

---

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

**Направление подготовки / специальность:** 03.04.01 Прикладные математика и физика

**Направленность (профиль) подготовки:** Математическая физика, компьютерные технологии и математическое моделирование в экономике

## УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ЗАДАЧЕ СБОРКИ ОРБИТАЛЬНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ СТАНЦИИ

(магистерская диссертация)

**Студент:**

Орлов Владислав Владимирович

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Иванов Данил Сергеевич,  
канд. физ.-мат. наук, доц.

---

*(подпись научного руководителя)*

**Консультант (при наличии):**

---

*(подпись консультанта)*

Москва 2023

---

## Аннотация

Рассматривается управление движением космического аппарата-сборщика (КАС) в задаче орбитальной сборки ферменной конструкции (ФК). Предполагается, что на круговой низкой околоземной орбите находится грузовой контейнер (ГК) со стержнями и КАС, который оснащен бортовой двигательной установкой и манипуляторами для захвата стержней, прикрепления к узлам ФК и ГК, а также для отталкивания. В работе предложены алгоритмы управления движением КАС для осуществления перелёта с помощью отталкивания и двигательной установки КАС для переноса стержней от ГК до заданных точек ФК. Задача перелёта решается с учётом ограничений на допустимые динамические параметры ФК и с учётом предотвращения столкновения КАС с ФК. Для задачи бестопливного перелёта предложен алгоритм поиска начальной скорости отталкивания КАС. При отсутствии решения задачи с помощью только отталкивания разработаны алгоритмы управления с помощью двигательной установки. Представлены результаты параметрического исследования управляемого движения КАС в задаче орбитальной сборки для разного типа ФК.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1. Уравнения движения и постановка задачи</b>	<b>8</b>
1.1. Системы координат . . . . .	10
1.2. Поступательное движение . . . . .	12
1.3. Вращательное движение . . . . .	13
1.4. Механическое взаимодействие . . . . .	16
1.5. Относительное движение . . . . .	18
1.6. Учёт столкновения . . . . .	19
1.7. Ограничения . . . . .	21
1.8. Постановка задачи . . . . .	22
<b>2. Случай плоско-параллельного движения</b>	<b>24</b>
2.1. Относительное движение . . . . .	27
2.2. Существование решения . . . . .	32
2.3. Анализ серии перелётов . . . . .	33
<b>3. Случай пространственного движения</b>	<b>36</b>
3.1. Ограничение параметров . . . . .	36
3.2. Начальное приближение . . . . .	38
3.3. Численное моделирование . . . . .	41
3.4. Управление движением с помощью двигателя . . . . .	43
<b>4. Результаты математического моделирования процесса сборки</b>	<b>46</b>
<b>Заключение</b>	<b>54</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>55</b>



# Введение

Некоторые из ограничений, налагаемых на космические миссии, связаны с запуском. Ограничение габаритов полезной нагрузки в ракете-носителе и проблема выживаемости элементов развёртывания могут быть решены сборкой на орбите [1]. Она позволит как доставлять компоненты миссии на орбиту за несколько запусков, так и увеличить конечные габариты конструкции. Среди конструкций, для которых выгодна орбитальная сборка, — конструкция типа фермы и модульные конструкции, например зеркала телескопа или рефлектора, для которых орбитальная сборка позволит увеличить апертуру [2], [3]. Некоторые миссии, например космическая солнечная электростанция [4], может иметь положительную экономическую выгоду благодаря сборки на орбите.

Способы орбитальной сборки в основном предполагают стыковку модулей, находящихся на близких орбитах [5], [6], [7], [8] или перемещение модулей из грузового отсека в требуемое положение собираемой конструкции [2], [4]. Если перемещение модулей с разных орбит к иттовой конфигурации опирается на использование бортовых двигателей, то сборка на орбите при помощи грузового отсека может быть решена без траты топлива. Например, планируется, что в рамках миссии OSAM-2, разрабатываемой Redwire Corporation, после развёртывания и размещения на орбите будет печатать два луча решётчатой фермы на 3D-принтере, чтобы развернуть на них солнечную батарею [9]. Однако, для более сложных миссий, решающих широкий спектр задач, направленных на орбитальную сборку или обслуживание на орбите, подразумевается использование аппаратов-сборщиков, имеющих манипуляторы [10].

В настоящей работе предполагается использование малого космического аппарата в качестве сборщика, что обусловлено трендом миниатюризации космических аппаратов в современных космических миссиях. На аппаратах

типа CubeSat сейчас созданы миниатюрные манипуляторы [11], двигатели на холодном газе [12] и электрические двигатели [13], [14], [15]. Таким образом, необходимая элементная база для управления движением аппарата-сборщика на основе малых спутников доступна для разработчиков подобной миссии по орбитальной сборке.

Важным аспектом задачи орбитальной сборки является требование обеспечения нестолкновения аппарата с конструкции во время перелёта. Среди подходов для управляемого движения орбитальной сборки существуют подходы, основанные на использовании отталкивающих потенциалов для управляемого движения [16], или на суперпозиции требуемых скоростей для несоударения и стыковки элементов [8]. Однако, рассмотренные подходы могут быть нереализуемы для аппаратов типа CubeSat из-за ограничений бортовых двигателей.

В настоящей работе предлагается новый подход управления движением для построения орбитальной конструкции с использованием аппарата-сборщика, совершающего перемещение между точками конструкции в результате свободного перелёта после отталкивания с помощью манипуляторов. Такой подход имеет основное преимущество в виде отсутствия траты рабочего тела для совершения перемещения, но он требует учёт ряда факторов при выборе траектории перелёта.

Работа состоит из введения, трёх глав и заключения. В первой главе описаны используемые системы координат, представлены уравнения относительного движения аппарата-сборщика относительно конструкции, сформулированы основные предположения и представлена постановка задачи. Во второй главе рассматривается задача сборки конструкции при плоскопараллельном движении в плоскости орбиты, разработана методика для решения задачи перелёта. В третьей главе задача построения конструкции рассматривается в пространственном случае с учётом обеспечения нестолкновения аппарата-сборщика с элементами конструкции, представ-

лены результаты исследования управляемого движения для конкретного примера значений параметров системы. В заключении сформулированы основные результаты работы и описаны дальнейшие этапы по продолжению этой работы.

# 1. Уравнения движения и постановка задачи

В настоящей работе рассматриваются три объекта: контейнер с набором стержней, сборочная конструкция и аппарат-сборщик, изображённые на Рис. 1, где цифрами обозначены 1. – контейнер со стержнями, 2. – площадка для установки стержней, жёстко прикреплённая к контейнеру, 3. – требуемый план конструкции типа фермы (пунктирная линия) и установленные стержни (сплошная линия), 4. – аппарат-сборщик.

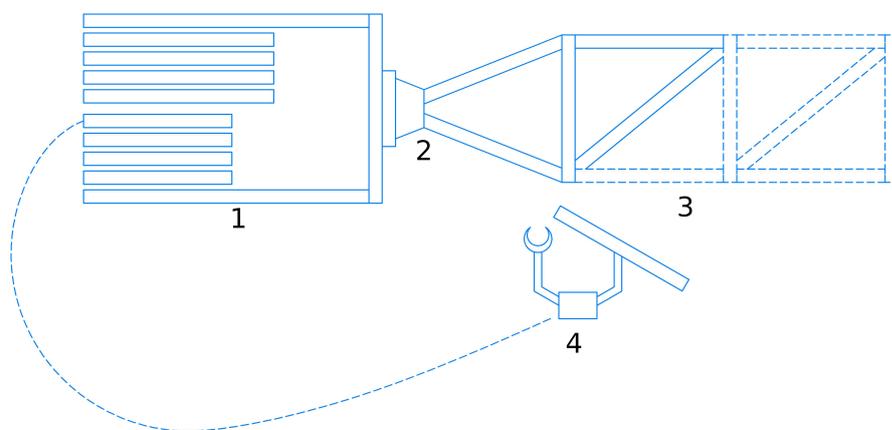


Рисунок 1 – Рассматриваемые в работе объекты

Предполагается, что в начальный момент времени общий центр масс системы, состоящей из контейнера со стержнями, жёстко прикреплённой к ней площадки, и аппарата-сборщика, удерживаемого манипуляторами на контейнере, движется по круговой околоземной орбите. В процессе сборки, стержни должны быть закреплены друг за друга в заданной последовательности. Предполагается, что аппарат-сборщик оснащен двумя манипуляторами, способными прикрепляться к конструкции и захватывать стержни. В таком случае, аппарат-сборщик может придать заданный импульс с помощью манипулятора, чтобы привести себя в движение по требуемой относительной траектории.

Назовём точки конструкции, за которые аппарат-сборщик способен держаться манипулятором, узлами захвата конструкции. В процессе сборки

аппарат находится в узлах захвата конструкции либо движется по траектории свободного полета. В случае, если один из манипуляторов удерживает стержень, то при приближении космического аппарата к целевому узлу захвата второй манипулятор может прикрепиться к нему, остановившись относительно конструкции, и прикрепить транспортируемый стержень к узлу конструкции. После установки стержня аппарат-сборщик возвращается к контейнеру за следующим стержнем. Эта процедура повторяется до тех пор, пока все стержни не будут размещены в соответствии с планом конструкции.

Конструкция рассматривается жёсткой, её колебания в работе не рассматриваются. На этапе свободного полета движение полностью определяется вектором скорости отталкивания аппарата-сборщика  $\mathbf{v}_0$ , положением аппарата-сборщика на конструкции и начальными условиями углового и поступательного движения конструкции. Рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом: при заданных начальных условиях и параметрах системы необходимо найти такую скорость отталкивания аппарата-сборщика, которая определяет траекторию перелета космического аппарата-сборщика из начальной точки в конечную точку конструкции.

В настоящей работе на этапе свободного полёта аппарата-сборщика со взятым стержнем не рассматривается угловое движение связки аппарат-сборщик и стержень. Свободное движение аппарата-сборщика рассматривается как движение материальной точки - его центра масс. При транспортировке стержня, габариты стержня также не учитываются; его масса добавляется к массе аппарата-сборщика. Данное допущение основано на том, что задачу углового движения системы аппарат-стержень можно отделить от задачи поступательного движения центра масс с учетом предотвращения столкновения с элементами собираемой конструкции в предположении, что узлы захвата находятся на выпуклой оболочке конструкции в момент времени перелёта и аппарат-сборщик переносит стержень за середину. В таком

случае, управление угловым движением нацелено на удержание стержня в плоскости, перпендикулярной к нормали к выпуклой оболочке. Схема предполагаемого углового движения системы аппарат-стержень представлена на Рис. 2, где 1, 2 – положения аппарата в разные моменты времени, 3 – конструкция, 4 – внешняя выпуклая оболочка.

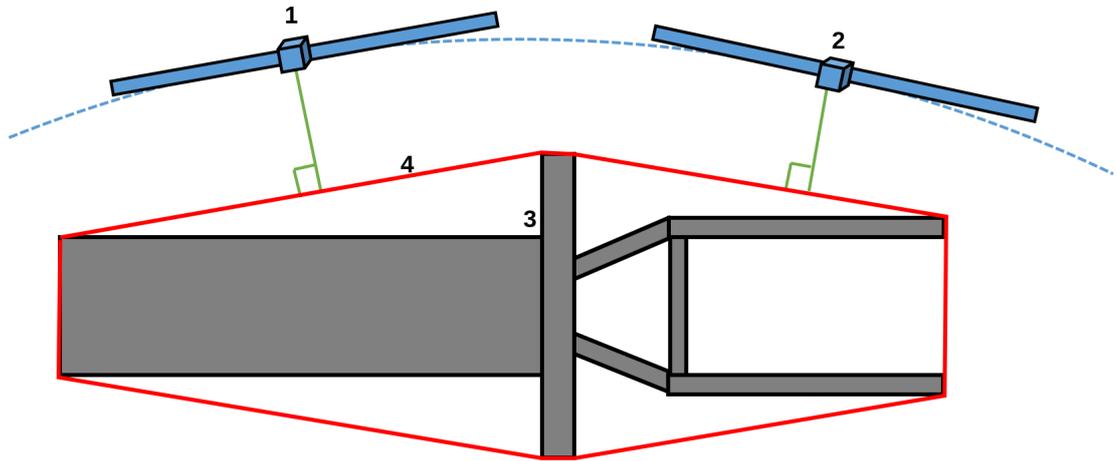


Рисунок 2 – Угловое движение аппарата со стержнем

Для строгой математической формулировки постановки задачи углового движения в этой главе сначала вводятся используемые системы координат и приводятся уравнения поступательного и углового движения.

### 1.1. Системы координат

Движение аппарата-сборщика и конструкции описывается с использованием следующих систем отсчета, представленных на Рис. 3. В дальнейшем систему контейнер-площадка-стержни будем считать единым твёрдым телом и будем называть конструкцией. Начало инерциальной системы координат (ИСК) находится в центре масс Земли, ось  $z$  направлена вдоль оси вращения Земли, ось  $x$  направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $y$  дополняет правую триаду. Начало орбитальной системы координат (ОСК) движется по опорной круговой орбите, имеющий радиус  $R_{орб}$ ; ее ось  $z$  на-

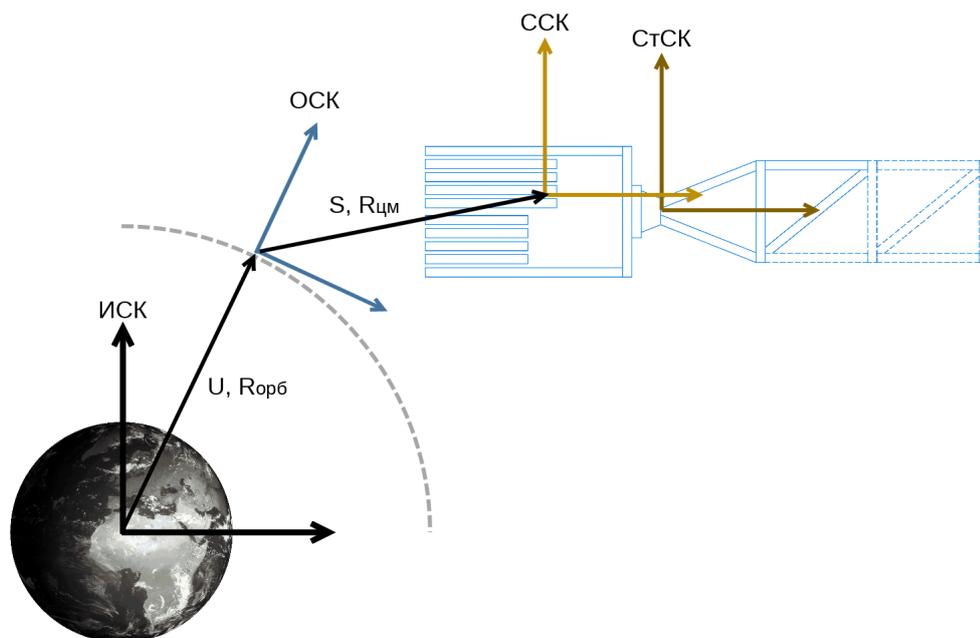


Рисунок 3 – Схема конструкции

правлена вдоль радиус-вектора, ось  $x$  сонаправлена со скоростью общего центра масс, ось  $y$  дополняется до правой триады. Далее, строительная система координат (СтСК) связана с контейнером с центром на площадке, ось  $x$  направлена по нормали к площадке, направление двух других осей находятся в плоскости площадки. Центр связной с конструкцией системы координат (ССК) находится в в центр масс системы аппарат-конструкция, если аппарат закреплен на ней, или в центре масс конструкции на этапе свободного полёта аппарата-сборщика. Оси ССК совпадают с осями СтСК.

