

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

**Направление подготовки / специальность:** 03.04.01 Прикладные математика и физика  
(магистратура)

**Направленность (профиль) подготовки:** Управление динамическими системами

**УПРАВЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ  
ДВУХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С  
СОЛНЕЧНЫМИ ПАРУСАМИ С ИЗМЕНЯЕМЫМИ  
ОПТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

(магистерская диссертация)

**Студент:**

Петрова Татьяна Юрьевна

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Ткачев Степан Сергеевич,  
канд. физ.-мат. наук, доц.

---

*(подпись научного руководителя)*

**Консультант (при наличии):**

---

*(подпись консультанта)*

Москва 2019

## **Аннотация**

Рассматривается задача построения алгоритма управления орбитальным и угловым движением двух космических аппаратов и дальнейшей реализации этого алгоритма с помощью солнечного паруса с изменяемыми оптическими свойствами. Построен алгоритм управления для частного случая замкнутой относительной орбиты. Приведены оценки допустимой области начальных условий для некоторых параметров и времени демпфирования угловой скорости и сведения дрейфа к нулю.

## Оглавление

Введение.....	3
1. Постановка задачи и системы координат .....	4
2. Уравнения движения .....	6
а. Орбитальное движение.....	6
б. Угловое движение.....	7
в. Относительное движение спутников .....	8
3. Синтез управления.....	13
а. Управление относительным движением спутников .....	14
б. Управление угловым движением.....	21
в. Реализация управления .....	24
4. Численное моделирование .....	30
Заключение .....	39
Литература.....	39

## Введение

Тенденцией настоящего времени становятся спутниковые формации. Они представляют собой группы близко расположенных спутников, имеющих общую задачу. Использование таких групп сделало осуществимым множество научных и прикладных миссий, которые не могли быть реализованы одиночными космическими аппаратами (КА). В частности, спутниковые формации используются для дистанционного зондирования Земли. Например, проект TanDEM-X [1,2], целью которого являлось создание цифровой модели рельефа высокой точности, что успешно было сделано. Групповые полёты используются и при решении научных задач, например, для изучения магнитосферы Земли – миссии Cluster II и Magnetospheric Multiscale Mission. В проекте Cluster II, который функционирует в настоящее время, используются четыре КА, целью которых является получение пространственных изменений в плазме с течением времени. Magnetospheric Multiscale Mission была запущена для исследования магнитных связей и влияний друг на друга магнитных полей Солнца и Земли, и для этой задачи также использовались четыре спутника. Преимущество группы КА над отдельным спутником в данной задаче состоит в получении пространственных измерений в разных точках в один момент времени. Другой научной задачей для спутниковых формаций является обнаружение новых планет. Планировалась миссия Terrestrial Planet Finder – проект НАСА, в котором несколько отдельных КА образуют огромный мощный телескоп, способный регистрировать слабый свет экзопланет на фоне более яркого света звёзд, вокруг которых они вращаются. На данный момент все аналогичные проекты находятся на этапе разработки.

С точки зрения динамики и управления спутниковые формации имеют ряд особенностей. Даже в линейном приближении при отсутствии внешних возмущений относительное движение аппаратов неустойчиво. Воздействие внешних возмущений, таких как  $J_2$  или сила давления солнечного излучения, в общем случае, усугубляет ситуацию. Таким образом, нужно не только сформировать необходимую конфигурацию, но и поддерживать её в течение длительного времени. Способы поддержания формации делятся на бестопливные и с затратами топлива. Второй способ требует установки двигателей. Преимуществами этого подхода являются точность управления и относительная простота в плане реализации, так как в настоящий момент существует большое количество доступных разработчикам отработанных решений. С другой стороны, коррекция и поддержание формации требуют

расхода топлива, что ограничивает время активного существования группы. Альтернативой могут быть бестопливные способы управления, которые лишены этого недостатка. Однако, в плане динамики и синтеза управления они, как правило, более сложные. Среди таких способов наиболее часто рассматривают подходы, основанные на использовании аэродинамической силы или силы давления солнечного излучения, реже – кулоновское и электромагнитное взаимодействие, которые в техническом плане более сложные. Примером приведения и удержания формации с использованием аэродинамической силы являются работы [3,4], силы давления солнечного излучения – работы [5,6]. Основной идеей является использование разности сил, действующих на спутники. В данной работе в роли управления относительным движением спутников выступает сила давления солнечного излучения, инструментом управления является солнечный парус. Для построения управления могут использоваться различные алгоритмы: скользящее управление [5,7], LQR-управление [6,8], ляпуновское управление [9]. Примером использования момента силы давления солнечного излучения для управления ориентацией может выступать работа [10]. Недостатком этого подхода, как и других бестопливных способов управления, является ограниченность момента по направлению и величине. Особенностью здесь является необходимость управления ориентацией, для чего устанавливаются дополнительные управляющие устройства. Однако уже есть пример миссии, успешно продемонстрировавшей возможность управления ориентацией КА с помощью использования солнечного паруса с изменяемыми оптическими свойствами. Аппарат, с одноимённым названием IKAROS, управлял угловым движением паруса путём изменения отражательной способности отдельных его частей.

## **1. Постановка задачи и системы координат**

Рассматривается задача приведения формации из двух космических аппаратов на заданную относительную орбиту и поддержания их на ней с использованием солнечного паруса с изменяемой отражательной способностью. Спутники идентичные, полная масса каждого равна 10 кг, размер паруса  $5 \times 5$  м. Один из аппаратов, без ограничения общности, будем называть ведущим, другой – ведомым.

Полагается, что давление солнечного излучения оказывает влияние на орбитальное и угловое движение. Также при моделировании орбитального

движения учитывается несферичность Земли (гармоника  $J_2$ ), а углового – гравитационный момент.

В работе используются следующие прямоугольные декартовы системы координат:

–  $O_1XYZ$  – инерциальная геоцентрическая система координат (ИСК), начало которой  $O_1$  совпадает с центром Земли, ось  $O_1Z$  направлена вдоль полярной оси Земли к Северному полюсу Земли, оси  $O_1X$  и  $O_1Y$  лежат в плоскости экватора, ось  $O_1X$  направлена на точку весеннего равноденствия;

–  $Oxyz$  – орбитальная система координат (ОСК), начало координат  $O$  – в центре масс КА, ось  $Oz$  направлена по радиус-вектору КА относительно центра Земли, ось  $Oy$  перпендикулярна плоскости орбиты КА;

–  $O\xi\eta\zeta$  – связанная с КА система координат (ССК), оси – главные центральные оси инерции аппарата (далее для простоты полагается, что нормаль к парусу направлена по оси  $O\zeta$ , а стороны паруса параллельны двум другим осям);

–  $Ox_s y_s z_s$  – солнечная система координат, ось  $Oz_s$  направлена на Солнце, ось  $Oy_s$  перпендикулярна плоскости эклиптики и образует острый угол с осью  $O_1Z$  ИСК.

Запишем матрицы перехода, связывающие введенные системы координат. Пусть  $\mathbf{S} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$  – матрица перехода из ОСК в ИСК,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор КА относительно центра Земли,  $\mathbf{v}$  – скорость КА. Тогда

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3. \quad \text{Пусть } \mathbf{B} \text{ – матрица перехода из ИСК в ССК,}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \text{ – кватернион, задающий ориентацию КА в ИСК. Тогда}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda_2^2 - 2\lambda_3^2 & 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_3\lambda_0 & 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_0 \\ 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3\lambda_0 & 1 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_3^2 & 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_0 \\ 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2\lambda_0 & 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_0 & 1 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица  $\mathbf{S}_{\text{sun}} = (\mathbf{l}_1 \ \mathbf{l}_2 \ \mathbf{l}_3)$  задаёт переход из ИСК в солнечную

систему координат. Тогда  $\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \cos \varepsilon \\ \sin \lambda \sin \varepsilon \end{pmatrix}$ , где  $\lambda$  – эклиптическая долгота

Солнца,  $\varepsilon$  – угол наклона плоскости эклиптики к небесному экватору,

$$\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varepsilon \\ \cos \varepsilon \end{pmatrix}, \mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3.$$

## 2. Уравнения движения

Особенностью рассматриваемой задачи является переплетенность орбитальной и угловой динамики. В главе приводятся уравнения движения, используемые для описания эволюции системы, а также для синтеза управления.

### а. Орбитальное движение

Уравнения возмущенного орбитального движения КА записываются в виде:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_{J_2},$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор КА относительно центра масс Земли,  $\mu$  – гравитационный параметр Земли,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\mathbf{f}_s$  – вектор возмущающего ускорения, обусловленного влиянием силы давления солнечного излучения,  $\mathbf{f}_{J_2}$  – второй зональной гармоникой гравитационного потенциала Земли, который в ИСК имеет вид:

$$\mathbf{f}_{J_2} = \frac{3J_2\mu R_\oplus^2}{2r^4} \begin{pmatrix} 3\sin^2 i \sin^2 u - 1 \\ -\sin^2 i \sin 2u \\ -\sin 2u \sin u \end{pmatrix}.$$

Здесь  $J_2 = 1,082 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_\oplus$  – средний радиус Земли,  $i$  – наклонение орбиты КА,  $u$  – аргумент широты. Сила давления солнечного излучения на элемент поверхности  $dS$  описывается следующим выражением [10]:

$$d\mathbf{F}_s = -\frac{\Phi_0}{c}(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) \left[ (1-\alpha)\mathbf{r}_s + 2\alpha\mu(\mathbf{r}_s, \mathbf{n})\mathbf{n} + \alpha(1-\mu)\left(\mathbf{r}_s + \frac{2}{3}\mathbf{n}\right) \right] dS,$$

где  $\Phi_0$  – солнечная постоянная, равная  $1367 \text{ Вт} / \text{м}^2$ ,  $c$  – скорость света,  $\mathbf{r}_s$  – единичный вектор направления от Солнца к КА,  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль к парусу,  $\alpha$  – коэффициент отражения,  $\mu$  – коэффициент зеркального

отражения. Далее рассматривается случай абсолютно зеркальной поверхности ( $\mu = 1$ ), поэтому получим:

$$d\mathbf{F}_s = -\frac{\Phi_0}{c}(\mathbf{r}_s, \mathbf{n})[(1-\alpha)\mathbf{r}_s + 2\alpha(\mathbf{r}_s, \mathbf{n})\mathbf{n}]dS.$$

Пусть  $S$  – площадь паруса. Проинтегрируем выражение по поверхности паруса, считая, что коэффициент отражения  $\alpha$  может изменяться при переходе от одной точки паруса к другой (переменная отражательная способность).

$$\mathbf{F}_s = \int_S d\mathbf{F}_s = -\frac{\Phi_0}{c}(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) \left[ \left( S - \int_S \alpha dS \right) \mathbf{r}_s + 2(\mathbf{r}_s, \mathbf{n})\mathbf{n} \int_S \alpha dS \right].$$

Если ввести обозначения  $f = \frac{\int_S \alpha dS}{S}$  ( $0 \leq f \leq 1$ ) и  $A = -\frac{\Phi_0 S}{c}$  ( $A < 0$ ), то сила давления солнечного излучения примет вид:

$$\mathbf{F}_s = A(\mathbf{r}_s, \mathbf{n})[(1-f)\mathbf{r}_s + 2f(\mathbf{r}_s, \mathbf{n})\mathbf{n}].$$

Параметр  $f$  будем называть интегральным коэффициентом отражения. Он характеризует оптические свойства паруса. Доля паруса  $f$  полностью отражает световое излучение, оставшаяся  $(1-f)$  – полностью поглощает.

