



«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Физтех-школа прикладной математики и информатики

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Управление относительным движением двух космических аппаратов с солнечными парусами с изменяемыми оптическими свойствами

(магистерская диссертация)

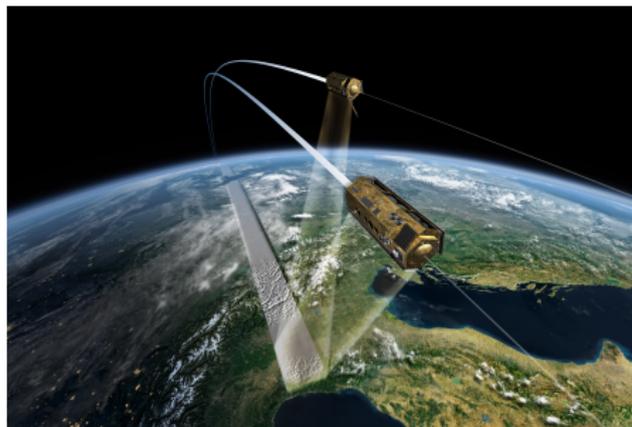
Студент: Петрова Т.Ю.

Научный руководитель: к.ф.-м.н. доцент Ткачев С.С.

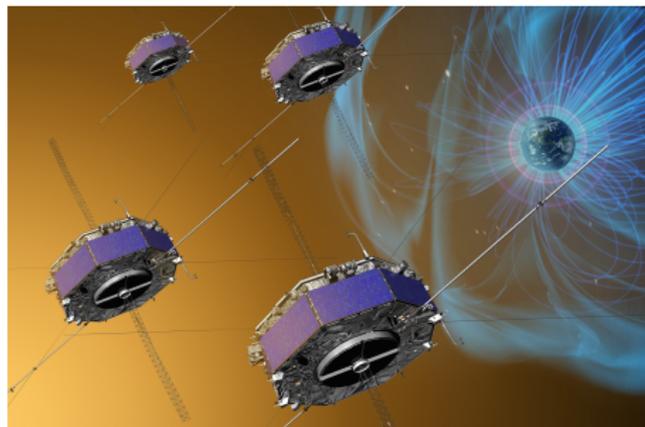
Содержание

- Введение
- Постановка задачи и системы координат
- Уравнения движения
- Синтез управления
 - Управление относительным движением
 - Управление угловым движением
 - Реализация управления
- Численный пример
- Заключение

Введение. Спутниковые формации



TanDEM-X



Magnetospheric Multiscale
Mission

Введение. Управление формацией

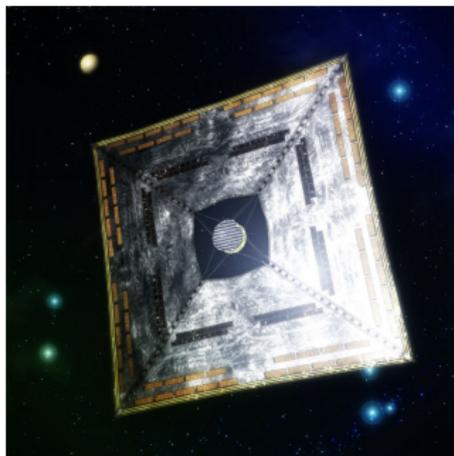
Способы управления формацией:

- с затратами топлива;
- бестопливные:
 - аэродинамическая сила (Kumar, Leonard);
 - сила давления солнечного излучения (Gong, Shahid);
 - электромагнитное взаимодействие (Schaub) и др.

Введение. Управление формацией

Способы управления формацией:

- с затратами топлива;
- бестопливные:
 - аэродинамическая сила (Kumar, Leonard);
 - сила давления солнечного излучения (Gong, Shahid);
 - электромагнитное взаимодействие (Schaub) и др.