Введём матрицы перехода между системами координат:

- $A$  – матрица перехода из ИСК в ССК
- $U$  – матрица перехода из ИСК в ОСК
- $S$  – матрица перехода из ОСК в ССК

## 1.2. Поступательное движение

В стадии свободного полёта радиус-векторы аппарата-сборщика  $\mathbf{r}_a^{\text{ОСК}} = [r_x, r_y, r_z]^T$  и центра масс конструкции  $\mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}} = [R_x, R_y, R_z]^T$  в ОСК могут быть описаны уравнениями движения Хилла-Клохесси-Уилштира [18] :

$$\ddot{\mathbf{r}}_a^{\text{ОСК}} = \begin{bmatrix} -2\omega_{\text{орб}}\dot{r}_z \\ -\omega_{\text{орб}}^2 r_y \\ 3\omega_{\text{орб}}^2 r_z + 2\omega_{\text{орб}}\dot{r}_x \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{R}}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}} = \begin{bmatrix} -2\omega_{\text{орб}}\dot{R}_z \\ -\omega_{\text{орб}}^2 R_y \\ 3\omega_{\text{орб}}^2 R_z + 2\omega_{\text{орб}}\dot{R}_x \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $\omega_{\text{орб}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{\text{орб}}^3}}$ ,  $\mu$  – гравитационный параметр Земли. Решение этой системы, например, для радиус-вектора аппарата представимо в виде:

$$\mathbf{r}_a^{\text{ОСК}} = \begin{bmatrix} -3C_r^1\omega_{\text{орб}}(t-t_0) + 2C_r^2\cos\omega_{\text{орб}}(t-t_0) - 2C_r^3\sin\omega_{\text{орб}}(t-t_0) + C_r^4 \\ C_r^5\sin\omega_{\text{орб}}(t-t_0) + C_r^6\cos\omega_{\text{орб}}(t-t_0) \\ 2C_r^1 + C_r^2\sin\omega_{\text{орб}}(t-t_0) + C_r^3\cos\omega_{\text{орб}}(t-t_0) \end{bmatrix},$$

где вектор  $\mathbf{r}$  введён в ОСК, константы  $C_r^1 \dots C_r^6$  определён как

$$\begin{aligned} C_r^1 &= 2r_z(t_0) + \frac{v_x(t_0)}{\omega_{\text{орб}}}, & C_r^2 &= \frac{v_z(t_0)}{\omega_{\text{орб}}}, \\ C_r^3 &= -3r_z(t_0) - \frac{2v_x(t_0)}{\omega_{\text{орб}}}, & C_r^4 &= r_x(t_0) - \frac{2v_z(t_0)}{\omega_{\text{орб}}}, \\ C_r^5 &= \frac{v_y(t_0)}{\omega_{\text{орб}}}, & C_r^6 &= r_y(t_0), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}(t_0)$  и  $\mathbf{v}(t_0)$  – радиус-вектор и скорость в ОСК аппарата-сборщика в момент времени  $t_0$ . Радиус-вектор центра масс конструкции имеет аналогичное решение. Данные уравнения справедливы для малых значений модуля радиус-вектора в ОСК.

### 1.3. Вращательное движение

Для описания распределения масс зададим тензор инерции конструкции  $J$  относительно ССК. Предположим, что ферменная конструкция и контейнер состоят из тонких стержней, заданных с помощью радиус-векторов  $\mathbf{r}_1^k$ ,  $\mathbf{r}_2^k$  в СтСК, где  $\mathbf{r}_1^k$  – начало стержня,  $\mathbf{r}_2^k$  – конец стержня. Существует два различных значения радиус-векторов для стержня  $k$  в зависимости от того, находится стержень  $k$  в контейнере или установлен в конечном положении. Тогда можно относительно СтСК определить тензоры инерции для каждого стержня  $J_k^{\text{СтСК}}$ ,  $k \in [1, N]$ . Далее, площадка может быть описана цилиндром с тензором инерции  $J_{N+1}^{\text{СтСК}}$ . В таком случае,

$$J^{\text{СтСК}} = \sum_{k=0}^{N+1} J_k^{\text{СтСК}},$$

где  $J_k^{\text{СтСК}}$ ,  $k \in [1, N]$  вычисляются по определению:

$$J_k^{\text{СтСК}}(i, j) = \int_{r_1}^{r_2} (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) dm.$$

После замены  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1^k \tau + \mathbf{r}_2^k (1 - \tau)$  имеет вид:

$$J_k^{\text{СтСК}}(i, j) = m \int_0^1 (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) d\tau.$$

Интегрируя, получаем, что

$$J_k^{\text{СтСК}}(x, x) = \frac{1}{3}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 + z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2),$$

$$J_k^{\text{СтСК}}(y, y) = \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2),$$

$$J_k^{\text{СтСК}}(z, z) = \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2),$$

$$\begin{aligned}
J_k^{\text{стск}}(x, y) &= J_k^{\text{стск}}(y, x) = -\frac{1}{6}(2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2), \\
J_k^{\text{стск}}(x, z) &= J_k^{\text{стск}}(z, x) = -\frac{1}{6}(2x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + 2x_2z_2), \\
J_k^{\text{стск}}(y, z) &= J_k^{\text{стск}}(z, y) = -\frac{1}{6}(2y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + 2y_2z_2).
\end{aligned}$$

СтСК ориентирована так, что  $Ox$  ориентирована по нормали к поверхности площадки радиуса  $r_{\Pi}$ , массой  $m_{\Pi}$  и толщиной  $l_{\Pi}$  в направлении конечного положения стержней, а поверхность площадки лежит в плоскости  $x = 0$ , то

$$J_{N+1}^{\text{стск}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_{\Pi}r_{\Pi}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}m_{\Pi}r_{\Pi}^2 + \frac{1}{3}m_{\Pi}l_{\Pi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}m_{\Pi}r_{\Pi}^2 + \frac{1}{3}m_{\Pi}l_{\Pi}^2 \end{bmatrix}.$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$J^{\text{сск}} = J^{\text{стск}} - M|R_{\text{цм}}^{\text{стск}}|^2,$$

где  $M$  – полная масса конструкции. В дальнейшем, тензор инерции  $J = J^{\text{сск}}$  рассчитывается для набора стержней  $[1, ..k - 1, k + 1, ..N]$  и массы конструкции без учёта стержня  $k$   $M_k^-$  при свободном полёте аппарата со взятым стержнем  $k$ . Закреплённый на конструкции аппарат учитывается в тензоре инерции и массе конструкции как материальная точка.

Определим векторы угловых скоростей конструкции:  $\boldsymbol{\omega}$  – вращение ССК относительно ОСК,  $\boldsymbol{\Omega}$  – вращение ССК относительно ИСК, и  $\boldsymbol{\omega}_{\text{орб}}$  – вращение ОСК относительно ИСК. Отметим, что  $\boldsymbol{\Omega} = U^T\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{\text{орб}}$ . Динамические уравнения Эйлера описывает угловое движение тела ССК относительно ИСК:

$$JA\dot{\boldsymbol{\Omega}} + [A\boldsymbol{\Omega} \times JA\boldsymbol{\Omega}] = \mathbf{M}_{\text{внеш}}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{M}_{\text{внеш}}$  – момент внешних сил относительно ССК,  $J$  – тензор инерции конструкции, вычисленный в ССК. В данной работе в момент внешних сил входит только гравитационный момент:

$$\mathbf{M}_{\text{внеш}} = \mathbf{M}_{\text{грав}} = 3 \frac{\mu}{|R_{\text{орб}}^*|^5} \mathbf{R}_{\text{орб}}^* \times \mathbf{J} \mathbf{R}_{\text{орб}}^*,$$

где  $\mathbf{R}_{\text{орб}}^*$  – вектор между центрами масс Земли и конструкции, записанный в ССК. При близости центра масс конструкции к центру ОСК можно переопределить  $\mathbf{R}_{\text{орб}}^*$  как вектор от центра масс Земли до ОСК. В проекции на ОСК вектор  $\mathbf{R}_{\text{орб}}^*$  будет иметь только  $z$ -составляющую. Тогда уравнение угловой скорости запишется в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = A^{-1} J^{-1} \left( 3 \frac{\mu}{R_{\text{орб}}^5} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{\text{орб}} \end{bmatrix} \times JS \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{\text{орб}} \end{bmatrix} \right) - [A\boldsymbol{\Omega} \times JA\boldsymbol{\Omega}]. \quad (3)$$

В данном уравнении переменные величины: угловая скорость  $\boldsymbol{\Omega}$  и матрицы  $S$ ,  $A$ . Матрицы перехода между системами координат соответствуют единичным кватернионам  $\|\boldsymbol{\Lambda}\| = 1$ , или верзорам. Для поворота системы координат относительно другой на угол  $\theta$  относительно вектора  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z]$  верзор задаётся как:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \left[ \cos \frac{\theta}{2}, \lambda_x \sin \frac{\theta}{2}, \lambda_y \sin \frac{\theta}{2}, \lambda_z \sin \frac{\theta}{2} \right].$$

Изменение верзора  $\boldsymbol{\Lambda}_A$ , определяющего изменение матрицы  $A$ , описывается кинематическим уравнением:

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_A = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \circ \boldsymbol{\Lambda}_A.$$

Далее, матрица поворота  $\mathbf{A}$  однозначно определяется через компоненты

вектора  $\Lambda_A = [\omega, x, y, z]$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy + 2z\omega & 2xz - 2y\omega \\ 2xy - 2z\omega & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz + 2x\omega \\ 2xz + 2y\omega & 2yz - 2x\omega & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода ИСК в ОСК считается известной функцией от времени:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\sin \omega_{\text{опб}} t & \cos \omega_{\text{опб}} t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \omega_{\text{опб}} t & \sin \omega_{\text{опб}} t & 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, матрица  $S$  выражается через заданные матрицы  $S = AU^T$ .

## 1.4. Механическое взаимодействие

Кинематические параметры движения меняются мгновенно при отталкивании аппарата-сборщика от конструкции и при присоединении к ней.

Обозначим векторы центра масс конструкции до отталкивания и после как  $\mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{стск}-p}$  and  $\mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{стск}}$  соответственно. Пусть вычислены тензоры инерции в ССК до отталкивания и после  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{J}^p$  соответственно. Во время свободного полёта аппарата-сборщика при подсчёте  $\mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{стск}}$  и  $\mathbf{J}$  не учитываются аппарат и переносимый стержень, в отличие от  $\mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{стск}-p}$  и  $\mathbf{J}^p$ . Верхний индекс  $\{ \}^p$  имеет смысл предыдущего состояния (previous), в данном случае - до отталкивания. После отталкивания изменятся векторы орбитального движения:

$$\mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{оск}} = \mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{оск}-p} + \mathbf{S}^T (\mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{стск}} - \mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{стск}-p}),$$

$$\mathbf{r}_a^{\text{оск}} = \mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{оск}-p} + \mathbf{S}^T (\mathbf{r}_0^{\text{стск}} - \mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{стск}-p}).$$

Обозначим:  $\mathbf{v}$  – скорость аппарата-сборщика в ОСК,  $\mathbf{V}$  – поступатель-

ная скорость конструкции в ОСК,  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}}$ . Предположим, что изменение величин  $\boldsymbol{v}$ ,  $\boldsymbol{V}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  следует из законов сохранения импульса и момента импульса:

$$(m_a^+ + M^-)\boldsymbol{V}^p = m_a^+\boldsymbol{v} + M^-\boldsymbol{V}, \quad (4)$$

$$(m_a^+ + M^-)[\boldsymbol{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}-p} \times \boldsymbol{V}^p] + J^p\boldsymbol{\omega}^p = M^-[\boldsymbol{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}} \times \boldsymbol{V}] + m_a^+[\boldsymbol{r}_a^{\text{ОСК}} \times \boldsymbol{v}] + J\boldsymbol{\omega}, \quad (5)$$

где  $m_a^+$  – масса аппарата с переносимым грузом,  $M^-$  – масса конструкции без учёта переносимого груза. Вышеупомянутые законы сохранения справедливы для инерциальной системы координат. Уравнение (4) справедливо, поскольку оно эквивалентно уравнению в ИСК:

$$(m_a^+ + M^-)(\boldsymbol{V}^p + \boldsymbol{V}) = m_a^+(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}_{\text{орб}}) + M^-(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}_{\text{орб}}),$$

где  $\boldsymbol{V}_{\text{орб}}$  – поступательная скорость центра ОСК относительно ИСК. Уравнение (5) справедливо по теореме Кёнига:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{\text{ЦМ}} + \boldsymbol{L}',$$

где  $\boldsymbol{L}$  – момент импульса системы тел,  $\boldsymbol{L}_{\text{ЦМ}}$  – момент импульса центра масс системы тел,  $\boldsymbol{L}'$  – момент импульса тел относительно общего центра масс.

Запишем скорость отталкивания  $\boldsymbol{v}_0$  в ССК:

$$\boldsymbol{v} = S^T\boldsymbol{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}^p \times S^T(\boldsymbol{r}_0^{\text{СТСК}} - \boldsymbol{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{СТСК}-p})] + \boldsymbol{V}^p,$$

$$\boldsymbol{V} = S^T\boldsymbol{V}_0 + [\boldsymbol{\omega}^p \times S^T(\boldsymbol{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{СТСК}} - \boldsymbol{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{СТСК}-p})] + \boldsymbol{V}^p,$$

$$\boldsymbol{V}_0 = -\boldsymbol{v}_0 \frac{m_a^+}{M^-},$$

$$\boldsymbol{\omega} = J^{-1}((m_a^+ + M^-)[\boldsymbol{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}-p} \times \boldsymbol{V}^p] + J^p\boldsymbol{\omega}^p - M^-[\boldsymbol{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}} \times \boldsymbol{V}] - m_a^+[\boldsymbol{r}_a^{\text{ОСК}} \times \boldsymbol{v}]).$$

В момент прикрепления аппарата-сборщика к конструкции величины  $\boldsymbol{R}$ ,  $\boldsymbol{V}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  изменяются согласно тем же законам. Теперь верхний индекс  $\{ \}^p$

обозначает величины в стадии свободного полёта аппарата-сборщика:

$$\mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}} = \mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}-p} + \mathbf{S}^T (\mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{СТСК}} - \mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{СТСК}-p}),$$

$$\mathbf{V} = \frac{m_a^+ \mathbf{v}^p + M^- \mathbf{V}^p}{(m_a^+ + M^-)},$$

$$\boldsymbol{\omega} = J^{-1} (M^- [\mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}-p} \times \mathbf{V}^p] + m_a^+ [\mathbf{r}_a^{\text{ОСК}-p} \times \mathbf{v}^p] + J^p \boldsymbol{\omega}^p - (m_a^+ + M^-) [\mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}} \times \mathbf{V}]).$$

Конечно, в отличии от момента отталкивания, массы аппарата-сборщика и конструкции до и после захвата различаются. Это обусловлено тем, что аппарат при отталкивании решает задачу перелёта после взятия стержня, а движение системы аппарат-конструкция после захвата происходит после закрепления стержня в конечном положении. Однако данный аспект не изменяет приведённых формул, поскольку  $(m_a^+ + M^-) = (m_a + M)$ .

Полученные соотношения в дальнейшем используются для вычисления начальных условий для движения конструкции и аппарата-сборщика после отталкивания и закрепления.

## 1.5. Относительное движение

Для корректного описания начальных и конечных условий, а также методов поиска решения, необходимо описать задачу перелёта относительно ССК. Зададим разницу радиус-векторов аппарата и центра масс конструкции:  $\boldsymbol{\rho}^{\text{ОСК}} = \mathbf{r}_a^{\text{ОСК}} - \mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}}$ . Заметим, что  $\dot{\boldsymbol{\rho}}^{\text{ОСК}}$  считается из уравнений (1). Тогда радиус-вектор аппарата относительно ССК подчиняется уравнениям:

$$\mathbf{r}_a^{\text{ССК}} = S \boldsymbol{\rho}^{\text{ОСК}} + \mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ССК}},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_a^{\text{ССК}} = \boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}} \times S \boldsymbol{\rho}^{\text{ОСК}} + S \dot{\boldsymbol{\rho}}^{\text{ОСК}},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_a^{\text{ССК}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{ОСК}} \times S \boldsymbol{\rho}^{\text{ОСК}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}} \times \boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}} \times S \boldsymbol{\rho}^{\text{ОСК}} + 2\boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}} \times S \dot{\boldsymbol{\rho}}^{\text{ОСК}} + S \ddot{\boldsymbol{\rho}}^{\text{ОСК}}.$$

С учётом соотношения

$$\Omega^{\text{иск}} = \omega_{\text{орб}} + U\omega^{\text{оск}},$$

$$\dot{\Omega}^{\text{иск}} = \dot{\omega}_{\text{орб}} + \omega_{\text{орб}} \times U\omega^{\text{оск}},$$

имеем

$$\ddot{\mathbf{r}}_a^{\text{сск}} = (\dot{\Omega}^{\text{оск}} - \omega_{\text{орб}} \times U\omega^{\text{оск}}) \times S\rho^{\text{оск}} + \omega^{\text{оск}} \times \omega^{\text{оск}} \times S\rho^{\text{оск}} + 2\omega^{\text{оск}} \times S\dot{\rho}^{\text{оск}} + S\ddot{\rho}^{\text{оск}},$$

где  $\dot{\Omega}^{\text{оск}}$  выражается согласно уравнению (3). Получается нелинейная система дифференциальных уравнений первого порядка на переменные  $\mathbf{r}_a^{\text{сск}}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_a^{\text{сск}}$ ,  $\Omega^{\text{оск}}$ ,  $\Lambda_A$ . Аналитическое решение данной системы найти не удалось.