### ***б. Угловое движение***

Для описания углового движения КА используются динамические уравнения Эйлера:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{\text{упр}} + \mathbf{M}_{\text{грав}}, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{J}$  – тензор инерции КА относительно точки  $O$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость КА в связанной с ним системе координат,  $\mathbf{M}_{\text{упр}}$  – управляющий момент,

$\mathbf{M}_{\text{грав}} = 3\frac{\mu}{r^5}\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r}$  – гравитационный момент. Ориентация КА задается

кватернионом

$$\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Уравнения, связывающие угловую скорость КА и кватернион ориентации, имеют следующий вид:



$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \omega.$$

Для каждого аппарата интегрируются приведенные уравнения орбитального и углового движений. По положению  $\mathbf{r}_i$  и скорости  $\mathbf{v}_i$ ,  $i=1,2$  аппаратов вычисляются параметры относительной орбиты, на основе которых строится управление относительным движением. Для управления угловым движением спутников необходимо знание угловой скорости  $\omega_i$  и ориентации  $\Lambda_i$ ,  $i=1,2$  каждого аппарата.

### ***в. Относительное движение спутников***

Управление относительным движением строится на основе уравнений Хилла-Клоэсси-Уилтшира (ХКУ) [1]. Они выводятся в предположении, что орбита ведущего КА круговая, и относительное расстояние между КА мало. Предположение малости расстояния обеспечивается начальными условиями отделения и последующим управлением. Для первого же предположения по радиус-вектору  $\mathbf{r}_1$  и скорости  $\mathbf{v}_1$  ведущего КА строится мгновенная круговая орбита:

- а. орбита лежит в плоскости орбиты ведущего КА;
- б. радиус мгновенной круговой орбиты равен  $|\mathbf{r}_1|$ ;
- в. угловая скорость  $\omega_{\text{орб}} = \sqrt{\frac{\mu}{|\mathbf{r}_1|^3}}$ .

В этом случае система уравнений невозмущённой задачи в ОСК имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_{\text{орб}}\dot{z} = 0; \\ \ddot{y} + \omega_{\text{орб}}^2 y = 0; \\ \ddot{z} - 2\omega_{\text{орб}}\dot{x} - 3\omega_{\text{орб}}^2 z = 0 \end{cases}$$

где  $\omega_{\text{орб}}$  – орбитальная угловая скорость ведущего КА,  $\mathbf{p} = (x \ y \ z)^T$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Индекс 1 относится к ведущему КА, 2 – к ведомому КА.

Одним из источников ошибок модели ХКУ является учёт только линейных членов в разложении, которые можно уменьшить, записывая и линеаризуя уравнения в криволинейной системе координат  $(a_0\theta_r, a_0\phi_r, \rho)$  [1], где  $\rho = |\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_1|$ ,  $a_0 = |\mathbf{r}_1|$ .

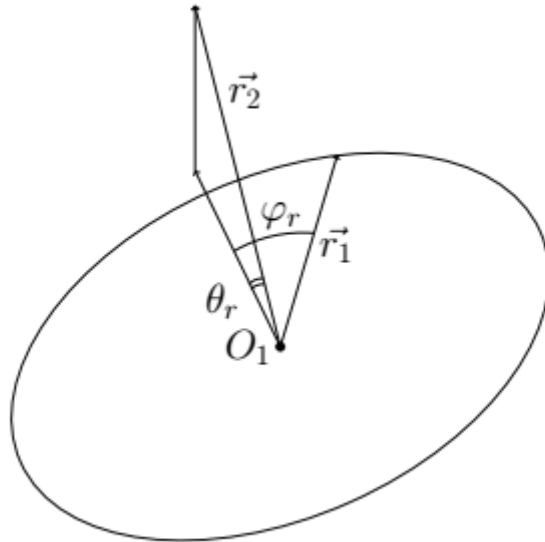


Рисунок 1 – Криволинейная система координат.

В криволинейных координатах после линеаризации и учёта линейных (но уже по новым координатам) членов получаются криволинейные уравнения ХКУ, имеющие ту же форму, что и обычные уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_0 \ddot{\theta}_r) + 2\omega_{op\delta} \dot{\rho} = 0; \\ (a_0 \ddot{\varphi}_r) + \omega_{op\delta}^2 (a_0 \varphi_r) = 0; \\ \ddot{\rho} - 2\omega_{op\delta} (\dot{a}_0 \theta_r) - 3\omega_{op\delta}^2 \rho = 0. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

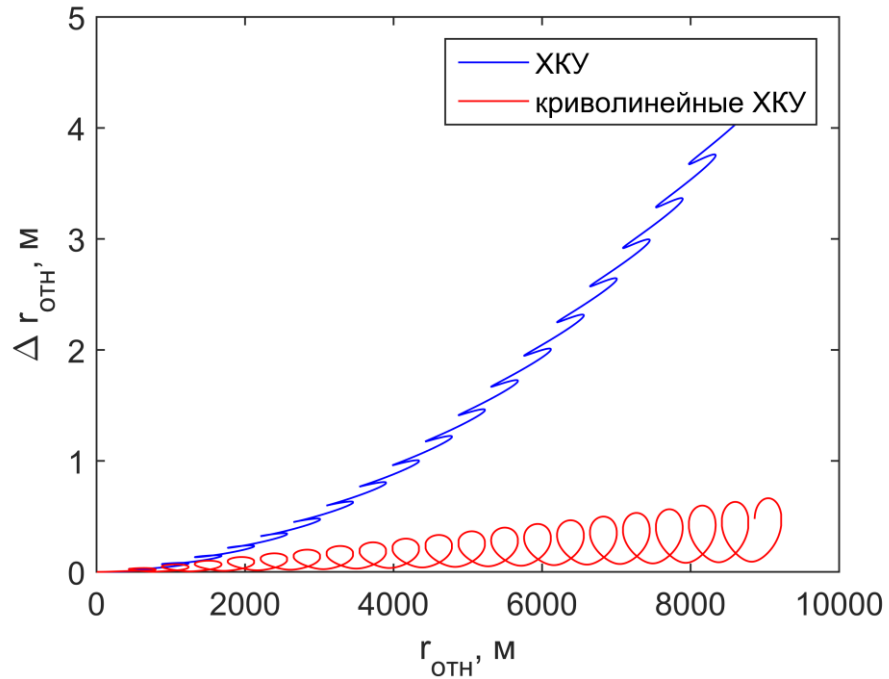


Рисунок 2 – Разность расстояний между КА, полученных при интегрировании уравнений ХКУ в течение  $1.7 \cdot 10^5$  с в ОСК (синий), в криволинейных координатах (красный) и уравнений движения спутника в поле тяжести Земли, в зависимости от расстояния между спутниками  $|\mathbf{r}_{отн}|$  (согласно уравнениям движения в поле тяжести Земли).

На рисунке 2 показаны ошибки при интегрировании уравнений ХКУ в обычных и криволинейных координатах. Видно, что криволинейные координаты точнее описывают относительное движение двух КА.

При добавлении управления криволинейные уравнения ХКУ принимают вид:

$$\begin{cases} (a_0 \ddot{\theta}_r) + 2\omega_{орб} \dot{\rho} = u_x; \\ (a_0 \ddot{\varphi}_r) + \omega_{орб}^2 (a_0 \varphi_r) = u_y; \\ \ddot{\rho} - 2\omega_{орб} (\dot{a}_0 \theta_r) - 3\omega_{орб}^2 \rho = u_z \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  – ОСК-компоненты вектора управления.

Решение системы (2.2) имеет вид:

$$\begin{cases} a_0\theta_r = -3C_1\omega_{\text{орб}}t + 2C_2 \cos \omega_{\text{орб}}t - 2C_3 \sin \omega_{\text{орб}}t + C_4; \\ a_0\varphi_r = C_5 \cos \omega_{\text{орб}}t + C_6 \sin \omega_{\text{орб}}t; \\ \rho = 2C_1 + C_2 \sin \omega_{\text{орб}}t + C_3 \cos \omega_{\text{орб}}t. \end{cases} \quad (2.4)$$

После замены переменных

$$\begin{aligned} B_1 &= C_1 \\ B_2 &= \sqrt{C_2^2 + C_3^2} \\ B_3 &= -3C_1\omega_{\text{орб}}t + C_4 \\ B_4 &= \sqrt{C_5^2 + C_6^2} \end{aligned}$$

решение (2.4) запишется в амплитудно-фазовом представлении:

$$\begin{cases} a_0\theta_r = 2B_2 \cos(\omega_{\text{орб}}t + \beta_1) + B_3; \\ a_0\varphi_r = B_4 \cos(\omega_{\text{орб}}t + \beta_2); \\ \rho = 2B_1 + B_2 \sin(\omega_{\text{орб}}t + \beta_1). \end{cases}$$

Далее, на основе решения системы криволинейных уравнений ХКУ без управления сделаем замену переменных в аналогичной системе с управлением. Сначала рассматриваются первое и третье уравнения.

$$\begin{aligned} a_0\theta_r &= 2B_2 \cos\psi_1 + B_3; \\ (a_0\theta_r) &= 2B_2(-\sin\psi_1)\omega_{\text{орб}} + (-3B_1\omega_{\text{орб}}); \\ \rho &= B_2 \sin\psi_1 + 2B_1; \\ \dot{\rho} &= B_2\omega_{\text{орб}} \cos\psi_1. \end{aligned}$$

Теперь, дифференцируя первое уравнение

$$(a_0\theta_r) = 2\dot{B}_2 \cos\psi_1 + 2B_2(-\sin\psi_1)\dot{\psi}_1 + \dot{B}_3$$

и приравнявая к уже имеющемуся выражению для  $(a_0\theta_r)$ , получаем

$$2\dot{B}_2 \cos\psi_1 - 2B_2 \sin\psi_1\dot{\psi}_1 + \dot{B}_3 = -2B_2\omega_{\text{орб}} \sin\psi_1 - 3B_1\omega_{\text{орб}} \quad (2.5)$$

Аналогично поступаем с переменной  $\rho$ :

$$\dot{B}_2 \sin\psi_1 + B_2 \cos\psi_1\dot{\psi}_1 + 2\dot{B}_1 = B_2\omega_{\text{орб}} \cos\psi_1. \quad (2.6)$$

