathbf{e}_i$$

где \mathbf{T} – матрица перехода из исходной с.к. XYZ (ССК) в указанную $X_1Y_1Z_1$ (Рис. 18, 19).

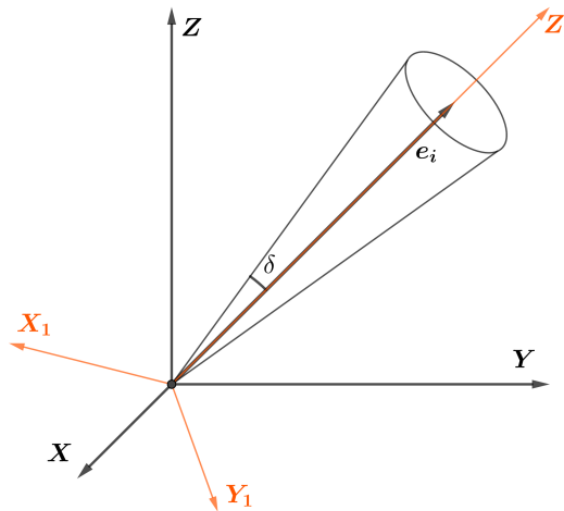


Рисунок 18 – Диапазон возможных отклонений для \mathbf{e}_i

Далее в этой с.к. зашумленный вектор $\mathbf{e}_{i,noised}$ получим следующим способом с помощью сферических координат:

$$\mathbf{e}_{i,new,noised} = \begin{pmatrix} \sin \xi_i \cos \zeta_i \\ \sin \xi_i \sin \zeta_i \\ \cos \xi_i \end{pmatrix}$$

где $\xi_i = N(0, \delta^2)$ – нормально распределенная случайная величина с дисперсией δ^2 (Рис.18), $\zeta_i = U[0, 2\pi]$ – равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$ случайная величина.

Затем при помощи обратной матрицы перехода получим зашумленный вектор в исходной с.к.:

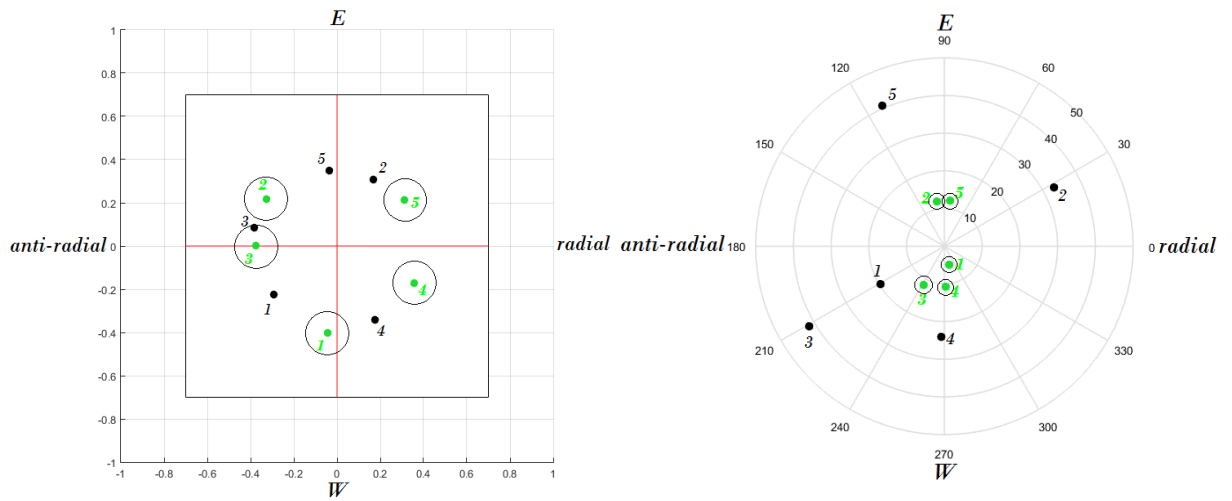
$$\mathbf{e}_{i, noised} = \mathbf{T}^T \mathbf{e}_{i, new, noised}$$

Для параметров ξ_i , отвечающего за угол полураствора конуса, рассмотрим три значения среднеквадратичного отклонения, а именно, $\delta_1 = 0.1^\circ$, $\delta_2 = 1^\circ$, $\delta_3 = 5^\circ$. Так как $\Phi_2 = \sum_i e_{i,z}^2 = \sum_i \cos^2 \xi_i$, то при увеличении среднеквадратичного отклонения угла ξ_i , функционал будет уменьшаться (на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \cos^2 x$ монотонно убывающая), поэтому можно посчитать значение функционала при максимальном отклонении.