## 1.6. Учёт столкновения

Важным условием на траекторию перелёта является отсутствие пересечения элементов конструкции траекторией. Во-первых, определить элемент конструкции для математического описания можно как совокупность уравнений, либо квадратичной формой. Если элементы – стержни, такими формами могут служить цилиндр и эллипсоид соответственно. Во-вторых, условие пересечения элементов траекторией может быть решено численно либо аналитически. Если траектория задана аналитически  $\mathbf{r}_a^{\text{стск}}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , то с помощью аффинного преобразования  $\phi(\mathbf{r})$ , после которого эллипсоид переходит в единичную сферу, а центр эллипсоида в начало координат, можно произвести анализ экстремумов траектории  $\phi(\mathbf{r}_a^{\text{стск}}(t))$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ . В данной работе аналитическое решение  $\mathbf{r}_a^{\text{стск}} = \mathbf{r}_a^{\text{стск}}(t)$  не произведено, поэтому условие пересечения элементов траекторией находится численно.

Для этого, непрерывная траектория  $\mathbf{r}_a^{\text{стск}}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  разбивается на набор радиус-векторов  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_a^{\text{стск}}(t_i)$ ,  $i \in [1, N_t]$ , после чего проверяется

наличие  $\mathbf{r}_i, i \in [1, N_t]$  в элементах конструкции, или проверяется пересечение отрезков  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}), i \in [1, N_t - 1]$ , что показано на Рис. 4 под цифрами 1 и 2 соответственно. При достаточно мелком разбиении траектории, эти подходы равносильны. В данной работе реализован первый подход.

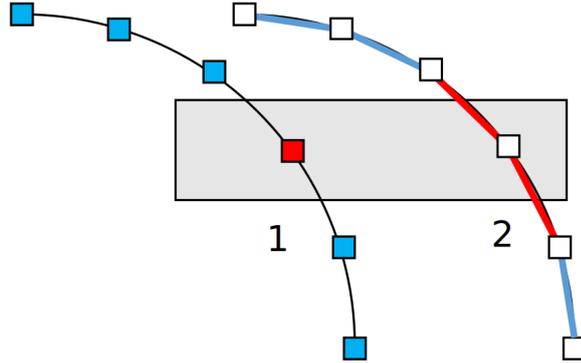


Рисунок 4 – Проверка траектории на пересечение с элементом конструкции

Положение стержня длиной  $l$  и диаметра  $d$  в СтСК определяется радиус-векторами его концов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , причём  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 = const$  за время перелёта. Введём единичные векторы  $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}$ , направленные вдоль главных осей стержня:

$$\mathbf{n} \uparrow\uparrow [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]^T,$$

$$\boldsymbol{\tau} \uparrow\uparrow \max([\mathbf{n} \times Ox], [\mathbf{n} \times Oy]),$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}],$$

где оператор  $\max()$  имеет смысл максимума по модулю, и радиус-вектор  $\mathbf{r}$  относительно центра стержня:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}.$$

Тогда безразмерные проекции  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$  относительного положения аппарата

на главные оси стержня рассчитываются следующим образом:

$$\rho_x = \frac{2}{l}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}), \quad \rho_y = \frac{2}{d}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}), \quad \rho_z = \frac{2}{d}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}).$$

Тогда наличие радиус-вектора  $\mathbf{r}$  внутри стержня будет равносильно выполнению системы неравенств:

$$\begin{cases} \rho_x^2 < 1, \\ \rho_y^2 + \rho_z^2 < 1. \end{cases} \quad (6)$$

## 1.7. Ограничения

Для решения условной задачи

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ c_i(x) > 0, \quad i = 1..m, \end{cases} \quad (7)$$

необходимо представить ограничения в виде скалярных функций  $c_i(x)$ . Для предположения ферменно-стержневой конструкции жёсткой необходимо ограничить угловую скорость конструкции:

$$c_1^0 = \omega^{max} - |\boldsymbol{\omega}^{оск}| > 0,$$

где  $\omega^{max}$  – предельно допустимая угловая скорость. Более того, увеличение угловой скорости конструкции изменяет область решения задачи перелёта в пространстве начальных значений  $\mathbf{v}_0$ . В качестве  $\omega^{max}$  можно взять предельную угловую скорость вращения, которую демфирует максимально возможный импульс аппарата  $m_a v_0^{max}$  с характерного расстояния до центра масс конструкции  $l$ :

$$\omega_1^{max} = \frac{m_a v_0^{max} l}{\sqrt[3]{\det(\mathbf{J})}}.$$

Из-за того, что конструкция меняется в процессе сборки, меняется её тензор инерции. Для каждой стадии сборки определено устойчивое положение равновесия, возле которого конструкция совершает колебания. Соответственно, чтобы уменьшить угловую скорость вращения для последующих перелётов, имеет смысл уменьшение потенциальной энергии вращения конструкции на каждом перелёте [17]:

$$E_{\text{пот}}^{\text{вр}} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{|R_{\text{орб}}|^3} \left[ 3 \left( \frac{\mathbf{R}_{\text{орб}}^{\text{сск}}}{|R_{\text{орб}}|} \right)^T J \left( \frac{\mathbf{R}_{\text{орб}}^{\text{сск}}}{|R_{\text{орб}}|} \right) + \text{tr}(J) \right].$$

Далее, описанное поступательное движение справедливо только для орбит, близких к круговой. Это условие эквивалентно следующим:

$$\begin{cases} c_2 = R^{\text{max}} - |\mathbf{R}_{\text{цм}}^{\text{оск}}| > 0, \\ c_3 = V^{\text{max}} - |\dot{\mathbf{R}}_{\text{цм}}^{\text{оск}}| > 0, \end{cases} \quad (8)$$

Условие нестолкновения также может быть представлено в виде неравенств. Пользуясь проекциями (6), введём следующую функцию для некоторого стержня:

$$g = \begin{cases} \frac{d}{2} (\sqrt{\rho_y^2 + \rho_z^2} - 1), & -1 < \rho_x < 1 \\ \frac{l}{2} (|\rho_x| - 1), & \text{elif } \rho_y^2 + \rho_z^2 < 1 \\ \frac{d}{2} (\sqrt{\rho_y^2 + \rho_z^2} - 1) + \frac{l}{2} (|\rho_x| - 1), & \text{else.} \end{cases} \quad (9)$$

Эта функция отрицательна, если и только если система (6) выполнена.

## 1.8. Постановка задачи

Пусть начальное время перелёта  $t_0$  аппарата-сборщика из  $\mathbf{r}_0^{\text{стск}}$  в  $\mathbf{r}_1^{\text{стск}}$ , заданы параметры системы аппарат-конструкция  $\boldsymbol{\omega}^{\text{оск}}$ ,  $\mathbf{R}_{\text{цм}}^{\text{оск}}$ ,  $\mathbf{V}_{\text{цм}}^{\text{оск}}$ ,  $\Lambda_A$ ,  $U$ . Далее, радиус-вектора  $\mathbf{r}_0^{\text{сск}}$  в  $\mathbf{r}_1^{\text{сск}}$  определяются однозначно. Тогда

для численного интегрирования на отрезке времени  $t = [t_0, t_f]$  системы дифференциальных уравнений на переменные  $\mathbf{r}_a^{\text{cck}}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_a^{\text{cck}}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}^{\text{ock}}$ ,  $\Lambda_A$  необходимо задать  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_a^{\text{cck}}$  в момент времени  $t_0$ .

Необходимо найти такую скорость отталкивания аппарата-сборщика  $\mathbf{v}_0$  в области допустимых скоростей  $D$ , чтобы его конечный радиус-вектор  $\mathbf{r}_f^{\text{cck}}$  был в  $\varepsilon$ -окрестности целевого узла завхата  $\mathbf{r}_1^{\text{cck}}$ :

$$\mathbf{v}_0 : \mathbf{v}_0 \in D, \quad \Delta r = |\mathbf{r}_f^{\text{cck}} - \mathbf{r}_1^{\text{cck}}| < \varepsilon. \quad (10)$$

В настоящей работе в качестве области допустимых скоростей рассматривается ограничение по модулю  $D = \{\mathbf{v}_0 : |\mathbf{v}_0| < v_0^{\text{max}}\}$ . Исходя из физических соображений, приравниваются максимальная длина манипулятора аппарата-сборщика и требуемая точность конечного положения аппарата  $\varepsilon$ .

## 2. Случай плоско-параллельного движения

Для рассмотренной задачи необходим качественный анализ существования и единственности решения. Для этого, рассмотрим задачу перелёта в плоско-параллельном движении, при котором:

- рассматриваемые радиус-векторы имеют нулевую  $y$ -компоненту в ОСК, ССК и СтСК;
- $\omega^{\text{оск}}$  имеет нулевые компоненты  $x$  и  $z$ ;
- $M_{\text{грав}}$  в динамических уравнениях Эйлера не учитываются;
- тензор инерции  $J$  имеет диагональный вид в ССК;
- не учитывается столкновение аппарата с элементами конструкции.

Схема изначальной ориентации систем координат данной задачи представлена на Рис. 5.

Выразим матрицу  $S$  через угол поворота  $\varphi$  ССК относительно ОСК вокруг оси  $Oy$ :

$$S = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad S^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Тогда моментальное изменение кинематических параметров запишется в виде системы следующих уравнений:

$$v^x = v_0^x \cos \varphi - v_0^z \sin \varphi + \omega_y^p [(r_{0\_x}^{\text{стск}} - R_{\text{цм\_x}}^{\text{стск\_p}}) \sin \varphi + (r_{0\_z}^{\text{стск}} - R_{\text{цм\_z}}^{\text{стск\_p}}) \cos \varphi] - \omega_z^p [r_{0\_y}^{\text{стск}} - R_{\text{цм\_y}}^{\text{стск\_p}}] + V_x^p,$$

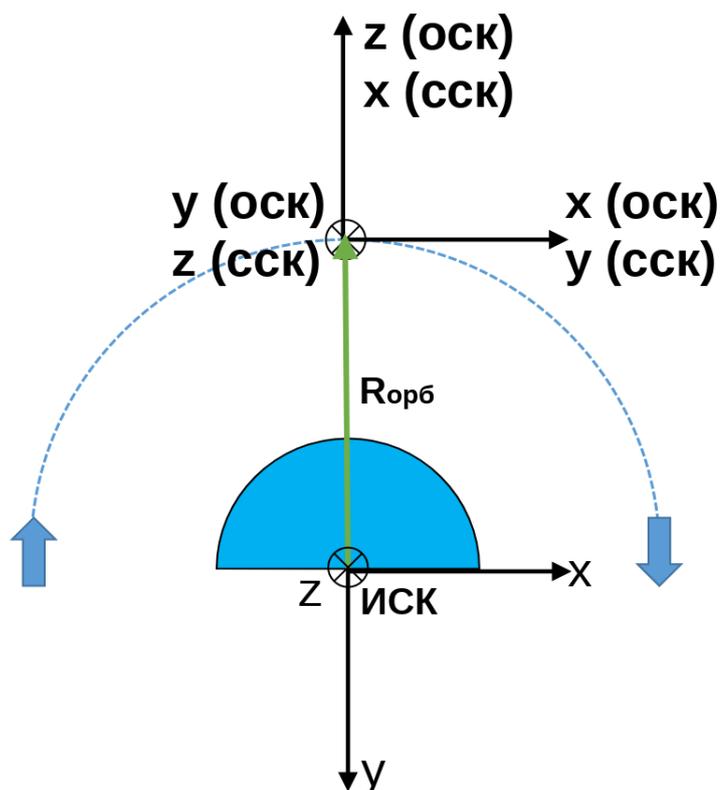


Рисунок 5 – Системы координат в плоско-параллельной задаче

$$v^z = v_0^x \sin \varphi + v_0^z \cos \varphi + \omega_x^p [r_{0\_y}^{\text{СТСК}} - R_{\text{ЦМ\_y}}^{\text{СТСК-p}}] - \omega_y^p [(r_{0\_x}^{\text{СТСК}} - R_{\text{ЦМ\_x}}^{\text{СТСК-p}}) \cos \varphi - (r_{0\_z}^{\text{СТСК}} - R_{\text{ЦМ\_z}}^{\text{СТСК-p}}) \sin \varphi] + V_z^p,$$

$$V^x = -\frac{m_a^+}{M^-} v_0^x \cos \varphi + \frac{m_a^+}{M^-} v_0^z \sin \varphi + \omega_y^p [(R_{\text{ЦМ\_x}}^{\text{СТСК}} - R_{\text{ЦМ\_x}}^{\text{СТСК-p}}) \sin \varphi + (R_{\text{ЦМ\_z}}^{\text{СТСК}} - R_{\text{ЦМ\_z}}^{\text{СТСК-p}}) \cos \varphi] - \omega_z^p (R_{\text{ЦМ\_y}}^{\text{СТСК}} - R_{\text{ЦМ\_y}}^{\text{СТСК-p}}) + V_x^p,$$

$$V^z = -\frac{m_a^+}{M^-} v_0^x \sin \varphi - \frac{m_a^+}{M^-} v_0^z \cos \varphi + \omega_x^p (R_{\text{ЦМ\_y}}^{\text{СТСК}} - R_{\text{ЦМ\_y}}^{\text{СТСК-p}}) - \omega_y^p [(R_{\text{ЦМ\_x}}^{\text{СТСК}} - R_{\text{ЦМ\_x}}^{\text{СТСК-p}}) \cos \varphi - (R_{\text{ЦМ\_z}}^{\text{СТСК}} - R_{\text{ЦМ\_z}}^{\text{СТСК-p}}) \sin \varphi] + V_z^p,$$

$$\omega^y = \frac{1}{J_y}((m_a^+ + M^-)(R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{OCK}_-p} V_x^p - R_{\text{ЦМ}_x}^{\text{OCK}_-p} V_z^p) + J_y^p \omega_y^p - M^-(R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{OCK}} V_x - R_{\text{ЦМ}_x}^{\text{OCK}} V_z) - m_a^+(r_{a_z}^{\text{OCK}} v_z - r_{a_x}^{\text{OCK}} v_x)).$$

Учитывая плоско-параллельность движения, имеем:

$$v^x(t_0) = v_0^x \cos \varphi - v_0^z \sin \varphi + \omega_y^p [(r_{0_x}^{\text{CTCK}} - R_{\text{ЦМ}_x}^{\text{CTCK}_-p}) \sin \varphi + (r_{0_z}^{\text{CTCK}} - R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{CTCK}_-p}) \cos \varphi] + V_x^p,$$

$$v^z(t_0) = v_0^x \sin \varphi + v_0^z \cos \varphi - \omega_y^p [(r_{0_x}^{\text{CTCK}} - R_{\text{ЦМ}_x}^{\text{CTCK}_-p}) \cos \varphi - (r_{0_z}^{\text{CTCK}} - R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{CTCK}_-p}) \sin \varphi] + V_z^p,$$

$$V^x(t_0) = -\frac{m_a^+}{M^-} v_0^x \cos \varphi + \frac{m_a^+}{M^-} v_0^z \sin \varphi + \omega_y^p [(R_{\text{ЦМ}_x}^{\text{CTCK}} - R_{\text{ЦМ}_x}^{\text{CTCK}_-p}) \sin \varphi + (R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{CTCK}} - R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{CTCK}_-p}) \cos \varphi] + V_x^p,$$

$$V^z(t_0) = -\frac{m_a^+}{M^-} v_0^x \sin \varphi - \frac{m_a^+}{M^-} v_0^z \cos \varphi - \omega_y^p [(R_{\text{ЦМ}_x}^{\text{CTCK}} - R_{\text{ЦМ}_x}^{\text{CTCK}_-p}) \cos \varphi - (R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{CTCK}} - R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{CTCK}_-p}) \sin \varphi] + V_z^p,$$