Дифференцируя второе и четвёртое соотношения и подставляя их в первое и третье уравнения системы (2.3), получаем:

$$\begin{aligned}
& -2\dot{B}_2\omega_{\text{орб}} \sin\psi_1 - 2B_2\omega_{\text{орб}} \cos\psi_1\dot{\psi}_1 - 3\dot{B}_1\omega_{\text{орб}} + 2\omega_{\text{орб}}^2 B_2 \cos\psi_1 = u_x; \\
& \dot{B}_2\omega_{\text{орб}} \cos\psi_1 - B_2\omega_{\text{орб}} \sin\psi_1\dot{\psi}_1 + 4\omega_{\text{орб}}^2 B_2 \sin\psi_1 + 6B_1\omega_{\text{орб}}^2 - \\
& -3\omega_{\text{орб}}^2 B_2 \sin\psi_1 - 6\omega_{\text{орб}}^2 B_1 = u_z
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким образом, система уравнений, описывающая движение аппарата с управлением в плоскости  $Oxz$ , имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{B}_1 &= \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} u_x; \\
\dot{B}_2 &= \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} (-2u_x \sin\psi_1 + u_z \cos\psi_1); \\
\dot{\psi}_1 &= \omega_{\text{орб}} - \frac{1}{B_2\omega_{\text{орб}}} (2u_x \cos\psi_1 + u_z \sin\psi_1); \\
\dot{B}_3 &= -3B_1\omega_{\text{орб}} - \frac{2u_z}{\omega_{\text{орб}}}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Аналогичная замена для второго уравнения

$$\begin{aligned}
a_0\dot{\varphi}_r &= B_4 \cos\psi_2; \\
(a_0\dot{\varphi}_r) &= -B_4 (-\sin\psi_2)\omega_{\text{орб}}
\end{aligned}$$

дает систему:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_2 &= \omega_{\text{орб}} - \frac{1}{B_4\omega} u_y \cos\psi_2; \\
\dot{B}_4 &= -\frac{1}{\omega_{\text{орб}}} u_y \sin\psi_2.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Таким образом, система уравнений, для которой синтезируется управление, имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{B}_1 &= \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} u_x; \\
\dot{B}_2 &= \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} (-2u_x \sin \psi_1 + u_z \cos \psi_1); \\
\dot{\psi}_1 &= \omega_{\text{орб}} - \frac{1}{B_2 \omega_{\text{орб}}} (2u_x \cos \psi_1 + u_z \sin \psi_1); \\
\dot{B}_3 &= -3B_1 \omega_{\text{орб}} - \frac{2}{\omega_{\text{орб}}} u_z; \\
\dot{\psi}_2 &= \omega_{\text{орб}} - \frac{1}{B_4 \omega_{\text{орб}}} u_y \cos \psi_2; \\
\dot{B}_4 &= -\frac{1}{\omega_{\text{орб}}} u_y \sin \psi_2.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Обратим внимание на некоторые важные замечания. Во-первых, внешнее возмущение не учитывается при формировании управления. Во-вторых, как видно из системы уравнений ХКУ (2.3), движение в плоскости  $Oxz$  орбиты ведущего аппарата отделяется от движения вдоль оси  $Oy$ . Поэтому и управления в плоскости  $Oxz$  и вдоль оси  $Oy$  будут строиться независимо. Отметим также, что целью является именно форма относительной орбиты, а не попадание в определённую точку этой орбиты в заданный момент времени. Поэтому уравнения на фазы  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в дальнейшем не используются.

### 3. Синтез управления

Опишем задачу синтеза управления. Первым шагом находится управление  $\mathbf{u}$ , обеспечивающее требуемое относительное движение спутников. Затем ищутся значения интегрального коэффициента отражения паруса  $f_i$ ,  $i=1,2$  и ориентация нормали паруса  $\mathbf{n}_i$ ,  $i=1,2$  – углы  $\theta_i, \varphi_i$ ,  $i=1,2$  – для каждого КА, обеспечивающие найденное управление  $\mathbf{u}$ . Следующим шагом является обеспечение полученных значений параметров. Для этого строится опорное угловое движение – желаемое движение каждого спутника – и ищется управляющий момент  $\mathbf{M}_{\text{упр}}$ , который обеспечит полученное опорное движение. И далее подбирается функция переменной отражательной способности паруса  $\alpha$  таким образом, чтобы обеспечить значения управляющего момента  $\mathbf{M}_{\text{упр}}$  и интегрального коэффициента

отражения  $f_i$ ,  $i=1,2$  для каждого паруса. Схема управления приведена на рис.3.

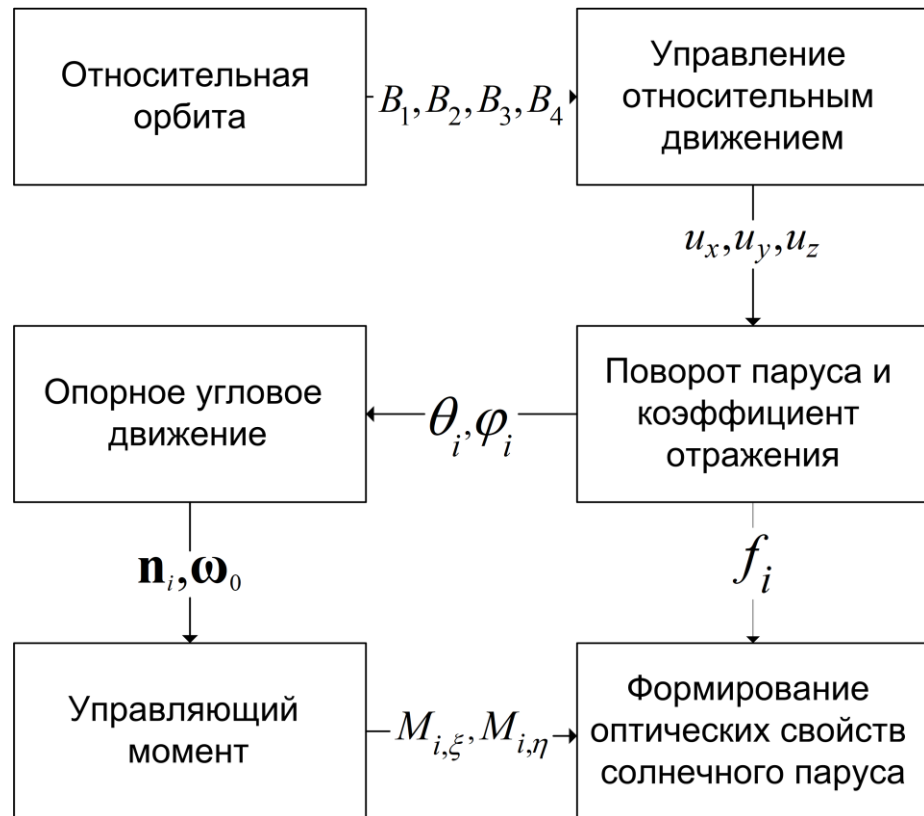


Рисунок 3 – Схема синтеза управления.

### *а. Управление относительным движением спутников*

Задача управления относительным движением решается в два этапа: построение управления  $\mathbf{u}$ , обеспечивающего заданный режим относительного движения, и нахождение ориентации нормали паруса и интегрального коэффициента отражения, гарантирующих реализацию построенного управления  $\mathbf{u}$ .

Компоненты управления  $\mathbf{u}$  в плоскости  $Oxz$  и вдоль оси  $Oy$  строятся независимо. Задача управления в плоскости  $Oxz$  – обеспечить  $B_1 = 0$ ,  $B_3 = 0$  и  $B_2 = B_0$ , вдоль оси  $Oy$  –  $B_4 = 0$ .

Таким образом, требуемое относительное движение будет являться движением в плоскости  $Oxz$  и представлять собой эллипс с большими полуосями  $2B_0$  и  $B_0$  вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$ , соответственно. Управление в плоскости  $Oxz$  строится в два этапа: сначала обеспечивается равенство нулю  $B_1$  (для того, чтобы обеспечить отсутствие векового дрейфа) и  $B_3$ , а затем обеспечивается заданное значение  $B_2$ .

Для построения управления, обеспечивающего асимптотическое стремление к положению равновесия, подбирается функция Ляпунова такая, чтобы выполнялись условия теоремы Барбашина-Красовского [11]. Для этого на первом этапе выбирается следующая функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}B_1^2 + \frac{1}{2}B_3^2, \quad (3.1)$$

производная которой, в силу уравнений движения (2.10), преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= B_1\dot{B}_1 + B_3\dot{B}_3 = B_1 \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} u_x + B_3 \left( -3B_1\omega_{\text{орб}} - \frac{2}{\omega_{\text{орб}}} u_z \right) \\ \dot{V} &< 0 \\ &\uparrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} u_x = -k_1 B_1, \quad k_1 > 0; \\ -3B_1\omega_{\text{орб}} - \frac{2}{\omega_{\text{орб}}} u_z = -k_2 B_3, \quad k_2 > 0 \end{array} \right. \\ &\Downarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} u_x = -k_1 B_1, \quad k_1 > 0; \\ u_z = \frac{1}{2} \left( -3B_1\omega_{\text{орб}}^2 + k_2\omega_{\text{орб}}B_3 \right), \quad k_2 > 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Откуда управление, обеспечивающее асимптотическое стремление  $B_1$  и  $B_3$  к нулю, имеет вид

$$\begin{aligned} u_x &= -k_1 B_1, \quad k_1 > 0; \\ u_z &= \frac{1}{2} \left( -3B_1\omega_{\text{орб}}^2 + k_2\omega_{\text{орб}}B_3 \right), \quad k_2 > 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

По достижении  $B_1$  и  $B_3$  заданной окрестности нуля включается второй этап управления. Рассматривается функция Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}B_1^2 + \frac{1}{2}(B_2 - B_0)^2 + \frac{1}{2}B_3^2.$$

Её производная



$$\begin{aligned}
\dot{V} &= B_1 \dot{B}_1 + (B_2 - B_0) \dot{B}_2 + B_3 \dot{B}_3 = \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} B_1 u_x + \\
&+ (B_2 - B_0) \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} (-2u_x \sin \psi_1 + u_z \cos \psi_1) + B_3 \left( -3B_1 \omega_{\text{орб}} - \frac{2}{\omega_{\text{орб}}} u_z \right) = \\
&= \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} (B_1 - 2(B_2 - B_0) \sin \psi_1) u_x + \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} ((B_2 - B_0) \cos \psi_1 - 2B_3) u_z - 3B_1 B_3 \omega_{\text{орб}}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Отсюда

$$\dot{V} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = -k_3 (B_1 - 2(B_2 - B_0) \sin \psi_1), & k_3 > 0; \\ u_z = -k_4 ((B_2 - B_0) \cos \psi_1 - 2B_3), & k_4 > 0; \\ u_{\text{max}} > 3|B_1 B_3| \omega_{\text{орб}}^2. \end{cases} \tag{3.4}$$

Отметим важность первого шага управления в плоскости  $Oxz$ , обеспечивающего стремление  $B_1$  и  $B_3$  к нулю. Только по достижении  $B_1$  и  $B_3$  заданной малой окрестности нуля компоненты управления  $u_x$  и  $u_z$  могут быть выбраны таким образом, чтобы независимо от знака последнего слагаемого  $-3B_1 B_3 \omega_{\text{орб}}$  производной функции Ляпунова (3.3) производная была отрицательной.

