

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени магистра
по направлению 03.04.01 «Прикладные математика и физика»,
магистерская программа «Управление динамическими системами»

Динамика относительного движения КА на близких гиперболических траекториях

Выполнил:
студент группы М05-101в
Перепухов Денис Глебович

Научный руководитель:
к.ф.-м.н.
Трофимов Сергей Павлович

Москва, 2023

Аннотация

Работа посвящена изучению относительного движения в окрестности гиперболических траекторий. Эта проблема становится всё более актуальной в связи с активной разработкой проектов миссий к удалённым областям Солнечной системы. Для описания относительного движения используется линеаризованная система дифференциальных уравнений. Данная система допускает аналитическое решение, которое выражается с помощью переходной матрицы. Чтобы явно записать эту матрицу, вводится удобная для случая гиперболического движения система координат, а также некоторая малая переменная. Полученная переходная матрица упрощается преобразованием столбцов и приближением её элементов многочленом Лорана. Это позволяет явно выписать решение линеаризованной системы, которое оказывается достаточно простыми и пригодными для анализа. Затем проводится анализ решений, в результате которого выявляются возможные типы относительного движения: в проекции на плоскости введённой системы координат оно представляет собой части гиперболы, параболы или прямой. Далее записываются условия ограниченности относительного движения в виде равенства нулю трёх величин, основной вклад в которые вносит относительная скорость. Определяется импульс, который необходимо сообщить космическому аппарату для обеспечения выполнения этих условий. Основная часть этого импульса направлена на зануление относительной скорости.

Оглавление

Обозначения и сокращения	5
Введение	7
1. Описание движения в окрестности гиперболической траектории	12
1.1. Постановка задачи и уравнения движения	12
1.2. Линеаризованные уравнения относительного движения . . .	13
1.3. Асимптотическая система координат и переменная δ	16
1.4. Переходная матрица в АСК	18
1.5. Многочлен Лорана матрицы Y	21
1.6. Явное решение линеаризованной системы	25
2. Анализ относительного движения на близких гиперболических траекториях	28
2.1. Тестовая опорная траектория	28
2.2. Типы относительного движения	28
2.3. Условия ограниченности относительного движения в линейном приближении	34
2.4. Корректирующий импульс для обеспечения ограниченности относительного движения	38
Заключение	41
Список литературы	43
Приложение А. Матрица перехода ИСК-АСК	45
Приложение Б. Элементы матрицы Y	49

Приложение В. Элементы обратной матрицы Y	52
Приложение Г. Многочлен Лорана матрицы Y	55

Обозначения и сокращения

\dot{f} производная по времени функции f

\mathbf{a} вектор-столбец

\mathbf{a}^T вектор-строка

a модуль вектора

(\mathbf{a}, \mathbf{b}) скалярное произведение двух векторов

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ векторное произведение двух векторов

$\mathbf{0}_{n \times n}$ нулевая матрица размера n на n

$\mathbf{E}_{n \times n}$ единичная матрица размера n на n

$$[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{кососимметричная матрица,} \\ \text{построенная на столбце } (a_1 \ a_2 \ a_3)^T \end{array}$$

\mathbf{r} радиус-вектор ведущего КА

\mathbf{v} скорость ведущего КА

\mathbf{c} вектор орбитального момента ведущего КА

h интеграл энергии ведущего КА

v_∞ гиперболический избыток скорости ведущего КА

\mathbf{r}_d радиус-вектор ведомого КА

ρ положение ведомого КА относительно ведущего КА

t время

$\delta = \nu_{max} - \nu$ разность максимальной и текущей истинных аномалий

ξ столбец констант $(\alpha_0 \ \beta_{-1} \ \beta_0 \ \gamma_{-1} \ \gamma_0 \ \xi_6)^T$

μ гравитационный параметр центрального тела

a большая полуось опорной траектории, $a > 0$

b прицельная дальность опорной траектории, $b > 0$

p	фокальный параметр опорной траектории, $p > 0$
e	эксцентриситет опорной траектории, $e > 1$
$\eta = \sqrt{e^2 - 1}$	параметр η опорной траектории
τ	эпоха ведущего КА
i	наклонение опорной траектории
Ω	долгота восходящего узла опорной траектории
ω	аргумент перицентра опорной траектории
$\nu \in (-\nu_{max}, \nu_{max})$	истинная аномалия ведущего КА
H	гиперболическая эксцентрическая аномалия
M	средняя аномалия
$\nu_{max} = \arccos(-1/e)$	максимальная истинная аномалия ведущего КА
а.е.	астрономическая единица
АСК	асимптотическая система координат
ГТ	гиперболическая траектория
ИСК	инерциальная система координат
КА	космический аппарат
ОД	относительное движение
ОДУ	обыкновенное дифференциальное уравнение
ОНБ	ортонормированный базис
RK45	метод Рунге-Кутты с адаптивным шагом 4-5 порядков
JHU APL	Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory

Введение

Гиперболическая траектория (ГТ) – это неограниченная траектория с эксцентриситетом, отличным от единицы, существующая в рамках задачи двух тел. На текущий момент подобную траекторию для полётов на большие расстояния использовали лишь в нескольких космических миссиях: Pioneers 10 и 11, Voyagers 1 и 2, New Horizons. Однако сегодня разрабатываются сразу две миссии – Interstellar Probe [1] и миссия к гравитационному фокусу Солнца [2], в рамках которых планируется использовать ГТ для доставки космических аппаратов к дальним областям Солнечной системы.

Целью миссии Interstellar Probe является изучение гелиосферы и межзвёздной среды. Для этого планируется отправка зонда с научной аппаратурой за пределы гелиосферы по ГТ с гиперболическим избытком скорости примерно 7-8 а.е. в год. Пример возможной траектории данной миссии изображен на рисунке 1. Целью же миссии к гравитационному фокусу Солнца является получение изображений экзопланеты с помощью эффекта солнечного гравитационного линзирования: группировку малых аппаратов планируется доставить в область пространства, называемую гравитационным фокусом Солнца и начинающуюся на расстоянии 550 а.е. от Солнца. Чтобы осуществить это за разумный срок – 20-25 лет, – требуется достичь гиперболического избытка скорости примерно 25 а.е. в год. Для этого предлагается оснастить космический аппарат солнечными парусами и осуществить разгон за счёт очень близкого пролёта Солнца – менее 20 радиусов Солнца. Пример такой траектории приведён на рисунке 2: после отлёта от Земли КА с помощью солнечных парусов начинает «падать» на Солнце, пролетает его на расстоянии порядка 10 радиусов Солнца, и в момент максимального сближения солнечные паруса начинают работать на разгон, обеспечивая высокую отлётную скорость КА. Миссии, использующие подобные траектории, называют Sundiver миссиями. Ожидается,

что концепт таких миссий, активно разрабатываемый в настоящий момент, ляжет в основу новой парадигмы быстрых и дешёвых экспедиций к труднодоступным и ещё неизведанным областям Солнечной системы [3]. В силу вышесказанного есть основания полагать, что в ближайшее время количество миссий, использующих ГТ, увеличится.

Высокая стоимость отправки миссий в дальний космос, ограниченность ресурса управления солнечных парусов и необходимость в распределённых измерениях ведут к тому, что в большинстве таких миссий будут использоваться группировки малых аппаратов. Важным аспектом миссий с групповым полётом является описание динамики относительного движения (ОД). Это необходимо для проектирования геометрической конфигурации группы, обработки навигационных измерений и планирования корректирующих манёвров. В случае гиперболических траекторий ОД имеет характерные особенности, связанные с особенностями самих ГТ: основная часть движения происходит на большом удалении от притягивающего центра, ГТ не периодичны, движение по ГТ стремится к прямолинейному движению вдоль асимптоты гиперболы. Из-за этих качеств ОД вблизи гиперболической опорной траектории сильно отличается от ОД в случае эллиптической опорной траектории. Однако, в то время как ОД в эллиптическом случае хорошо изучено (подробный обзор соответствующей литературы представлен в [4]), гиперболический случай практически не исследован.

Существуют работы, в которых была получена в той или иной форме переходная матрица линеаризованных уравнений ОД для общего случая кеплеровского движения (иногда за исключением параболического случая) [5–9]. Тем не менее остаётся открытой проблема выбора формы записи переходной матрицы, удобной для исследования ОД в окрестности ГТ. В препринте [11] исследуется задача входа в атмосферу по гиперболической траектории и для описания движения относительно опорной траектории предлагается линеаризовать уравнения ОД, записанные в скоростной систе-

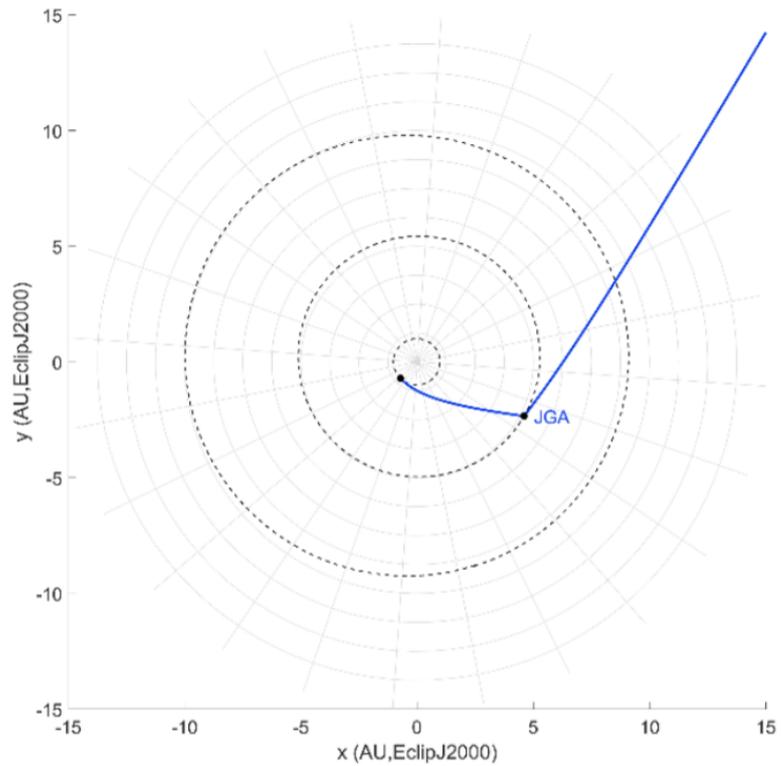


Рисунок 1 – Возможная траектория миссии Interstellar Probe: аппарат направляется к границам Солнечной системы после большого отлётного импульса и гравитационного манёвра у Юпитера. [Источник: JHU APL]

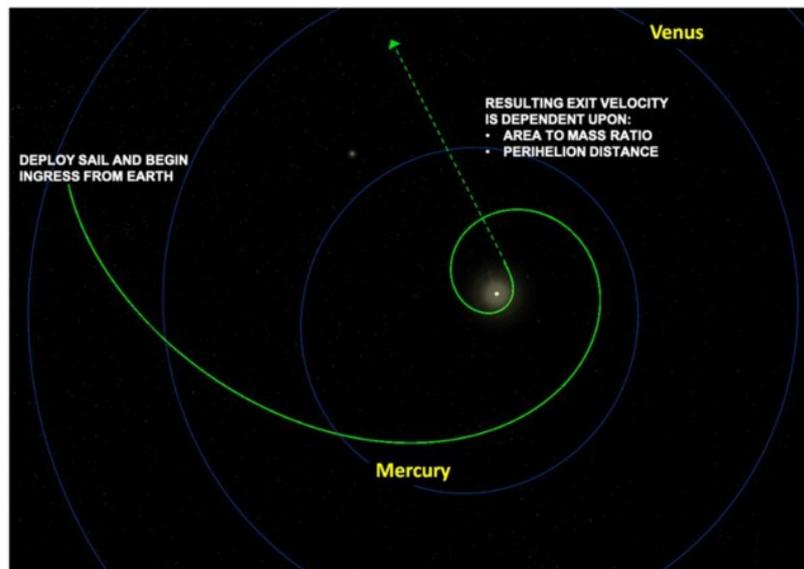


Рисунок 2 – Пример траектории Sundiver миссии [3]. Разгон аппарата с солнечным парусом происходит за счёт близкого пролёта Солнца.

ме координат. Такой подход, однако, предназначен именно для динамики движения в атмосфере и не подразумевает явное вычисление переходной матрицы, а следовательно неприменим для качественного анализа ОД и классификации его типов. Это относится и к работе [10], где приводится решение уравнений ОД на ГТ, содержащее члены второго порядка: оно оказывается громоздким и непригодным для аналитического исследования.

Цель данной работы – исследовать линеаризованную динамику относительного движения в окрестности гиперболической опорной траектории вдали от притягивающего центра: создать удобный для проведения анализа способ описания ОД, выявить возможные типы ОД, сформулировать условия ограниченности ОД, применить полученные результаты для расчёта корректирующего импульса, обеспечивающего ограниченность ОД.

В первой главе разрабатывается способ описания ОД вблизи опорной ГТ. Выводятся линеаризованные уравнения ОД. Переходная матрица, используемая для представления их решения в общем виде, записывается в асимптотической системе координат, связанной с опорной гиперболой. Движение по опорной гиперболе параметризуется малой (при достаточном удалении от притягивающего центра) переменной. Затем переходная матрица упрощается с помощью преобразования столбцов и приближения её элементов многочленами Лорана.