Величины  $v^x(t_0)$ ,  $v^z(t_0)$ ,  $V^x(t_0)$ ,  $V^z(t_0)$  есть начальные условия для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} = \omega_y, \\ \dot{R}_{\text{ЦМ}_x}^{\text{ОСК}} = V_{\text{ЦМ}_x}^{\text{ОСК}}, \\ \dot{R}_{\text{ЦМ}_z}^{\text{ОСК}} = V_{\text{ЦМ}_z}^{\text{ОСК}}, \\ \dot{r}_{a_x}^{\text{ОСК}} = v_{a_x}^{\text{ОСК}}, \\ \dot{r}_{a_z}^{\text{ОСК}} = v_{a_z}^{\text{ОСК}}, \\ \dot{V}_{\text{ЦМ}_x}^{\text{ОСК}} = -2\omega_{\text{орб}} V_{\text{ЦМ}_z}^{\text{ОСК}}, \\ \dot{V}_{\text{ЦМ}_z}^{\text{ОСК}} = 2\omega_{\text{орб}} V_{\text{ЦМ}_x}^{\text{ОСК}} + 3\omega_{\text{орб}}^2 R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{ОСК}}, \\ \dot{v}_{a_x}^{\text{ОСК}} = -2\omega_{\text{орб}} v_{a_z}^{\text{ОСК}}, \\ \dot{v}_{a_z}^{\text{ОСК}} = 2\omega_{\text{орб}} v_{a_x}^{\text{ОСК}} + 3\omega_{\text{орб}}^2 r_{a_z}^{\text{ОСК}}. \end{array} \right. \quad (11)$$

## 2.1. Относительное движение

Конечная невязка  $\Delta r = |\mathbf{r}_1^{\text{СТСК}} - \mathbf{r}_f^{\text{СТСК}}|$ , где

$$\mathbf{r}_f^{\text{СТСК}} = S(\mathbf{r}_a^{\text{ОСК}}(t_f) - \mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{ОСК}}(t_f)) + \mathbf{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{СТСК}}$$

для плоско-параллельного случая будет иметь вид:

$$\Delta r = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_z^2},$$

$$\Delta r_x = \cos \varphi (r_{a_x}^{\text{ОСК}}(t_f) - R_{\text{ЦМ}_x}^{\text{ОСК}}(t_f)) + \sin \varphi (r_{a_z}^{\text{ОСК}}(t_f) - R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{ОСК}}(t_f)) + R_{\text{ЦМ}_x}^{\text{СТСК}},$$

$$\Delta r_z = -\sin \varphi (r_{a_x}^{\text{ОСК}}(t_f) - R_{\text{ЦМ}_x}^{\text{ОСК}}(t_f)) + \cos \varphi (r_{a_z}^{\text{ОСК}}(t_f) - R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{ОСК}}(t_f)) + R_{\text{ЦМ}_z}^{\text{СТСК}}.$$

Далее, решение системы (11) было найдено аналитически с помощью библиотеки sympy для Python. Исходя из него, компоненты конечной невязки запишутся в виде:

$$\Delta r_x = (a_1 v_0^x + a_2 v_0^z + a_3) \cos(b_1 v_0^x + b_2 v_0^z + b_3) - (a_4 v_0^x + a_5 v_0^z + a_6) \sin(b_1 v_0^x + b_2 v_0^z + b_3) + c_1,$$

$$\Delta r_z = (a_1 v_0^x + a_2 v_0^z + a_3) \sin(b_1 v_0^x + b_2 v_0^z + b_3) + (a_4 v_0^x + a_5 v_0^z + a_6) \cos(b_1 v_0^x + b_2 v_0^z + b_3) + c_2,$$

где параметры  $a_1 \dots a_6$ ,  $b_1 \dots b_3$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  зависят от начальных условий. Полный вид не приведён вследствие его громоздкости. Возьмём некоторые начальные параметры для качественного анализа уравнений, лежащие в пределах отклонений, приведённых в Таблице (1); заданные значения приведены в Таблице (2).

Таблица 1 – Параметры численного моделирования

Параметр	Максимальное отклонение от 0
$V^p$	0.001 м/с
$R_{\text{ЦМ}}^{\text{оск}}$ , $r_0^{\text{стск}}$ , $r_1^{\text{стск}}$	10 м
$R_{\text{ЦМ}}^{\text{стск}}$	5 м
$\omega_y^p$	0.0001 рад / с

Таблица 2 – Параметры численного моделирования

Параметр	Значение
$m_a^+$	20 кг
$M^-$	650 кг
$J_y$	5500 кг*м <sup>2</sup>
$J_y^p$	5600 кг*м <sup>2</sup>
$t_f - t_0$	4500 с

Для случайно взятых параметров по условиям Таблиц (1), (2) распределение невязки  $\Delta r$  на допустимых значениях скорости отталкивания

$|v_0^x| < 5$  см/с,  $|v_0^z| < 5$  см/с изображено на Рис. 6, где точкой обозначены скорости, ведущие к минимуму невязки, найденный в процессе полного перебора.

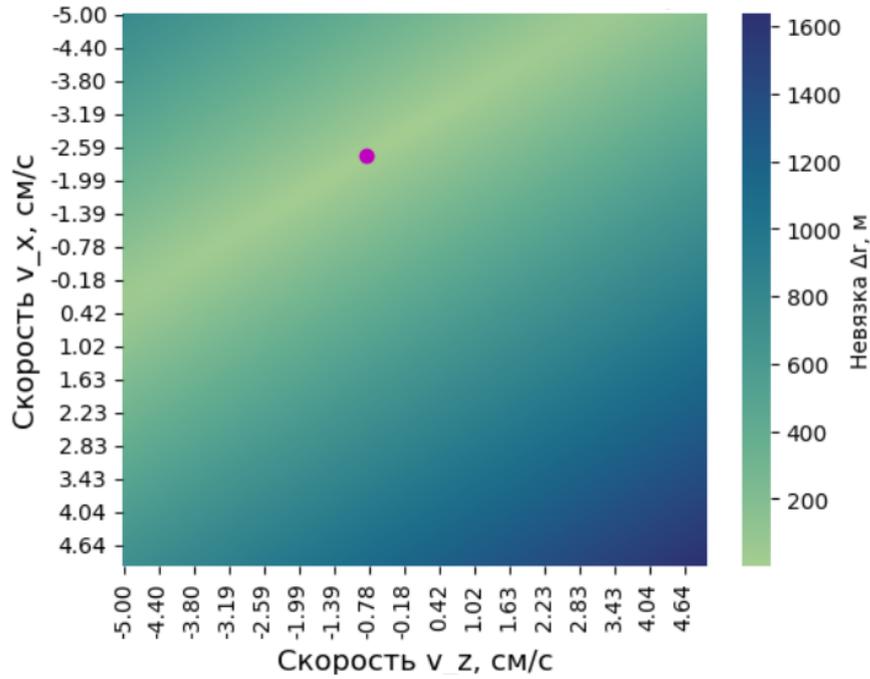


Рисунок 6 – Распределение  $\Delta r$  в области допустимых скоростей

Решение задачи перелёта с точностью  $\varepsilon = 0$  соответствовало бы условиям  $\Delta r_x = 0$ ,  $\Delta r_z = 0$ , исходя из которых, введя вспомогательные обозначения

$$A^- = (a_1 - a_4)v_0^x + (a_2 - a_5)v_0^z + a_3 - a_6,$$

$$A^+ = (a_1 + a_4)v_0^x + (a_2 + a_5)v_0^z + a_3 + a_6, \quad B = b_1v_0^x + b_2v_0^z + b_3,$$

получаем:

$$\delta r_x = c_1 + c_2 + A^+ \cos B + A^- \sin B, \quad \delta r_z = c_1 - c_2 + A^- \cos B - A^+ \sin B.$$

Здесь, удовлетворение  $\Delta r_x = 0$ ,  $\Delta r_z = 0$  эквивалентно удовлетворению условий  $\delta r_x = 0$ ,  $\delta r_z = 0$ . Рассмотрим приближенные решения, заданные

соотношениями:

$$\cos B = -\frac{c_1 + c_2}{A^+}, \quad \sin B = \frac{c_1 - c_2}{A^+}, \quad \rightarrow \quad \delta r' = \frac{A^-}{A^+} \sqrt{2c_1 + 2c_2} \quad (12)$$

$$\cos B = \frac{c_2 - c_1}{A^-}, \quad \sin B = \frac{c_1 + c_2}{A^-}, \quad \rightarrow \quad \delta r'' = \frac{A^+}{A^-} \sqrt{2c_1 + 2c_2} \quad (13)$$

Критерий малости невязок (12), (13) в работе не приводится. Однако компоненты этих невязок обратны друг другу в смысле знака:

$$\delta r'_x = \frac{A^-}{A^+}(c_1 - c_2), \quad \delta r'_z = \frac{A^-}{A^+}(-c_1 - c_2),$$

$$\delta r''_x = \frac{A^+}{A^-}(-c_1 + c_2), \quad \delta r''_z = \frac{A^+}{A^-}(c_1 + c_2).$$

Поскольку компоненты невязки  $\delta r$  непрерывны от скорости отталкивания, можно утверждать, что искомое решение находится между решениями уравнений (12) и (13). Для соотношений (12) найдём решения, выраженное через коэффициенты  $a_i$ , и назовём его  $a^+$ -решением:

$$1 = \cos^2 B + \sin^2 B = ((a_1 + a_4)v_0^x + (a_2 + a_5)v_0^z + a_3 + a_6)^2(2c_1^2 + 2c_2^2),$$

$$v_0^x = \frac{1}{a_1 + a_4}(\sqrt{2c_1^2 + 2c_2^2} - (a_2 + a_5)v_0^z - a_3 - a_6), \quad (14)$$

и выраженное через коэффициенты  $b_i$ , назовём его  $b^+$ -решением:

$$b_1 v_0^x + b_2 v_0^z + b_3 = \operatorname{arctg}^*\left(\frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}\right), \quad v_0^x = \pm \frac{1}{b_1}(\operatorname{arctg}^*\left(\frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}\right) - b_2 v_0^z - b_3), \quad (15)$$

и, аналогично,  $a^-$ -решение и  $b^-$ -решением для (13):

$$1 = \cos^2 B + \sin^2 B = ((a_1 - a_4)v_0^x + (a_2 - a_5)v_0^z + a_3 - a_6)^2(2c_1^2 + 2c_2^2),$$

$$v_0^x = \frac{1}{a_1 - a_4}(\sqrt{2c_1^2 + 2c_2^2} - (a_2 - a_5)v_0^z - a_3 + a_6), \quad (16)$$

$$b_1 v_0^x + b_2 v_0^z + b_3 = \operatorname{arctg}^*\left(\frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}\right), \quad v_0^x = \pm \frac{1}{b_1} \left( \operatorname{arctg}^*\left(\frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}\right) - b_2 v_0^z - b_3 \right). \quad (17)$$

В уравнениях выше обозначение  $\operatorname{arctg}^*(\alpha)$  означает множество решений  $\operatorname{arctg}(\alpha) + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тем самым,  $b^\pm$ -решения могут дать конечное множество пересечений с  $a^\pm$ -решениями в области определения  $|v_0^x| < v_0^{max}$ ,  $|v_0^z| < v_0^{max}$ . Построим линии решений и сравним с распределением  $\Delta r$  на Рис. 7.

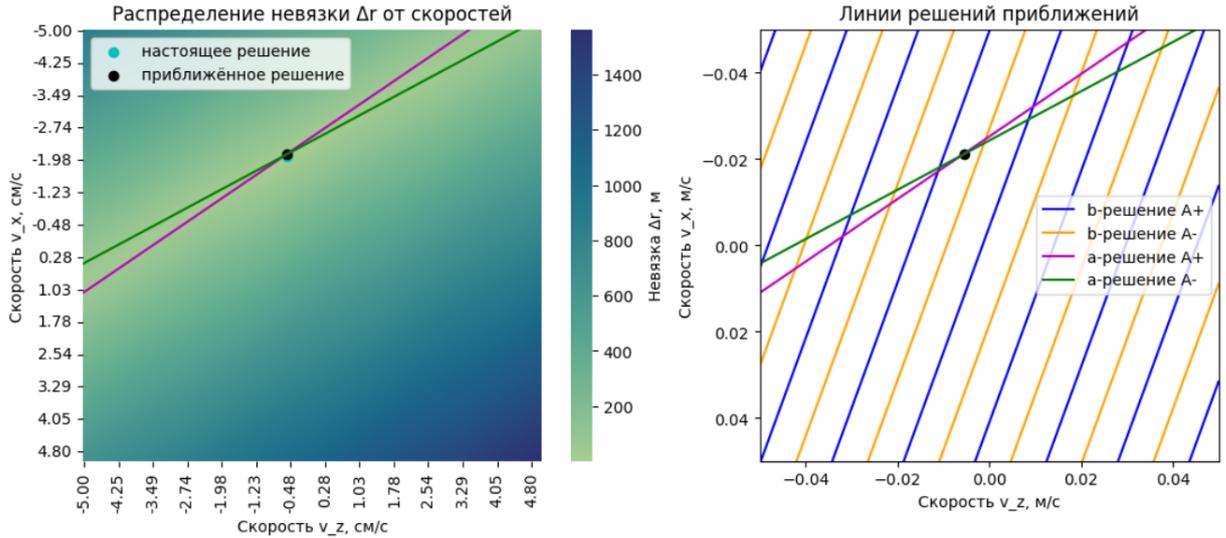


Рисунок 7 – Сравнение распределения  $\Delta r$  и решений уравнений (14-17)

На графике распределения невязки продублированы линии  $a^\pm$ -решений. Видно, что линии  $a^\pm$ -решений лежат в области "малого отклонения" конечного положения. Их пересечение может служить достаточно близким начальным приближением для численного решения задачи перелёта. Точка пересечения  $a^\pm$ -решений выражается через коэффициенты  $a_1 \dots a_6$ ,  $b_1 \dots b_3$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ :

$$v_0^x = \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5 + a_5 \sqrt{2c_1^2 + 2c_2^2}}{a_1 a_5 - a_2 a_4}, \quad (18)$$

$$v_0^z = \frac{-a_1 a_6 + a_3 a_4 - a_4 \sqrt{2c_1^2 + 2c_2^2}}{a_1 a_5 - a_2 a_4}.$$

Обратно,  $b^\pm$ -решения не несут пользы для задачи, поскольку важно не их пересечение с  $a^\pm$ -решениями, а взвешенное среднее всех пар  $(a^\pm, b^\pm)$  решений в области  $|v_0^x| < v_0^{max}$ ,  $|v_0^z| < v_0^{max}$ . Другие сравнения  $a^\pm$ ,

$b^\pm$ -решений для задачи плоско-параллельного перелёта, основанные на случайных параметрах из Таблицы (1), приведены в Приложении А.

Стоит упомянуть, что начальное приближение (18) для случая пространственного движения выражается через массы, время перелёта, радиус-вектора, скорости и угол  $\varphi_0$ . Все параметры кроме  $\varphi_0$  описаны в Главе 1. Предполагается, что матрица  $S$  определяет угол поворота  $\varphi_0$ . Например, при малых углах можно оценить следующим образом:

$$\cos(\varphi_0) = \frac{1}{2}(S_{xx} + S_{zz}), \quad \sin(\varphi_0) = \frac{1}{2}(S_{zx} - S_{xz}).$$

## 2.2. Существование решения

При помощи вариации начальных параметров можно оценить ограничения на кинематические параметры для заданных масс аппарата-сборщика и конструкции, для тензора инерции и максимальной скорости отталкивания аппарата от конструкции. Сперва, проварьируем начальную угловую скорость и посмотрим на область  $\Delta r < 100$  м, покажем распределения конечной невязки на Рис. 8.

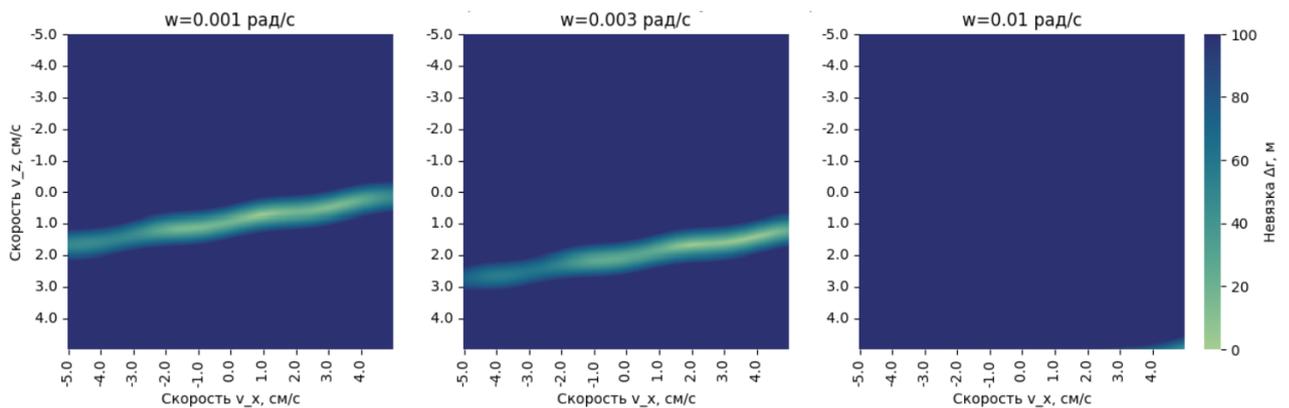


Рисунок 8 – Распределение невязки  $\Delta r$  при разных угловых скоростях

Здесь, имеет смысл ограничить угловую скорость конструкции  $|\omega_{max}^p| \approx 10^{-3}$  рад/с для существования решения перелёта. Однако требования

- к необходимой ориентации конструкции во время сборки;
- к малым колебаниям стержней, установленных в конечном положении

могут выражаться в меньшей максимально допустимой угловой скорости конструкции.