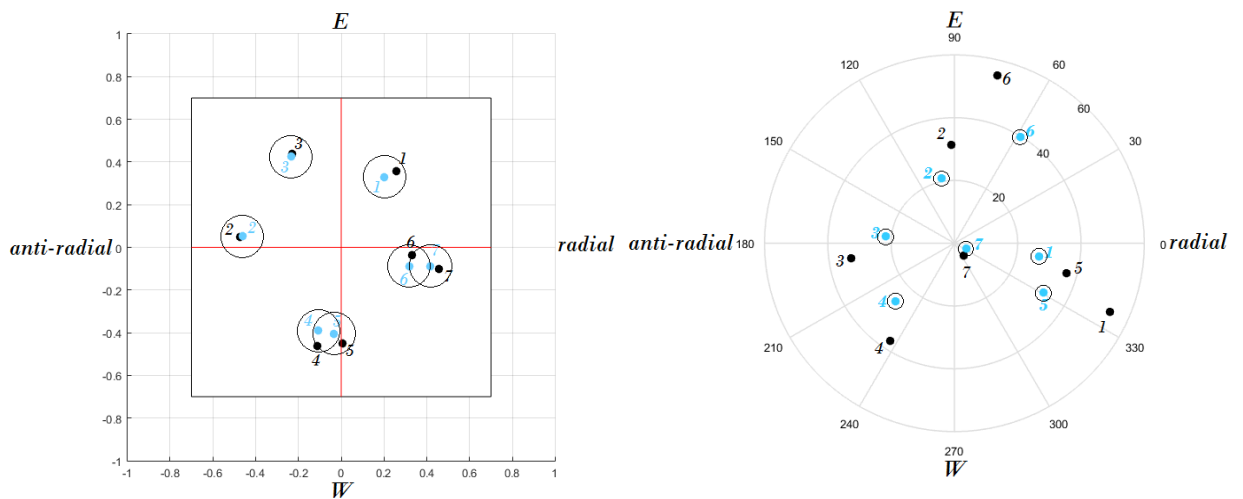
С учетом того, что значение нормально распределённой случайной величины с математическим ожиданием равным нулю с вероятностью $\sim 0,9973$ лежит в интервале $\xi \in (-3\delta, 3\delta)$, можно посчитать значения Φ_2 для величины $\xi_{i, noised} = \xi_i + 3\delta$ в каждом случае:

	$3\delta_1 = 3 \cdot 0.1^\circ$	$\Phi_{2,1} = 4.82$
5 двигателей, $\Phi_2 = 4.83$ (номинальное):	$3\delta_2 = 3 \cdot 1^\circ$	$\Phi_{2,2} = 4.72$
	$3\delta_3 = 3 \cdot 5^\circ$	$\Phi_{2,3} = 4.08$
	$3\delta_1 = 3 \cdot 0.1^\circ$	$\Phi_{2,1} = 5.61$
7 двигателей, $\Phi_2 = 5.64$ (номинальное):	$3\delta_2 = 3 \cdot 1^\circ$	$\Phi_{2,2} = 5.36$
	$3\delta_3 = 3 \cdot 5^\circ$	$\Phi_{2,3} = 4.10$

Из полученных значений видно, что даже в случае самого большого отклонения ухудшение функционала Φ_2 не превышает 15-20%.



а)



б)

Рисунок 19 – Диапазоны возможных ошибок для γ_i и ϵ_i :

а) случай пяти двигателей, б) случай семи двигателей

Теперь для этих же значений среднеквадратичного отклонения параметра ξ_i проведем серию испытаний методом Монте-Карло (100 тысяч испытаний в каждом случае), вычисляя значения функционалов Φ_1 в каждом случае. Результаты моделирования влияния ошибок установки на функционал Φ_1 наглядно представлены на Рис. 20, 21 и 22 для случая пяти двигателей и на Рис. 23, 24 и 25 – для семи. Напомним, что номинальное

значение кинетического момента в первом случае равно $5.65 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, а во втором $3.15 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$.

При малых отклонениях ($\delta_1 = 0.1^\circ$) система слабо чувствительна к ошибкам установки (в худшем случае значение функционала уменьшается на 15-35%), причем медиана измерений стремится к номинальному значению кинетического момента, как в случае штатной работы, так и в случае возможного отказа одного из двигателей. Можно заметить, что в выборке присутствуют конфигурации, для которых реализуется бóльшее значение кинетического момента, но при этом значение функционала Φ_2 , как было показано, уменьшается. Для бóльших отклонений ($\delta_2 = 1^\circ$, $\delta_3 = 5^\circ$) в выборке присутствуют отрицательные значения. Это означает, что в некоторых случаях вписать гиперцилиндр внутрь выпуклой оболочки полученной конфигурации не удастся, что не удовлетворяет условию задачи. Таким образом, функционал Φ_1 сильно чувствителен к ошибкам установки.