IKAROS

Постановка задачи

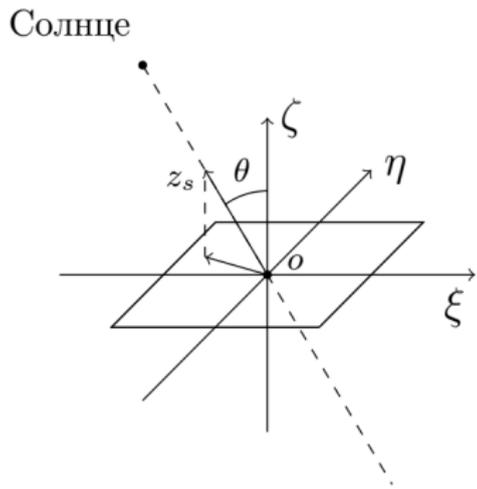
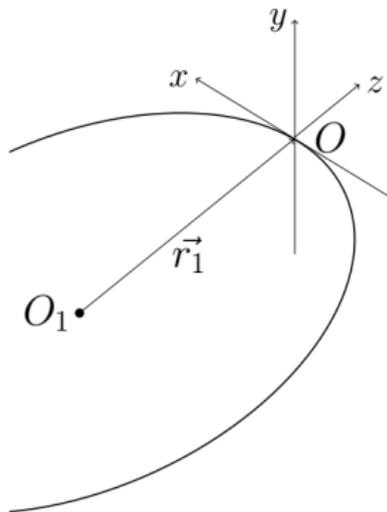
Задача: приведение формации из двух космических аппаратов на заданную относительную орбиту и поддержание их на ней.

Управление: солнечные паруса с изменяемым коэффициентом отражения.

Предположения: начальная орбита ведущего аппарата круговая. Спутники двигаются под действием давления солнечного излучения и возмущения от гармоника J_2 .

Системы координат

- Инерциальная геоцентрическая система координат O_1XYZ
- Орбитальная система координат $Oxyz$
- Связанная система координат $O\xi\eta\zeta$; ИСК $\xrightarrow{\mathbf{B}}$ ССК
- Солнечная система координат $Ox_sy_sz_s$



Особенности управления

1. Ограничение по направлению и величине

а) $f = 1, \mathbf{M}_s = \mathbf{0}$



$f = 0, \mathbf{M}_s = \mathbf{0}$



$$0 < f_{\min} \leq f \leq f_{\max} < 1$$

б) При $\theta = 0^\circ$

$$(\mathbf{M})_{\xi, \max} = \frac{\Phi_0 a^3}{c} \frac{1}{8} \simeq 7.1 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}$$



$$|\theta| \leq \theta_0$$

2. Линейное приближение → ограничение на начальные данные → криволинейные уравнения ХКУ

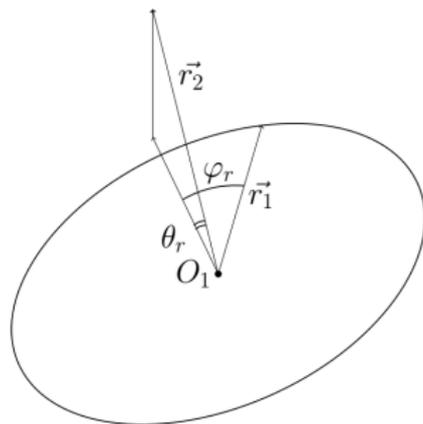
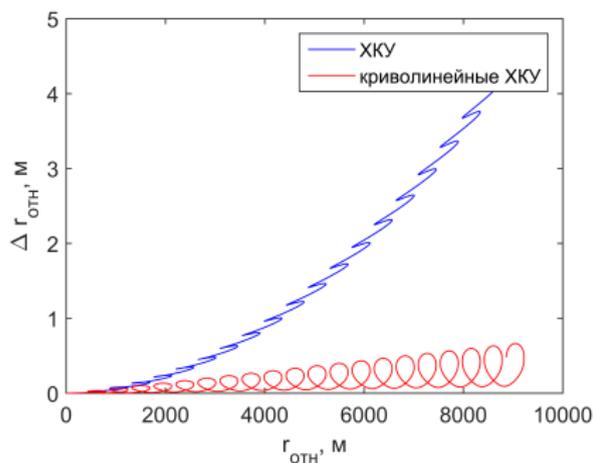
Криволинейные уравнения ХКУ

$$(x, y, z) \leftrightarrow (a_0 \theta_r, a_0 \varphi_r, \rho)$$

$$a_0 = |\mathbf{r}_1|, \rho = |\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_1|$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega \dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \\ \ddot{z} - 2\omega \dot{x} - 3\omega^2 z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_0 \ddot{\theta}_r) + 2\omega \dot{\rho} = 0, \\ (a_0 \ddot{\varphi}_r) + \omega^2 (a_0 \varphi_r) = 0, \\ \ddot{\rho} - 2\omega (a_0 \dot{\theta}_r) - 3\omega^2 \rho = 0 \end{cases}$$