Далее, рассмотрим влияние больших поступательных скоростей на существование решения плоско-параллельного перелёта. Расположение области  $\Delta r < 100$  м от начальной поступательной скорости центра масс конструкции по оси  $Ox$  ОСК  $V_x^p$  представлены на Рис (9).

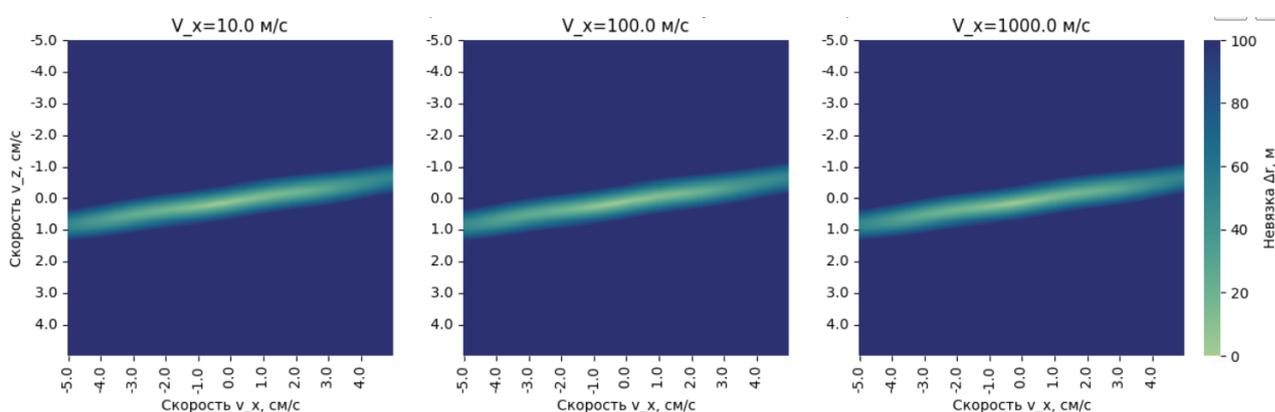


Рисунок 9 – Распределение невязки  $\Delta r$  при разных поступательных скоростях

Область  $\Delta r < 100$  м остаётся в пределах допустимых скоростей. Аналогично скорости  $V_x^p$ , от начального положения общего центра масс существование решения плоско-параллельной задачи перелёта не зависит.

### 2.3. Анализ серии перелётов

На разных этапах сборки конструкции угловая скорость вращения конструкции будет случайным образом меняться. Чтобы сохранить угловую скорость в заданных пределах для начал каждого перелёта, необходимо решать задачу перелёта с учётом уменьшения угловой скорости конструкции после отталкивания. На Рис. 10 изображены распределения конечной невязки и модуля угловой скорости конструкции в области допустимых скоростей

отталкивания (сверху), область решения задачи перелёта для  $\varepsilon = 50$  см (снизу, слева), распределение угловых скоростей в области решения задачи перелёта (снизу, справа).

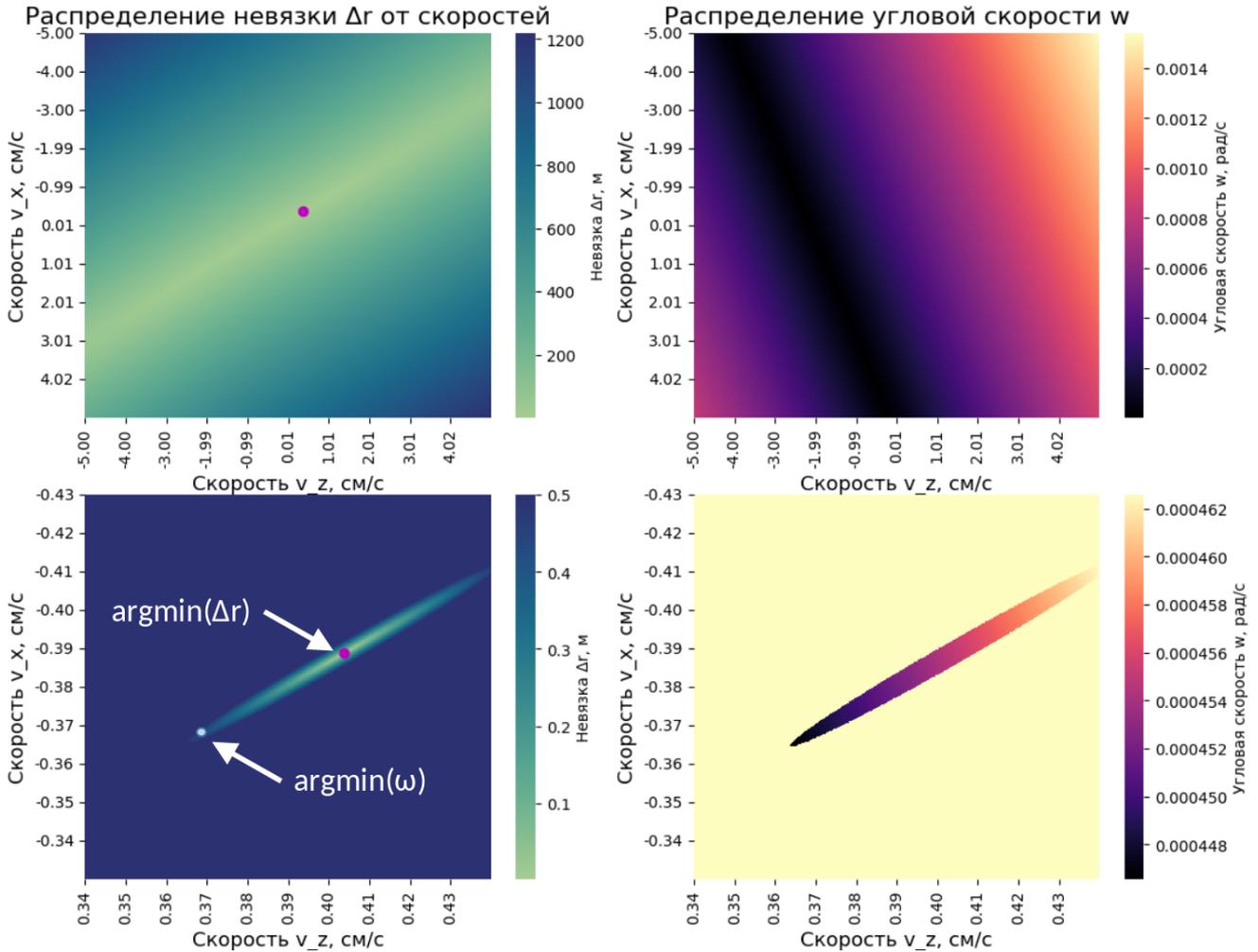


Рисунок 10 – Описание

Здесь, среди множества скоростей  $(v_0^x, v_0^z)$ , решающих задачу перелёта с точностью  $\varepsilon = 50$  см, выбирается вектор скорости, обеспечивающий минимальную угловую скорость. Способ уменьшения угловой скорости после отталкивания, изображённый на Рис. 10, не единственный. Также предлагается уменьшать угловую скорость после закрепления аппарата на конструкции. Конечно, для тех наборов доступных скоростей отталкивания  $(v_0^x, v_0^z)$ , которые не решают задачу перелёта, понятие закрепления не носит физического смысла. Однако смысл есть тогда, когда выбирается

$(v_0^x, v_0^z)^* = \operatorname{argmin}(\omega)$  среди области решения задачи перелёта.

Данный анализ проведён для фиксированного времени перелёта. Далее используется массив времени перелёта  $[t_f^1 \dots t_f^N]$ . Среди решения задачи перелёта для каждого  $t_f^i$ ,  $i = 1 \dots N$ , ищется то, где  $\min(\omega)$  не превышать максимальное значение.

### 3. Случай пространственного движения

В данной работе задача (10) ищется численными методами поиска минимума функционала. Введём функционал

$$\Phi = \Delta r^2. \quad (19)$$

Тогда при данных кинематических параметрах системы аппарат-конструкция и зафиксированном времени перелёта  $t_f$  введённый функционал зависит от скорости отталкивания  $\Phi = \Phi(\mathbf{v}_0)$ . Тогда задачу (10) решает задача минимизации функционала в области определения:

$$\mathbf{v}_0 : \mathbf{v}_0 \in D, \quad \Phi = \Delta r^2 = (\mathbf{r}_f^{\text{сск}} - \mathbf{r}_1^{\text{сск}})^2 \rightarrow \min \quad (20)$$

Как уже выяснилось выше, не любой набор кинематических параметров позволяет решить задачу перелёта. Однако в том случае, если решение задачи (20) не удовлетворяет решению задачи (10), задача (10) не имеет решения. Исходя из этого, задачу поиска решения можно переопределить как задачу минимизации.

#### 3.1. Ограничение параметров

Ограничения типа неравенства для задачи условной минимизации

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ c_i^{\max} - c_i \geq 0, \quad i = 1 \dots N, \end{cases} \quad (21)$$

могут быть учтены барьерной функцией или штрафной функциями [20], [19]:

$$f_{\text{барьер}}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = f(\mathbf{x}) - \mu^* \sum_{i=1}^m \log\left(1 - \frac{c_i}{c_i^{\max}}\right), \quad (22)$$

$$f_{\text{штраф}}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = f(\mathbf{x}) - \mu^* \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{c_i}{c_i^{\max}} - 1\right)_+^2, \quad (23)$$

где оператор  $(a)_+ = \max(a, 0)$ . При этом задачи (22), (23) и  $f(\mathbf{x}) \rightarrow \min$  эквивалентны при  $\mu \rightarrow 0$ .

Если функция (22) определена только при выполнении ограничений  $c_i > 0$ , а вектор-аргумент  $\mathbf{x}$  в процессе численной минимизации может привести к их невыполнению, использовать функцию (22) нельзя. В данной работе предлагается переопределить  $f_{\text{барьер}}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ , если  $\exists i \in [1 \dots N] : c_i < 0$  следующим образом:

$$\begin{cases} f^*(\mathbf{x}) = f^*(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) - \mu^* \sum_{i=1}^m \log(\varepsilon_i), \\ \varepsilon_i = \begin{cases} 1 - \frac{c_i}{c_i^{\max}} + \delta_\varepsilon \frac{c_i}{c_i^{\max}}, & (1 - \frac{c_i}{c_i^{\max}}) \geq 0, \\ \delta_\varepsilon e^{1 - \frac{c_i}{c_i^{\max}}}, & (1 - \frac{c_i}{c_i^{\max}}) < 0, \end{cases} \end{cases} \quad (24)$$

где  $\delta_\varepsilon$  – гиперпараметр, имеющий смысл сшивки области  $D_0$  выполнения ограничений и области  $D_1$  невыполнения ограничений. При малости  $\delta_\varepsilon$ , данная функция является барьерной функцией в  $D_0$  и штрафной функцией в  $D_1$ . График подлогарифмично функции  $\varepsilon_i$  в зависимости от ограниченной величины  $c_i$  представлен на Рис. 11.

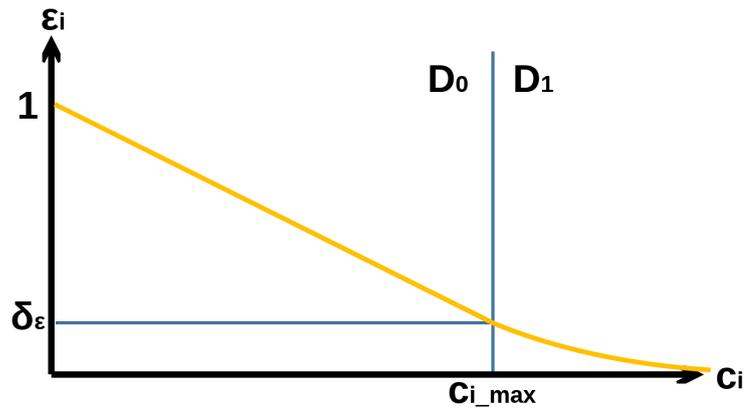


Рисунок 11 – График подлогарифмичной функции  $\varepsilon$

Поскольку функция  $\varepsilon$  непрерывна при переходе из  $D_0$  в  $D_1$ , целевая

функция  $f^*(\mathbf{x})$  также не имеет разрыва на границе выполнения ограничений типа неравенства. Так как функция  $\varepsilon$  ограничена с верху, причём  $\sup_{c_i} \varepsilon = 1$ , выполнено

$$f^*(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}). \quad (25)$$

В задаче перелёта, вектор-аргумент  $\mathbf{x}$  – скорость отталкивания  $\mathbf{v}_0$ , а основной функционал  $f(\mathbf{x})$  – функционал квадрата невязки  $\Phi(\mathbf{v}_0) = \Delta r^2$ . Тогда, применяя формулу (24) с  $f(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{v}_0)$ , получим функционал  $\Phi^*(\mathbf{v}_0)$ . Аналогично, подставляя  $f(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{v}_0)$  в формулу (23), получим  $\Phi_{\text{штраф}}(\mathbf{v}_0)$ .

## 3.2. Начальное приближение

Постановка задачи в данной работе основана на фиксированном времени перелёта  $t_f$ . Однако, задача перелёта в полной модели может не иметь решения для фиксированного  $t_f$ . Необходим подбор различных  $t_f^j \in [t_f^{\min}, t_f^{\max}]$ , каждый из которых является гиперпараметром для численной минимизации целевого функционала.

Далее, при невыпуклой целевой функции, необходим анализ начального приближения для численного моделирования. Начальное приближение должно учитывать время перелёта  $t_f$ . В качестве начального приближения можно рассмотреть полученный выше результат (18).

Более простой моделью для начального приближения служит движение аппарата между фиксированными точками ОСК  $\mathbf{r}_0^{\text{оск}}$  и  $\mathbf{r}_1^{\text{оск}}$ . В таком случае, при фиксированном  $t = t_f$ , есть аналитическое решение краевой

задачи в условиях движения Хилла-Клохесси-Уилтшира (1):

$$\begin{aligned}
v_0^x &= \frac{\omega_{\text{орб}}((6t\omega_{\text{орб}}r_0^z - r_0^x + r_1^x) \sin(\omega_{\text{орб}}t)(14r_0^z - 2r_1^z) \cos(\omega_{\text{орб}}t) - 14r_0^z + 2r_1^z)}{-3t\omega_{\text{орб}} \sin(\omega_{\text{орб}}t) - 8 \cos(\omega_{\text{орб}}t) + 8}, \\
v_0^y &= \frac{\omega_{\text{орб}}(-r_0^y \cos(\omega_{\text{орб}}t) + r_1^y)}{\sin(\omega_{\text{орб}}t)}, \\
v_0^z &= \frac{\omega_{\text{орб}}((-4r_0^z + 4r_1^z) \sin(\omega_{\text{орб}}t)(3t\omega_{\text{орб}}r_0^z - 2r_0^x + 2r_1^x) \cos(\omega_{\text{орб}}t) - 14r_0^z + 2r_1^z)}{-3t\omega_{\text{орб}} \sin(\omega_{\text{орб}}t) - 8 \cos(\omega_{\text{орб}}t) + 8}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Данная модель основана на предположении, что масса конструкции много больше массы аппарата-сборщика со взятым стержнем  $M^- \gg m_a^+$ , и поступательным и вращательным движением конструкции можно пренебречь. Также, такая упрощённая модель рекомендуется тогда, когда положение конструкции в ОСК близко к устойчивому положению равновесия. В таком случае, итоговую зону столкновения для задачи перелёта можно зафиксировать в ОСК.