Чтобы обеспечить  $B_4 = 0$  выбирается функция Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} B_4^2,$$

производная которой имеет следующий вид:

$$\dot{V} = B_4 \dot{B}_4 = -\frac{1}{\omega_{\text{орб}}} B_4 u_y \sin \psi_2.$$

Для выполнения условий теоремы Барбашина-Красовского управление вдоль оси  $Oy$  выбирается следующим

$$\dot{V} < 0 \Leftrightarrow u_y = k_y B_4 \sin \psi_2, \quad k_y > 0 \tag{3.5}$$

Далее, чтобы реализовать построенное управление запишем его в солнечной системе координат. Для этого введём  $\theta$  – угол между нормалью паруса и направлением на Солнце,  $\varphi$  – угол между проекцией нормали паруса на плоскость  $x_s y_s$  солнечной системы координат и осью  $Ox_s$ . Тогда в солнечной системе координат нормаль паруса представима в виде

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

И управление  $\mathbf{u}$  в солнечной системе координат будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u_{x_s} &= 2Af_2 \cos^2 \theta_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1 \cos^2 \theta_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1; \\ u_{y_s} &= 2Af_2 \cos^2 \theta_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1 \cos^2 \theta_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1; \\ u_{z_s} &= A(1 - f_2) \cos \theta_2 - A(1 - f_1) \cos \theta_1 + 2Af_2 \cos^3 \theta_2 - 2Af_1 \cos^3 \theta_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Задачу нахождения углов  $\theta_i$ ,  $\varphi_i$  и интегрального коэффициента засветки паруса  $f_i$ ,  $i=1,2$  целесообразно решать в предположении, когда углы  $\theta_i$ ,  $i=1,2$  малы, так как значительное отклонение от нулевого положения приводит к существенному уменьшению и без того малой величины управляющего воздействия. Таким образом, (3.6) переписется в виде:

$$\begin{aligned} u_{x_s} &= 2Af_2 \theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1 \theta_1 \cos \varphi_1; \\ u_{y_s} &= 2Af_2 \theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1 \theta_1 \sin \varphi_1; \\ u_{z_s} &= A(f_2 - f_1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.7) видно, что  $f_i$ ,  $i=1,2$  полностью определяют величину  $u_{z_s}$ . Так как максимальный момент достигается при  $f_i = \frac{1}{2}$ ,  $i=1,2$ , а при предельных значениях  $f_i$  (0 и 1) момент нулевой,  $f_i$ ,  $i=1,2$  ищутся из решения следующей оптимизационной задачи:

$$\left(f_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(f_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \min \quad (3.8)$$

при условиях

$$\begin{aligned} f_2 - f_1 &= \frac{u_{z_s}}{A}; \\ 0 < f_{\min} \leq f_i \leq f_{\max} < 1, i=1,2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Пояснение причины введения ограничений на  $f_i$  и конкретные значения  $f_{\min}$  и  $f_{\max}$  даются в пункте 3.в. Решение (3.8) с условиями (3.9) во внутренней области имеет вид:

$$f_1 = \frac{1}{2} - \frac{u_{z_s}}{2A};$$

$$f_2 = \frac{1}{2} + \frac{u_{z_s}}{2A}.$$
(3.10)

Оно существует, если выполнено

$$2f_{\min} - 1 \leq \frac{u_{z_s}}{A} \leq 2f_{\max} - 1.$$
(3.10)

Равенства достигаются на границе области. Если условие (3.10) нарушено, то решений нет.

Далее, зная  $f_i$ ,  $i=1,2$ , необходимо из первых двух уравнений системы (3.7) найти  $\theta_i$  и  $\varphi_i$ ,  $i=1,2$  при  $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ .

$$u_{x_s} = 2Af_2\theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \cos \varphi_1;$$

$$u_{y_s} = 2Af_2\theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \sin \varphi_1.$$
(3.11)

Полученная система недоопределенная (два уравнения и четыре неизвестных). Для определения искомых параметров задача решается в два этапа. Сначала ищутся такие значения  $\varphi_i$ ,  $i=1,2$ , которые доставляют максимум функционалу

$$u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2 = (2Af_2\theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \cos \varphi_1)^2 +$$

$$+(2Af_2\theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \sin \varphi_1)^2$$
(3.12)

Это означает, что выбираются такие  $\varphi_i$ ,  $i=1,2$ , которые обеспечивают максимум компоненты силы, перпендикулярной направлению на Солнце. Преобразуем (3.12):

$$u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2 = 4A^2 \left( f_2^2 \theta_2^2 + f_1^2 \theta_1^2 - 2f_1 f_2 \theta_1 \theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right) \xrightarrow{\varphi_i, i=1,2} \max$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1, & \text{если } \theta_1 \theta_2 > 0 \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1, & \text{если } \theta_1 \theta_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \text{ если } \theta_1 \theta_2 > 0 \\ \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \text{ если } \theta_1 \theta_2 < 0 \end{cases}$$

Стоит отметить, что по сути это одна и та же относительная ориентация двух спутников. Далее рассматривается случай  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ . Тогда (3.11) переписывается в виде

$$\begin{aligned} u_{x_s} &= 2A(f_2\theta_2 - f_1\theta_1)\cos\varphi; \\ u_{y_s} &= 2A(f_2\theta_2 - f_1\theta_1)\sin\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{u_{y_s}}{u_{x_s}}; \\ |f_2\theta_2 - f_1\theta_1| &= -\frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A}. \end{aligned}$$

В случае  $u_{x_s} \cos\varphi > 0$

$$f_2\theta_2 - f_1\theta_1 = \frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A}. \quad (3.13)$$

Углы  $\theta_i$ ,  $i=1,2$  будем находить из условия минимизации функционала

$$L = \theta_1^2 + \theta_2^2$$

при условии (3.13). Также необходимо учесть, что  $-\theta_0 \leq \theta_i \leq \theta_0$ ,  $i=1,2$ .

$$\begin{aligned} L &= \theta_1^2 + \frac{1}{f_2^2} \left( \frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A} + f_1\theta_1 \right)^2 = \\ &= \left( 1 + \frac{f_1^2}{f_2^2} \right) \theta_1^2 + 2 \frac{f_1}{f_2^2} \frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A} \theta_1 + \frac{1}{f_2^2} \frac{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}{4A^2} \xrightarrow{\theta_1} \max \\ &\quad \Downarrow \\ \theta_1 &= -\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A} \end{aligned}$$

Тогда из условия (3.13)

$$\theta_2 = \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A}.$$

С учетом ограничений на углы:  $-\theta_0 \leq \theta_i \leq \theta_0$ ,  $i=1,2$  можно получить

$$-\frac{f_i}{f_1^2 + f_2^2} \frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A} \leq \theta_0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A} \leq \theta_0 \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_i}, \quad i=1,2$$

Или с учетом (3.10)

$$-\frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A} \leq \theta_0 \frac{1 + \left(\frac{u_{z_s}}{A}\right)^2}{1 \pm \frac{u_{z_s}}{A}} \quad (3.14)$$

Таким образом, при известных значениях  $u_{x_s}$ ,  $u_{y_s}$  и  $u_{z_s}$  параметры  $\theta_i$ ,  $\varphi_i$  и  $f_i$ ,  $i=1,2$  определяются соотношениями

$$f_1 = \frac{1}{2} - \frac{u_{z_s}}{2A}, \quad f_2 = \frac{1}{2} + \frac{u_{z_s}}{2A};$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi, \quad \text{tg} \varphi = \frac{u_{y_s}}{u_{x_s}}; \quad (3.15)$$

$$\theta_1 = -\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A}, \quad \theta_2 = \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A}$$

Неравенства (3.10) и (3.14) содержат ограничения на компоненты управления, нарушение которых приведёт к отсутствию решения, удовлетворяющего поставленным требованиям. Значит, есть некоторое максимальное значение для компонент управления  $u_{\max}$ . Учитывая это ограничение, выражение для  $u_x$  (3.4) можно переписать

$$u_x = -\text{sign}\left(B_1 - 2(B_2 - B_0)\sin\psi_1\right)u_{\max}. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) будет иметь место в случае, если  $(B_1 - 2(B_2 - B_0)\sin\psi_1)$  лежит вне некоторой окрестности нуля. В случае, когда  $(B_1 - 2(B_2 - B_0)\sin\psi_1)$  лежит в окрестности нуля, функция  $\text{sign}$  будет вызывать резкие скачки управления. Во избежание этого выражение для компоненты управления  $u_x$  в малой окрестности нуля запишем

$$u_x = -\left(B_1 - 2(B_2 - B_0)\sin\psi_1\right)u_{\max}. \quad (3.17)$$

Аналогично поступаем с другими компонентами управления.

При этом необходимо учитывать, что соотношения (3.15) содержат компоненты требуемого управления в солнечной системе координат, а (3.16) и (3.17) – в орбитальной системе координат, поэтому на этапе моделирования нужно осуществлять переход между этими системами координат с помощью матриц  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{S}_{\text{sun}}$ .

### ***б. Управление угловым движением***

Введём опорную систему координат – систему координат, устроенную аналогично ССК, но описывающую не реальное, а желаемое движение КА. Чтобы обеспечить требуемую ориентацию нормали паруса, необходимо совместить третью ось связанной системы координат  $O\zeta$  с третьей осью опорной системы координат и обеспечить равенство нулю первых двух компонент угловой скорости ССК относительно опорной системы координат –  $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}$ . За  $\mathbf{n}$  обозначим нормаль паруса в ИСК. Задача управления – найти такой управляющий момент  $\mathbf{M}_{\text{упр}}$ , который обеспечит желаемое угловое движение. Для этого рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \left( J_{\xi} \omega_{\text{отн},1}^2 + J_{\eta} \omega_{\text{отн},2}^2 \right) + k_a \left( 1 - \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \mathbf{Bn} \right) \right),$$

где  $J_{\xi}$  и  $J_{\eta}$  – первые два осевые моменты инерции,  $\omega_{\text{отн},1}$  и  $\omega_{\text{отн},2}$  – первые две компоненты угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}$ ,  $k_a$  – положительный параметр.

Производная функции Ляпунова

$$\dot{V} = J_{\xi} \omega_{\text{отн},1} \dot{\omega}_{\text{отн},1} + J_{\eta} \omega_{\text{отн},2} \dot{\omega}_{\text{отн},2} - k_a \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \dot{\mathbf{Bn}} \right).$$

Далее полагается, что  $\left( \omega_{\text{отн},1} \quad \omega_{\text{отн},2} \right)^T = \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}$ ,  $\begin{pmatrix} J_{\xi} & 0 \\ 0 & J_{\eta} \end{pmatrix} = \mathbf{J}$ . Преобразуем

$\dot{\mathbf{Bn}}$ . Для этого введём обозначение:

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для введённого обозначения выполнено

$$\dot{\mathbf{B}} = -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{B}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Bn}} &= \dot{\mathbf{B}}\mathbf{n} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{n}} = -[\boldsymbol{\omega}]_x \mathbf{Bn} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{n}) = -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{Bn}) + \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{Bn}) = \\ &= (-\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}_0) \times (\mathbf{Bn}) = -\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} \times (\mathbf{Bn}),\end{aligned}$$

где за  $\boldsymbol{\omega}_0$  обозначена угловая скорость опорной системы координат относительно ИСК.