Уравнения движения

Орбитальное движение

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}_{J_2} + \mathbf{f}_s$$

$$\mathbf{f}_s = A(\mathbf{r}_s, \mathbf{n})((1-f)\mathbf{r}_s + 2f(\mathbf{r}_s, \mathbf{n})\mathbf{n}), \quad f = \frac{1}{S} \int_S \alpha dS, \quad A = -\frac{\Phi_0 S}{c} < 0$$

$$\mathbf{f}_{J_2} = \frac{3J_2\mu R_{\oplus}^2}{2r^4} \begin{pmatrix} 3 \sin^2 i \sin^2 u - 1 \\ -\sin^2 i \sin 2u \\ -\sin 2u \sin u \end{pmatrix}$$

Угловое движение

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{\text{упр}} + \mathbf{M}_{\text{грав}}$$

$$\mathbf{M}_{\text{упр}} = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_s, \quad \mathbf{M}_{\text{грав}} = 3\frac{\mu}{r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r}$$

Относительное движение

без управления

$$\begin{cases} (a_0 \ddot{\theta}_r) + 2\omega \dot{\rho} = 0, \\ (a_0 \ddot{\varphi}_r) + \omega^2 (a_0 \varphi_r) = 0, \\ \ddot{\rho} - 2\omega (a_0 \dot{\theta}_r) - 3\omega^2 \rho = 0 \end{cases}$$

с управлением

$$\begin{cases} (a_0 \ddot{\theta}_r) + 2\omega \dot{\rho} = u_x, \\ (a_0 \ddot{\varphi}_r) + \omega^2 (a_0 \varphi_r) = u_y, \\ \ddot{\rho} - 2\omega (a_0 \dot{\theta}_r) - 3\omega^2 \rho = u_z \end{cases}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}_{s,2} - \mathbf{F}_{s,1}}{m}$$

Относительное движение

без управления

$$\begin{cases} (a_0 \ddot{\theta}_r) + 2\omega \dot{\rho} = 0, \\ (a_0 \ddot{\varphi}_r) + \omega^2 (a_0 \varphi_r) = 0, \\ \ddot{\rho} - 2\omega (a_0 \dot{\theta}_r) - 3\omega^2 \rho = 0 \end{cases}$$

с управлением

$$\begin{cases} (a_0 \ddot{\theta}_r) + 2\omega \dot{\rho} = u_x, \\ (a_0 \ddot{\varphi}_r) + \omega^2 (a_0 \varphi_r) = u_y, \\ \ddot{\rho} - 2\omega (a_0 \dot{\theta}_r) - 3\omega^2 \rho = u_z \end{cases}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}_{s,2} - \mathbf{F}_{s,1}}{m}$$

$$\begin{cases} a_0 \theta_r = -3C_1 \omega t + 2C_2 \cos \omega t - 2C_3 \sin \omega t + C_4, & B_1 = C_1, B_3 = -3C_1 \omega t + C_4 \\ a_0 \varphi_r = C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t, \\ \rho = 2C_1 + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t \end{cases}$$

$$B_2 = \sqrt{C_2^2 + C_3^2}, B_4 = \sqrt{C_5^2 + C_6^2}$$

Относительное движение

без управления

$$\begin{cases} (a_0 \ddot{\theta}_r) + 2\omega \dot{\rho} = 0, \\ (a_0 \ddot{\varphi}_r) + \omega^2 (a_0 \varphi_r) = 0, \\ \ddot{\rho} - 2\omega (a_0 \dot{\theta}_r) - 3\omega^2 \rho = 0 \end{cases}$$

с управлением

$$\begin{cases} (a_0 \ddot{\theta}_r) + 2\omega \dot{\rho} = u_x, \\ (a_0 \ddot{\varphi}_r) + \omega^2 (a_0 \varphi_r) = u_y, \\ \ddot{\rho} - 2\omega (a_0 \dot{\theta}_r) - 3\omega^2 \rho = u_z \end{cases}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}_{s,2} - \mathbf{F}_{s,1}}{m}$$

$$\begin{cases} a_0 \theta_r = -3C_1 \omega t + 2C_2 \cos \omega t - 2C_3 \sin \omega t + C_4, & B_1 = C_1, B_3 = -3C_1 \omega t + C_4 \\ a_0 \varphi_r = C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t, \\ \rho = 2C_1 + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t \end{cases}$$

$$B_2 = \sqrt{C_2^2 + C_3^2}, B_4 = \sqrt{C_5^2 + C_6^2}$$

$$\dot{B}_1 = \frac{1}{\omega} u_x$$

B_1 — дрейф

$$\dot{B}_3 = -3B_1 \omega - \frac{2}{\omega} u_z$$

B_3 — смещение центра в Oxz

$$\dot{B}_2 = \frac{1}{\omega} (-2u_x \sin \psi_1 + u_z \cos \psi_1)$$

B_2 — полуось

$$\dot{\psi}_1 = \omega - \frac{1}{B_2 \omega} (u_z \sin \psi_1 + 2u_x \cos \psi_1)$$