Во второй главе с помощью полученного решения выявляются возможные типы ОД, формулируются условия его ограниченности в линейном приближении, которые выделяют в фазовом пространстве ОД трёхмерное инвариантное подпространство. Получено выражение для импульса, который нужно сообщить аппарату, движущемуся в окрестности опорной ГТ, чтобы обеспечить ограниченность ОД в линейном приближении.

Наконец, в заключении резюмированы результаты исследования, предложены возможные области их применения и пути дальнейшего развития данной работы.

Результаты работы были представлены в докладе «Относительное движение космических аппаратов на гиперболических траекториях» на 65-ой Всероссийской научной конференции МФТИ, а также в докладе «Динамика и навигация на высокоэнергетических гиперболических траекториях» на семинаре отдела №7 Института прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН.

1. Описание движения в окрестности гиперболической траектории

Данная глава посвящена получению явных выражений для компонент векторов относительного положения и относительной скорости двух КА, движущихся по близким гиперболическим траекториям задачи двух тел. Для этого записывается линеаризованная система уравнений на вектор относительного положения КА, после чего вводится удобная система координат и малая переменная, которые используются для явной записи решений линеаризованной системы, после чего данные решения приближаются многочленом Лорана по этой переменной. Такой подход позволяет получить пригодные для анализа выражения, которые приближённо описывают относительное движение двух КА.

1.1. Постановка задачи и уравнения движения

Рассматривается система из трёх тел: некоторое массивное (центральное) тело – притягивающий центр – и два космических аппарата (КА). Полагается, что они взаимодействуют исключительно гравитационно, причём массы обоих аппаратов настолько малы, что они никак не влияют ни на движение притягивающего центра, ни на движение друг друга. Также полагается, что внешние силы отсутствуют. Гравитационное поле притягивающего центра считается центральным ньютоновским. Все тела считаются материальными точками. Таким образом, рассматривается случай движения двух невзаимодействующих материальных точек (космических аппаратов) в центральном ньютоновском поле тяготения, а траектория каждого КА является решением задачи двух тел: каждый КА будет двигаться по некоторому коническому сечению с фокусом в притягивающем центре.

Уравнения движения двух КА, ведущего и ведомого, в инерциальной системе координат с началом отсчёта в притягивающем центре имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_d = -\frac{\mu}{r_d^3} \mathbf{r}_d,$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор ведущего аппарата, а \mathbf{r}_d – радиус вектор ведомого аппарата, μ – гравитационный параметр центрального тела. Далее будем полагать, что ведущий аппарат движется по некоторой гиперболической траектории, которую будем называть *опорной*. За вектор $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_d - \mathbf{r}$ обозначим вектор положения ведомого аппарата относительно ведущего. Введённые обозначения проиллюстрированы на рисунке 3. Эволюция вектора $\boldsymbol{\rho}$ подчиняется следующему уравнению:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\mu}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}|^3} (\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1)$$

1.2. Линеаризованные уравнения относительного движения

Далее будем считать, что опорная траектория задана дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $\mathbf{r}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Будем полагать, что траектории ведущего и ведомого КА близки. В этом предположении величину ρ/r можно считать малой, т.е. $\rho/r \ll 1$. Отметим, что в силу $r \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, данное отношение может быть малым даже при достаточно больших абсолютных значениях ρ . Введение малой величины позволяет линеаризовать уравнения (1) в окрестности нуля. Для этого линеаризуем следующее выражение:

$$\frac{(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}|^3} = \frac{\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}}{(r^2 + 2(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}) + \rho^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{r} - 3 \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{r}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} + O \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) \right).$$

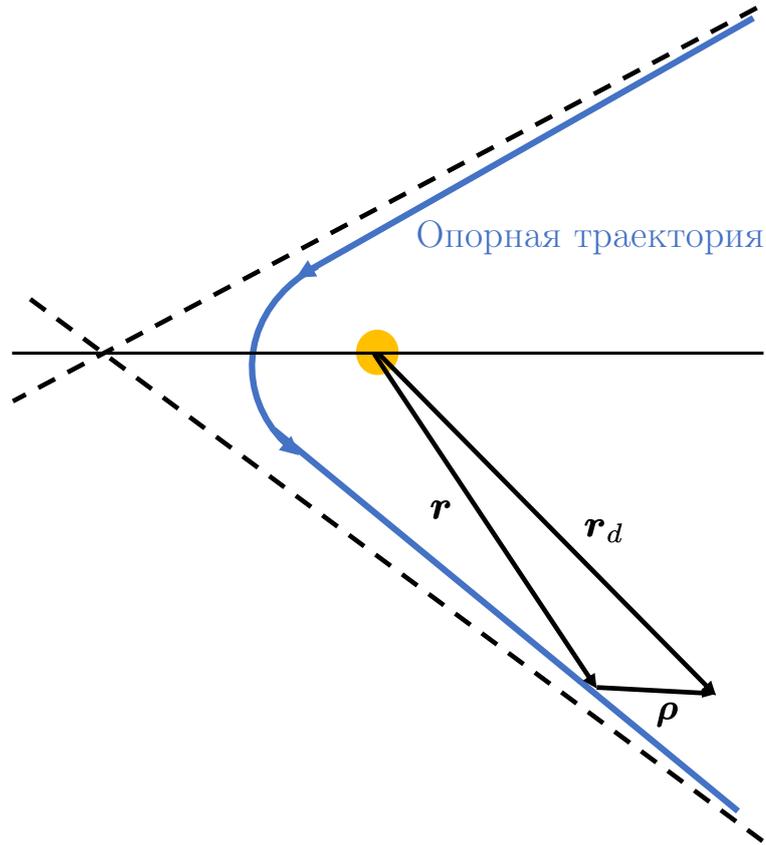


Рисунок 3 – Ведущий (\mathbf{r}) и ведомый (\mathbf{r}_d) аппараты в поле тяготения центрального тела (жёлтый круг). Ведущий аппарат движется по опорной гиперболической траектории.

Подставляя это в (1) и отбрасывая $O(\rho^2/r^2)$, получаем *линеаризованную систему уравнений* на $\boldsymbol{\rho}$:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\mu}{r^3} \left(\boldsymbol{\rho} - \frac{3(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} \right). \quad (2)$$

Введём фазовый вектор $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\rho} \dot{\boldsymbol{\rho}})^T = (x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z)^T \in \mathbb{R}^6$. Тогда уравнения (2) можно переписать в виде неавтономной системы

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\chi}, \quad (3)$$

где квадратная матрица $\mathbf{A}(t)$ задаётся как

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \\ -\frac{\mu}{r^3} \left(\mathbf{E}_{3 \times 3} - 3 \frac{\mathbf{r} \mathbf{r}^T}{r^2} \right) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}.$$

Решение системы (3) можно выразить в виде

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) \boldsymbol{\chi}(t_0), \quad (4)$$

где t_0 – некоторый начальный момент времени, $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ – переходная матрица системы, являющаяся решением задачи Коши

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)}{dt} = \mathbf{A}(t) \boldsymbol{\Phi}(t, t_0), \quad \boldsymbol{\Phi}(t_0, t_0) = \mathbf{E}.$$

Для системы (3) матрица $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ может быть записана в аналитическом виде. Существуют различные подходы для её записи, мы будем опираться на представление, предложенное в работе [5]. Оно заключается в следующем. Матрица $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ выражается как

$$\boldsymbol{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{U}(t, t_0) \mathbf{U}^{-1}(t_0, t_0), \quad (5)$$

где матрица $\mathbf{U}(t, t_0)$, в свою очередь, записывается в виде

$$\mathbf{U}(t, t_0) = \begin{pmatrix} [\mathbf{r}] & -([\mathbf{r}][\mathbf{v}] + [\mathbf{c}])\mathbf{B} & -\mathbf{r} + \frac{3}{2}\mathbf{v}\Delta t \\ [\mathbf{v}] & \left(\frac{\mu}{r^3}[\mathbf{r}]^2 - [\mathbf{v}]^2 \right) \mathbf{B} & \frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{3\mu}{2r^3}\mathbf{r}\Delta t \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь $\Delta t = t - t_0$, $[\mathbf{r}]$ и $[\mathbf{v}]$ – кососимметричные матрицы, построенные на векторах $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ соответственно (см. обозначения), $\mathbf{c} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ – вектор орбитального момента ведущего КА, \mathbf{B} – матрица размера 3 на 2, состоящая из двух столбцов $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2)$ таких, что $\text{rg } \mathbf{B} = 2$ и $(\mathbf{b}_{1,2}, \mathbf{c}) = 0$

(т.е. векторы \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 лежат в плоскости опорной траектории). Отметим, что \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 могут быть выбраны произвольным образом, в том числе могут зависеть от t и t_0 , лишь бы они удовлетворяли поставленным условиям.

Представление (6) позволяет при наличии явных выражений для $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ и при каком-то конкретном выборе векторов \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 явно выписать переходную матрицу, причём в достаточно простом виде. Далее с помощью матрицы \mathbf{U} мы будем записывать решения (4) и аналитически исследовать получающиеся выражения.

1.3. Асимптотическая система координат и переменная δ

В формулу (6) входят радиус-вектор, вектор скорости и вектор орбитального момента ведущего КА, выраженные в некоторой ИСК. Построим конкретную систему координат, в которой матрица \mathbf{U} будет иметь наиболее простой вид:

1. Начало отсчёта расположим в притягивающем центре.
2. Орт \mathbf{e}_1 направим параллельно уходящей асимптоте опорной гиперболы в сторону движения ведущего КА.
3. Орт \mathbf{e}_3 направим по орбитальному моменту ведущего КА.
4. Орт \mathbf{e}_2 дополняет их до правой тройки.

Построенную систему координат будем называть *асимптотической системой координат* (АСК). Она изображена схематически на рисунке (4). Такой выбор системы координат является естественным для гиперболического движения, так как при удалении от притягивающего центра движение ведущего КА становится практически прямолинейным, со скоростью направленной преимущественно вдоль орта \mathbf{e}_1 . В Приложении А приводится матрица перехода к АСК из произвольной ИСК.

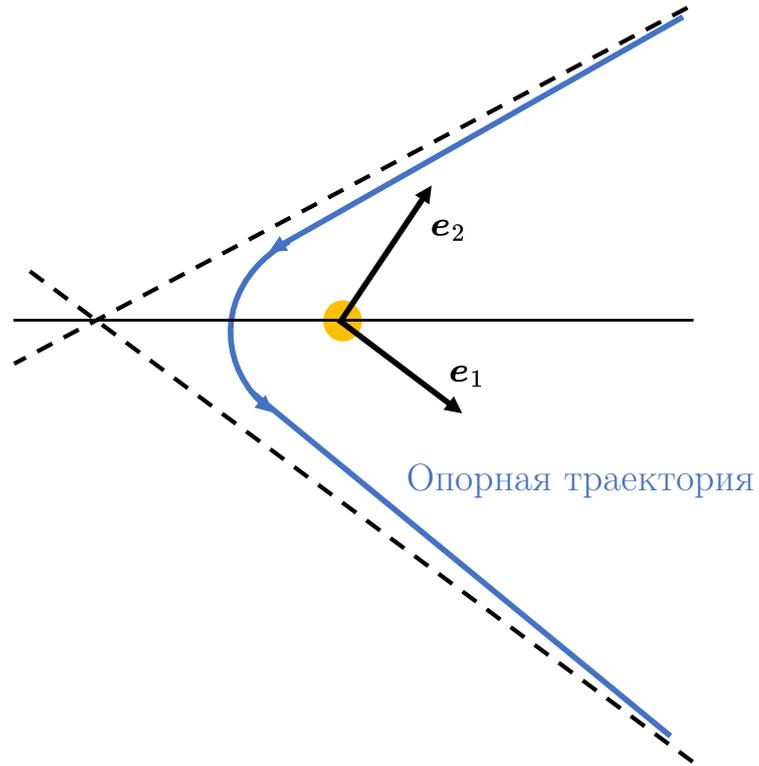


Рисунок 4 – Асимптотическая система координат. Пунктирные линии – асимптоты гиперболы. Орт e_3 направлен на наблюдателя.

Чтобы количественно описать стремление гиперболической траектории к асимптоте, введём величину

$$\delta(t) = \nu_{max} - \nu(t), \quad (7)$$

где ν_{max} – максимальное значение истинной аномалии, а $\nu(t)$ – текущее значение истинной аномалии ведущего КА. Геометрический смысл δ иллюстрируется рисунком 5. Возможность введения такого параметра есть особенность гиперболического движения, так как в эллиптическом случае величина ν_{max} не определена. Несложно убедиться, что в силу $\nu(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\dot{\nu}(t) > 0$, $-\nu_{max} < \nu(t) < \nu_{max}$, функция $\delta(t)$ обладает следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} \delta(t) &\in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \dot{\delta}(t) < 0, \\ \delta(t) &\in (0, 2\nu_{max}), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \delta(t) = 0 +. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу строгой монотонности $\delta(t)$ обратима на \mathbb{R} , и следовательно, всегда можно выразить время как бесконечно гладкую функцию δ . Также в дальнейшем мы часто будем полагать, что значение δ мало (близко к 0). Для обоснования такого предположения выразим δ как функцию r . Из формулы

$$r(\nu) = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (9)$$

имеем

$$\nu(r) = \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \right],$$

откуда сразу следует

$$\delta(r) = \arccos \left(-\frac{1}{e} \right) - \arccos \left(-\frac{1}{e} + \frac{p}{er} \right).$$

Из тейлоровского разложения функции $\delta(p/r)$ в нуле

$$\delta(r) = \frac{1}{\eta} \frac{p}{r} - \frac{1}{2\eta^3} \frac{p^2}{r^2} + O \left(\frac{p^3}{r^3} \right), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (10)$$

где $\eta = \sqrt{e^2 - 1}$, видно, что $\delta(r)$ убывает как r^{-1} , поэтому при достаточном¹ удалении от притягивающего центра δ в самом деле будет мало.