Тогда производная функции Ляпунова запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= J_\xi \boldsymbol{\omega}_{\text{отн},1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн},1} + J_\eta \boldsymbol{\omega}_{\text{отн},2} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн},2} - k_a \left( (0 \ 0 \ 1)^T, -\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} \times (\mathbf{Bn}) \right) = \\ &= (\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}}) + k_a \left( \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}, (\mathbf{Bn}) \times (0 \ 0 \ 1)^T \right) = (\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} + k_a \mathbf{Bn} \times (0 \ 0 \ 1)^T).\end{aligned}$$

Для выполнения условия  $\dot{V} < 0$  потребуем

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} + k_a \mathbf{Bn} \times (0 \ 0 \ 1)^T = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}},$$

где  $k_\omega > 0$ . Используя динамические уравнения Эйлера (2.1), для первых двух компонент управляющего момента  $\mathbf{M}_{\text{упр}}$  получим (сохраним обозначение для первых двух компонент управляющего момента)

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\text{упр}} &= \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_{\text{внешн}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} + \mathbf{J}\mathbf{B}\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_{\text{внешн}} = \\ &= -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} - k_a \mathbf{Bn} \times (0 \ 0 \ 1)^T + \mathbf{J}\dot{\mathbf{B}}\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{J}\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_{\text{внешн}} = \\ &= -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} - k_a \mathbf{Bn} \times (0 \ 0 \ 1)^T + \mathbf{J}(-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B})\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{J}\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_{\text{внешн}}.\end{aligned}$$

Полученные компоненты управляющего момента в совокупности с интегральным коэффициентом отражения будут определять функцию переменной отражательной способности паруса  $\alpha$ .

Далее покажем, что одна из трёх компонент управляющего момента определяется двумя другими, то есть имеются только две независимые компоненты управления угловым движением.

Сила давления солнечного излучения, действующая на площадку площади  $dS$ ,

$$d\mathbf{F}_s = -\frac{\Phi_0}{c}(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) \left( (1 - \alpha)\mathbf{r}_s + 2\alpha(\mathbf{r}_s, \mathbf{n})\mathbf{n} \right) dS.$$

Пусть нормаль к парусу и направление на Солнце неколлинеарны и пусть угол  $\beta$  – угол между проекцией вектора  $\mathbf{r}_s$  на плоскость паруса и осью  $O\xi$  связанной системы координат. Тогда в этой системе координат

единичный вектор направления от Солнца к парусу  $\mathbf{r}_s = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \beta \\ \sin \theta \sin \beta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$ ,

нормаль к парусу  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . В проекциях на оси связанной системы координат

получим

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_s &= -\frac{\Phi_0}{c}(-\cos \theta) \left( (1-\alpha) \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \beta \\ \sin \theta \sin \beta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} + 2\alpha(-\cos \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) dS = \\ &= \frac{\Phi_0}{c} \cos \theta \begin{pmatrix} (1-\alpha) \sin \theta \cos \beta \\ (1-\alpha) \sin \theta \sin \beta \\ (1+\alpha)(-\cos \theta) \end{pmatrix} dS. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Покажем, что третья компонента момента силы давления солнечного излучения  $M_\zeta$  может быть выражена через первые две компоненты  $M_\xi$  и  $M_\eta$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s &= \int_S \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_s = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\Phi_0}{c} \cos \theta \begin{pmatrix} \eta(1+\alpha)(-\cos \theta) \\ -\xi(1+\alpha)(-\cos \theta) \\ \xi(1-\alpha) \sin \theta \sin \beta - \eta(1-\alpha) \sin \theta \cos \beta \end{pmatrix} d\xi d\eta = \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\Phi_0}{c} \cos \theta \begin{pmatrix} \eta\alpha(-\cos \theta) \\ -\xi\alpha(-\cos \theta) \\ -\xi\alpha \sin \theta \sin \beta + \eta\alpha \sin \theta \cos \beta \end{pmatrix} d\xi d\eta = \\ &= \frac{\Phi_0}{c} \cos \theta \begin{pmatrix} -\cos \theta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \eta\alpha d\xi d\eta \\ -\cos \theta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} -\xi\alpha d\xi d\eta \\ \sin \theta \sin \beta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} -\xi\alpha d\xi d\eta + \sin \theta \cos \beta \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \eta\alpha d\xi d\eta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Обозначив

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \eta \alpha d\xi d\eta = P$$

и

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} -\xi \alpha d\xi d\eta = Q,$$

получим

$$\mathbf{M}_s = \frac{\Phi_0}{c} \cos \theta \begin{pmatrix} -P \cos \theta \\ -Q \cos \theta \\ Q \sin \theta \sin \beta + P \sin \theta \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{pmatrix}$$

Получаем, что  $M_\zeta \cos \theta = -\sin \theta (M_\eta \sin \beta + M_\xi \cos \beta)$ .

Пусть теперь вектор направления на Солнце и нормаль к парусу коллинеарны. Тогда в ССК единичный вектор направления от Солнца к парусу  $\mathbf{r}_s = (0 \ 0 \ \pm 1)^T$ , нормаль к парусу –  $\mathbf{n} = (0 \ 0 \ 1)^T$ . Тогда

$$d\mathbf{F}_s = -\frac{\Phi_0}{c} (\pm 1) \left( (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} + 2\alpha (\pm 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) dS = -\frac{\Phi_0}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+\alpha \end{pmatrix} dS.$$

Момент

$$\mathbf{M}_s = \int_S \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_s = \frac{\Phi_0}{c} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \begin{pmatrix} -\eta(1+\alpha) \\ \xi(1+\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} d\xi d\eta = \frac{\Phi_0}{c} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \begin{pmatrix} -\eta\alpha \\ \xi\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\xi d\eta = \frac{\Phi_0}{c} \begin{pmatrix} -P \\ -Q \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, показано, что третья компонента момента силы давления солнечного излучения – управляющего момента – либо равна нулю, либо определяется первыми двумя компонентами.

### ***в. Реализация управления***

Далее решается задача выбора функции переменной отражательной способности паруса  $\alpha$ , обеспечивающей полученные значения

интегрального коэффициента отражения  $f$  и двух компонент управляющего момента  $M_\xi, M_\eta$ .

Рассмотрим квадратный парус со стороной  $a$ . Разобьём его поверхность на  $n^2$  квадратных сегментов по  $n$  вдоль каждой стороны паруса, для простоты будем считать, что  $n$  – чётное. И пусть каждый сегмент может менять оптические свойства: либо полностью отражать, когда  $\alpha=1$ , либо полностью поглощать солнечное излучение, когда  $\alpha=0$ . Совокупность выбранных значений  $\alpha$  для каждого сегмента паруса образует последовательность нулей и единиц, которую будем называть засветкой паруса. Опишем алгоритм выбора засветки паруса, обеспечивающей требуемые значения компонент момента  $M_\xi, M_\eta$  и интегрального коэффициента отражения  $f$ .

Сначала рассмотрим парус и определим область достижимых значений первых двух компонент момента силы давления солнечного излучения.

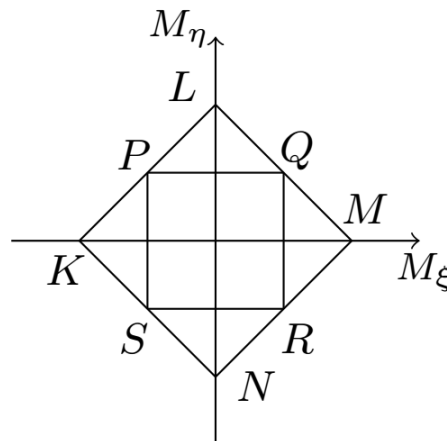


Рисунок 4 – Область возможных моментов KLMN.

На рисунке 4 изображена область моментов, реализуемых всевозможными засветками паруса, – ромб KLMN, точка  $M(M_{\max}, 0)$ . Изобразим также квадрат PQRS, с центром в начале координат, со сторонами, параллельными координатным осям, равными максимальному значению момента  $M_{\max}$ . В случае, когда пара чисел  $(M_\xi, M_\eta)$  лежит внутри ромба KLMN, но вне квадрата PQRS, область достижимых моментов по одной из компонент зависит от другой компоненты. Для того чтобы сделать обе компоненты момента независимыми, ограничим каждую компоненту половиной максимального значения. Это значит, что в случае, когда какая-то компонента требуемого управляющего момента превышает введённое

ограничение  $\frac{M_{\max}}{2}$ , производится обрезка этой компоненты. Тогда каждая компонента будет лежать в допустимой области. Далее опишем алгоритм получения любого из таких моментов.

Пусть каждый сегмент паруса имеет  $\alpha = 0$ , солнечное излучение полностью поглощается парусом. Момент будем создавать областью, а именно прямоугольником, центр которого расположен на стороне квадрата с центром в центре паруса и стороной, равной половине стороны паруса (Рис. 5).

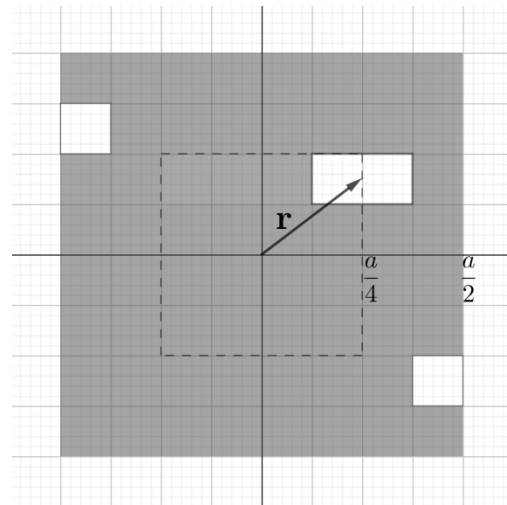


Рисунок 5 – Выбор засветки паруса.

1. Первым шагом находим центр этого прямоугольника.

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_s = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{s,\xi} \\ F_{s,\eta} \\ F_{s,\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta F_{s,\zeta} \\ -\xi F_{s,\zeta} \\ \xi F_{s,\eta} - \eta F_{s,\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

где  $\mathbf{r} = (\xi \ \eta \ 0)^T$  – радиус-вектор центра области. Тогда центр области находим из следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{\xi}{\eta} = -\frac{M_\eta}{M_\xi}; \\ \xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2; \\ \text{sign}(\eta) = -\text{sign}(M_\xi). \end{cases}$$

Последнее условие является следствием (3.19) и (3.18).