ψ_1, ψ_2 — фазы

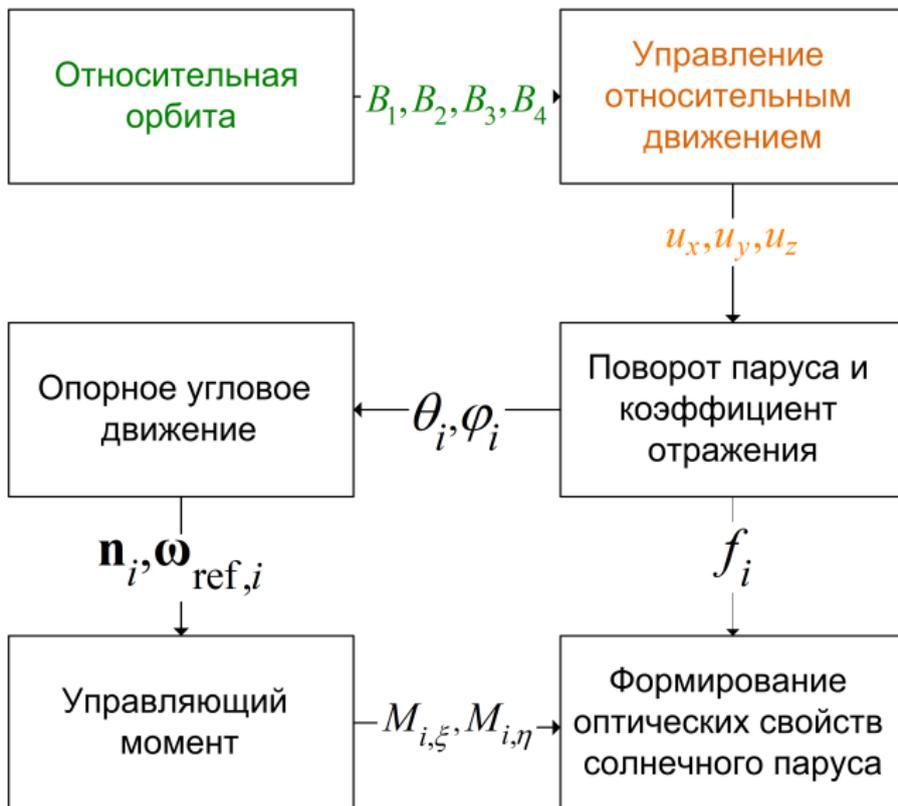
$$\dot{B}_4 = -\frac{1}{\omega} u_y \sin \psi_2$$

B_4 — амплитуда по y

$$\dot{\psi}_2 = \omega - \frac{1}{\omega B_4} u_y \cos \psi_2$$

Цель: $B_1 = 0, B_3 = 0, B_2 = B_0, B_4 = 0.$

Синтез управления



Построение модельного управления

1. Стабилизация относительной орбиты

а. центр

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}B_1^2 + \frac{1}{2}B_3^2, \\ \dot{V} &= \frac{1}{\omega}B_1u_x + B_3(-3B_1\omega - \frac{2}{\omega}u_z) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} u_x = -k_1B_1, k_1 > 0, \\ u_z = \frac{1}{2}(-3B_1\omega^2 + k_2\omega B_3), k_2 > 0 \end{cases}$$