1.4. Переходная матрица в АСК

Теперь, когда введены подходящая система координат – АСК – и удобная альтернатива времени – δ , можно явно записать решение (4) линейризованной системы (3). Для этого сначала выпишем все элементы матрицы $\mathbf{U}(t, t_0)$, однако вместо времени будем использовать переменную δ , воспринимая матрицу \mathbf{U} как функцию $\delta = \delta(t)$ и $\delta_0 = \delta(t_0)$, т.е. $\mathbf{U}(t, t_0) = \mathbf{U}(\delta(t), \delta(t_0))$.

¹«Достаточное» удаление зависит, конечно, от параметров траектории. Конкретные значения для типичной опорной траектории можно посмотреть в разделе Тестовая траектория.

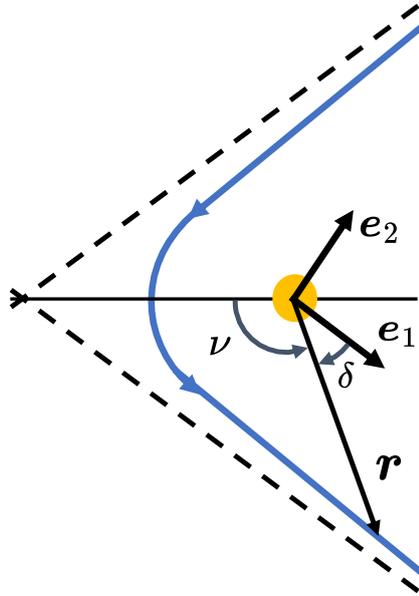


Рисунок 5 – Геометрический смысл переменной δ .

В силу соотношения

$$\cos \nu = \cos (\nu_{max} - \delta) = \cos \nu_{max} \cos \delta + \sin \nu_{max} \sin \delta = -\frac{1}{e} \cos \delta + \frac{\eta}{e} \sin \delta$$

выражение (9) представляется в виде

$$r(\delta) = \frac{p}{1 - \cos \delta + \eta \sin \delta}. \quad (11)$$

Тогда стандартные соотношения небесной механики [12, с. 101-102] запишутся в АСК в следующем виде:

$$\mathbf{r} = r(\delta) \begin{pmatrix} \cos \delta \\ -\sin \delta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12a)$$

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \begin{pmatrix} \eta + \sin \delta \\ -1 + \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12b)$$

$$\mathbf{c} = \sqrt{\mu p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (12c)$$

Осталось определить два столбца матрицы \mathbf{B} . Выберем их следующим образом:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{c}{\mu} \mathbf{e}_1 = \frac{c}{\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{c}{\mu} \mathbf{e}_2 = \frac{c}{\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Умножение на коэффициент c/μ необходимо для обеспечения однородных размерностей в строках матрицы \mathbf{U} . Эти два столбца, очевидно, линейно независимы, а также ортогональны вектору орбитального момента \mathbf{c} . Следовательно, они удовлетворяют всем поставленным требованиям, и матрица \mathbf{B} принимает вид

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Теперь выражения (12) и (13) можно подставить в формулу (6) и выписать явно каждый элемент матрицы $\mathbf{U}(\delta, \delta_0)$. Однако прежде произведём преобразование матрицы \mathbf{U} следующим образом:

$$\mathbf{Y}(\delta, \delta_0) = \frac{\mu}{c^2} \mathbf{U}(\delta, \delta_0) \mathbf{G}, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & -2\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\eta} & -\frac{3}{2\eta} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & -2\eta & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица \mathbf{G} невырождена: $\det \mathbf{G} = -\eta^3 \neq 0$. Следовательно, с помощью матрицы \mathbf{Y} можно, аналогично (5), записать переходную матрицу в виде

$$\Phi(\delta, \delta_0) = \mathbf{Y}(\delta, \delta_0) \mathbf{Y}^{-1}(\delta_0, \delta_0). \quad (15)$$

Элементы матрицы \mathbf{Y} , приведённые в Приложении Б, оказываются удобнее для применения, нежели элементы матрицы \mathbf{U} , поэтому далее мы будем работать именно с матрицей \mathbf{Y} . Элементы $\mathbf{Y}^{-1}(\delta, \delta)$ приведены в Приложении В.

1.5. Многочлен Лорана матрицы \mathbf{Y}

Имея явно выражение для матрицы $\mathbf{Y}(\delta, \delta_0)$, можно подставить его в (15) и с помощью (4) получить решение линеаризованной системы $\chi(\delta, \delta_0, \chi_0)$. Однако в силу особенности задачи, а именно гиперболичности движения, напрашивается упростить выражения для элементов матрицы \mathbf{Y} . Например, рассмотрим один из элементов данной матрицы:

$$\mathbf{Y}_{1,3} = \frac{\sin \delta (\cos \delta - 1)}{1 - \cos \delta + \eta \sin \delta}. \quad (16)$$

Переменная δ сюда входит исключительно как аргумент периодических функций \sin и \cos , однако, как было показано ранее (8), с течением времени

δ монотонно убывает к нулю, а следовательно, $\sin \delta(t)$ и $\cos \delta(t)$ не являются периодическими функциями времени. Более того, для гиперболического движения нас обычно интересует поведение $\mathbf{Y}(\delta, \delta_0)$ только при $\delta \rightarrow 0+$. Поэтому удобно приблизить все элементы матрицы $\mathbf{Y}(\delta, \delta_0)$ с помощью многочленов Лорана (Тейлора) по переменной δ в точке 0: это позволит получить простые выражения для качественного анализа поведения $\chi(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0+$.

Для нахождения многочлена Лорана матрицы $\mathbf{Y}(\delta, \delta_0)$ по переменной δ в точке 0 поступим следующим образом:

1. Выражения, где все синусы и косинусы δ находятся исключительно в числителе, приблизим многочленом Тейлора, используя стандартные разложения. Например,

$$\sin \delta (\cos \delta - 1) = -\frac{\delta^3}{2} + \frac{\delta^5}{8} + O(\delta^7), \quad \delta \rightarrow 0.$$

2. Выражение $(1 - \cos \delta + \eta \sin \delta)^{-1}$ (только оно встречается в знаменателях элементов матрицы \mathbf{Y}) приблизим многочленом Лорана:

$$\begin{aligned} (1 - \cos \delta + \eta \sin \delta)^{-1} &= \left(\delta \eta + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3 \eta}{6} - \frac{\delta^4}{24} + O(\delta^5) \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\delta \eta} \left(1 + \frac{\delta}{2\eta} - \frac{\delta^2}{6} - \frac{\delta^3}{24\eta} + O(\delta^4) \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\delta \eta} \left(1 - \frac{\delta}{2\eta} + \delta^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4\eta^2} \right) - \delta^3 \left(\frac{1}{8\eta} + \frac{1}{8\eta^3} \right) + O(\delta^4) \right) = \\ &= \frac{1}{\delta \eta} - \frac{1}{2\eta^2} + \delta \left(\frac{1}{6\eta} + \frac{1}{4\eta^3} \right) - \delta^2 \left(\frac{1}{8\eta^2} + \frac{1}{8\eta^4} \right) + O(\delta^3). \end{aligned}$$

3. Выражения, где есть и знаменатель $1 - \cos \delta + \eta \sin \delta$, и числитель, представим многочленом Лорана путём перемножения многочлена Тейлора числителя (см. пункт 1) и многочлена Лорана из пункта 2.

Например,

$$\begin{aligned} \frac{\sin \delta (\cos \delta - 1)}{1 - \cos \delta + \eta \sin \delta} &= \left(-\frac{\delta^3}{2} + O(\delta^5) \right) \cdot \left(\frac{1}{\delta \eta} - \frac{1}{2\eta^2} + O(\delta) \right) = \\ &= -\frac{\delta^2}{2\eta} + \frac{\delta^3}{4\eta^2} + O(\delta^4). \end{aligned}$$

Отметим, что из-за умножения на δ^{-1} для получения в итоговом разложении порядка $O(\delta^k)$ необходимо раскладывать числитель до порядка $O(\delta^{k+1})$.

Такой подход позволяет представить все элементы матрицы \mathbf{Y} в виде многочленов Лорана, за исключением элементов, стоящих в шестом столбце и содержащих $\Delta t(\delta, \delta_0)$. Чтобы записать многочлен Лорана $\Delta t(\delta, \delta_0)$, используем уравнение Кеплера

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (M(\delta) - M(\delta_0)), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} M(\delta) &= e \sinh H(\delta) - H(\delta), \\ \tanh \frac{H(\delta)}{2} &= \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan \frac{\nu(\delta)}{2}. \end{aligned}$$

Фактически, необходимо приблизить $M(\delta)$ многочленом Лорана. Для этого произведём следующие преобразования:

$$\tan \frac{\nu}{2} = \frac{\sin \nu}{1 + \cos \nu} = \frac{\eta \cos \delta + \sin \delta}{e - \cos \delta + \eta \sin \delta} = 1 - q(\delta),$$

где введено вспомогательное обозначение

$$q(\delta) = \frac{e(1 - \cos \delta) + \sin \delta \left(\eta - \frac{e-1}{\eta} \right)}{e - \cos \delta + \eta \sin \delta}, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} q(\delta) = 0.$$

Тогда

$$H = 2 \operatorname{arctanh} (1 - q) = \ln \frac{2 - q}{q} = \ln \left(1 - \frac{q}{2} \right) - \ln \frac{q}{2},$$

откуда

$$\sinh H = \frac{1}{2} \left(\frac{2 - q}{q} - \frac{q}{2 - q} \right) = \frac{2(1 - q)}{q(2 - q)},$$

и следовательно,

$$M(\delta) = 2e \frac{1 - q(\delta)}{2 - q(\delta)} + \ln \frac{q(\delta)}{2} - \ln \left(1 - \frac{q(\delta)}{2} \right).$$

Функцию $q(\delta)$ несложно представить многочленом Лорана по ранее описанному алгоритму:

$$q(\delta) = \frac{e}{\eta} \delta - \frac{e}{2(e - 1)} \delta^2 + \frac{e(2e + 1)}{6\eta(e - 1)} \delta^3 + O(\delta^4).$$

Используя это представление и тот факт, что

$$\begin{aligned} \ln \frac{q(\delta)}{2} &= \ln \left(\frac{e\delta}{2\eta} \left(1 - \frac{\eta}{2(e - 1)} \delta + \frac{(2e + 1)}{6(e - 1)} \delta^2 + O(\delta^3) \right) \right) = \\ &= -\ln \left(\frac{2\eta}{e\delta} \right) + \ln \left(1 - \frac{\eta}{2(e - 1)} \delta + \frac{(2e + 1)}{6(e - 1)} \delta^2 + O(\delta^3) \right), \end{aligned}$$

можно получить многочлен Лорана² для функции $M(\delta)$:

$$M(\delta) = -\ln \left(\frac{2\eta}{e\delta} \right) + \frac{\eta}{\delta} + \frac{1}{2} - \frac{4\eta^2 + 9}{12\eta} \delta + \frac{5\eta^2 + 6}{24\eta^2} \delta^2 + O(\delta^3). \quad (18)$$

Подставляя это в (17) и вводя обозначение $M_0 = M(\delta_0)$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta t(\delta, \delta_0) &= \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left(-\ln \left(\frac{2\eta}{e\delta} \right) + \frac{\eta}{\delta} + \left(\frac{1}{2} - M_0 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\eta^2 + 9}{12\eta} \delta + \frac{5\eta^2 + 6}{24\eta^2} \delta^2 + O(\delta^3) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

²Строго говоря, из-за наличия логарифма этот многочлен называется не многочленом Лорана, а обобщённым многочленом Пуизо.

Таким образом, у нас есть алгоритм для приближения всех элементов матрицы $\mathbf{Y}(\delta, \delta_0)$ многочленом Лорана от переменной δ в точке 0. Представление всех элементов матрицы с точностью $O(\delta^4)$ приведено в Приложении Г. Отметим, что при необходимости можно получить разложение до любого порядка. Также отметим, что есть возможность формально продолжать разложение до бесконечности. Получающиеся ряды будут сходиться на некотором интервале $(0, \delta_{\text{сход}})$, $\delta_{\text{сход}} > 0$, однако мы не будем приводить доказательство этого факта, так как в дальнейшем он нам не понадобится.

1.6. Явное решение линеаризованной системы

Теперь мы можем записать явное решение $\chi(\delta, \delta_0, \chi_0)$ линеаризованной системы (3). Однако вместо перемножения $\mathbf{Y}(\delta, \delta_0)$ и $\mathbf{Y}^{-1}(\delta_0, \delta_0)$ введём вектор

$$\xi = \mathbf{Y}^{-1}(\delta_0, \delta_0)\chi_0, \quad (20)$$

компоненты которого обозначим³ как $\xi = (\alpha_0 \ \beta_{-1} \ \beta_0 \ \gamma_{-1} \ \gamma_0 \ \xi_6)^T$. Тогда решение (4) запишется как

$$\chi = \mathbf{Y}(\delta, \delta_0)\xi. \quad (21)$$

Так как $\det \mathbf{Y}(\delta_0, \delta_0) \neq 0$, линейное преобразование (20) является биективным. Это позволяет нам без уменьшения общности далее работать только с вектором ξ . Подчеркнём, что все элементы вектора ξ являются размерными и имеют размерность единиц длины – ту же, что имеют величины x, y, z .