2. Далее находим площадь прямоугольника  $S_{\text{пр}}$ . Для этого проинтегрируем третью компоненту силы давления солнечного излучения в ССК (3.18):

$$F_{s,\zeta} = \frac{\Phi_0}{c} (-\cos^2 \theta) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (1 + \alpha(\xi, \eta)) d\xi d\eta = \frac{\Phi_0}{c} (-\cos^2 \theta) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \alpha(\xi, \eta) d\xi d\eta =$$

$$= \frac{\Phi_0}{c} (-\cos^2 \theta) S_{\text{пр}},$$

которую найдём из системы

$$\begin{cases} M_{\xi}^2 + M_{\eta}^2 = (\xi^2 + \eta^2) F_{s,\zeta}^2; \\ \text{sign}(F_{s,\zeta}) = -1. \end{cases}$$

Прямоугольник неоднозначно определяется координатами центра и площадью. И более того, в нашей постановке задачи (переменная отражательная способность достигается изменением отражательной способности сегментов) стороны этого прямоугольника должны совпадать со сторонами сегментов. Рассмотрим алгоритм действий в разных случаях.

1. Если  $\left(\frac{a}{n}\right)^2 \leq S_{\text{пр}} \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2$  (площадь прямоугольника не может превышать четверти паруса, т.к. требуемый момент был обрезан), выбираем количество сегментов  $A$  и  $B$  вдоль каждой стороны прямоугольника из условия

$$\left( \frac{S_{\text{пр}} n^2}{a^2} - AB \right) \xrightarrow{A, B \in \mathbb{N}} 0.$$

Для того чтобы засветить прямоугольник с  $A$  сегментами вдоль горизонтальной стороны и  $B$  сегментами вдоль вертикальной стороны, необходимо сместить центр этого прямоугольника из точки  $(\xi \ \eta \ 0)^T$  в точку  $(\xi_1 \ \eta_1 \ 0)^T$ , обладающую следующими свойствами:

- а. Если  $A$  – чётное, то  $\xi_1 = \frac{a}{n} k, k \in \mathbb{N}_0$ , где

$$k : \left( \frac{a}{n} k - \xi \right) \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_0} \min ;$$

б. Если  $A$  – нечётное, то  $\xi_1 = \frac{a}{2n}k$ ,  $k$  – нечётное и

$$k: \left( \frac{a}{2n}k - \eta \right) \xrightarrow{k-\text{нечётное}} \min.$$

Аналогичная связь выполнена для  $\eta_1$  и  $B$ .

2. Пусть теперь  $S_{\text{пр}} < \left( \frac{a}{n} \right)^2$ , т.е. меньше площади одного сегмента.

Рассмотрим два варианта: а)  $S_{\text{пр}} = 0$  и б)  $S_{\text{пр}} = \left( \frac{a}{n} \right)^2$  – и выберем тот, при

котором момент силы давления солнечного излучения получится ближе к требуемому.

а)  $S_{\text{пр}} = 0$ . Тогда момент будет нулевым  $\mathbf{M}_s = (0 \ 0 \ 0)^T$ .

б)  $S_{\text{пр}} = \left( \frac{a}{n} \right)^2$ . В этом случае сместим центр области из точки

$$\left( \xi \ \eta \ 0 \right)^T \quad \text{в} \quad \text{точку} \quad \left( \frac{\xi}{k} \ \frac{\eta}{k} \ 0 \right)^T, \quad \text{где}$$

$$k: |F_\xi| \cdot k \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{M_\xi^2 + M_\eta^2}.$$

Таким образом, описан алгоритм построения прямоугольника, который обеспечивает требуемые компоненты момента  $M_\xi$ ,  $M_\eta$  и каждый сегмент которого имеет  $\alpha = 1$ . Остаётся поменять засветку паруса таким образом, чтобы не изменить момент, но при этом скорректировать интегральный коэффициент отражения. Для этого распишем по определению интегральный коэффициент отражения

$$f = \frac{\int \alpha dS}{S} = \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \alpha(\xi, \eta) d\xi d\eta}{S} = \frac{N_{\text{треб}} \left( \frac{a}{n} \right)^2}{a^2} = \frac{N_{\text{треб}}}{n^2},$$

где  $[N_{\text{треб}}]$  – число сегментов, которые должны иметь  $\alpha = 1$ , которое всюду далее будем обозначать  $N_{\text{треб}}$ . На данный момент известно, что у  $N$  сегментов  $\alpha = 1$ . Возможны три варианта.

1.  $N_{\text{треб}} = N$ . Это означает, что засветка уже такая, как требовалось (момент достигнут, интегральный коэффициент получился требуемым).
2.  $N_{\text{треб}} < N$ . Для того чтобы  $N_{\text{треб}} < N$ , необходимо, чтобы

$$N_{\text{треб}} < \frac{1}{4}n^2$$

$$\Downarrow$$

$$f < \frac{1}{4}$$

Для того чтобы данная ситуация была неосуществима, введём ограничение на  $f_i$ :  $f_{\min} = 0.25$ .

3.  $N_{\text{треб}} > N$ , где

$$N : \frac{AB}{a^2} = \frac{N}{n^2}$$

$$\Downarrow$$

$$N = \frac{ABn^2}{a^2}$$

Поэтому у  $N_{\text{треб}} - N$  сегментов необходимо сменить  $\alpha$  с 0 на 1. Для того чтобы к засветке добавить сегменты с  $\alpha = 1$ , не поменяв момент, будем добавлять сегменты, симметричные относительно центра паруса: такие сегменты в совокупности дают первые две компоненты момента равными 0. Чтобы избежать ситуации добавления сегментов, симметричных тем, которые создают момент, достаточно, чтобы

$$N_{\text{треб}} - N < \frac{1}{2}n^2$$

или

$$N_{\text{треб}} < \frac{3}{4}n^2.$$

Для этого введём ограничение на  $f_i$ :  $f_{\max} = 0.75$ . Если требовалось добавить нечётное количество сегментов, то либо будет добавлен один лишний сегмент, либо один сегмент останется не добавленным.

## 4. Численное моделирование

Численное моделирование и оценки, приведённые в настоящей главе, если не указано иное, проводились при следующих начальных данных и параметрах КА:

параметры орбиты ведущего КА:  $R_{\text{орб}} = 9000$  км;

$$e = 0;$$

$$\Omega = 0^\circ;$$

$$\omega = 0^\circ;$$

$$i = 109.32^\circ;$$

эклиптическая долгота Солнца  $\lambda = 0^\circ$ ;

начальная относительная орбита:  $\mathbf{r}_{\text{отн}} = (200 \ 100 \ 50)$  м;

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = (0.05 \ 0.5 \ 1) \text{ м/с};$$

масса КА:  $m = 10$  кг;

размер паруса:  $5 \times 5$  м;

тензор инерции:  $\mathbf{J} = \text{diag}(2.1 \ 2.1 \ 3.8)$  кг·м<sup>2</sup>;

начальная угловая скорость:  $\boldsymbol{\omega}_1 = (0.005 \ 0.003 \ 0.001)$  рад/с;

$$\boldsymbol{\omega}_2 = (0.001 \ 0.003 \ 0.002) \text{ рад/с}$$

ориентация нормали паруса:  $\theta_1 = 10^\circ$ ;

$$\theta_2 = 10^\circ$$

параметры управления:  $k_1 = k_3 = k_4 = 20$ ,  $k_2 = 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ ,  $k_y = 10 \text{ с}^{-1}$ ;

$$k_\omega = 0.02 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, k_a = 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м};$$

максимальное значение управления:  $u_{\text{max}} = 10^{-6}$  Н;

максимальное значение момента:  $M = 3 \cdot 10^{-5}$  Н·м;

разбиение паруса:  $50 \times 50$  сегментов;

малая полуось желаемой относительной орбиты:  $B_0 = 150$  м;

$$\theta_0 = 10^\circ.$$

Параметры управления  $k_i, i=\overline{1,4}$  и  $k_y$  выбирались из ограничения на максимальное значение управления  $u_{\max}$ . Параметры  $k_\omega$  и  $k_a$  подбирались для удовлетворения условия на максимальное значение момента силы давления солнечного излучения.

Решение задачи строилось на основе системы уравнений ХКУ, которые, в свою очередь, получались линеаризацией уравнений орбитального движения аппаратов. Это приводит к ограничениям на область начальных данных для относительного расстояния, при которых описанный алгоритм управления работает. Для оценки максимальных значений компонент вектора относительного расстояния рассмотрим случай нулевой угловой скорости КА, «идеальной» ориентации (нормаль каждого паруса направлена на Солнце), отсутствия дрейфа и нулевой относительной скорости за исключением первой компоненты, которую будем выбирать из условия равенства дрейфа нулю.

$$\begin{aligned} \theta_1 = 0^\circ \quad \omega_1 = 0 \text{ рад/с} \quad (\mathbf{v}_{\text{отн}})_{y,z} = 0 \text{ м/с} \\ \theta_2 = 0^\circ \quad \omega_2 = 0 \text{ рад/с} \quad (\mathbf{v}_{\text{отн}})_x = -2\omega_{\text{орб}} (\mathbf{r}_{\text{отн}})_z \end{aligned} \quad (4.1)$$

Путь две компоненты вектора относительного расстояния равны нулю. Ниже приведены оценки максимального значения оставшейся компоненты для каждого из трёх возможных случаев:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_{\text{отн}})_x &= 47 \text{ км;} \\ (\mathbf{r}_{\text{отн}})_y &= 10 \text{ км;} \\ (\mathbf{r}_{\text{отн}})_z &= 3 \text{ км.} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если хоть одна из компонент относительного расстояния при условии (4.1) превышает значения (4.2), указанный алгоритм работать не будет.

Выше был рассмотрен случай нулевых угловых скоростей, нулевого угла между нормалью паруса и направлением на Солнце («идеальной» ориентации), нулевого дрейфа и нулевых двух компонент относительной скорости. В худшем случае каждый упомянутый параметр не равен нулю. Далее опишем способ определения допустимой начальной области для некоторых параметров. Пусть начальные значения параметров следующие:



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_0; \\
\theta &\neq \theta_0 \quad (|\theta_0| \leq 10^\circ); \\
(\mathbf{v}_{\text{отн}})_{x,0} &\neq -2\omega_{\text{орб}} (\mathbf{r}_{\text{отн}})_{z,0} \quad (\text{ненулевой дрейф}); \\
(\mathbf{v}_{\text{отн}})_{y,0}, (\mathbf{v}_{\text{отн}})_{z,0} &\neq 0.
\end{aligned}$$

Оценим, за какое время возможно достичь  $\boldsymbol{\omega} = (0 \ 0 \ \omega_\zeta)$ . Далее – время, за которое можно свести дрейф к нулю. Если после таких действий относительное расстояние по какой-либо компоненте превышает (4.2), то алгоритм работать не будет.