б. размер

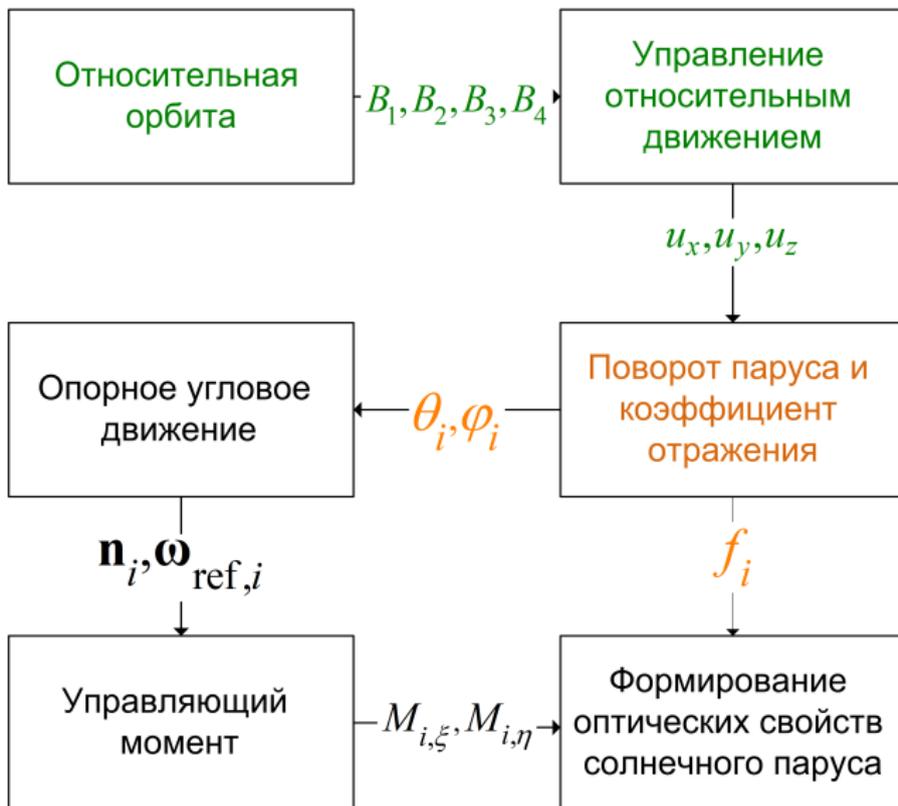
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}B_1^2 + \frac{1}{2}B_3^2 + \frac{1}{2}(B_2 - B_0)^2 \Rightarrow \begin{cases} u_x = -k_3(B_1 - 2(B_2 - B_0)\sin\psi_1), k_3 > 0, \\ u_z = -k_4(-2B_3 + (B_2 - B_0)\cos\psi_1), k_4 > 0 \end{cases} \\ \dot{V} &= \frac{1}{\omega}(B_1 - 2(B_2 - B_0)\sin\psi_1)u_x + \frac{1}{\omega}(-2B_3 + (B_2 - B_0)\cos\psi_1)u_z - 3B_1B_3\omega \end{aligned}$$

$$\text{Условие устойчивости: } u_{\max} > |3B_1B_3\omega^2|$$

2. Управление движением вне плоскости

$$V = \frac{1}{2}B_4^2 \Rightarrow u_y = -k_yB_4\cos\psi_2, k_y > 0$$

Синтез управления



Реализация управления

$$\theta_i \text{ малы: } \begin{cases} u_{x_s} = 2Af_2\theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \cos \varphi_1 \\ u_{y_s} = 2Af_2\theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \sin \varphi_1 \\ u_{z_s} = Af_2 - Af_1 \end{cases}$$

Реализация управления

$$\theta_i \text{ малы: } \begin{cases} u_{x_s} = 2Af_2\theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \cos \varphi_1 \\ u_{y_s} = 2Af_2\theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \sin \varphi_1 \\ u_{z_s} = Af_2 - Af_1 \end{cases}$$

$$(f_1 - 0.5)^2 + (f_2 - 0.5)^2 \rightarrow \min \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0.5 - \frac{u_{z_s}}{2A} \\ f_2 = 0.5 + \frac{u_{z_s}}{2A}, \end{cases} \quad 2f_{\min} - 1 \leq \frac{u_{z_s}}{A} \leq 2f_{\max} - 1$$

Реализация управления

$$\theta_i \text{ малы: } \begin{cases} u_{x_s} = 2Af_2\theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \cos \varphi_1 \\ u_{y_s} = 2Af_2\theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \sin \varphi_1 \\ u_{z_s} = Af_2 - Af_1 \end{cases}$$

$$(f_1 - 0.5)^2 + (f_2 - 0.5)^2 \rightarrow \min \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0.5 - \frac{u_{z_s}}{2A} \\ f_2 = 0.5 + \frac{u_{z_s}}{2A}, \end{cases} \quad 2f_{\min} - 1 \leq \frac{u_{z_s}}{A} \leq 2f_{\max} - 1$$

$$L = u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2 \rightarrow \max \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2, \theta_1\theta_2 < 0, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + \pi, \theta_1\theta_2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{В случае } \varphi_1 = \varphi_2: \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{u_{y_s}}{u_{x_s}}$$