Теперь явно выпишем $\chi(\delta, \delta_0, \xi)$, но сделаем это сразу в приближённой форме – полные выражения слишком громоздки и малоинформативны. Для этого в (21) подставим ряд Лорана матрицы \mathbf{Y} (см. Приложение Г):

³Смысл данных обозначений станет понятен на следующей странице.

$$\begin{aligned}
x(\delta) &= \frac{\xi_6}{2\eta\delta} - \frac{3\xi_6}{2\eta^2} \ln \frac{2\eta}{\delta e} + \alpha_0 + \xi_6 \left(-\frac{3M_0}{2\eta^2} + \frac{11}{4\eta^2} \right) + \\
&\quad + \delta \left(\frac{\alpha_0}{\eta} - \frac{3\beta_{-1}}{2\eta} + \xi_6 \left(-\frac{3M_0}{2\eta^3} - \frac{1}{6\eta} - \frac{3}{2\eta^3} \ln \frac{2\eta}{\delta e} - \frac{5}{8\eta^3} \right) \right) + \\
&\quad + \delta^2 \left(-\frac{\beta_0}{2\eta} + \xi_6 \left(-\frac{9}{16\eta^2} - \frac{5}{8\eta^4} \right) \right) + o(\delta^2), \\
y(\delta) &= \frac{\beta_{-1}}{\delta} + \beta_0 + \frac{\xi_6}{\eta} + \delta \left(-\frac{\beta_{-1}}{3} - \frac{\beta_0}{2\eta} - \frac{5\xi_6}{4\eta^2} \right) + \\
&\quad + \delta^2 \left(-\frac{\alpha_0}{2\eta} + \frac{5\beta_{-1}}{8\eta} + \frac{\beta_0}{4\eta^2} + \xi_6 \left(\frac{3M_0}{4\eta^3} + \frac{3}{4\eta^3} \ln \frac{2\eta}{\delta e} - \frac{1}{8\eta^3} \right) \right) + o(\delta^2), \\
z(\delta) &= \frac{\gamma_{-1}}{\delta} + \gamma_0 + \delta \left(-\frac{\gamma_{-1}}{3} - \frac{\gamma_0}{2\eta} \right) + \delta^2 \left(\frac{\gamma_{-1}}{8\eta} + \frac{\gamma_0}{4\eta^2} \right) + o(\delta^2), \\
v_x(\delta) &= \frac{v_\infty}{\eta^2 a} \left[\frac{\xi_6}{2} - \frac{\xi_6}{\eta} \delta + \delta^2 \left(\xi_6 \left(\frac{6M_0 - 9}{4\eta^2} + \frac{3}{2\eta^2} \ln \frac{2\eta}{\delta e} \right) - \alpha_0 + \frac{3\beta_{-1}}{2} \right) \right] \\
&\quad + o(\delta^2), \\
v_y(\delta) &= \frac{v_\infty}{\eta a} \left[\beta_{-1} + \frac{\beta_{-1}}{\eta} \delta + \delta^2 \left(\frac{\beta_{-1}}{4\eta^2} + \frac{\beta_0}{2\eta} + \frac{5\xi_6}{4\eta^2} \right) + o(\delta^2) \right], \\
v_z(\delta) &= \frac{v_\infty}{\eta a} \left[\gamma_{-1} + \frac{\gamma_{-1}}{\eta} \delta + \delta^2 \left(\frac{\gamma_0}{2\eta} + \frac{\gamma_{-1}}{4\eta^2} \right) + o(\delta^2) \right].
\end{aligned} \tag{22}$$

Анализ данных выражений будет проводиться во второй главе, сейчас лишь заметим, что в выражение для $z(\delta)$ входят исключительно константы γ_{-1} и γ_0 (даже если записать приближение более высокого порядка), что говорит об отделимости движения вдоль оси Oz . Также из этих выражений становится ясен смысл обозначений первых пяти компонент вектора $\boldsymbol{\xi}$: их индексы указывают на наименьшую степень δ , перед которой они находятся.

Приведём также приближённые выражения $\boldsymbol{\xi}(\delta_0, \boldsymbol{\chi}_0)$ (полные могут быть получены из определения вектора $\boldsymbol{\xi}$ с помощью Приложения В):

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2\eta a v_{x_0}}{\delta_0 v_\infty} + x_0 - a \frac{v_{x_0}}{v_\infty} + \delta_0 \left(\frac{x_0}{\eta} + \frac{v_{x_0}}{v_\infty} \eta a \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2\eta^2} \right) \right) + \\
&\quad + \delta_0^2 \left(-\frac{3y_0}{2\eta} + \frac{v_{x_0}}{v_\infty} \left(-\frac{3a}{4} - \frac{a}{4\eta^2} \right) \right) + O(\delta_0^3), \\
\beta_{-1} &= \eta a \frac{v_{y_0}}{v_\infty} - \frac{\delta_0 a v_{y_0}}{2 v_\infty} + \\
&\quad + \delta_0^2 \left(-\frac{y_0}{2\eta} + \frac{a v_{y_0}}{4 \eta v_\infty} - \frac{a v_{x_0}}{2 v_\infty} \right) + O(\delta_0^3), \\
\beta_0 &= -\frac{\eta a v_{y_0}}{\delta_0 v_\infty} + y_0 - 2\eta a \frac{v_{x_0}}{v_\infty} + \delta_0 \left(\frac{y_0}{\eta} - \frac{a v_{x_0}}{2 v_\infty} + \frac{\eta a v_{y_0}}{3 v_\infty} \right) + \\
&\quad + \delta_0^2 \left(\frac{y_0}{4\eta^2} - \frac{x_0}{2\eta} + \frac{3a v_{y_0}}{8 v_\infty} \right) + O(\delta_0^3), \\
\gamma_{-1} &= \eta a \frac{v_{z_0}}{v_\infty} - \frac{\delta_0 a v_{z_0}}{2 v_\infty} + \delta_0^2 \left(-\frac{z_0}{2\eta} + \frac{a v_{z_0}}{4 \eta v_\infty} \right) + O(\delta_0^3), \\
\gamma_0 &= -\frac{\eta a v_{z_0}}{\delta_0 v_\infty} + z_0 + \delta_0 \left(\frac{z_0}{\eta} + \frac{\eta a v_{z_0}}{3 v_\infty} \right) + \delta_0^2 \left(\frac{z_0}{4\eta^2} - \frac{a v_{z_0}}{8 v_\infty} \right) + O(\delta_0^3), \\
\xi_6 &= 2\eta^2 a \frac{v_{x_0}}{v_\infty} + 2\delta_0 \eta a \frac{v_{x_0}}{v_\infty} + \delta_0^2 \left(2x_0 - \eta a \frac{v_{y_0}}{v_\infty} \right) + O(\delta_0^3).
\end{aligned} \tag{23}$$

Данные выражения позволяют понять, какие компоненты начального фазового вектора χ_0 вносят основной вклад в вектор ξ .

2. Анализ относительного движения на близких гиперболических траекториях

2.1. Тестовая опорная траектория

Прежде чем перейти непосредственно к анализу выражений, полученных в первой главе, зададим конкретную опорную траекторию, которую мы будем использовать в численном моделировании для иллюстрации наших выводов. В качестве такой траектории возьмём гиперболу, близкую к той, что планируется использовать в миссии к гравитационному фокусу Солнца [2], а именно, перицентральное расстояние примем равным 0.05 а.е., эксцентриситет – 1.8. Это соответствует гиперболическому избытку скорости $v_\infty \approx 25.1$ а.е./год ≈ 119.14 км/с и прицельной дальности 0.0935 а.е. Значение гравитационного параметра Солнца принимается равным $132.7 \cdot 10^9$ км³/с². Отметим, что мы сейчас не задаём ориентацию траектории в пространстве, так как на данный момент она для нас не важна.

Для наглядного представления о порядке величины δ на рисунке 6 изображена её зависимость от гелиоцентрического расстояния ведущего КА, а также приведены значения δ для некоторых расстояний. Видно, что наше исходное предположение о малости δ вполне оправдано: даже на расстоянии 1 а.е. значение δ достаточно мало.

2.2. Типы относительного движения

Перейдём к качественному исследованию относительного движения в линейном приближении. Первый вопрос, на который мы дадим ответ: какие типы относительного движения в принципе возможны? Для этого будем использовать выражения (22), позволяющие приближённо анализировать

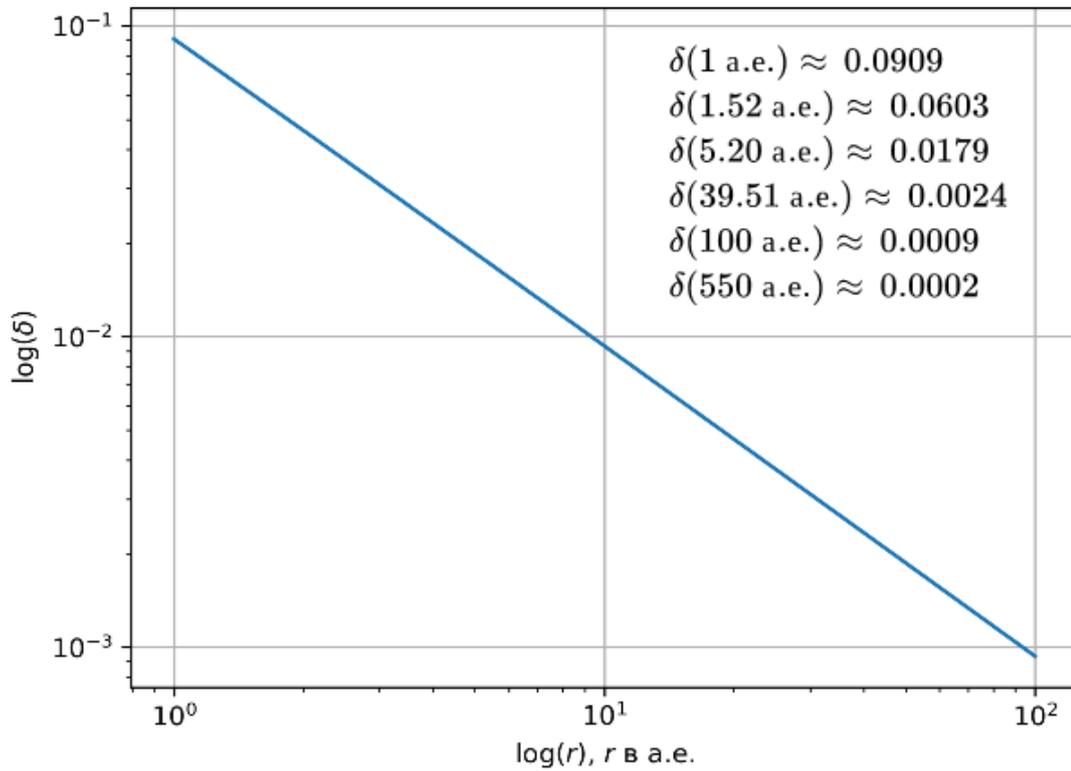


Рисунок 6 – Переменная δ как функция гелиоцентрического расстояния ведущего КА.

поведение $\chi(\delta(t))$ со временем. В силу $\delta \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0+$, остаток $o(\delta^k)$, $k \geq 0$ стремится к нулю, откуда следует, что с течением времени любая компонента реального решения системы (3) асимптотически стремится к соответствующему приближённому решению (22) со скоростью $o(\delta^k)$, где $k \geq 0$ – точность разложения, причём в случае ненулевого коэффициента перед δ^{-1} относительная ошибка убывает со скоростью $o(\delta^{k+1})$.

Далее будем анализировать выражения $x(\delta)$, $y(\delta)$, $z(\delta)$ из (22) при $\delta \rightarrow 0+$. Для этого мы будем оставлять только слагаемые с наименьшими степенями δ (ведущие слагаемые), так как порядок величины каждого слагаемого определяется этой степенью. Необходимо, однако, быть осторожными, если δ_0 мало, так как тогда значение $M_0 \approx \eta/\delta_0$ может оказаться велико, из-за чего порядок слагаемых, содержащих M_0 , будет на единицу больше.

Ниже приводятся выявленные в результате анализа типы относительного движения.

1. Если хотя бы одна из констант ξ_6 , β_{-1} , γ_{-1} не равна 0, то движение будет *инфинитным*, так как ненулевым будет коэффициент перед $1/\delta$.