Пусть угловая скорость имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_{\xi,0} \ 0 \ \omega_\zeta)^\top,$$

где  $\omega_{\xi,0} \neq 0$ . Тогда первое уравнение динамических уравнений Эйлера (2.1) примет вид

$$\begin{aligned}
J_\xi \dot{\omega}_\xi &= (M_{\text{упр}})_\xi \\
&\Downarrow \\
-J_\xi \omega_{\xi,0} &= -\frac{\Phi_0}{c} \cos^2 \theta \left( \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \eta \alpha d\xi d\eta \right) t \\
&\Downarrow \\
t &= \frac{J_\xi \omega_{\xi,0}}{\frac{\Phi_0}{c} \cos^2 \theta \left( \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \eta \alpha d\xi d\eta \right)} \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Отсюда

$$t = t_{\min} \Leftrightarrow \left| \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \eta \alpha d\xi d\eta \right| \rightarrow \max \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \eta \leq \frac{a}{2}, & \text{если } \omega_{\xi,0} > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \\ \alpha(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\frac{a}{2} \leq \eta \leq 0, & \text{если } \omega_{\xi,0} < 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \end{cases}$$

Тогда

$$t_{\min} = \frac{J_{\xi} \omega_{\xi,0}}{\frac{\Phi_0}{c} \frac{a^3}{8} \cos^2 \theta}.$$

Для начальных данных первого спутника и  $\theta = 0^\circ$  получаем

$$t_{\min} \approx 150 \text{ с.}$$

Таким образом, (4.3) даёт оценку на время, необходимое для того, чтобы демпфировать первую компоненту угловой скорости. Аналогично получается оценка на время, необходимое для второй компоненты. Из первого уравнения (2.4) получаем оценку изменения относительного расстояния между КА:

$$\Delta(a_0 \theta_r) = -3B_1 \omega_{\text{орб}} t.$$

Далее, оценим время, за которое возможно свести дрейф к нулю. Для этого воспользуемся первым уравнением системы (2.8) и первым уравнением системы (2.4):

$$\begin{cases} a_0 \dot{\theta}_r = -3B_1 \omega_{\text{орб}}; \\ \dot{B}_1 = \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} u_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 \dot{\theta}_r = -3B_1 \omega_{\text{орб}}; \\ B_1 = \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} (\pm u_{\max}) t + B_{1,0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 \dot{\theta}_r = -3 \left( \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} (\pm u_{\max}) t + B_{1,0} \right) \omega_{\text{орб}}; \\ B_1 = \frac{1}{\omega_{\text{орб}}} (\pm u_{\max}) t + B_{1,0} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\Delta(a_0\theta_r) &= -3\omega_{\text{орб}} \left( \frac{(\pm u_{\text{max}}) t^2}{\omega_{\text{орб}} 2} + B_{1,0} t \right) \Big|_{t:B_1(t)=0} = \\
&= -3\omega_{\text{орб}} \left( \frac{(\pm u_{\text{max}}) \left( \frac{-B_{1,0}\omega_{\text{орб}}}{\pm u_{\text{max}}} \right)^2}{\omega_{\text{орб}} 2} + B_{1,0} \left( \frac{-B_{1,0}\omega_{\text{орб}}}{\pm u_{\text{max}}} \right) \right) = \\
&= -3\omega_{\text{орб}} \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{B_{1,0}^2 \omega_{\text{орб}}}{u_{\text{max}}}, & \text{если } B_{1,0} > 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{B_{1,0}^2 \omega_{\text{орб}}}{u_{\text{max}}}, & \text{если } B_{1,0} < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Для указанных начальных данных получаем

$$t_{\min} \approx 1.2 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 15 \text{ периодов}$$

и

$$\Delta(a_0\theta_r) \approx -2.3 \cdot 10^4 \text{ м.}$$

После этого рассчитывается относительное расстояние между спутниками. В случае если хотя бы одна из компонент относительного расстояния превысила по модулю значения, указанные в (4.2), алгоритм работать не будет.

Далее приведём пример численного моделирования. Проследим работу алгоритма. Первым шагом алгоритма является задача сведения  $B_1$  и  $B_3$  к нулю. На рисунке 6 видно, что между 20 и 60 витками значение параметра  $B_1$  равно  $-20$ . Отрицательная скорость дрейфа способствует более быстрому сведению параметра  $B_3$  к нулю.

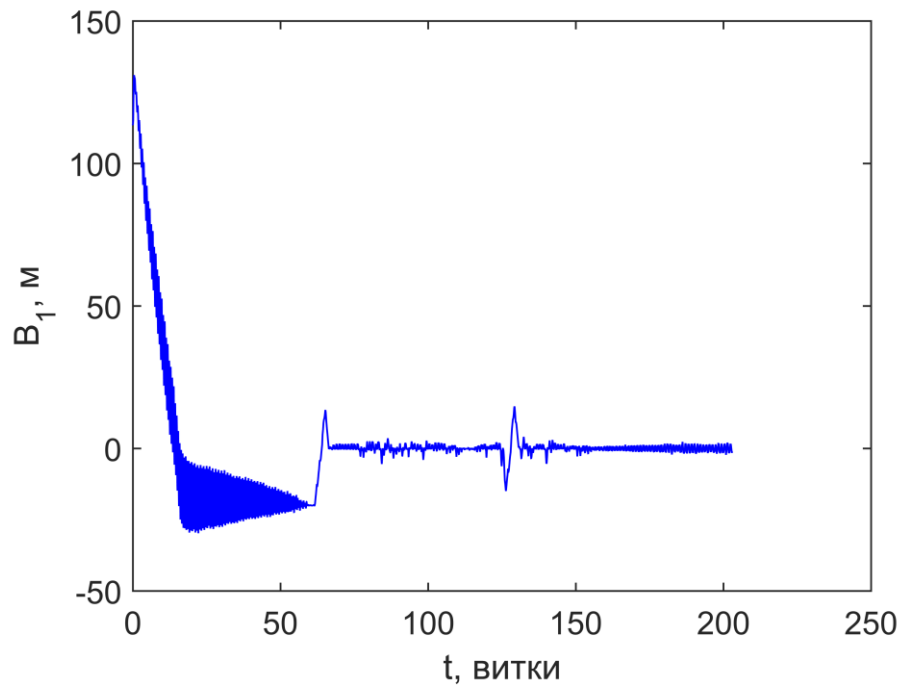


Рисунок 6 – Эволюция параметра  $B_1$  в зависимости от времени.

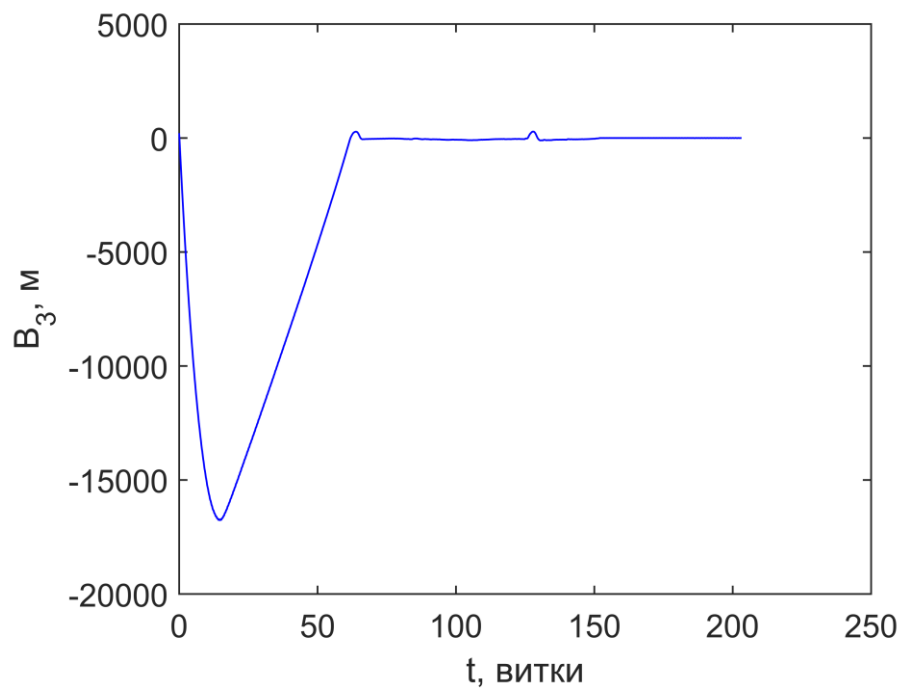


Рисунок 7 – Эволюция параметра  $B_3$  в зависимости от времени.

По достижении этих параметров заданной окрестности нуля, включается следующий этап – корректировка размеров орбиты  $B_2$ . Параллельно с этим этапом сводится к нулю амплитуда орбиты вдоль нормали к плоскости орбиты ведущего КА –  $B_4$ .

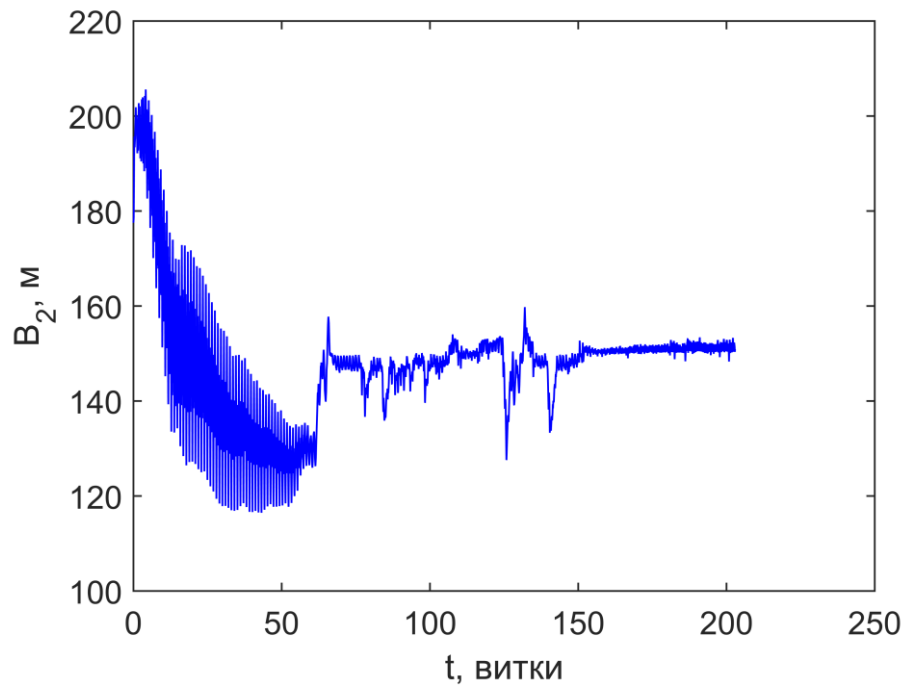


Рисунок 8 – Эволюция размера орбиты в зависимости от времени.