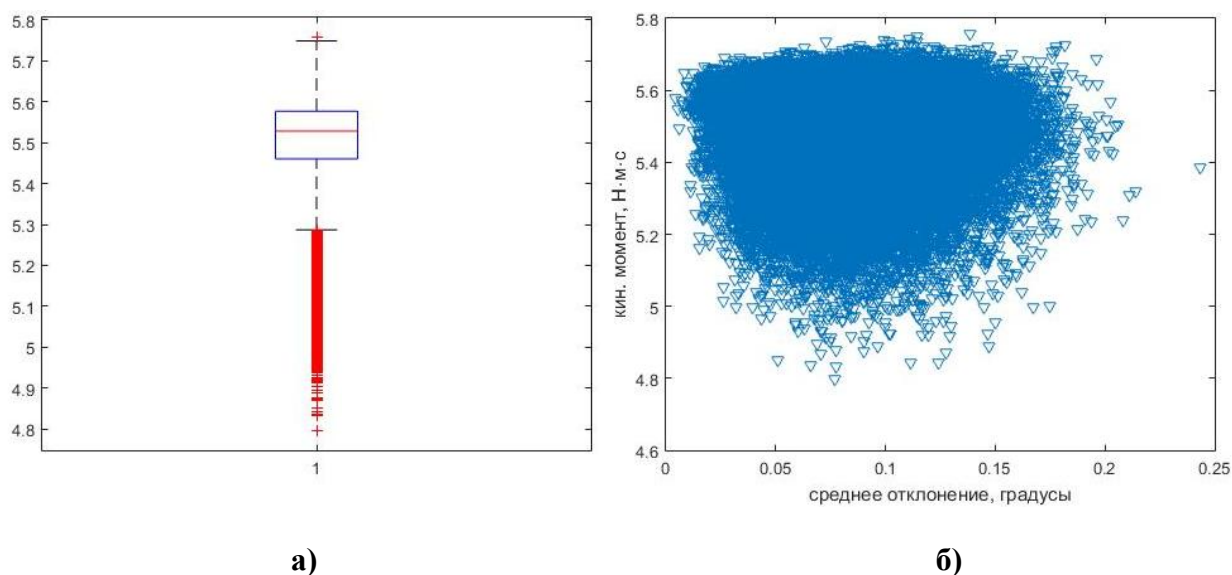


Рисунок 20 – Результаты испытаний для $\delta_1 = 0.1^\circ$, медиана измерений $5.53 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, максимально удаленное значение $4.79 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ (5 двигателей)

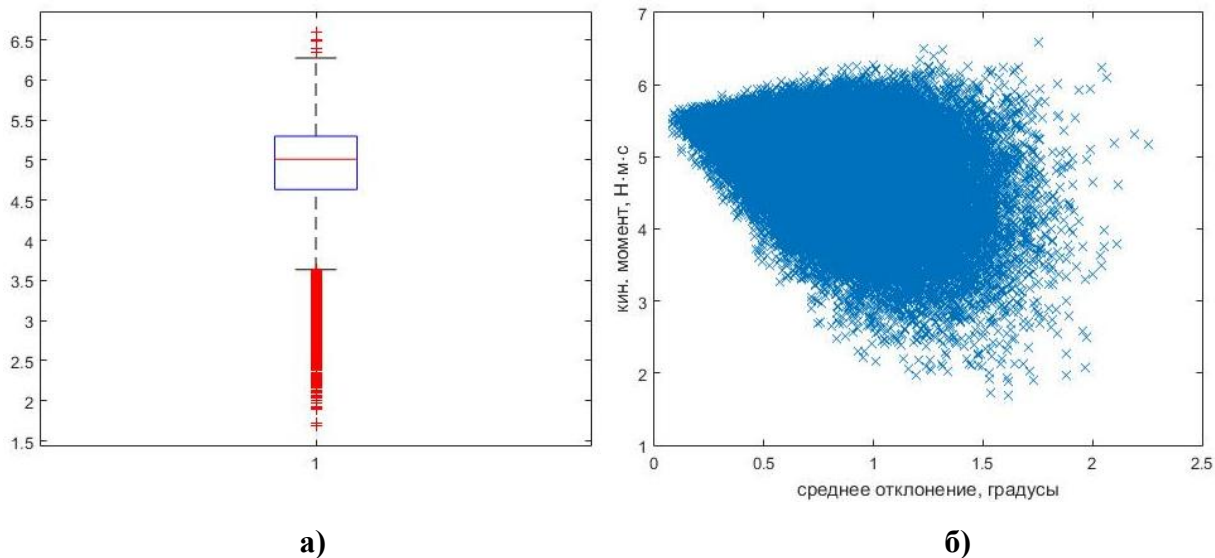


Рисунок 21 – Результаты испытаний для $\delta_2 = 1^\circ$, медиана измерений 5 Н·м·с, максимально удаленное значение 1.7 Н·м·с (5 двигателей)