(а) Если все эти три константы не равны 0, то движение будет происходить примерно вдоль прямой. Действительно, если оставить в выражениях лишь степени δ^{-1} и δ^0 , то получим:

$$\begin{aligned}x(\delta) &= \frac{1}{\delta} \frac{\xi_6}{2\eta} + \alpha_0 + \xi_6 \left(-\frac{3M_0}{2\eta^2} + \frac{11}{4\eta^2} \right) - \frac{3\xi_6}{2\eta^2} \ln \frac{2\eta}{\delta e} + o(1), \\y(\delta) &= \frac{\beta_{-1}}{\delta} + \beta_0 + \frac{\xi_6}{\eta} + o(1), \\z(\delta) &= \frac{\gamma_{-1}}{\delta} + \gamma_0 + o(1).\end{aligned}$$

Поскольку уже на расстоянии $r = 9.5$ а.е. на опорной траектории значение $\frac{3\xi_6}{2\eta^2} \ln \frac{2\eta}{\delta e}$ на порядок меньше, чем $\frac{1}{\delta} \frac{\xi_6}{2\eta}$, то, отбрасывая логарифм и обозначая $\theta = 1/\delta$, имеем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \alpha_0 + \xi_6 \left(-\frac{3M_0}{2\eta^2} + \frac{11}{4\eta^2} \right) \\ \beta_0 + \frac{\xi_6}{\eta} \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\xi_6}{2\eta} \\ \beta_{-1} \\ \gamma_{-1} \end{pmatrix} \theta.$$

(b) Если $\xi_6 = 0$, а β_{-1} и γ_{-1} ненулевые, то

$$\begin{aligned}x(\delta) &= \alpha_0 + \delta \left(\frac{\alpha_0}{\eta} - \frac{3\beta_{-1}}{2\eta} \right) + O(\delta^2), \\y(\delta) &= \frac{\beta_{-1}}{\delta} + \beta_0 + O(\delta), \\z(\delta) &= \frac{\gamma_{-1}}{\delta} + \gamma_0 + O(\delta),\end{aligned}$$

откуда следует, что в плоскостях Oxy и Oxz движение описывается с хорошей точностью гиперболами

$$x = \alpha_0 + \frac{\beta_{-1}}{2\eta} \frac{2\alpha_0 - 3\beta_{-1}}{y - \beta_0}$$

и

$$x = \alpha_0 + \frac{\gamma_{-1}}{2\eta} \frac{2\alpha_0 - 3\gamma_{-1}}{z - \gamma_0},$$

а в плоскости Oyz – лучом

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{-1} \\ \gamma_{-1} \end{pmatrix} \theta, \quad \theta \geq \frac{1}{\delta_0}.$$

На этом мы остановимся в перечислении типов инфинитного движения, однако отметим, что можно рассмотреть и другие комбинации нулевых/ненулевых коэффициентов и, проводя аналогичные рассуждения, получить в различных плоскостях либо гиперболу, либо луч, либо отрезок.

2. Если $\xi_6 = \beta_{-1} = \gamma_{-1} = 0$, то движение будет *финитным* в силу ограниченности всех слагаемых в выражениях (22).

(а) Рассмотрим случай $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} x(\delta) &= \alpha_0 \left(1 + \frac{\delta}{\eta} \right) + O(\delta^2), \\ y(\delta) &= \beta_0 \left(1 - \frac{\delta}{2\eta} \right) + O(\delta^2), \\ z(\delta) &= \gamma_0 \left(1 - \frac{\delta}{2\eta} \right) + O(\delta^2), \end{aligned}$$

и движение происходит в окрестности отрезка

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \delta, \quad \delta \in (0, \delta_0],$$

причём траектория асимптотически стремится к точке $(\alpha_0 \beta_0 \gamma_0)$.

(b) В случае когда $\alpha_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$, а $\beta_0 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} x(\delta) &= \alpha_0 \left(1 + \frac{\delta}{\eta} \right) + O(\delta^2), \\ y(\delta) &= -\frac{\alpha_0}{2\eta} \delta^2 + O(\delta^4), \\ z(\delta) &= \gamma_0 \left(1 - \frac{\delta}{2\eta} \right) + O(\delta^2). \end{aligned}$$

В плоскости Oyz движение происходит в окрестности отрезка параболы

$$z = \gamma_0 \left(1 - \sqrt{\frac{y}{2\eta\alpha_0}} \right), \quad y \in \left(0, \frac{\alpha_0}{2\eta} \delta_0^2 \right],$$

в плоскости Oxy аналогично, а в плоскости Oxz движение происходит вблизи обычного отрезка

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \delta, \quad \delta \in (0, \delta_0].$$

(c) Остальные случаи аналогичны рассмотренным, перебирать всевозможные комбинации коэффициентов мы, опять же, не будем. Отметим лишь то, что в случае $\gamma_{-1} = \gamma_0 = 0$ получим, независимо от других констант, $z \equiv 0$.

Относительное движение типов 1.b, 2.a и 2.b проиллюстрировано на рисунках 7, 8 и 9 соответственно. На этих рисунках изображены приближённые траектории и точные траектории, соответствующие *одним и тем же* константам ξ . Приближённые траектории рассчитывались так: задавались константы ξ и по формулам из пунктов 1.b, 2.a и 2.b строились траектории в соответствующих проекциях. Точные траектории рассчитывались следующим образом:

1. Из заданных констант ξ вычислялись начальные отклонения как $\chi_0 = \mathbf{Y}(\delta_0, \delta_0)\xi$, где для матрицы $\mathbf{Y}(\delta_0, \delta_0)$ использовалась полная формула из Приложения Б.
2. Эти начальные отклонения прибавлялись к начальному фазовому вектору опорной траектории (см. раздел 2.1).
3. Каждая из траекторий – ведущего аппарата, движущегося по опорной траектории, и ведомого аппарата – численно интегрировалась с помощью метода RK45 в рамках невозмущённой задачи двух тел.
4. Вычислялась разница между фазовыми векторами двух КА.

Отметим, что в начальный момент времени для приближённой и точной траектории одинаков именно вектор ξ , а вектор χ_0 отличается из-за разных способов вычисления матрицы $\mathbf{Y}(\delta_0, \delta_0)$.

Как видно из рисунков 7, 8 и 9, в рассмотренных случаях точная траектория достаточно хорошо аппроксимируется приближённой траекторией. Это позволяет заключить, что предложенный метод аппроксимации относительного движения вполне подходит для предварительного проектирования относительного движения космических аппаратов на близких гиперболических траекториях. Рассмотренные примеры также показывают, что гиперболическое движение достаточно «бедно» с точки зрения количества типов возможного относительного движения в сравнении с

эллиптическим случаем: либо неограниченное движение по лучу или гиперболе, либо ограниченное движение с асимптотическим стремлением к точке вдоль отрезка прямой или параболы.

2.3. Условия ограниченности относительного движения в линейном приближении

Один из самых важных вопросов в проектировании относительного движения – при каких начальных отклонениях (вектор $\boldsymbol{\chi}_0$) относительное движение будет ограниченным? Мы можем ответить на этот вопрос, пользуясь линейным приближением динамики (3) и полученными приближёнными решениями (22). Из последних следует, как уже было отмечено в предыдущем разделе, что *относительное движение в линейном приближении ограничено тогда и только тогда, когда*

$$\xi_6(\boldsymbol{\chi}_0) = \beta_{-1}(\boldsymbol{\chi}_0) = \gamma_{-1}(\boldsymbol{\chi}_0) = 0. \quad (24)$$

Перепишем условия (24) в виде уравнений на $\boldsymbol{\chi}_0$. Для этого выразим ξ_6 , γ_{-1} , β_{-1} , через $\boldsymbol{\chi}_0$ с помощью (20) и Приложения В:

$$\frac{v_{x_0}}{v_\infty} (\eta + \sin(\delta_0)) + \frac{\eta a x_0}{r_0^2} \cos(\delta_0) - \frac{v_{y_0}}{v_\infty} (1 - \cos(\delta_0)) - \frac{\eta a y_0}{r_0^2} \sin(\delta_0) = 0,$$

$$\frac{v_{z_0}}{v_\infty} r_0 \sin(\delta_0) - \frac{z_0}{\eta} (1 - \cos(\delta_0)) = 0,$$

$$\begin{aligned} x_0 \left(\frac{2a}{r_0} - \frac{2 \sin(\delta_0)}{\eta} + \left(-\frac{a}{r_0} - \frac{1}{\eta^2} \right) \sin^2(\delta_0) \right) - \frac{v_{x_0} r_0 \sin(\delta_0)}{v_\infty \eta} (1 - \cos(\delta_0)) + \\ + \frac{v_{y_0}}{v_\infty} \left(-\eta a + r_0 \left(2 \sin(\delta_0) + \frac{3 - 3 \cos(\delta_0) - \sin^2(\delta_0)}{\eta} \right) \right) + \\ + y_0 \left(\left(-\frac{a}{2r_0} - \frac{1}{2\eta^2} \right) \sin(2\delta_0) + \frac{1 - \cos(\delta_0)}{\eta} + \frac{\sin(\delta_0)}{\eta^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

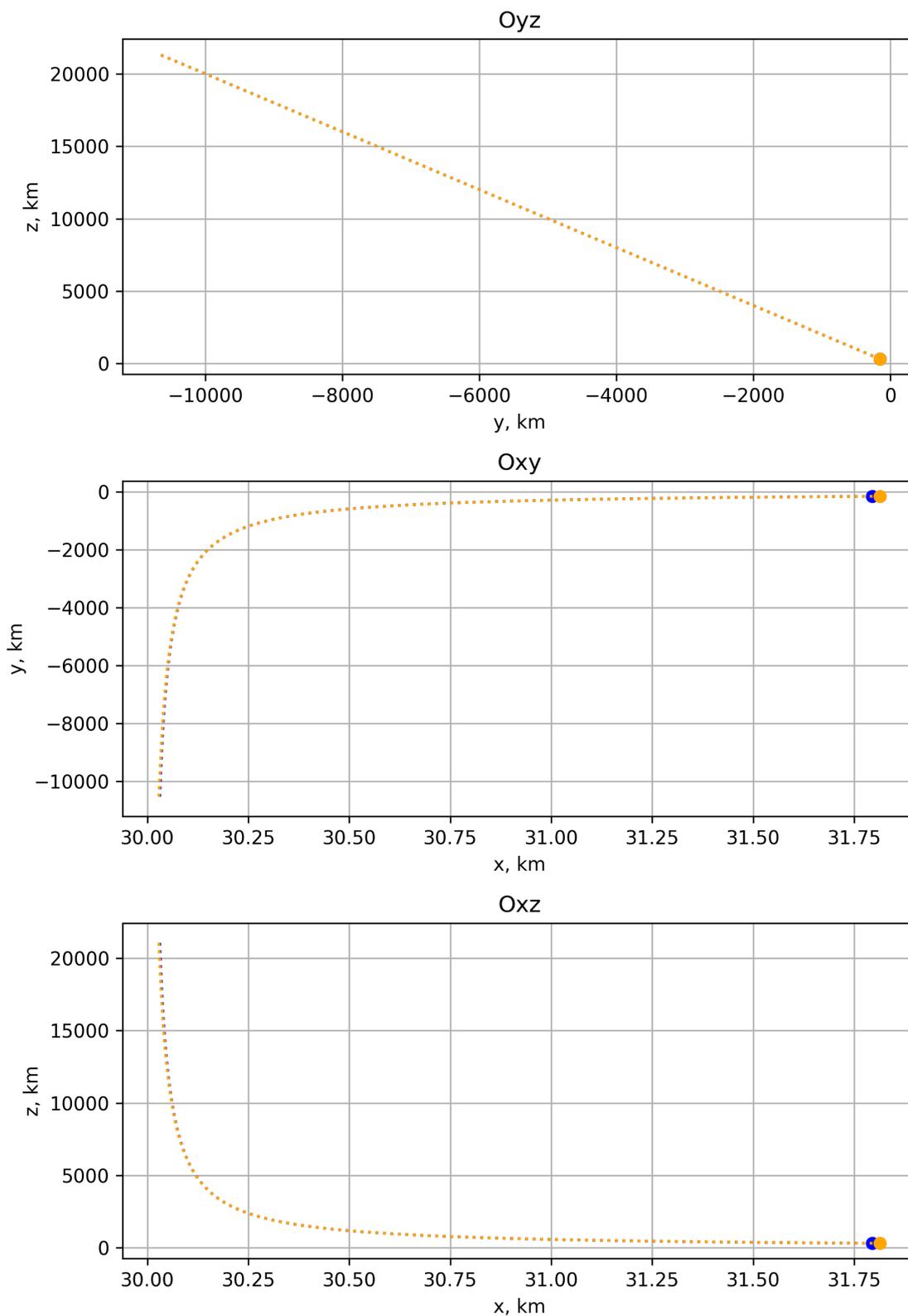


Рисунок 7 – Приблизительная и точная траектории для случая $\xi = (30, -10, 15, 20, , -25 \ 0)^T$ км. Синяя линия – точная траектория, оранжевая – приблизительная (могут визуально совпадать). Жирная точка на каждой из траекторий отмечает положение при $\delta = \delta_0$. Интервал расчёта траекторий: $\delta_0 \approx 0.0603, \delta_f \approx 0.0009$.