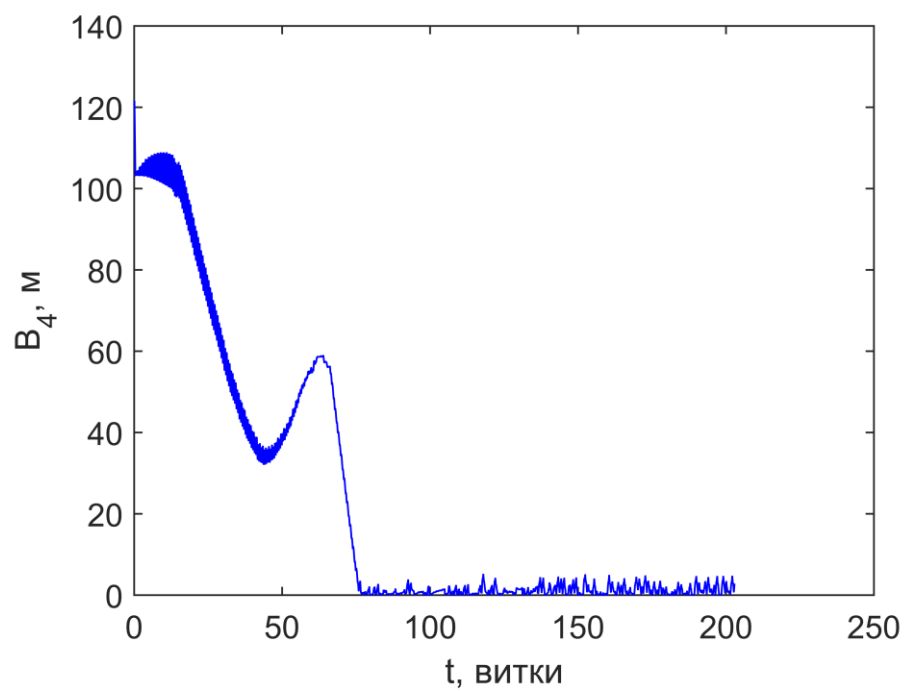


Рисунок 9 – Эволюция параметра  $B_4$  в зависимости от времени.

На рисунке 10 представлен график эволюции интегрального коэффициента отражения  $f$  для первого КА в зависимости от времени. Видно, что  $f$  не выходит за границы допустимой области.

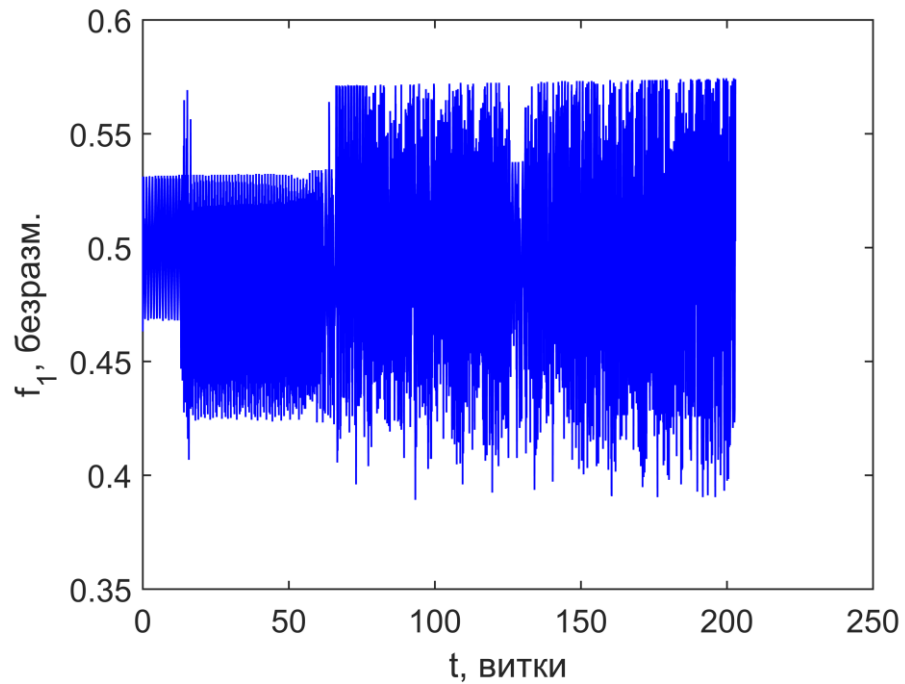


Рисунок 10 – Эволюция интегрального коэффициента отражения первого паруса в зависимости от времени.

На рисунке 11 изображена эволюция первой компоненты момента силы давления солнечного излучения для первого паруса. Отметим, что большую часть времени работы алгоритма рассматриваемая компонента момента по модулю равна максимальному значению. Вторая компонента момента силы давления солнечного излучения ведёт себя аналогично.

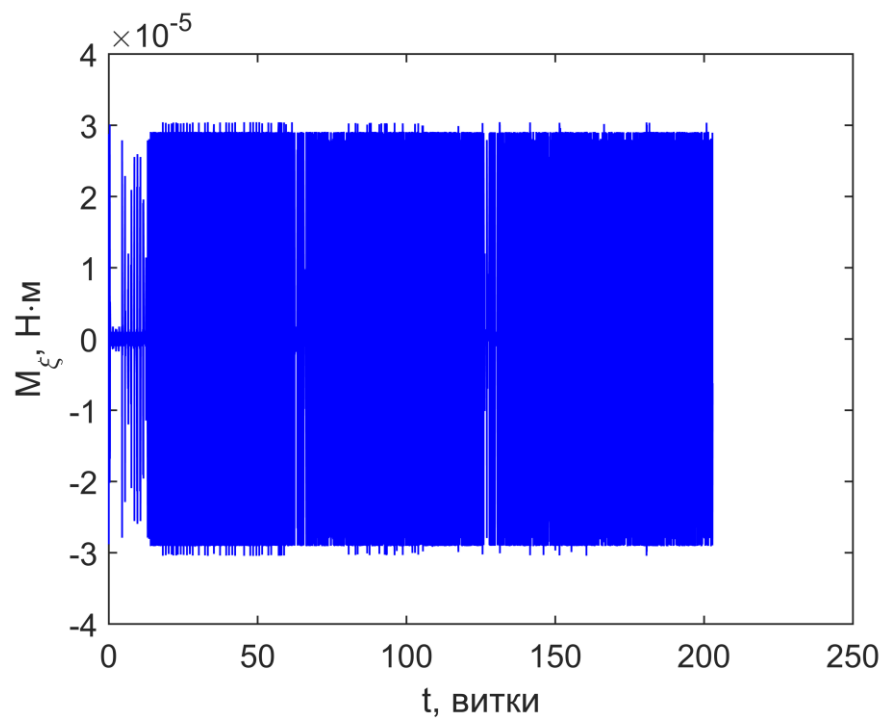


Рисунок 11 – Эволюция первой компоненты момента силы давления солнечного излучения в зависимости от времени для первого паруса.

На рисунке 12 изображена итоговая относительная орбита двух КА в плоскости  $Oxz$ . Она представляет собой эллипс с малой полуосью, равной 150 м, и большой полуосью, равной удвоенной малой полуоси.

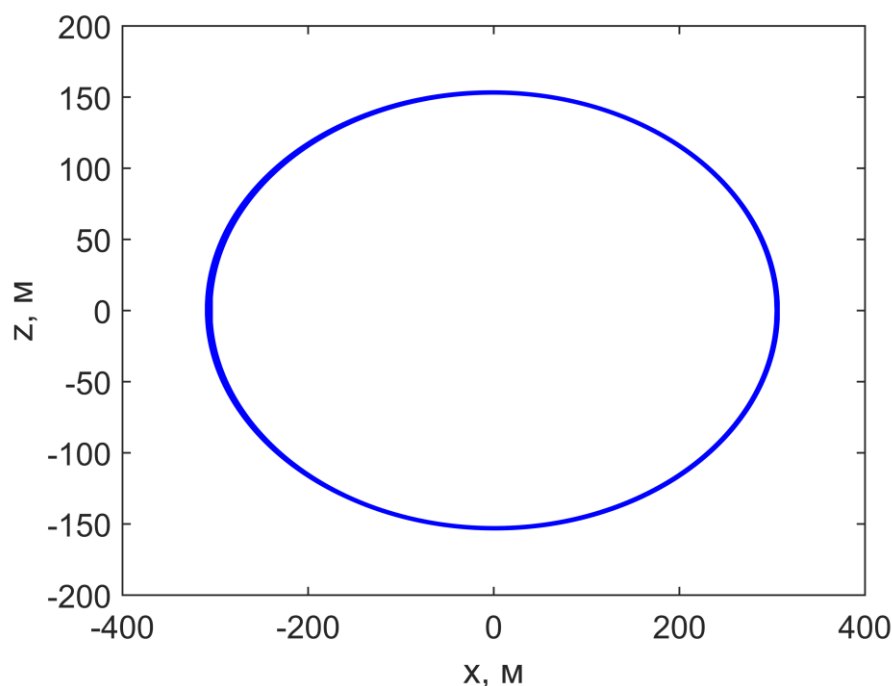


Рисунок 12 – Результирующая относительная орбита в плоскости  $Oxz$ .

## Заключение

В работе предложена и реализована схема управления относительным движением двух спутников с использованием солнечных парусов. Приведена оценка допустимой области начальных данных для компонент относительного расстояния, времени, необходимого для демпфирования угловой скорости и сведения дрейфа к нулю. Рассмотрен пример работы алгоритма на выбранных данных. Показано, что управление орбитальным и угловым движением возможно с использованием только солнечного паруса.

## Литература

- [1] Alfriend, K. et al. *Spacecraft Formation Flying. Dynamics, Control and Navigation*, 402 p.
- [2] Zink, M. et al. *The TanDEM-X mission: Overview and status*, International Geoscience and Remote Sensing Symposium 2007, May, 2014, pp. 3944-3947.
- [3] Leonard, C.L. *Orbital Formationkeeping with Differential Drag*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1989, Vol. 12, № 1, pp. 108–113.
- [4] Kumar, B.S., Ng, A. *A bang-bang control approach to maneuver spacecraft in a formation with differential drag*, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, August 18-21, 2008, pp. 1–11.
- [5] Shahid, K., Kumar, K.D. *Multiple spacecraft formation reconfiguration*



- using solar radiation pressure*, Acta Astronautica, 2014, Vol. 103, pp. 269-281.
- [6] Gong, S., Baoyin, H., and Li, J. *Solar Sail Formation Flying Around Displaced Solar Orbits*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, Vol. 30, No 4, pp. 1147-1151.
- [7] Shahid, K., Kumar K.D. *Formation Control at the Sun – Earth  $L_2$  Libration Point Using Solar Radiation Pressure*, Journal of Spacecraft and Rockets, 2010, Vol. 47, No 4, pp. 614–626.
- [8] Gong, S., Yunfeng, G., Li, J. *Solar sail formation flying on an inclined Earth orbit*, Acta Astronautica, 2011, Vol. 68, No 68, pp. 226–239.
- [9] Wie, B., Barba, P.M. *Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1985, Vol. 8, No 3.
- [10] Wie, B. *Solar Sail Attitude Control and Dynamics, Part 1*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2004, Vol. 27, No 4, pp. 526–535.
- [11] Малкин И.Г. *Теория устойчивости движения*. М.:УРСС, 2004. 530 с.