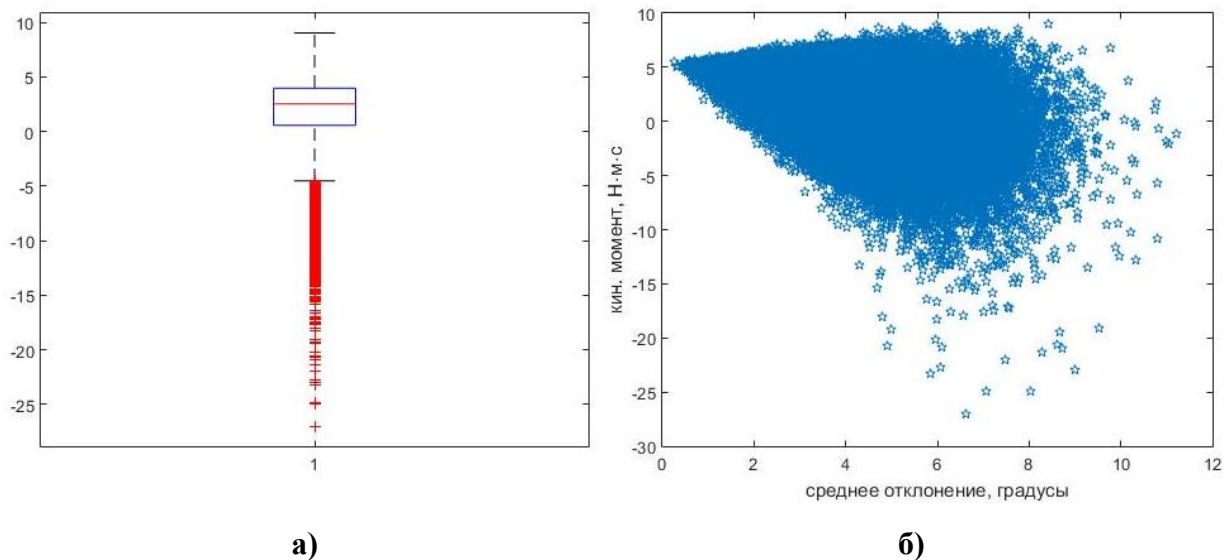
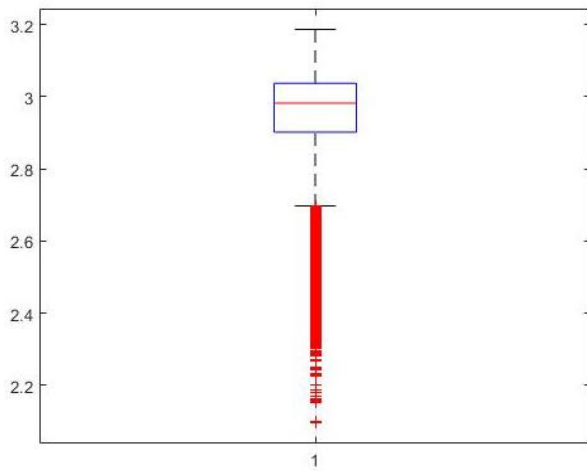
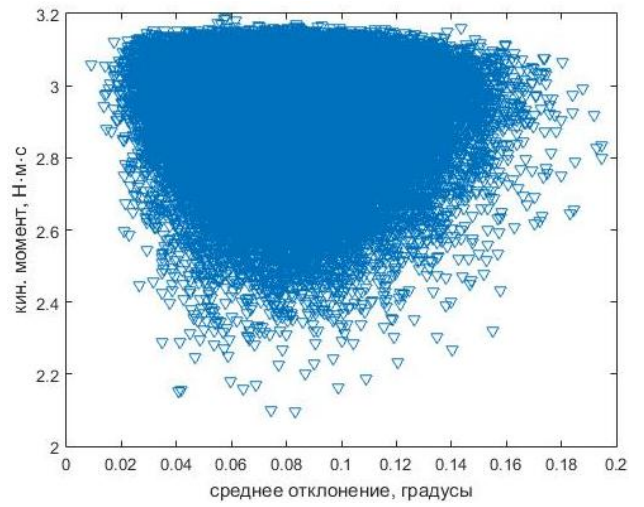


Рисунок 22 – Результаты испытаний для $\delta_3 = 5^\circ$, медиана измерений 2.5 Н·м·с, максимально удаленное значение -27 Н·м·с (5 двигателей)

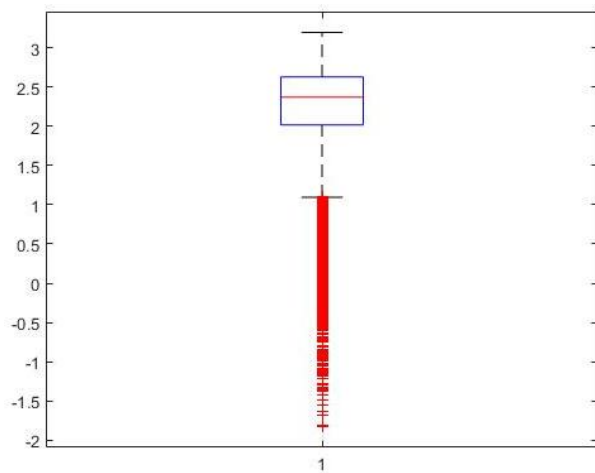


а)