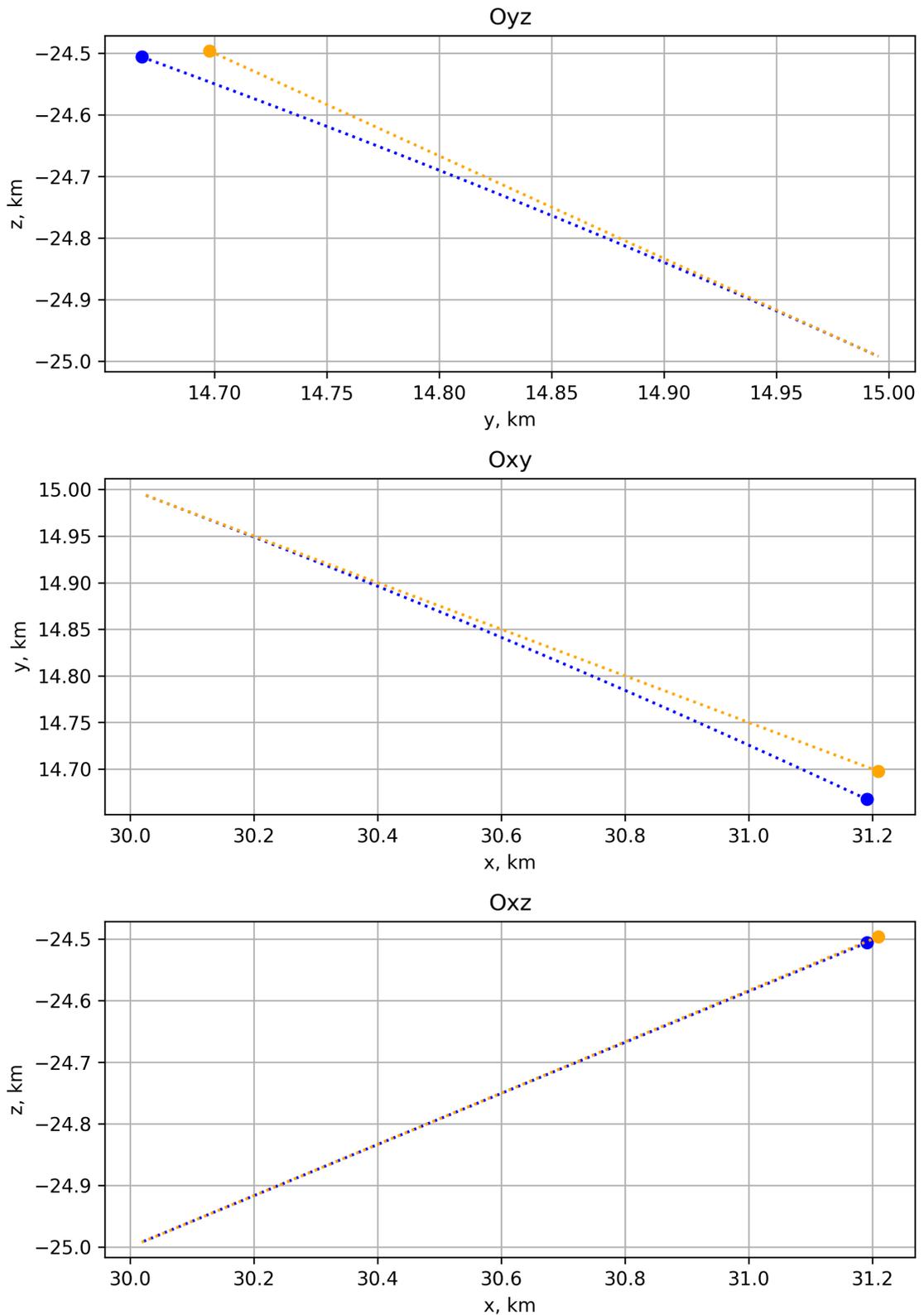


Рисунок 8 – Приблизительная и точная траектории для случая $\xi = (30, 0, 15, 0, -25, 0)^T$ км. Синяя линия – точная траектория, оранжевая – приблизительная (могут визуально совпадать). Жирная точка на каждой из траекторий отмечает положение при $\delta = \delta_0$. Интервал расчёта траекторий: $\delta_0 \approx 0.0603$, $\delta_f \approx 0.0009$.

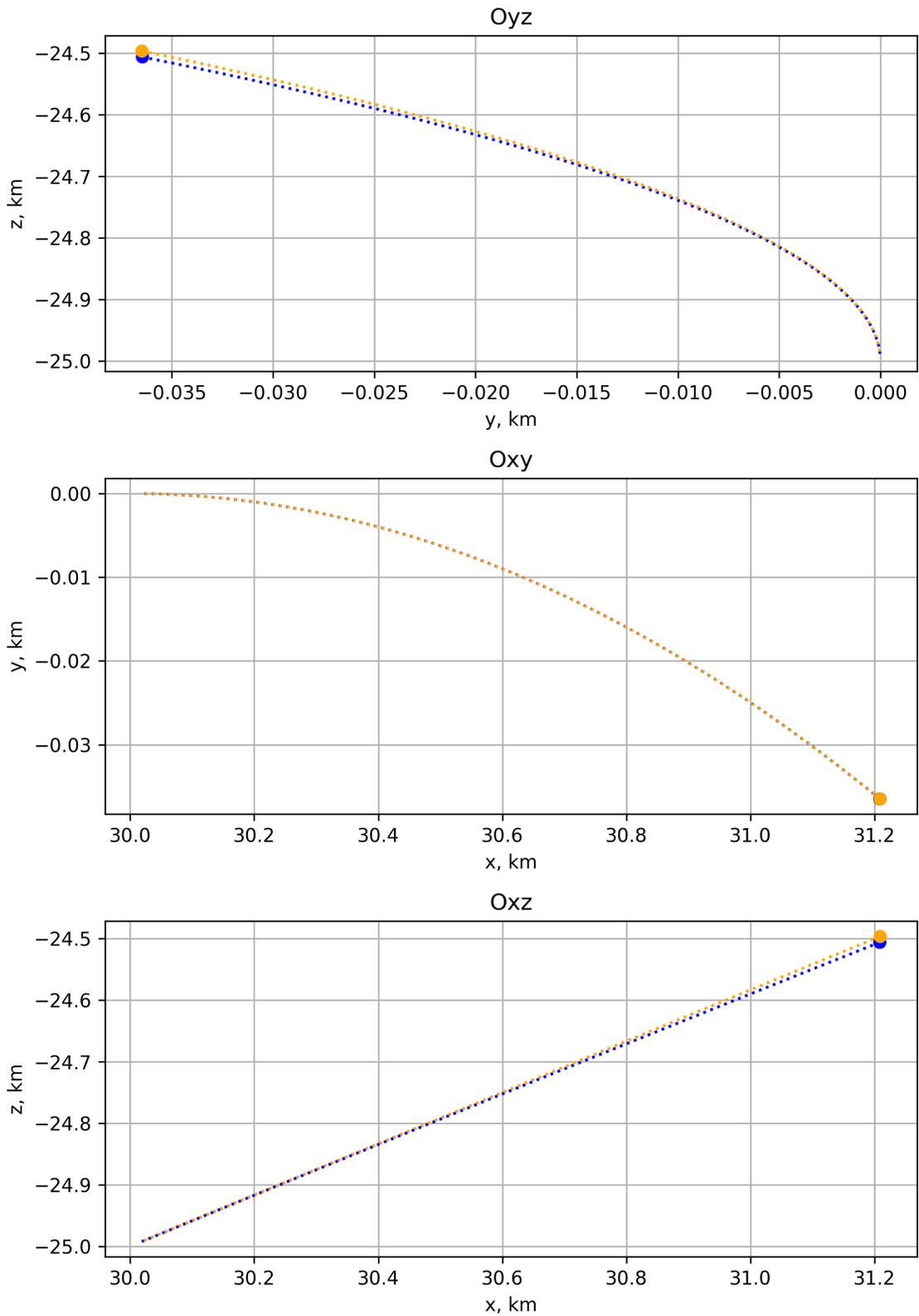


Рисунок 9 – Приблизительная и точная траектории для случая $\xi = (30, 0, 0, 0, -25, 0)^T$ км. Синяя линия – точная траектория, оранжевая – приблизительная (могут визуально совпадать). Жирная точка на каждой из траекторий отмечает положение при $\delta = \delta_0$. Интервал расчёта траекторий: $\delta_0 \approx 0.0603$, $\delta_f \approx 0.0009$.

Первое уравнение соответствует условию $\xi_6 = 0$, второе – условию $\gamma_{-1} = 0$, третье – $\beta_{-1} = 0$. Среди всех возможных значений $\chi_0 \in \mathbb{R}^6$ данные условия выделяют трёхмерное линейное подпространство, являющееся инвариантным относительно линейной динамики. При этом основной вклад в $\xi_6, \beta_{-1}, \gamma_{-1}$, как следует из (23), вносят компоненты относительной скорости. Следовательно, для достижения ограниченности движения, в первую очередь, нужно стремиться обнулить именно их. Компоненты вектора относительного положения также фигурируют в уравнениях (25), и за счёт них в принципе можно компенсировать влияние относительных скоростей, однако, как опять же следует из (23), их вклад в ξ_6, β_{-1} и γ_{-1} на два порядка (по δ_0) меньше, чем вклад от относительных скоростей, поэтому для компенсации влияния даже небольших относительных скоростей могут потребоваться значительные смещения по положению⁴. И наконец, отметим, что, с учётом $a = \mu/v_\infty^2$, из уравнений (25) следует, что чем больше энергия у опорной траектории (чем больше v_∞), тем меньше влияние относительных скоростей на геометрию движения, и что чем меньше r_0 (чем больше δ_0), тем больше влияние относительного положения на геометрию движения.

2.4. Корректирующий импульс для обеспечения ограниченности относительного движения

Итак, мы получили условия (25) ограниченности относительного движения в линейном приближении. Теперь рассмотрим следующий вопрос: какой импульс $\Delta \mathbf{v}$ нужно дать ведомому аппарату в текущий момент времени, чтобы обеспечить выполнение условий (25)?

Математически этот вопрос сводится к решению системы линейных уравнений на $\Delta \mathbf{v}$

$$\mathbf{A}(\delta)(\chi + \Delta \chi) = 0,$$

⁴Так, например, для компенсации относительной скорости 1 см/с по v_{z_0} на опорной траектории при $\delta_0 = 0.06$ ($r_0 = 1.52$ а.е.) необходимо относительное смещение $z_0 \approx 947$ км.

где под $\mathbf{A}(\delta)$ понимается матрица 3×6 системы (25), а под $\Delta\boldsymbol{\chi}$ понимается столбец $(0 \ 0 \ 0 \ \Delta\mathbf{v})^T$. Разобьём матрицу \mathbf{A} на две квадратные подматрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2)$. Тогда исходная система преобразуется к виду

$$\mathbf{A}_2\Delta\mathbf{v} = -\mathbf{A}\boldsymbol{\chi}. \quad (26)$$

Определитель

$$\det \mathbf{A}_2 = \frac{2\eta^5 a^3 (\eta \sin \delta - 2 \cos \delta + 2) \sin \delta}{v_\infty^3 (\eta^2 \sin^2 \delta + 2\eta \sin \delta - \eta \sin 2\delta + \cos^2 \delta - 2 \cos \delta + 1)}$$

отличен от нуля при $0 < \delta < \pi$, причём

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \det \mathbf{A}_2 = \frac{2\eta^4 a^3}{v_\infty^3},$$

то есть даже в окрестности $\delta = 0$ матрица существенно невырождена.

Поэтому мы можем записать решение (26) в виде

$$\Delta\mathbf{v} = -\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\chi} = -(\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 \ E)\boldsymbol{\chi} = -\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} - \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

или в покомпонентной форме

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= -v_x - \frac{v_\infty x (\eta \cos \delta - \eta \cos 3\delta - 6 \sin \delta + 6 \sin 2\delta - 2 \sin 3\delta)}{4\eta^2 (2\eta a - r \sin \delta)} - \\ &\quad - \frac{v_\infty y \left(-\eta^4 a^2 \sin \delta + r^2 (\eta + \sin \delta) (\cos \delta - 1)^2 \right)}{\eta^3 r^2 (2\eta a - r \sin \delta)}, \\ \Delta v_y &= -v_y - \frac{v_\infty x (2 - \eta \sin^3 \delta + 2 \sin^2 \delta \cos \delta - 3 \sin^2 \delta - 2 \cos \delta)}{\eta^2 (2\eta a - r \sin \delta)} - \\ &\quad - \frac{v_\infty y (4\eta - 5\eta \cos \delta + \eta \cos 3\delta + 6 \sin \delta - 6 \sin 2\delta + 2 \sin 3\delta)}{4\eta^2 (2\eta a - r \sin \delta)}, \end{aligned}$$

$$\Delta v_z = -v_z - \frac{v_\infty z (\cos \delta - 1)}{\eta r \sin \delta}.$$

С учётом малости δ имеем

$$\Delta v_x = -v_x - \delta^2 \frac{v_\infty x}{\eta^2 a} + \delta^3 \frac{v_\infty y}{\eta^2 a} + O(\delta^4),$$

$$\Delta v_y = -v_y + \delta^2 \frac{v_\infty y}{2\eta^2 a} + \delta^3 \left(\frac{v_\infty x}{\eta^2 a} + \frac{v_\infty y}{4\eta^3 a} \right) + O(\delta^4),$$

$$\Delta v_z = -v_z + \delta^2 \frac{v_\infty z}{2\eta^2 a} + \delta^3 \frac{v_\infty z}{4\eta^3 a} + O(\delta^4).$$

Это согласуется с выводом предыдущего раздела: для обеспечения ограниченности относительного движения необходимо в первую очередь свести к нулю компоненты относительной скорости.

Заключение

Было проведено исследование динамики относительного движения двух космических аппаратов – ведущего и ведомого, движущихся по близким гиперболическим траекториям. Для этого был разработан метод приближённого описания движения ведомого аппарата относительно ведущего аппарата, который движется по некоторой опорной гиперболе: записаны и линеаризованы уравнения относительного движения; введена удобная для гиперболического движения система координат – асимптотическая система координат; введена малая переменная δ , являющаяся разностью максимальной истинной аномалии и текущей истинной аномалии ведущего аппарата. С помощью этой переменной во введённой системе координат явно записана переходная матрица линеаризованной системы уравнений. Данная матрица упрощена за счёт преобразования столбцов и приближения её элементов многочленами Лорана. С помощью такой упрощённой матрицы явно выписано решение линеаризованной системы. Оно линейно зависит от шести параметров, которые полностью определяют относительное движение в линейном приближении.