Построим сферу между радиус-векторами  $\mathbf{r}_0^{\text{ОСК}}$  и  $\mathbf{r}_1^{\text{ОСК}}$ :

$$\mathbf{r}_{\text{сф}} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_0^{\text{ОСК}} + \mathbf{r}_1^{\text{ОСК}}),$$

$$d_{\text{сф}} = |\mathbf{r}_0^{\text{ОСК}} - \mathbf{r}_1^{\text{ОСК}}|,$$

где  $\mathbf{r}_{\text{сф}}$  – радиус-вектор центра сферы ОСК,  $d_{\text{сф}}$  – диаметр сферы. Приводится следующее предположение: траектория движения аппарата-сборщика, пересекающая данную сферу, имеет большую вероятность столкновения с конструкцией; если траектория движения сферу не пересекает, вероятность столкновения с конструкцией мала. Справедливость этого предположения зависит от собираемой конструкции. Используем данную сферу как "начальное приближение" зоны столкновения аппарата-сборщика таким образом: для каждого времени перелёта  $t_f^j$  из набора  $t_f^j \in [t_f^{\text{min}}, t_f^{\text{max}}]$ ,  $j = 1 \dots n$  разобьём траекторию движения аппарата-сборщика на радиус-вектора  $\mathbf{r}_i$ ,

$i = 1 \dots m$  проверим условие столкновения со сферой:

$$\{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{\text{сф}}| < d_{\text{сф}}\}.$$

Преимущество проверки пересечения траектории движения аппарата-борщика со сферой в том, что разбиение  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1 \dots m$  может быть грубым, и для каждого радиус-вектора  $\mathbf{r}_i$  идёт проверка только одного условия. В полной модели, проверка должна осуществляться на мелком разбиении для каждого элемента конструкции. Таким образом, среди времён перелёта  $t_f^j \in [t_f^{\min}, t_f^{\max}]$ ,  $j = 1 \dots n$  можно выделить те, для которых вероятность столкновения большая, с малыми затратами времени на вычислительные расчёты. Пример выбора траекторий представлен на Рис. 12, где красным цветом обозначена сфера, фиолетовым - траектории, не пересекающие сферу, голубым - траектории, пересекающие сферу.

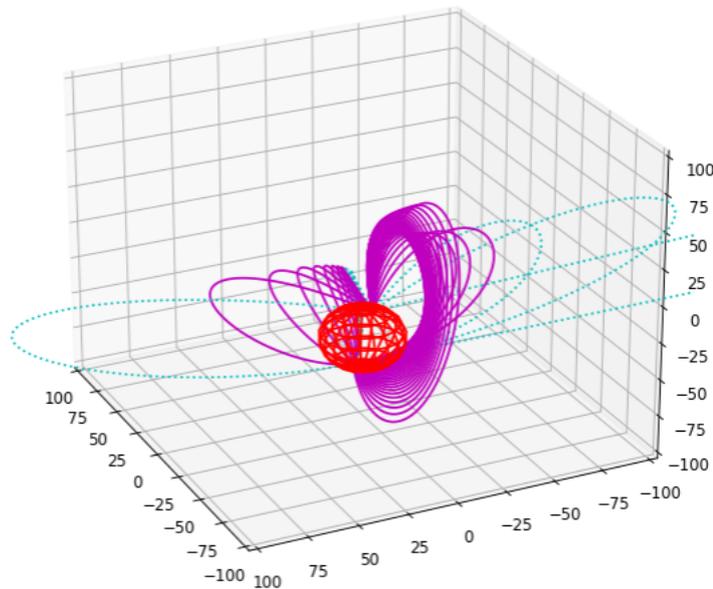


Рисунок 12 – Начальные приближения из упрощённой модели

### 3.3. Численное моделирование

Существуют реализованные методы поиска минимума функции при учёте ограничений (21). Тогда в качестве минимизируемого функционала используется  $\Phi(\mathbf{v}_0) = \Delta r^2$ . Например, библиотека `scipy` для языка программирования Python содержит более десяти методов. Среди них в настоящей работе используется метод доверительной области. Рассмотрим подзадачи выполнения ограничений и отсутствия столкновения.

Кинематические параметры, которые требуется ограничить, могут быть равны

1. параметрам сразу после отталкивания,
2. параметрам сразу после захвата,
3. максимальным параметрам по время перелёта,
4. максимум/среднее арифметическое параметров из 1, 2, 3 пунктов.

В настоящей работе используется 2-й подход. Это обусловлено тем, что для задачи перелёта  $i + 1$  кинематические параметры, которые должны быть ограниченными, минимизируются в момент начала перелёта  $i$ . В настоящей миссии больший смысл несёт 4-й подход. Подход 3 рекомендуется тогда, когда отталкивание аппарата-сборщика от конструкции не стремится или не способно решить задачу перелёта в заданную точку. В таком случае, дальнейшее движение аппарата-сборщика к целевой точке предполагает использование бортового двигателя. Подход 1 рекомендуется тогда, когда вектор-аргумент целевого функционала содержит время перелёта  $\Phi([\mathbf{v}_0^T, t_f]^T) \rightarrow \min$ .

Столкновение траектории перелёта при численном решении задачи означает нахождение радиус-векторов  $r_{k_1} \dots r_{k_m}$ , соответствующих времени

$t_{k_1} \dots t_{k_m}$ , разбиения траектории внутри элементов конструкции. Тогда, учёт столкновения происходит одним из следующих способов:

1. окончание численного интегрирования задачи в момент  $t_{k_1}$ , расчёт целевого функционала с невязкой  $\Delta r = |\mathbf{r}_{k_1}^{\text{ССК}} - \mathbf{r}_1^{\text{ССК}}|$ ,
2. модификация целевого функционала,
3. добавление к вектору ограничений  $\mathbf{c}$  вектор-функции  $\mathbf{g}$ .

Компонента  $g_i$  в вектор-функции  $\mathbf{g} = [g_1 \dots g_N]$ , соответствующая моменту времени  $t_i$ , вычисляется по формуле (9). Тогда, подходы 1 и 3 не могут быть использованы одновременно. Подход 3 готов к использованию во реализованных численных методах условной минимизации функционала, поскольку он делает целевую функция непрерывной в области определения. Наличие локальных минимумов, не являющихся глобальными, полностью зависит от конфигурации конструкции.

Подход 1, наоборот, делает целевую функцию разрывной в области определения. Однако при использовании численного метода поиска с фиксированным количеством итераций, 1-й подход имеет меньшие вычислительные затраты для заранее плохих начальных приближений. Также уменьшить вычислительные затраты можно, минимизируя целевую вектор-функцию вместо скаляр-функции. Предлагается ввести вектор-функцию по аналогии с формулой (24):

$$\begin{cases} \Phi^*(\mathbf{v}_0) = \frac{\Delta r}{\Delta r} (\Delta r^2 - \mu^* \sum_{i=1}^m \log(\varepsilon_i)), \\ \varepsilon_i = \begin{cases} 1 - \frac{c_i}{c_i^{\max}} + \delta_\varepsilon \frac{c_i}{c_i^{\max}}, & (1 - \frac{c_i}{c_i^{\max}}) \geq 0, \\ \delta_\varepsilon e^{1 - \frac{c_i}{c_i^{\max}}}, & (1 - \frac{c_i}{c_i^{\max}}) < 0, \end{cases} \end{cases} \quad (27)$$

где  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f^{\text{ССК}} - \mathbf{r}_1^{\text{ССК}}$ . Тогда, можно использовать метод Ньютона для поиска

требуемой скорости отталкивания:

$$\mathbf{v}_0^{i+1} = \mathbf{v}_0^i - \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{v}_0^i} \Phi^* \right), \quad (28)$$

где  $i$  – номер итерации метода.

Если бы не выполнялось условие (25), существовала бы скорость отталкивания  $\mathbf{v}_0$ , при которой  $\Delta r^2 = \mu^* \sum_{i=1}^m \log(\varepsilon_i)$ , и, следовательно,  $|\Phi^*(\mathbf{v}_0)| = 0$  при  $\Delta r^2 \geq \varepsilon^2$ . При выполнении условия (25) из неравенства  $|\Phi^*(\mathbf{v}_0)| < \varepsilon^2$  следует  $\Delta r^2 < \varepsilon^2$ . Тем самым, на задачу с изменённой целевой функцией можно накладывать прежний критерий останова поиска минимума функции.

Предлагается использовать метод Ньютона для целевой вектор-функции (28), и, при ненахождении решения задачи перелёта, использовать метод доверительных областей с добавлением к вектору ограничений  $\mathbf{c}$  вектор-функции  $\mathbf{g}$ .

### 3.4. Управление движением с помощью двигателя

В силу ошибок при отталкивании может появиться необходимость в корректировке траектории во время перелёта, если уменьшение требуемой точности  $\varepsilon$  в задаче (10) не может гарантированно учесть ошибки вектора скорости отталкивания. Также наличие бортового двигателя необходимо тогда, когда решение задачи перелёта одним только отталкиванием не было найдено. Подходы к построению управления можно разделить на:

1. учёт управления во время перелёта в момент отталкивания;
2. отсутствие учёта управления во время перелёта в момент отталкивания.

Подход 1, в отличие от 2-го подхода, может гарантировать решение задачи перелёта с использованием бортового управления; в нём можно использовать

как управление без обратной связи  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ , так и регулятор с обратной связью  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Подход 2 имеет меньшие вычислительные затраты; дальнейшее движение аппарата-сборщика требует использования регулятора с обратной связью.

При синтезе управления вида  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ , решающего задачу перелёта, необходимо его задать параметрически:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t),$$

где  $\boldsymbol{\xi}$  – вектор параметров. Пример такого управления – линейная комбинация векторов:  $\boldsymbol{\xi}$

$$\mathbf{u} = \frac{t - t_0}{t_f - t_0} \mathbf{u}_1 + \frac{t_f - t}{t_f - t_0} \mathbf{u}_2, \quad \boldsymbol{\xi} = [\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T]^T.$$

Далее, рассмотрим управление с обратной связью. Приближение двигательного управления разделяется на импульсное и непрерывное. В случае импульсного управления, следует задать алгоритм использования импульсов, например, в момент непрерывной видимости цели аппаратом на протяжении заданного времени. Выбор вектора импульса  $d\mathbf{v}$  может быть найден методами минимизации функционала, по аналогии с отталкиванием.

В случае непрерывного управления задаётся ляпуновское управление. ПД-регулятор может быть представлен в виде

$$\mathbf{u} = -k_r \Delta \mathbf{r} - k_v \Delta \dot{\mathbf{r}}.$$

В ОСК на аппарат действует ускорение Хилла-Клохесси-Уилтшира и управление:

$$\ddot{\mathbf{r}}_a^{\text{оск}} = \begin{bmatrix} -2\omega_{\text{орб}} \dot{r}_z \\ -\omega_{\text{орб}}^2 r_y \\ 3\omega_{\text{орб}}^2 r_z + 2\omega_{\text{орб}} \dot{r}_x \end{bmatrix} + \mathbf{u}.$$

Тогда уравнение относительного движения изменится :

$$\ddot{\mathbf{r}}_a^{\text{ССК}} = (\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{\text{ОСК}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{орб}} \times U\boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}}) \times S\boldsymbol{\rho}^{\text{ОСК}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}} \times \boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}} \times S\boldsymbol{\rho}^{\text{ОСК}} + 2\boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}} \times S\dot{\boldsymbol{\rho}}^{\text{ОСК}} + S\ddot{\boldsymbol{\rho}}^{\text{ОСК}} + S\mathbf{u}.$$

Ляпуновское управление на основе ПД-регулятора будет иметь вид:

$$\mathbf{u} = -k_r \Delta \mathbf{r}^{\text{ОСК}} - k_v \Delta \dot{\mathbf{r}}^{\text{ОСК}} - (\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{\text{ОСК}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{орб}} \times U\boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}}) \times \boldsymbol{\rho}^{\text{ОСК}} - \boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}} \times \boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}} \times \boldsymbol{\rho}^{\text{ОСК}} - 2\boldsymbol{\omega}^{\text{ОСК}} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}^{\text{ОСК}} - \ddot{\boldsymbol{\rho}}^{\text{ОСК}}. \quad (29)$$

Вследствие полёта близ сложных конструкций критически важна ликвидация колебательной моды управляемого движения. Во время работы приведённого управления движение относительно ССК подчиняется уравнению:

$$\Delta \ddot{\mathbf{r}}^{\text{ОСК}} + k_v \Delta \dot{\mathbf{r}}^{\text{ОСК}} + k_r \Delta \mathbf{r}^{\text{ОСК}} = 0. \quad (30)$$

Общее решение уравнения (30) есть

$$x = c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{\omega_2 t},$$

$$\omega_{1,2} = -\frac{k_v}{2} \pm \sqrt{\frac{k_v^2}{4} - k_r}.$$

Отсюда следует, что для безколебательного относительного движения необходимо соотношение коэффициентов:  $k_v = 2\sqrt{k_r}$ .

При неучёте управления при отталкивании, данное управление не учитывает возможность соударения с конструкцией. В настоящей работе не рассматриваются модификации регулятора для избежания столкновения, как, например, в работах [16], [8]. Это обусловлено малым ускорением бортового двигателя, следовательно малым отклонением управляемой траектории от траектории без управления.

## 4. Результаты математического моделирования процесса сборки

Основные параметры численного моделирования приведены в таблице

Параметр	Значение
Максимальная скорость отталкивания	5 см/с
Максимальное ускорение двигателей	$10^{-5}$ м/с <sup>2</sup>
Максимальная угловая скорость конструкции	0.001 рад/с
Максимальное значение $ R_{\text{ЦМ}}^{\text{оск}} $	50 м
Максимальное значение $ \dot{R}_{\text{ЦМ}}^{\text{оск}} $	10 см/с
Радиус зоны столкновения вокруг стержней	30 см
Радиус захвата манипулятора	50 см
Максимальное время перелёта $t_f^{\text{max}}$	$10^4$ с
Длина стержней	5-10 м
Погонная масса стержней	1 кг/м

Численное моделирование проводилось на конструкции типа рефлектора. На Рис. 13-14 представлены начальная конфигурация системы контейнер-площадка и конечная конфигурация системы контейнер-площадка-ферменная конструкция соответственно.

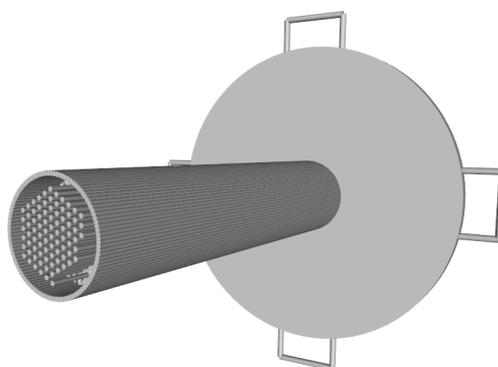


Рисунок 13 – Система контейнер-площадка

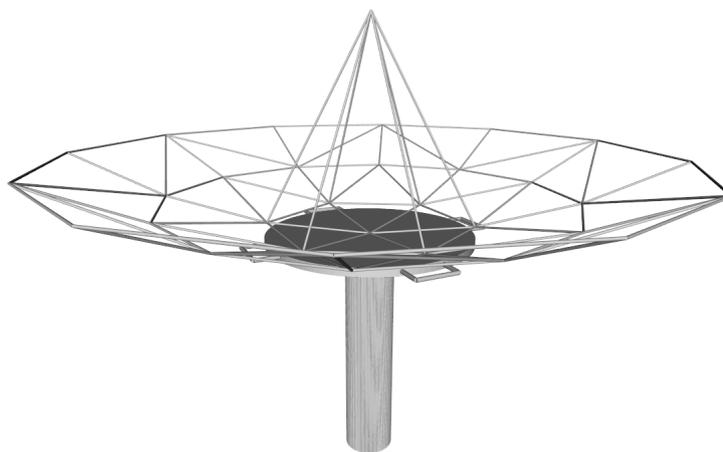


Рисунок 14 – Система контейнер-площадка-ферменная конструкция

Распределение функции  $g$  (9) в области  $Oxz$  на примере системы контейнер-площадка показана на Рис. 15.