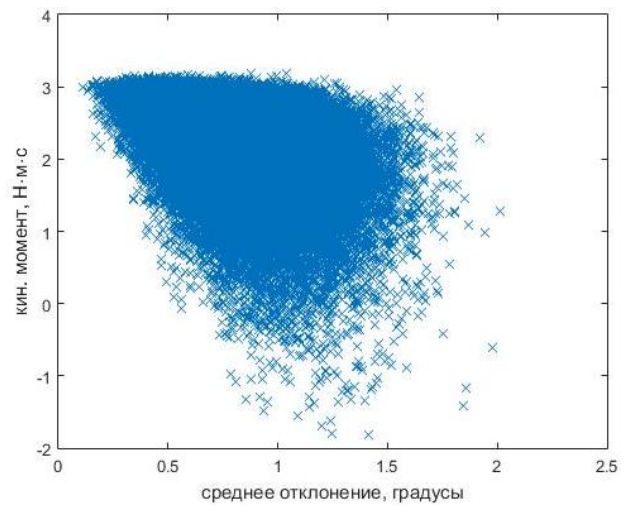


б)

Рисунок 23 – Результаты испытаний для $\delta_1 = 0.1^\circ$, медиана измерений 3 Н·м·с, максимально удаленное значение 2.1 Н·м·с (7 двигателей)

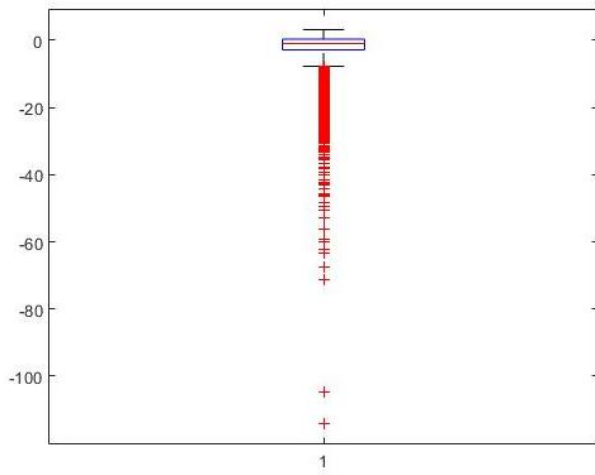


а)

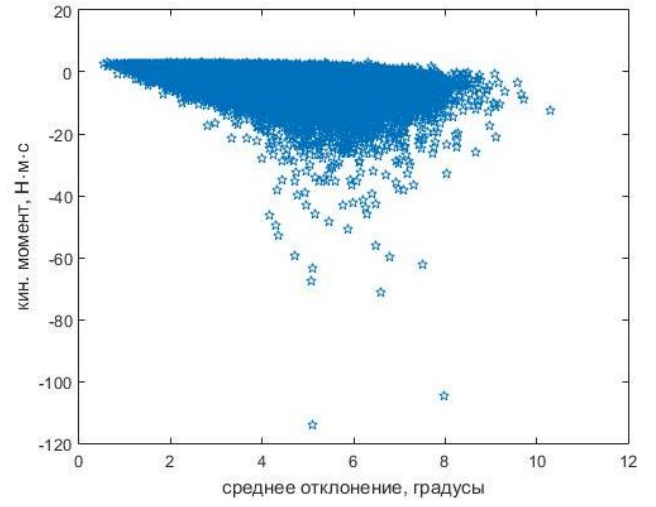


б)

Рисунок 24 – Результаты испытаний для $\delta_2 = 1^\circ$, медиана измерений 2.37 Н·м·с, максимально удаленное значение -1.8 Н·м·с (7 двигателей)



а)



б)

Рисунок 25 – Результаты испытаний для $\delta_3 = 5^\circ$, медиана измерений -1 Н·м·с, максимально удаленное значение -114 Н·м·с (7 двигателей)

7. Влияние смещения центра масс аппарата

Реальное положение центра масс (ц.м.) может отличаться от номинального значения по разным причинам, например, из-за расхода топлива и неравномерного опустошения топливных баков во время полета или из-за ошибок определения номинального положения ц.м. При этом изменяется момент, который создают двигатели, из-за смещения плеча силы (Рис. 26).

Рассмотрим четыре разных случая для анализа чувствительности полученных результатов к смещению положения ц.м. Первые три случая – это смещение ц.м. только вдоль одной оси – OX , OY или OZ , а четвертый случай – произвольное смещение ц.м. в пространстве (по всем трём осям). В каждом случае будем определять только значение функционала Φ_1 . На функционал Φ_2 влияние в этом случае не оказывается, так как положение осей тяги двигателей остается неизменным.

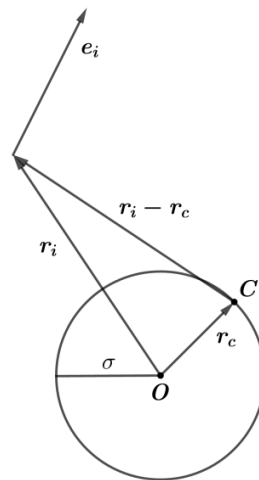


Рисунок 26 – Изменение плеча силы из-за смещения центра масс

Для моделирования первых трёх случаев рассмотрим максимально возможное отклонение центра масс от начального положения вдоль каждой из трёх осей равное одному сантиметру, как в положительном направлении, так и в отрицательном. Будем считать, что в рассматриваемом случае номинальное значение положения центра масс задается нулевым вектором.