В результате исследования полученного решения были выявлены возможные типы относительного движения. Показано, что гиперболическое движение достаточно «бедно» в плане разнообразия таких типов: в любой координатной плоскости $Oxy/Oxz/Oyz$ асимптотической системы координат возможно либо инфинитное движение по гиперболе или лучу, либо финитное движение по отрезку параболы или прямой. Сформулированы условия ограниченности относительного движения в линейном приближении: необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю три константы, определяющие относительное движение. Эти условия переписаны в виде системы линейных уравнений на вектор относительных положения и скорости в некоторый начальный момент времени. Данная система линейных уравнений определя-

ет трёхмерное инвариантное (относительно линейной динамики) линейное подпространство ограниченных относительных траекторий. Показано, что основной причиной неограниченности относительного движения является отличие относительной скорости от нуля. При этом влияние ненулевой относительной скорости может быть скомпенсировано правильно подобранным относительным смещением по положению, однако для компенсации даже маленьких относительных скоростей будут требоваться значительные сдвиги по положению. Также был рассчитан корректирующий импульс, который необходимо сообщить ведомому аппарату для обеспечения ограниченности относительного движения в линейном приближении.

Полученные результаты дают понимание динамики относительного движения на гиперболических траекториях и могут быть использованы для предварительного проектирования спутниковой конфигурации и управления относительным движением в реальных миссиях. Текущие результаты могут быть дополнены исследованием влияния отброшенных нелинейных слагаемых и внешних возмущений на точность полученного решения.

Список литературы

- [1] Interstellar Probe. URL: <https://interstellarprobe.jhuapl.edu/> (дата обращения: 04.06.2023).
- [2] The SGLF Mission. URL: <http://sglf.space/> (дата обращения: 04.06.2023).
- [3] Turyshev, S.G. et al. *Science opportunities with solar sailing smallsats*, arXiv preprint, 2023, arXiv:2303.14917, 10.48550/arXiv.2303.1491.
- [4] Sullivan, J., Grimberg, S., and D’Amico, S. *Comprehensive survey and assessment of spacecraft relative motion dynamics models*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017, Vol. 40, No. 8, 10.2514/1.G002309.
- [5] Reynolds, R. *Direct Solution of the Keplerian State Transition Matrix*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2022, Vol. 45, No. 6, pp. 1162–1165, 10.2514/1.G006373.
- [6] Dang, Z., Zhang, H. *Linearized relative motion equations through orbital element differences for general Keplerian orbits*, Astrodynamics, 2018, Vol. 2, pp. 201–215. DOI: doi.org/10.1007/s42064-018-0021-1.
- [7] Dang, Z. *New state transition matrix for relative motion on an arbitrary Keplerian orbit*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017, Vol. 40, No. 11, pp. 2197–2927. DOI: doi.org/10.2514/1.G002723.
- [8] Carter, T.E. *State transition matrices for terminal rendezvous studies: brief survey and new example*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, Vol. 21, No. 1, pp. 148–155. DOI: doi.org/10.2514/2.4211.

- [9] Чарный В.И. *Об изохронных производных*, Искусственные спутники Земли, Москва, АН СССР, 1998, №16.
- [10] Melton, R.G. *Relative Motion Between Hyperbolic Trajectories—A Technical Footnote*, 73rd International Astronautical Congress, Paris, France, 2022.
- [11] Albert, S.W., and Schaub, H. *Relative motion on highly-eccentric atmospheric entry trajectories*, personal page of Dr. Schaub, hanspeterschaub.info/Papers/Albert2023.pdf (access on 04.06.2023).
- [12] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. *Основы механики космического полета*. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 448 с. ISBN 5-02-014090-2.

Приложение А. Матрица перехода ИСК-АСК

В данном приложении осуществляется вывод матриц перехода к АСК из произвольной ИСК. Будем считать, что в этой ИСК опорная траектория задана корректно определёнными кеплеровыми элементами орбиты. Тогда, для того чтобы составить матрицу перехода, необходимо найти координаты базисных векторов АСК в ИСК. Для этого запишем координаты радиус-вектора и скорости ведущего КА в ИСК [12, с. 101-102]:

$$\mathbf{r} = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu \mathbf{e}_r + \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \nu) \mathbf{e}_n,$$

где

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} -\sin \Omega \sin (\nu + \omega) \cos i + \cos \Omega \cos (\nu + \omega) \\ \cos \Omega \sin (\nu + \omega) \cos i + \sin \Omega \cos (\nu + \omega) \\ \sin (\nu + \omega) \sin i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} -\sin \Omega \cos (\nu + \omega) \cos i - \cos \Omega \sin (\nu + \omega) \\ \cos \Omega \cos (\nu + \omega) \cos i - \sin \Omega \sin (\nu + \omega) \\ \cos (\nu + \omega) \sin i \end{pmatrix}.$$

Зная координаты этих векторов, можно найти координаты вектора орбитального момента $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ и вектора Лапласа $\mathbf{f} = \mathbf{v} \times \mathbf{c} - \mu \mathbf{e}_r$ в ИСК:

$$\mathbf{c} = \sqrt{\mu p} \mathbf{e}_c,$$

$$\mathbf{f} = \sqrt{\mu^2 + c^2 h} \mathbf{e}_f,$$

где

$$\mathbf{e}_c = \begin{pmatrix} \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_f = \begin{pmatrix} -\sin \Omega \sin \omega \cos i + \cos \Omega \cos \omega \\ \cos \Omega \sin \omega \cos i + \sin \Omega \cos \omega \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix}.$$

Отметим, что, так как вектор Лапласа всегда направлен на перицентр, вектор \mathbf{e}_f можно легко получить, подставив $\nu = 0$ в выражение для \mathbf{e}_r . Введём вспомогательный базис

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{e}_f,$$

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{e}_c,$$

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_3 \times \mathbf{h}_1.$$

Тогда, по построению, базис АСК получается из этого базиса поворотом на угол ν_{max} против часовой стрелки вокруг вектора \mathbf{h}_3 , что изображено на рисунке 10. Учитывая $\cos \nu_{max} = -1/e$ и $\sin \nu_{max} = \eta/e$, получаем

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{e} \mathbf{h}_1 + \frac{\eta}{e} \mathbf{h}_2,$$

$$\mathbf{e}_2 = -\frac{\eta}{e} \mathbf{h}_1 - \frac{1}{e} \mathbf{h}_2,$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{h}_3,$$

или в покомпонентной форме

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{\eta}{e} \begin{pmatrix} -\sin \Omega \cos \omega \cos i + \cos \Omega \sin \omega \\ \cos \Omega \cos \omega \cos i - \sin \Omega \sin \omega \\ \cos \omega \sin i \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{e} \begin{pmatrix} \sin \Omega \sin \omega \cos i - \cos \Omega \cos \omega \\ -\cos \Omega \sin \omega \cos i - \sin \Omega \cos \omega \\ -\sin \omega \sin i \end{pmatrix}, \\
\mathbf{e}_2 &= \frac{\eta}{e} \begin{pmatrix} \sin \Omega \sin \omega \cos i - \cos \Omega \cos \omega \\ -\cos \Omega \sin \omega \cos i + \sin \Omega \cos \omega \\ -\sin \omega \sin i \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{e} \begin{pmatrix} \sin \Omega \cos \omega \cos i + \cos \Omega \sin \omega \\ -\cos \Omega \cos \omega \cos i + \sin \Omega \sin \omega \\ -\cos \omega \sin i \end{pmatrix}, \\
\mathbf{e}_3 &= \begin{pmatrix} \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Записывая данные столбцы друг за другом в матрицу, получаем матрицу перехода ⁵ от ИСК к АСК

$$\mathbf{S}_{\text{ИСК} \rightarrow \text{АСК}} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3). \quad (27)$$

Отметим, что данная матрица, как матрица перехода от ОНБ к ОНБ, является ортогональной, т.е. $\mathbf{S}_{\text{ИСК} \rightarrow \text{АСК}}^{-1} = \mathbf{S}_{\text{ИСК} \rightarrow \text{АСК}}^T$.

⁵Данная матрица при замене базиса преобразует координаты свободного вектора χ как $\chi_{\text{ИСК}} = \mathbf{S}_{\text{ИСК} \rightarrow \text{АСК}} \chi_{\text{АСК}}$.

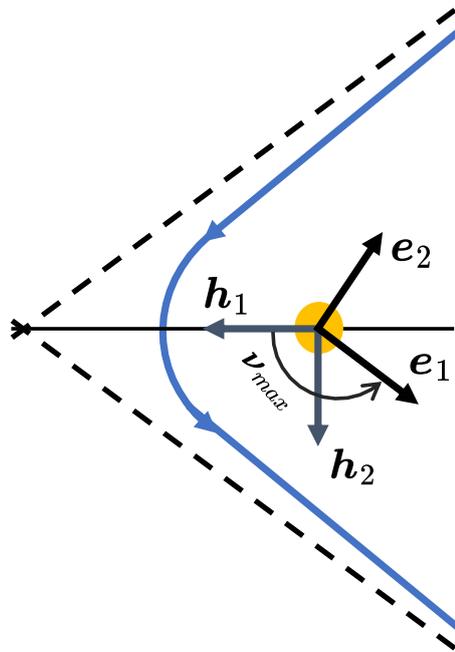


Рисунок 10 – Связь вспомогательного базиса и базиса АСК. Векторы \mathbf{h}_3 и \mathbf{e}_3 совпадают и направлены на наблюдателя.

Приложение Б. Элементы матрицы $\mathbf{Y}(\delta, \delta_0)$

Ниже приводятся элементы матрицы $\mathbf{Y}(\delta, \delta_0)$, которая была получена подстановкой выражений (12) и (13) в формулу (6) и осуществлением преобразований (14). Первое число индекса $\mathbf{Y}_{i,j}$ – номер строки матрицы, второе – номер столбца матрицы. Важно отметить, что шестой столбец матрицы содержит величину Δt , которая де-факто является функцией $\Delta t = \Delta t(\delta, \delta_0)$.

$$\mathbf{Y}_{1,1} = \frac{\sin \delta + \eta}{\eta},$$

$$\mathbf{Y}_{2,1} = \frac{\cos \delta - 1}{\eta},$$

$$\mathbf{Y}_{3,1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{4,1} = \frac{v_\infty}{4\eta^4 a} \left(\eta^2 (-\cos \delta + \cos 3\delta) + 2\eta (\sin \delta - 2\sin 2\delta + \sin 3\delta) - 7\cos \delta + 4\cos 2\delta - \cos 3\delta + 4 \right),$$

$$\mathbf{Y}_{5,1} = \frac{v_\infty}{a\eta^4} (1 - \cos \delta + \eta \sin \delta)^2 \sin \delta,$$

$$\mathbf{Y}_{6,1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{1,2} = \frac{2\eta (2\cos \delta + \cos 2\delta - 3) - 6\sin \delta + 3\sin 2\delta}{4\eta (1 - \cos \delta + \eta \sin \delta)},$$

$$\mathbf{Y}_{2,2} = \frac{2\eta (2\eta \cos \delta + 3\sin \delta - \sin 2\delta) - 12\cos \delta + 3\cos 2\delta + 9}{4\eta (1 - \cos \delta + \eta \sin \delta)},$$

$$\mathbf{Y}_{3,2} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{4,2} = -\frac{v_\infty}{8\eta^4 a} \left(2\eta^2 (3\cos \delta + \cos 3\delta - 4) + \eta (\sin \delta - 8\sin 2\delta + 5\sin 3\delta) - 21\cos \delta + 12\cos 2\delta - 3\cos 3\delta + 12 \right),$$

$$\mathbf{Y}_{5,2} = \frac{v_\infty}{2\eta^4 a} \left(2\eta^3 + 2\eta^2 \sin \delta \cos^2 \delta + \frac{\eta}{4} (9 \cos \delta + 8 \cos 2\delta - 5 \cos 3\delta - 12) + 3 \sin^3 \delta - 6 \sin \delta + 3 \sin 2\delta \right),$$

$$\mathbf{Y}_{6,2} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{1,3} = \frac{(\cos \delta - 1) \sin \delta}{1 - \cos \delta + \eta \sin \delta},$$

$$\mathbf{Y}_{2,3} = \frac{\eta \sin \delta + \cos^2 \delta - 2 \cos \delta + 1}{1 - \cos \delta + \eta \sin \delta},$$

$$\mathbf{Y}_{3,3} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{4,3} = \frac{v_\infty}{\eta^3 a} \left(\eta \sin^3 \delta - \sin^2 \delta \cos \delta + 2 \sin^2 \delta + 2 \cos \delta - 2 \right),$$

$$\mathbf{Y}_{5,3} = -\frac{v_\infty}{4\eta^3 a} \left(\eta (-5 \cos \delta + \cos 3\delta + 4) + 5 \sin \delta - 4 \sin 2\delta + \sin 3\delta \right),$$

$$\mathbf{Y}_{6,3} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{1,4} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{2,4} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{3,4} = \frac{2\eta \cos \delta + \sin \delta}{2(1 - \cos \delta + \eta \sin \delta)},$$