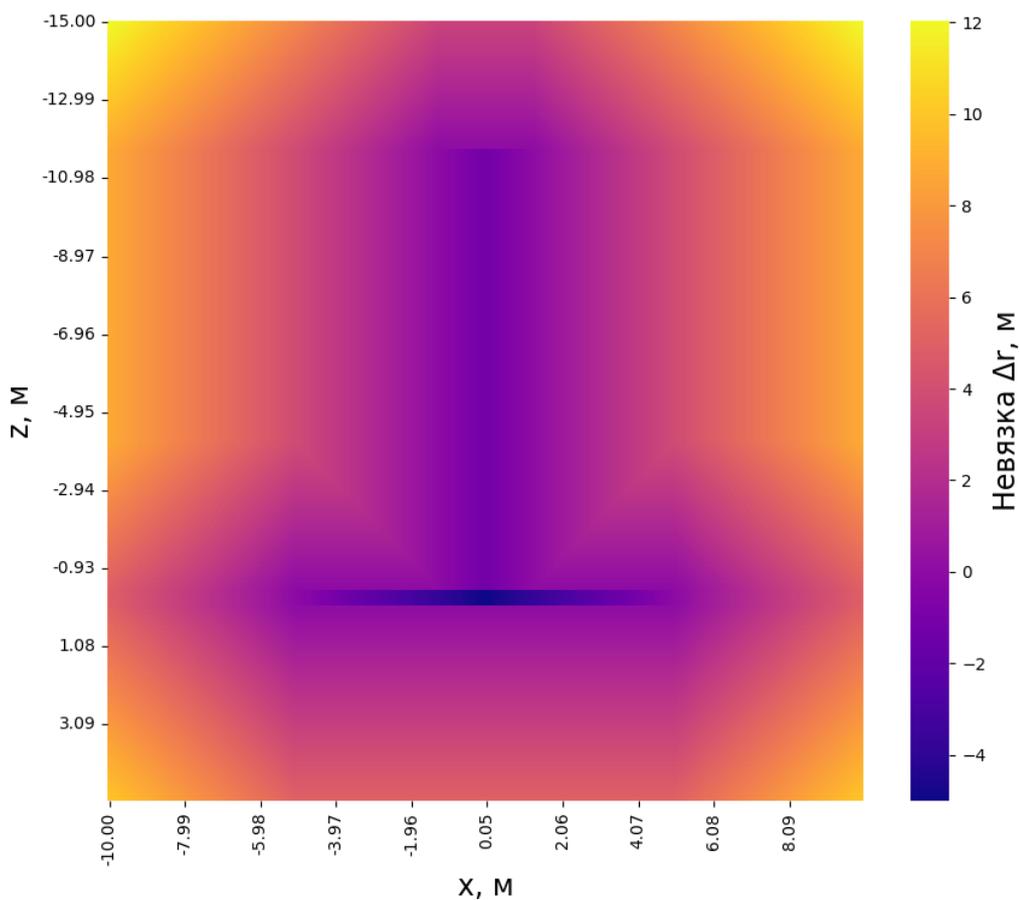


Рисунок 15 – Распределение функции  $g$

Изменение параметров на первых 4 перелётах представлены на Рис.

16, где на верхнем графике изображена невязка от времени  $\Delta r(t)$ , снизу ограниченные параметры относительно максимальных значений  $c_i/c_i^{max}$ . Со-

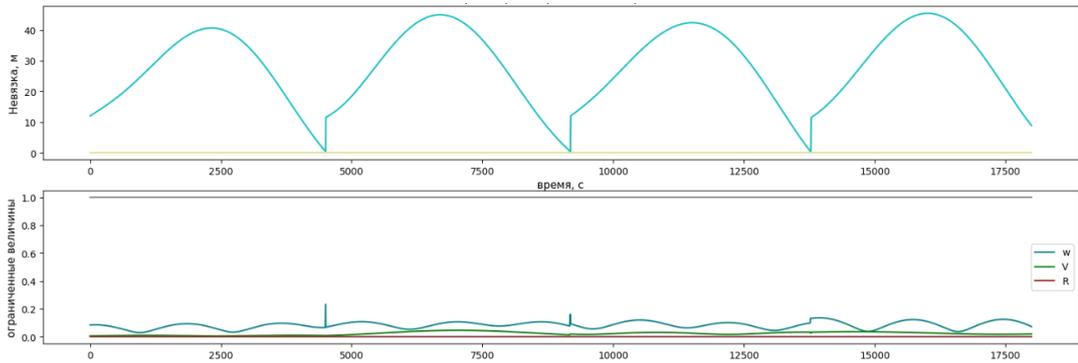


Рисунок 16 – Параметры на этапах сборки

ответствующие перелёты качественно представлены на Рис. 17, где голубая линия – траектория движения аппарата относительно ОСК, фиолетовая – траектория движения аппарата относительно ССК в проекции на ОСК.

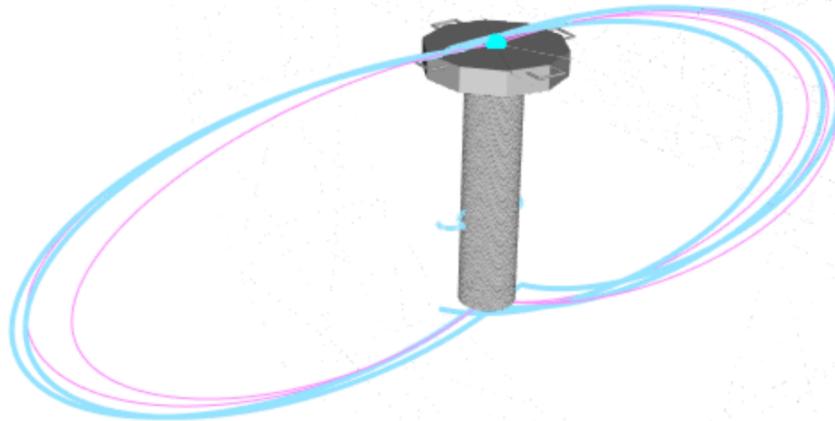


Рисунок 17 – Траектория движения аппарата-сборщика

Далее показан пример большей конструкции. На Рис. 18 изображен промежуточный этап сборки конструкции типа станции, с которого начинается численное моделирование. Для данной конструкции график параметров изображен на Рис. 19, где верхний график – график невязки, средний – график ограниченных параметров, нижний – график модуля ускорения бортового двигателя. Видно, что бортовой двигатель включается тогда, когда

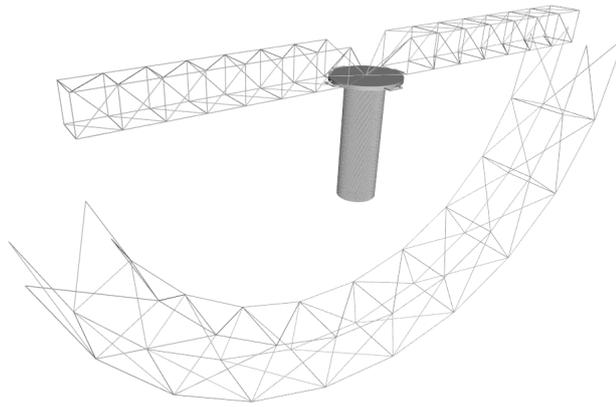


Рисунок 18 – Система контейнер-площадка-ферменная конструкция

задача перелёта не может быть решена только с помощью отталкивания. В отличие от бестопливного перелёта на Рис. 16, поступательная скорость конструкции  $V$ , и, следовательно, отклонение  $R$  центра масс конструкции от центра ОСК, имеют величину относительно своего максимума того же порядка, что и угловая скорость  $\omega$ .

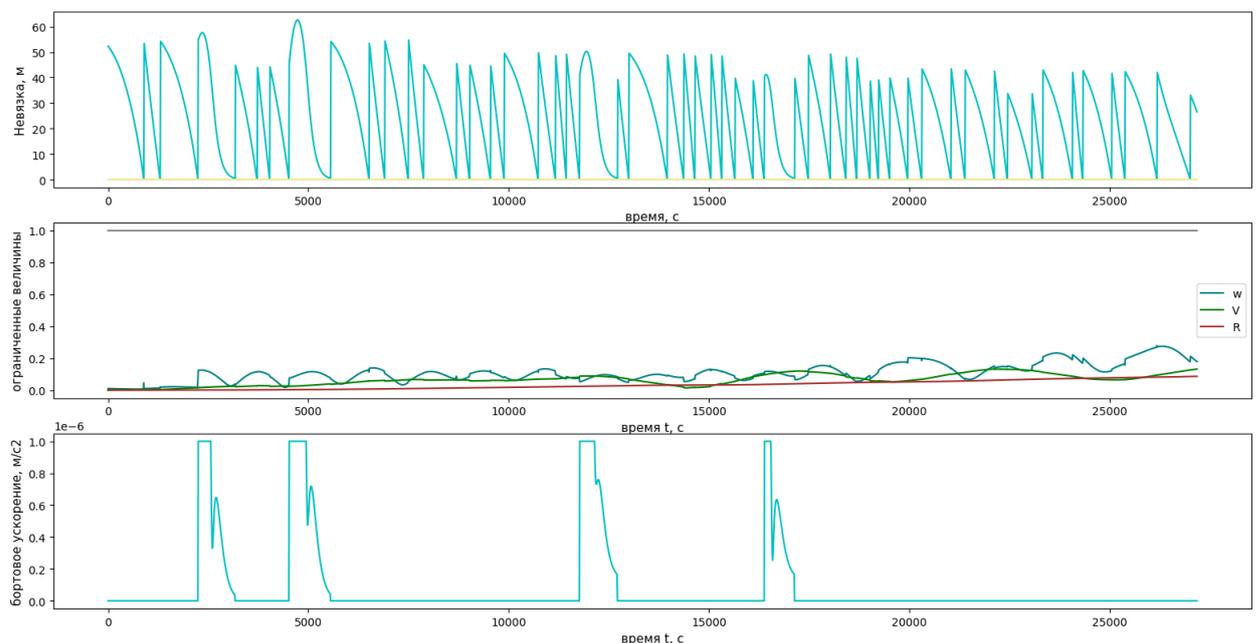


Рисунок 19 – Параметры на этапах сборки

На Рис. 20 продемонстрирован этап закрепления аппарата-сборщика в узле захвата конструкции. В этот промежуток времени, обозначенный красными пунктиром и стрелкой, невязка равно нулю, и кинематические

параметры, по возможности, минимизируются.

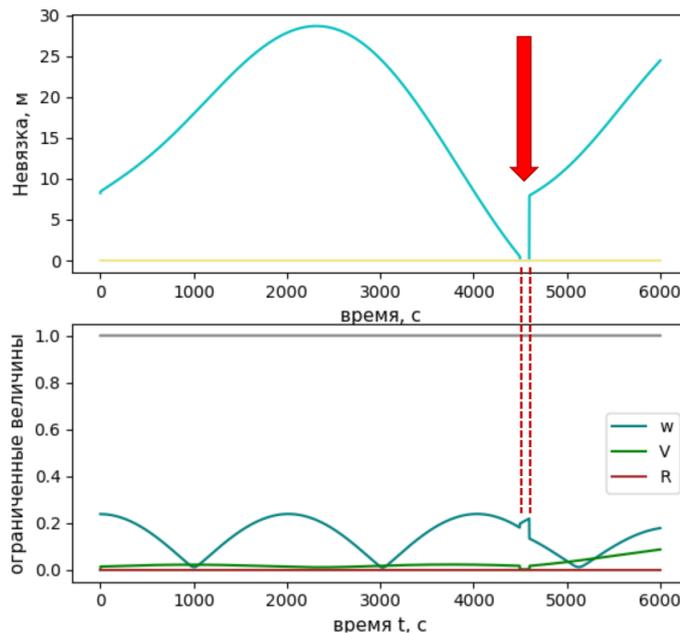


Рисунок 20 – Параметры на этапах сборки

Рассмотрим снова сборку конструкции типа антенны. Метод Ньютона с окончанием интегрирования при столкновении требует достаточно близкого начального приближения. Среди набора времени перелёта  $t_f$  существуют такие значения, при которых приближения (18, 26) не позволяют методу решить задачу перелётов за ограниченное количество итераций; невязка на итерациях метода для таких  $t_f$  показана на Рис. 21.

Существуют такие  $t_f$ , при которых приближение плоско-параллельного движения (18) решает задачу перелёта. На Рис. 22 представлена зависимость невязки от итерации метода Ньютона для разных перелётов между узлами конструкции типа антенны с приближением (18). Аналогично, на Рис. 23 представлена зависимость невязки от итерации метода Ньютона для разных перелётов между узлами конструкции типа антенны с приближением (26).

Видно, что, в среднем, приближение (26) в данном случае работает чуть лучше (18). Это объясняется тем, что ориентация конструкции типа антенны в численном моделировании находится близко к устойчивому положению равновесия. Тем самым, отклонение конструкции от начального

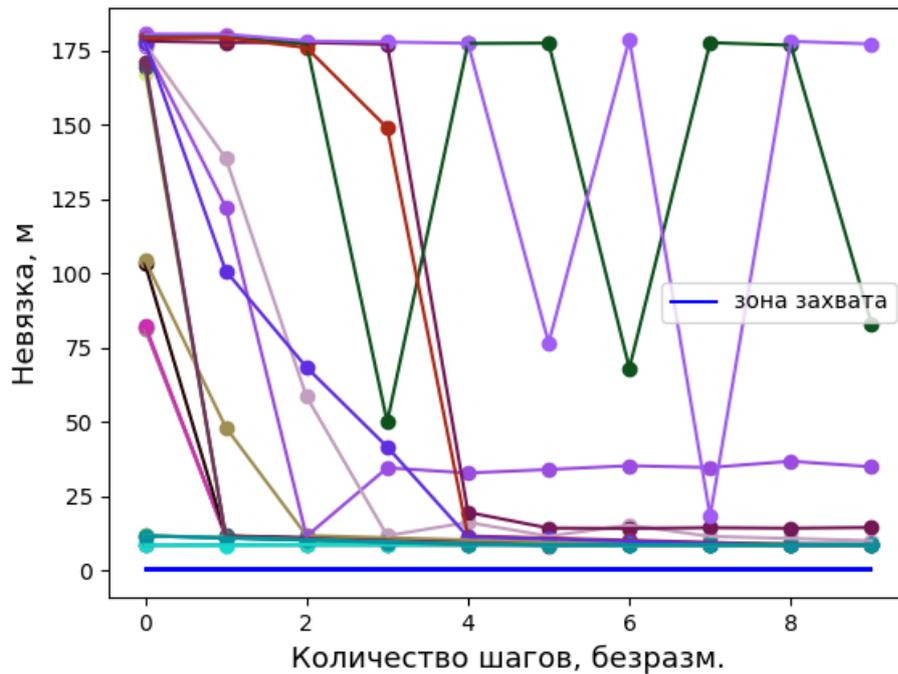


Рисунок 21 – Сходимость метода Ньютона на грубых приближениях

положения ограничено. Автором настоящей работы предполагается, что если для конструкции будет применена намеренная закрутка, приближение (18) будет менее грубым, чем (26).

При использовании метода доверительной области, реализованного в библиотеке `scipy` на Python, заданный, возьмём начальное приближение (26), при котором метод Ньютона решает задачу перелёта. На Рис. 24 зависимость невязки от итерации метода Ньютона при решении задачи одного перелёта. Видно, что данный метод решает задачу перелёта с большими вычислительными затратами; "плато" графика объясняются тем, что целевая траектория, обеспечивающая  $\Delta r = 0$ , находится на границе выполнения ограничений  $g_i > 0$ .