Разобьём равномерно с шагом 0.4 мм отрезок $[-10, 10]$ мм по каждой оси на равные промежутки (18) и для всех значений вычислим значение функционала Φ_1 по оси OX , OY и OZ соответственно (Рис. 27):

$$\mathbf{r}_c = (c_x \quad c_y \quad c_z)^T = (0 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$\mathbf{r}_{c,noised} = (\tilde{c}_x, c_y, c_z)^T \text{ – смещение по оси } OX$$

$$\mathbf{r}_{c,noised} = (c_x, \tilde{c}_y, c_z)^T \text{ – смещение по оси } OY$$

$$\mathbf{r}_{c,noised} = (c_x, c_y, \tilde{c}_z)^T \text{ – смещение по оси } OZ$$
(18)

где $\tilde{c}_x, \tilde{c}_y, \tilde{c}_z$ принимают значения в отрезке $[-10, 10]$ мм с шагом $h = 0.4$ мм.

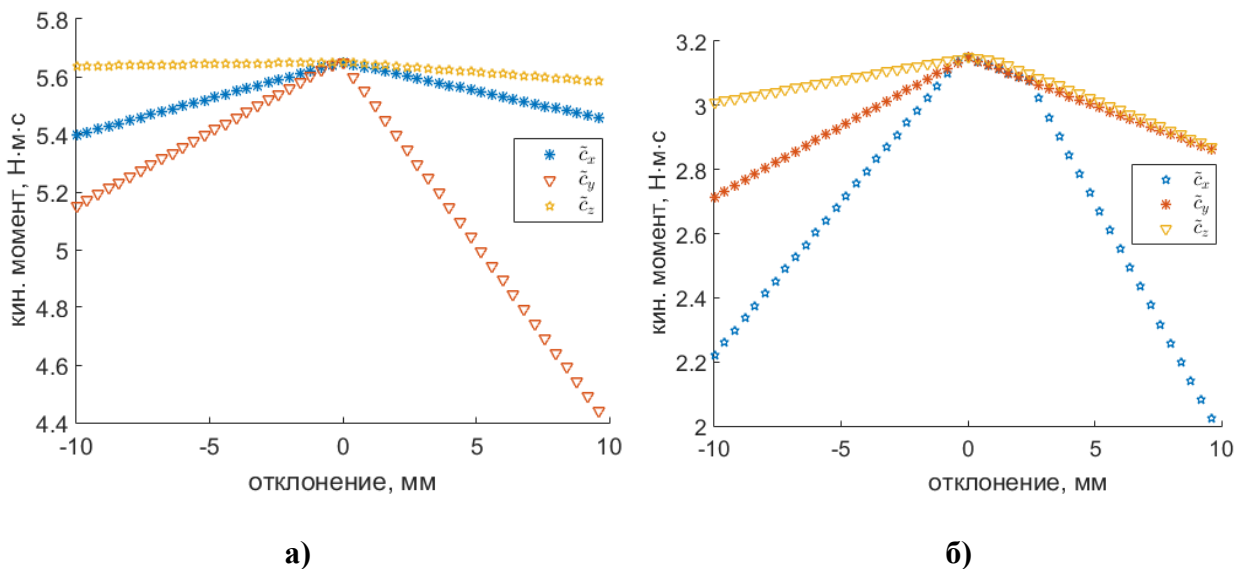


Рисунок 27 – Изменение функционала Φ_1 при смещении положения центра масс \mathbf{r}_c вдоль одной из главных осей: а) 5 двигателей, б) 7 двигателей.

Наиболее чувствительным для конфигурации пяти двигателей оказалось смещение центра масс вдоль оси OY , а для случая семи двигателей – вдоль OX . На данном этапе исследования не удастся объяснить это явление, но, по всей вероятности, оно связано с особенностями сложной геометрии построения выпуклой оболочки.

В четвертом, более общем случае, для моделирования ошибки смещения центра масс в произвольном направлении зададим радиус-вектор зашумленного положения как нормально распределенную случайную величину:

$$\mathbf{r}_{c, noised} = N(\mathbf{r}_c, \sigma^2)$$

с математическим ожиданием \mathbf{r}_c и среднеквадратичным отклонением $\sigma = 3$ мм. Таким образом, в интервал $(-3\sigma, 3\sigma)$ попадут почти все значения выборки, что позволит соотнести полученные в трёх первых случаях результаты с четвёртым. На Рис. 28 и 29 приведены результаты, полученные численным моделированием (выборка – 10000 нормально распределенных случайных величин).