$$\mathbf{Y}_{4,4} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{5,4} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{6,4} = \frac{v_\infty}{2\eta^3 a} (2\eta^2 + 2\eta \sin \delta - \cos \delta + 1),$$

$$\mathbf{Y}_{1,5} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{2,5} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{3,5} = \frac{\eta \sin \delta}{1 - \cos \delta + \eta \sin \delta},$$

$$\mathbf{Y}_{4,5} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{5,5} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{6,5} = \frac{v_\infty}{\eta^2 a} (1 - \cos \delta),$$

$$\mathbf{Y}_{1,6} = \frac{3v_\infty \Delta t}{2\eta^3 a} \cdot \frac{\eta^2 \sin \delta + \eta \sin^2 \delta - \eta \cos \delta + \eta + \sin \delta - \sin \delta \cos \delta}{1 - \cos \delta + \eta \sin \delta} - \frac{\cos \delta}{1 - \cos \delta + \eta \sin \delta},$$

$$\mathbf{Y}_{2,6} = \frac{3v_\infty \Delta t}{4\eta^3 a} \cdot \frac{\eta \sin 2\delta - 2\eta \sin \delta - 2 \cos^2 \delta + 4 \cos \delta - 2}{1 - \cos \delta + \eta \sin \delta} + \frac{\sin \delta}{1 - \cos \delta + \eta \sin \delta},$$

$$\mathbf{Y}_{3,6} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{4,6} = \frac{v_\infty}{2\eta^6 a^2} \left([3\eta (\cos \delta - 1) \sin 2\delta - 3\eta^2 \sin^2 \delta \cos \delta - 3(\cos \delta - 1)^2 \cos \delta] \times \right. \\ \left. \times v_\infty \Delta t + \eta^4 a + \eta^3 a \sin \delta \right),$$

$$\mathbf{Y}_{5,6} = \frac{v_\infty}{2\eta^6 a^2} \left([3\eta^2 \sin^3 \delta + 6\eta (1 - \cos \delta) \sin^2 \delta + 3(\cos \delta - 1)^2 \sin \delta] v_\infty \Delta t + \right. \\ \left. + \eta^3 a (\cos \delta - 1) \right),$$

$$\mathbf{Y}_{6,6} = 0.$$

Приложение В. Элементы матрицы $\mathbf{Y}^{-1}(\delta, \delta)$

Ниже приводятся элементы матрицы $\mathbf{Y}^{-1}(\delta, \delta)$. Данная матрица была получена обращением матрицы из Приложения Б в случае $\Delta t = 0$. Отметим, что в выражения входит переменная r , которая выражается через δ как

$$r(\delta) = \frac{p}{1 - \cos \delta + \eta \sin \delta}.$$

$$\mathbf{Y}_{1,1}^{-1} = \frac{2a \cos^2 \delta}{r} + \frac{2a}{r} + 1 - \frac{3 \sin \delta}{\eta} - \frac{2 \sin^2 \delta}{\eta^2},$$

$$\mathbf{Y}_{2,1}^{-1} = \frac{a \cos^2 \delta}{r} + \frac{a}{r} - \frac{2 \sin \delta}{\eta} - \frac{\sin^2 \delta}{\eta^2},$$

$$\mathbf{Y}_{3,1}^{-1} = -\frac{a \sin 2\delta}{2r} - \frac{a \sin^2 \delta}{2\eta r} + \frac{a}{\eta r} - \frac{\cos \delta}{\eta} + \frac{1}{\eta} - \frac{\sin 2\delta}{2\eta^2} - \frac{\sin^2 \delta}{2\eta^3},$$

$$\mathbf{Y}_{4,1}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{5,1}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{6,1}^{-1} = \frac{2\eta^2 a^2 \cos \delta}{r^2},$$

$$\mathbf{Y}_{1,2}^{-1} = -\frac{a \sin 2\delta}{r} - \frac{\cos \delta}{\eta} + \frac{1}{\eta} + \frac{2 \sin \delta}{\eta^2} - \frac{\sin 2\delta}{\eta^2},$$

$$\mathbf{Y}_{2,2}^{-1} = -\frac{a \sin 2\delta}{2r} - \frac{\cos \delta}{\eta} + \frac{1}{\eta} + \frac{\sin \delta}{\eta^2} - \frac{\sin 2\delta}{2\eta^2},$$

$$\mathbf{Y}_{3,2}^{-1} = \frac{a \sin^2 \delta}{r} + 1 - \frac{a \sin 2\delta}{4\eta r} + \frac{\sin \delta}{\eta} + \frac{\cos \delta}{2\eta^2} - \frac{\cos 2\delta}{2\eta^2} + \frac{\sin \delta}{2\eta^3} - \frac{\sin 2\delta}{4\eta^3},$$

$$\mathbf{Y}_{4,2}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{5,2}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{6,2}^{-1} = -\frac{2\eta^2 a^2 \sin \delta}{r^2},$$

$$\mathbf{Y}_{1,3}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{2,3}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{3,3}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{4,3}^{-1} = \frac{\cos \delta - 1}{\eta},$$

$$\mathbf{Y}_{5,3}^{-1} = 1 + \frac{\sin \delta}{\eta} - \frac{\cos \delta}{2\eta^2} + \frac{1}{2\eta^2},$$

$$\mathbf{Y}_{6,3}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{1,4}^{-1} = \frac{r}{\eta v_\infty} (2\eta \cos \delta - 2 \sin \delta + \sin 2\delta),$$

$$\mathbf{Y}_{2,4}^{-1} = \frac{r}{\eta v_\infty} (\cos \delta - 1) \sin \delta,$$

$$\mathbf{Y}_{3,4}^{-1} = \frac{r}{v_\infty} \left(\frac{-2\eta a}{r} + \frac{\cos^2 \delta}{\eta} - \frac{\cos \delta}{\eta} + \frac{\sin 2\delta}{4\eta^2} - \frac{\sin \delta}{2\eta^2} \right),$$

$$\mathbf{Y}_{4,4}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{5,4}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{6,4}^{-1} = \frac{2\eta a}{v_\infty} (\eta + \sin \delta),$$

$$\mathbf{Y}_{1,5}^{-1} = \frac{r}{v_\infty} \left(-\frac{2\eta a}{r} + 2 \sin \delta + \frac{4 + 2 \cos^2 \delta}{\eta} - \frac{6 \cos \delta}{\eta} \right),$$

$$\mathbf{Y}_{2,5}^{-1} = \frac{r}{v_\infty} \left(-\frac{\eta a}{r} + 2 \sin \delta + \frac{2 + \cos^2 \delta}{\eta} - \frac{3 \cos \delta}{\eta} \right),$$

$$\mathbf{Y}_{3,5}^{-1} = \frac{r}{v_\infty} \left(-\frac{a}{2r} - \cos \delta - \frac{\sin 2\delta}{2\eta} + \frac{\sin \delta}{\eta} + \frac{2 + \cos^2 \delta}{2\eta^2} - \frac{3 \cos \delta}{2\eta^2} \right),$$

$$\mathbf{Y}_{4,5}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{5,5}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{6,5}^{-1} = \frac{2\eta a}{v_\infty} (\cos \delta - 1),$$

$$\mathbf{Y}_{1,6}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{2,6}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{3,6}^{-1} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{4,6}^{-1} = \frac{r \sin \delta}{v_\infty},$$

$$\mathbf{Y}_{5,6}^{-1} = -\frac{r}{2\eta v_\infty} (2\eta \cos \delta + \sin \delta),$$

$$\mathbf{Y}_{6,6}^{-1} = 0.$$

Приложение Г. Многочлен Лорана матрицы Y

Ниже приводятся элементы матрицы из Приложения Б, приближенные многочленом Лорана от δ в окрестности 0 с точностью до четвертого порядка. В шестом столбце порядок понижается до $o(\delta^3)$ из-за появления логарифма.

$$Y_{1,1} = 1 + \frac{\delta}{\eta} - \frac{\delta^3}{6\eta} + O(\delta^4),$$

$$Y_{2,1} = -\frac{\delta^2}{2\eta} + O(\delta^4),$$

$$Y_{3,1} = 0,$$

$$Y_{4,1} = -\frac{v_\infty}{\eta^2 a} \left(\delta^2 + \frac{\delta^3}{\eta} + O(\delta^4) \right),$$

$$Y_{5,1} = \frac{v_\infty}{\eta^2 a} \delta^3 + O(\delta^4),$$

$$Y_{6,1} = 0,$$

$$Y_{1,2} = -\frac{3\delta}{2\eta} + \frac{\delta^3}{8\eta} + O(\delta^4),$$

$$Y_{2,2} = \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{3} + \frac{5\delta^2}{8\eta} + \delta^3 \left(-\frac{1}{45} + \frac{1}{16\eta^2} \right) + O(\delta^4),$$

$$Y_{3,2} = 0,$$

$$Y_{4,2} = \frac{3v_\infty}{2a\eta^2} \left(\delta^2 + \frac{\delta^3}{\eta} + O(\delta^4) \right),$$

$$Y_{5,2} = \frac{v_\infty}{\eta a} \left(1 + \frac{\delta}{\eta} + \frac{\delta^2}{4\eta^2} - \frac{7\delta^3}{6\eta} + O(\delta^4) \right),$$

$$Y_{6,2} = 0,$$

$$Y_{1,3} = -\frac{\delta^2}{2\eta} + \frac{\delta^3}{4\eta^2} + O(\delta^4),$$

$$\mathbf{Y}_{2,3} = 1 - \frac{\delta}{2\eta} + \frac{\delta^2}{4\eta^2} + \delta^3 \left(\frac{5}{24\eta} - \frac{1}{8\eta^3} \right) + O(\delta^4),$$

$$\mathbf{Y}_{3,3} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{4,3} = \frac{v_\infty}{\eta a} \left(\frac{\delta^3}{\eta} + O(\delta^4) \right),$$

$$\mathbf{Y}_{5,3} = \frac{v_\infty}{\eta a} \left(\frac{\delta^2}{2\eta} + O(\delta^4) \right),$$

$$\mathbf{Y}_{6,3} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{1,4} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{2,4} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{3,4} = \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{3} + \frac{\delta^2}{8\eta} + \delta^3 \left(-\frac{1}{45} - \frac{1}{16\eta^2} \right) + O(\delta^4),$$

$$\mathbf{Y}_{4,4} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{5,4} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{6,4} = \frac{v_\infty}{\eta a} \left(1 + \frac{\delta}{\eta} + \frac{\delta^2}{4\eta^2} - \frac{\delta^3}{6\eta} + O(\delta^4) \right),$$

$$\mathbf{Y}_{1,5} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{2,5} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{3,5} = 1 - \frac{\delta}{2\eta} + \frac{\delta^2}{4\eta^2} + \delta^3 \left(-\frac{1}{24\eta} - \frac{1}{8\eta^3} \right) + O(\delta^4),$$

$$\mathbf{Y}_{4,5} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{5,5} = 0,$$

$$\mathbf{Y}_{6,5} = \frac{v_\infty}{\eta a} \left(\frac{\delta^2}{2\eta} + O(\delta^4) \right),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{1,6} &= \frac{1}{2\delta\eta} + \frac{11}{4\eta^2} - \frac{3M_0}{2\eta^2} - \frac{3}{2\eta^2} \ln \frac{2\eta}{\delta e} + \\
&\quad + \delta \left(-\frac{3M_0}{2\eta^3} - \frac{1}{6\eta} - \frac{3}{2\eta^3} \ln \frac{2\eta}{\delta e} - \frac{5}{8\eta^3} \right) + \delta^2 \left(-\frac{9}{16\eta^2} - \frac{5}{8\eta^4} \right) + \\
&\quad + \delta^3 \left(\frac{M_0}{4\eta^3} - \frac{1}{90\eta} + \frac{1}{4\eta^3} \ln \frac{2\eta}{\delta e} + \frac{1}{24\eta^3} + \frac{5}{32\eta^5} \right) + o(\delta^3), \\
\mathbf{Y}_{2,6} &= \frac{1}{\eta} - \frac{5\delta}{4\eta^2} + \delta^2 \left(\frac{3M_0}{4\eta^3} + \frac{3}{4\eta^3} \ln \frac{2\eta}{\delta e} - \frac{1}{8\eta^3} \right) + \delta^3 \left(\frac{13}{48\eta^2} + \frac{7}{16\eta^4} \right) + o(\delta^3), \\
\mathbf{Y}_{3,6} &= 0, \\
\mathbf{Y}_{4,6} &= \frac{v_\infty}{\eta a} \left(\frac{1}{2\eta} - \frac{\delta}{\eta^2} + \delta^2 \left(\frac{3M_0}{2\eta^3} + \frac{3}{2\eta^3} \ln \frac{2\eta}{\delta e} - \frac{9}{4\eta^3} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta^3 \left(\frac{3M_0}{2\eta^4} + \frac{5}{3\eta^2} + \frac{3}{2\eta^4} \ln \frac{2\eta}{\delta e} \right) + o(\delta^3) \right), \\
\mathbf{Y}_{5,6} &= \frac{v_\infty}{\eta a} \left(\frac{5\delta^2}{4\eta^2} + \delta^3 \left(-\frac{3M_0}{2\eta^3} - \frac{3}{2\eta^3} \ln \frac{2\eta}{\delta e} + \frac{9}{4\eta^3} \right) + o(\delta^3) \right), \\
\mathbf{Y}_{6,6} &= 0.
\end{aligned}$$