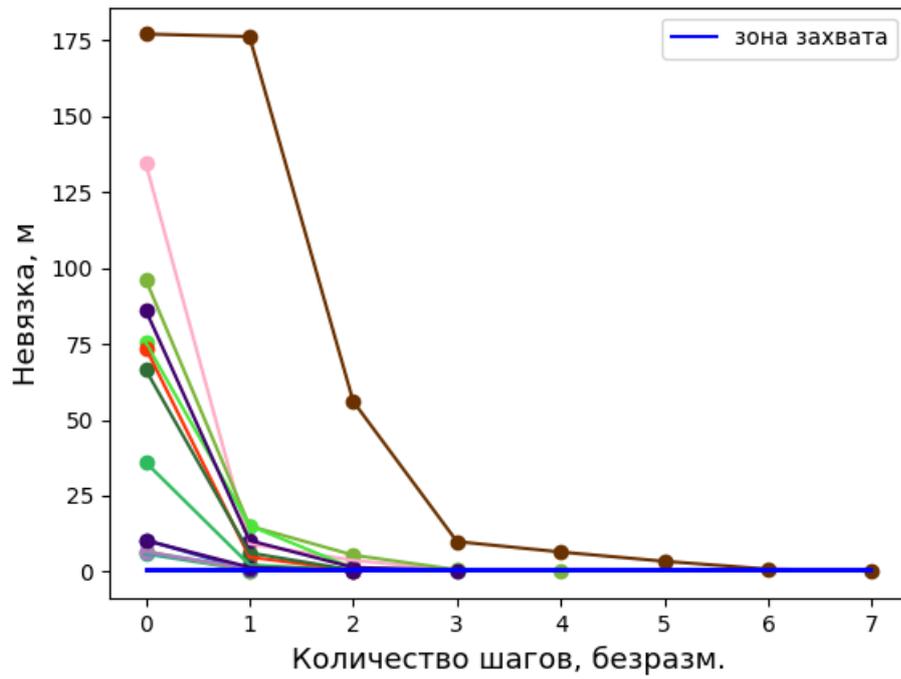


Рисунок 22 – Сходимость метода Ньютона на точных приближениях (18)

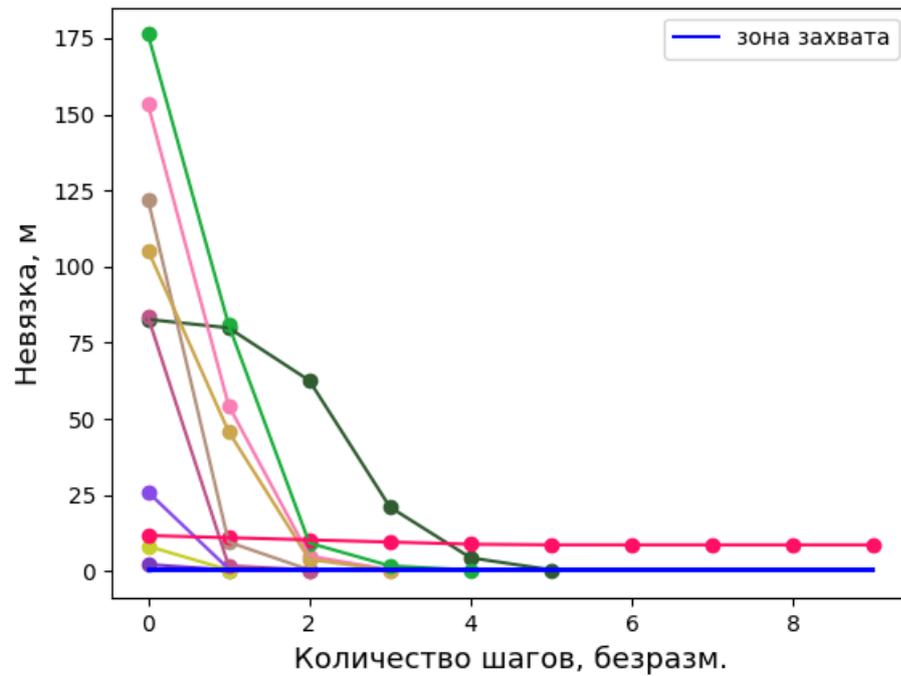


Рисунок 23 – Сходимость метода Ньютона на точных приближениях (26)

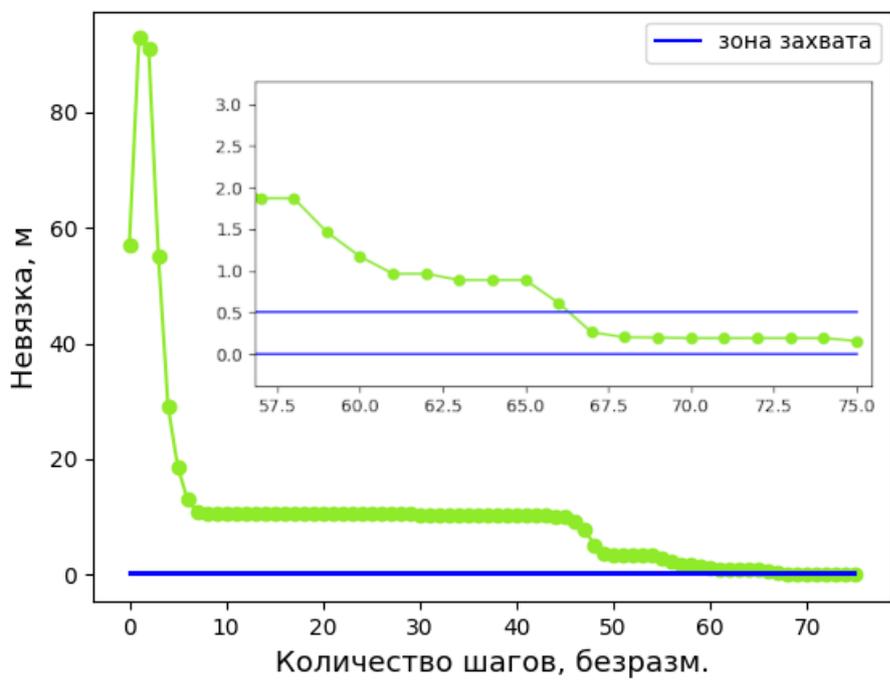


Рисунок 24 – Сходимость метода Ньютона на точном приближении (26)

## Заключение

В настоящей магистерской диссертации предложен новый подход к управлению движением космического аппарата-сборщика в задаче перелёта между точками орбитальной конструкции с использованием серии отталкиваний и закреплений при сборке конструкции ферменного типа. Рассмотрены случаи плоскопараллельного и пространственного движения системы конструкция и аппарат-сборщик. Для плоскопараллельного случая получены аналитические выражения для нахождения скорости отталкивания для решения задачи перелёта между точками конструкции. Для случая пространственного движения решение задачи перелёта ищется численно с учётом ограничений, связанных с требованием нестолкновения с элементами конструкции. Для случая, если не удастся найти решение задачи только с помощью отталкивания, предложен алгоритм управления движением на основе прямого метода Ляпунова с помощью бортового двигателя. Для конкретного примера сборки конструкции приведены результаты моделирования управляемого движения аппарата-сборщика, которые демонстрируют успешное решение задачи перелёта.

В качестве развития настоящей работы можно добавить рассмотрение управляемого углового движения аппарата во время перелёта между точками, а также возникновение колебательных движений протяженной орбитальной конструкции ферменного типа, что может повлиять на решение задачи перелёта. Отдельной интересной задачей, которая может быть продолжением этой работы, является организация управляемого движения нескольких аппаратов-сборщиков, а также исследование управляемого движения такой группы аппаратов.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Piskorz D, Jones K. *On-orbit assembly of space assets: A path to affordable and adaptable space infrastructure*, The Aerospace Corporation, 2018.
- [2] Oegerle W.R., Purves L.R., Budinoff J.G., Moe R.V., Carnahan T.M., Evans D.C. and Kim C.K. *Concept for a large scalable space telescope: in-space assembly*, Space Telescopes and Instrumentation I: Optical, Infrared, and Millimeter, 2006, Vol. 6265.
- [3] Izzo D., Pettazzi L., and Ayre M. *Mission Concept for Autonomous on Orbit Assembly of a Large Reflector in Space*, 56th International Astronautical Congress, Paper IAC-05-D1.4.03, Fukuoka, Japan, 2005.
- [4] ZhengAi Cheng , Xinbin Hou, Xinghua Zhang, Lu Zhou, Jifeng Guo and Chunlin Song *In-orbit assembly mission for the Space Solar Power Station*, Acta Astronautica, 2016, Vol. 129, pp. 299-308.
- [5] Sternberg D., Chodas M., Jewison C., Jones M. *Multidisciplinary system design optimisation of on-orbit satellite assembly architectures*, 2015 IEEE Aerospace Conference, Big Sky, MT, USA, March 07-14, 2015, Vol. 1, pp. 1-14.
- [6] Gralla E., De Weck O. *Strategies for on-orbit assembly of modular spacecraft*, JBIS, 2007, Vol. 60, pp. 219–227.
- [7] Colin R. McInnes *Distributed Control of Maneuvering Vehicles for On-Orbit Assembly*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1995, Vol. 18, No. 5, pp. 1204-1206.
- [8] Dario Izzo et. al. *Equilibrium shaping: distributed motion planning for satellite swarm*, 2005, Proc. 8th Intern. Symp. on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in space.

- [9] On-Orbit Servicing, Assembly, and Manufacturing 2 (OSAM-2).  
URL: [https://www.nasa.gov/mission\\_pages/tdm/osam-2.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/tdm/osam-2.html)  
(дата обращения: 13.06.2023).
- [10] Wei-Jie Li et. al. *On-orbit service (OOS) of spacecraft - A review of engineering developments. Progress in Aerospace Sciences*, 2019, Vol. 108, pp. 32-120.
- [11] Jinguo L., Pengyuan Z., Xin Z., Xiang Z. *1U-Sized Deployable Space Manipulator for Future On-Orbit Servicing, Assembly, and Manufacturing*, Space: Science & Technology, 2022.
- [12] Manzoni G., Brama Y.L. *Cubesat Micropropulsion Characterization in Low Earth Orbit*, 29th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, 2015, SSC15-IV-5, pp. 1-9.
- [13] Craig U., Sergio P., Vaios J.L., Christopher P.B., John B. *Using CubeSat/micro-satellite technology to demonstrate the Autonomous Assembly of a Reconfigurable Space Telescope (AAReST)*, Acta Astronautica, 2015, Vol. 114, pp. 112-122.
- [14] M. Magarotto., M. Manente, D. Pavarin *Electric propulsion for cubesats: a review*, 72nd International Astronautical Congress, Dubai, UAE, Paper IAC-21,C4,8-B4.5A, 18-22 September, October, 2021, pp. 1-10.
- [15] F. Schäfer, C. Montag, G. Herdrich, R. Laufer *Flight results of the PETRUS pulsed plasma thruster on the 3u CubeSat GreenCube*, 73rd International Astronautical Congress (IAC), Paper IAC-22,C4,8-B4.5A, Paris, France, 2022.
- [16] A. Badawy, C.R. McInnes. *On-Orbit Assembly Using Superquadratic Potential Fields*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2008, Vol. 31, No. 1, pp. 2-36.

- [17] Сазонов В.В., Барбашова Т.Ф. Гравитационная ориентация искусственных спутников Земли: Специальный курс. - Москва: КУРС, 2023. - 144 с.
- [18] Clohessy W.H., Wiltshire R.S. *Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous*, 1960, *Astronaut. Sci*, Vol. 27, No 9, pp. 653–678.
- [19] Vandenberghe L., Boyd S. *Semidefinite Programming*, *SIAM Review*, 1996, pp. 49–95.
- [20] Нестеров Ю.Е. *Методы выпуклой оптимизации*, Издательство МЦНМО г. Москва, 2010. 281 с.

# Приложение А. Анализ приближённых решений плоско-параллельного случая

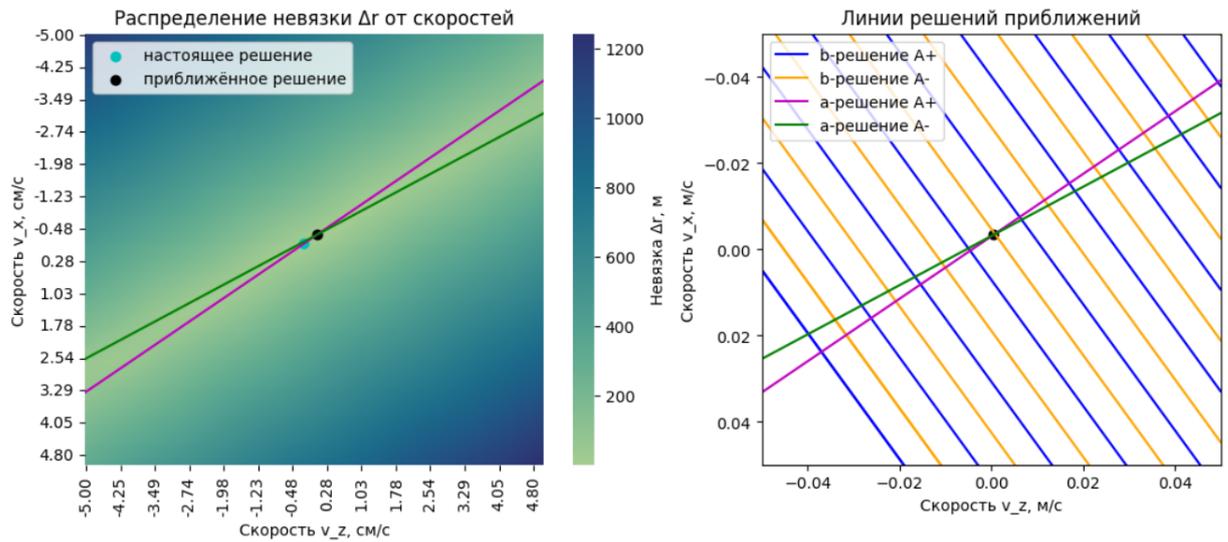


Рисунок 25 – Сравнение распределения  $\Delta r$  и решений уравнений (14-17)

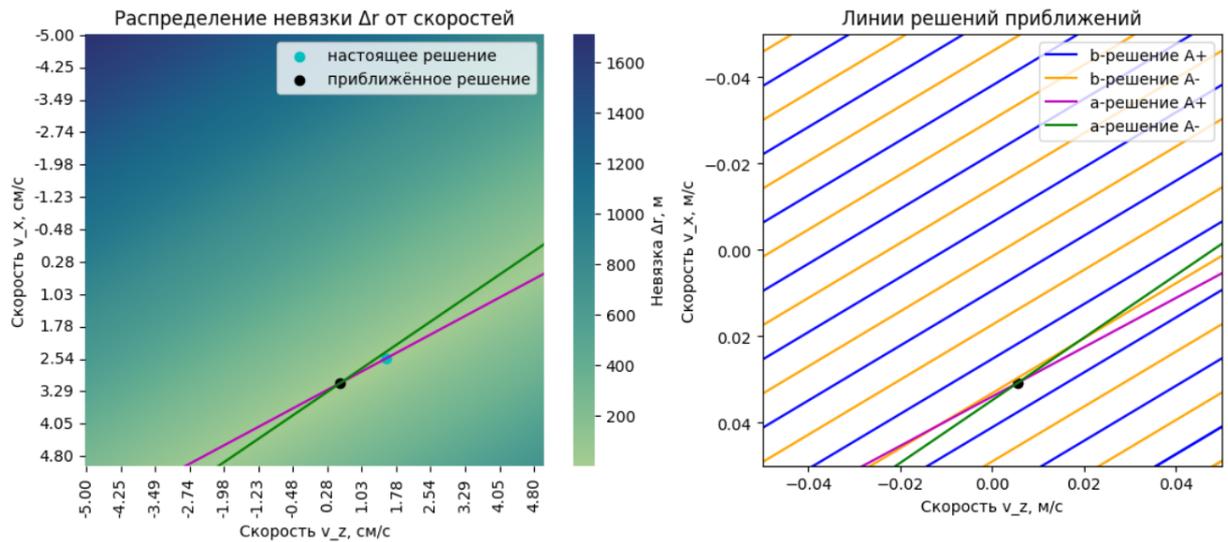


Рисунок 26 – Сравнение распределения  $\Delta r$  и решений уравнений (14-17)

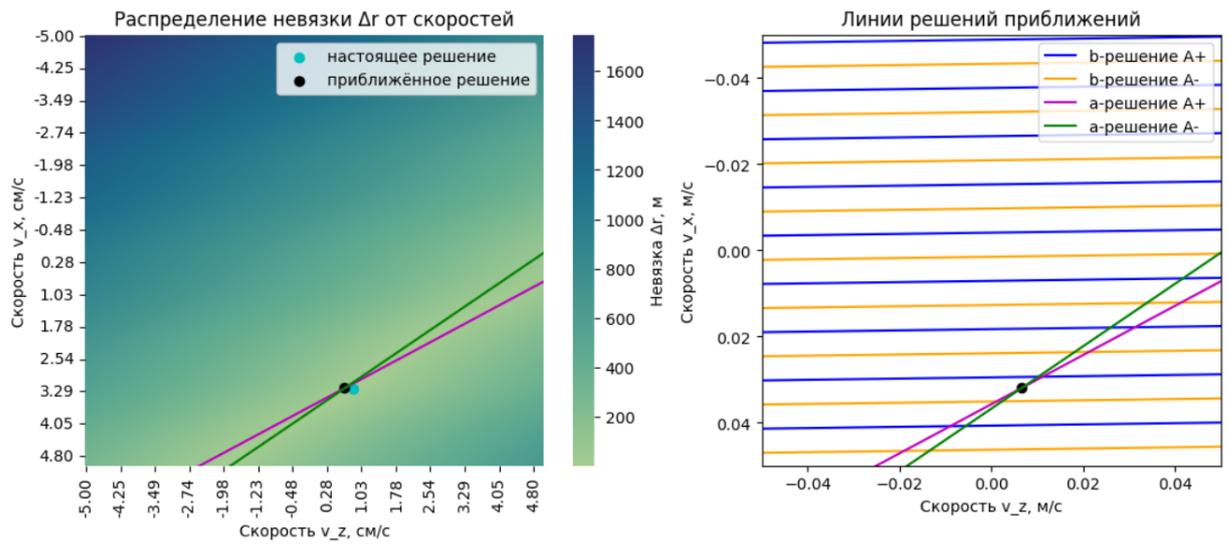


Рисунок 27 – Сравнение распределения  $\Delta r$  и решений уравнений (14-17)