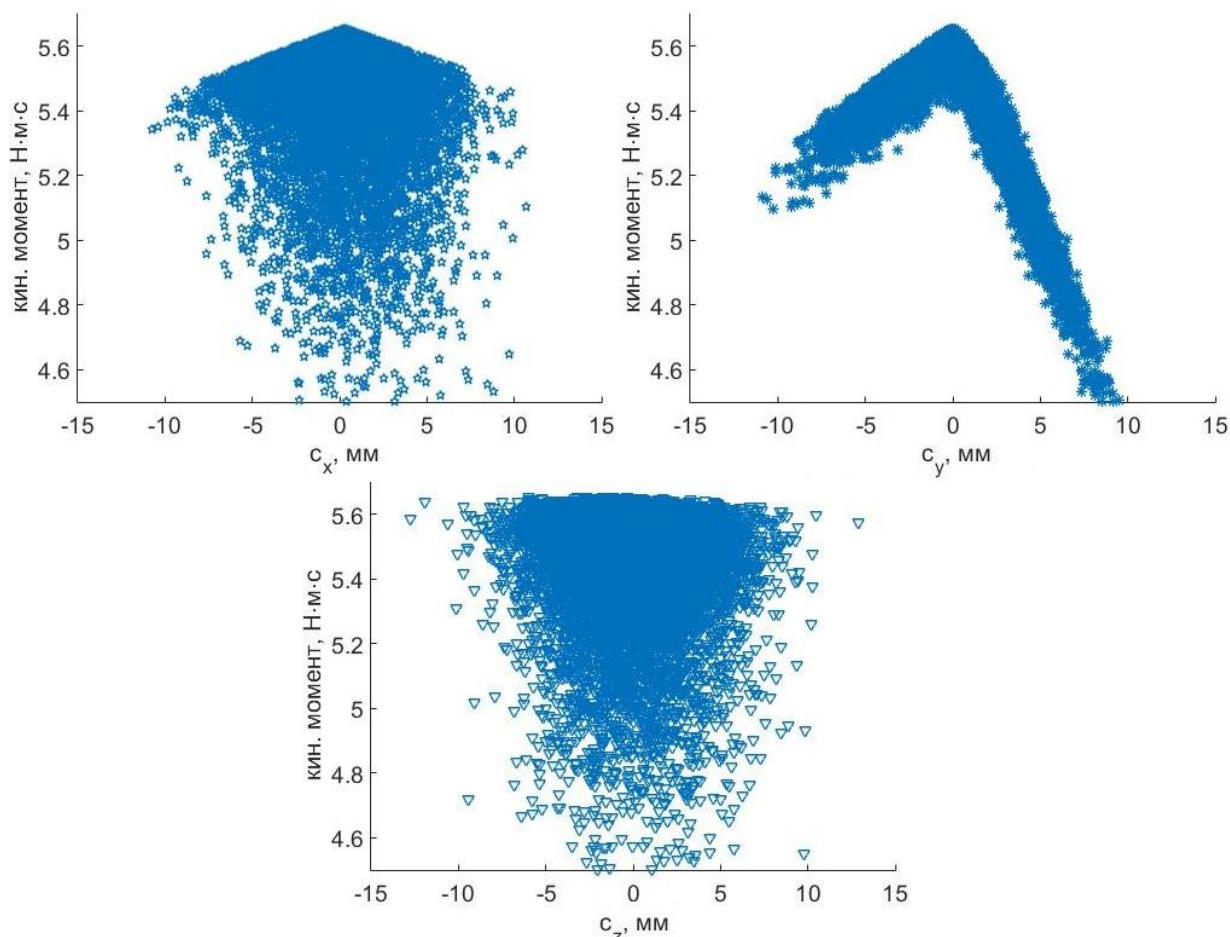


Рисунок 28 – Зависимость функционала Φ_1 от произвольного смещения положения центра масс в пространстве для конфигурации из пяти двигателей

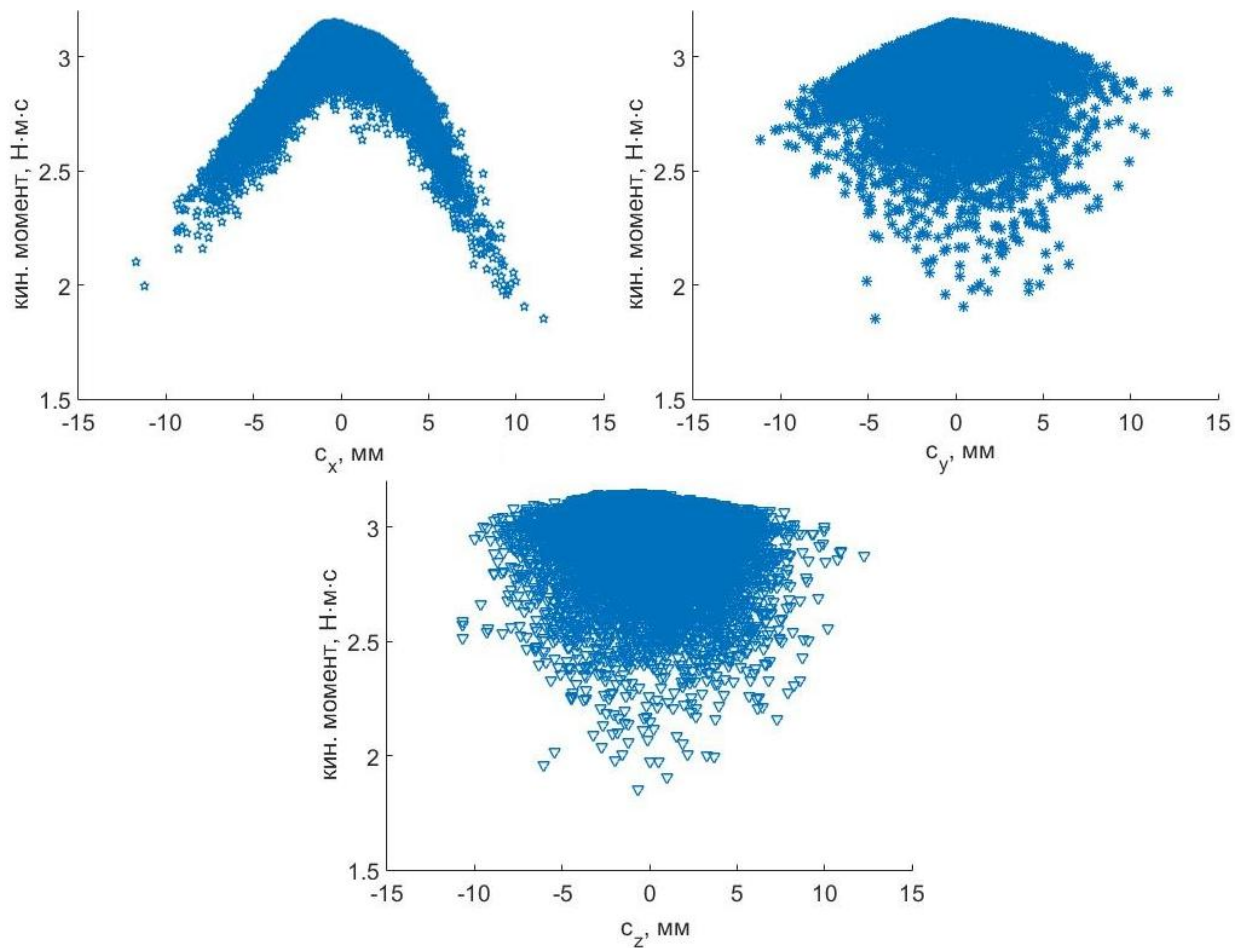


Рисунок 29 – Зависимость функционала Φ_1 от произвольного смещения положения центра масс в пространстве для конфигурации из семи двигателей

Смещение центра масс внутри сферы с центром в начале координат и радиусом 1 см ухудшает значение функционала Φ_1 на 20-35%, как для конфигурации из пяти двигателей, так и для семи.

Как и в предыдущем случае, можно заметить, что одна из осей является более чувствительной к ошибкам расположения центра масс аппарата. Исследование этой особенности является предметом дальнейших изысканий.

Заключение

В работе рассмотрена задача оптимальной расстановки двигателей коррекции на геостационарном спутнике для одновременных коррекции орбиты и разгрузки маховиков. Предложен метод формализации задачи, включающий в себя построение и рассмотрение выпуклых оболочек. Показано, что в случае штатной работы системы для одновременной разгрузки маховиков и коррекции орбиты минимально необходимое количество двигателей равно пяти, а в случае возможного отказа одного двигателя это количество увеличивается до семи. Предложена методика поиска оптимального расположения двигателей для максимизации возможностей разгрузки и минимизации расхода топлива. Приведены примеры расположения двигателей с учетом всех ограничений и требований, как в случае штатной работы, так и в случае возможного отказа одного из двигателей. Для найденных конфигураций проведен численный анализ чувствительности к ошибкам установки двигателей и смещению центра масс аппарата.

Список использованных источников

1. Космический аппарат «Электро-Л» [Электронный ресурс]. URL: <https://electro.ntsomz.ru> (дата доступа: 17.06.2019).
2. Vallado D.A. Fundamentals of astrodynamics and applications. Springer Science & Business Media, 2001. 958 p.
3. Anderson P. V et al. Operational considerations of GEO debris synchronization dynamics // 66th Int. Astronaut. Congr. IAC-15 A. Vol. 6. P. 7.
4. Давыдов А.А., Игнатов А.И., Сазонов В.В. Применение реактивных двигателей для управления поступательным движением КА одновременно с разгрузкой кинетического момента электромеханических исполнительных органов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2006. № 82. С. 21.
5. Платонов В.Н. Одновременное управление движением центра масс и вокруг центра масс при маневрах космических аппаратов на геостационарной и высокоэллиптических орбитах с использованием электрореактивных двигателей // Космическая техника и технологии. 2013. № 1. С. 58--67.
6. Chen X. et al. Optimal Combined Reaction-Wheel Momentum Management for Earth-Pointing Satellite // J. Guid. Control Dyn. 1999. Vol. 22, № 4. P. 543–550.
7. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004. 716 p.
8. Двигатели-маховики производства ВНИИЭМ [Электронный ресурс]. URL: http://www.vniiem.ru/ru/index.php?option=com_content&view=article&id=288:2010-02-17-21-42-21&catid=39:2008-04-05-02-40-20 (дата доступа: 17.06.2019).