Реализация управления

$$\theta_i \text{ малы: } \begin{cases} u_{x_s} = 2Af_2\theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \cos \varphi_1 \\ u_{y_s} = 2Af_2\theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \sin \varphi_1 \\ u_{z_s} = Af_2 - Af_1 \end{cases}$$

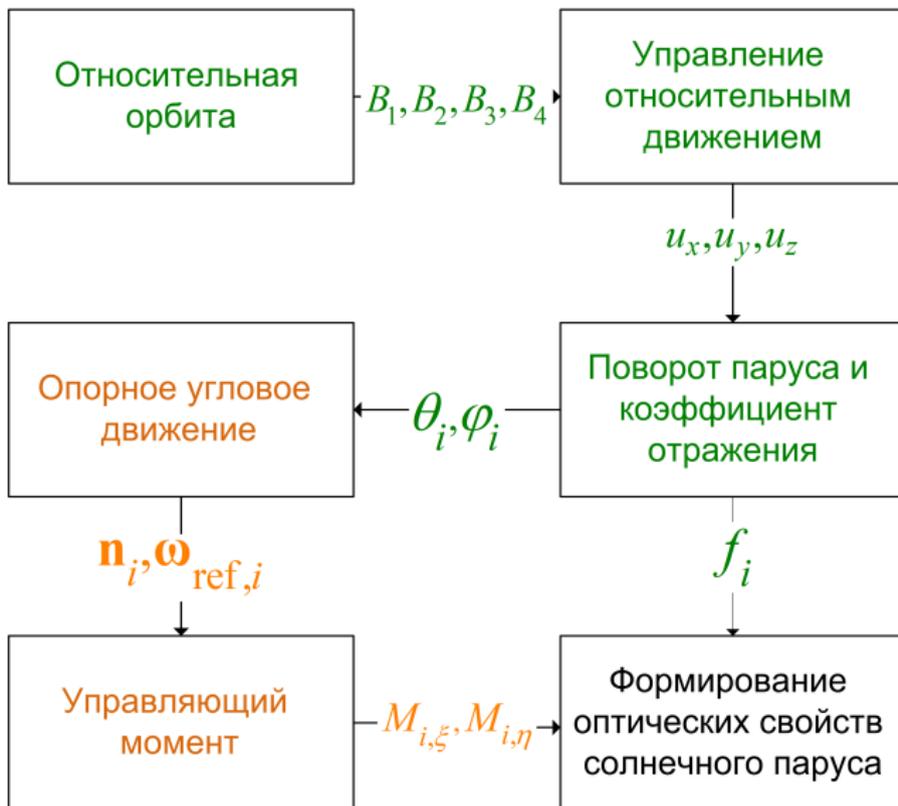
$$(f_1 - 0.5)^2 + (f_2 - 0.5)^2 \rightarrow \min \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0.5 - \frac{u_{z_s}}{2A} \\ f_2 = 0.5 + \frac{u_{z_s}}{2A}, \end{cases} \quad 2f_{\min} - 1 \leq \frac{u_{z_s}}{A} \leq 2f_{\max} - 1$$

$$L = u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2 \rightarrow \max \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2, \theta_1\theta_2 < 0, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + \pi, \theta_1\theta_2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{В случае } \varphi_1 = \varphi_2: \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{u_{y_s}}{u_{x_s}}$$

$$L = \theta_1^2 + \theta_2^2 \rightarrow \min \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = -\frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A} \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}, \\ \theta_2 = \frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A} \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \end{cases}$$

Синтез управления



Управление угловым движением

Управляющий момент

$$V = \frac{1}{2}(J_\xi \omega_{\text{отн},1}^2 + J_\eta \omega_{\text{отн},2}^2) + k_a \left(1 - \left((0 \ 0 \ 1)^T, \mathbf{Bn}\right)\right), \quad k_a > 0$$

$$\dot{V} = \left(\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} + k_a \mathbf{Bn} \times (0 \ 0 \ 1)^T\right)$$

$$\dot{V} < 0 \Leftrightarrow \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} + k_a \mathbf{Bn} \times (0 \ 0 \ 1)^T = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}$$

$$\mathbf{M}_{\text{упр}} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} - \mathbf{M}_{\text{внешн}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} + \mathbf{J}\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} - k_a \mathbf{Bn} \times (0 \ 0 \ 1)^T$$

Зависимость компонент момента

$\mathbf{r}_s \nparallel \mathbf{n}$

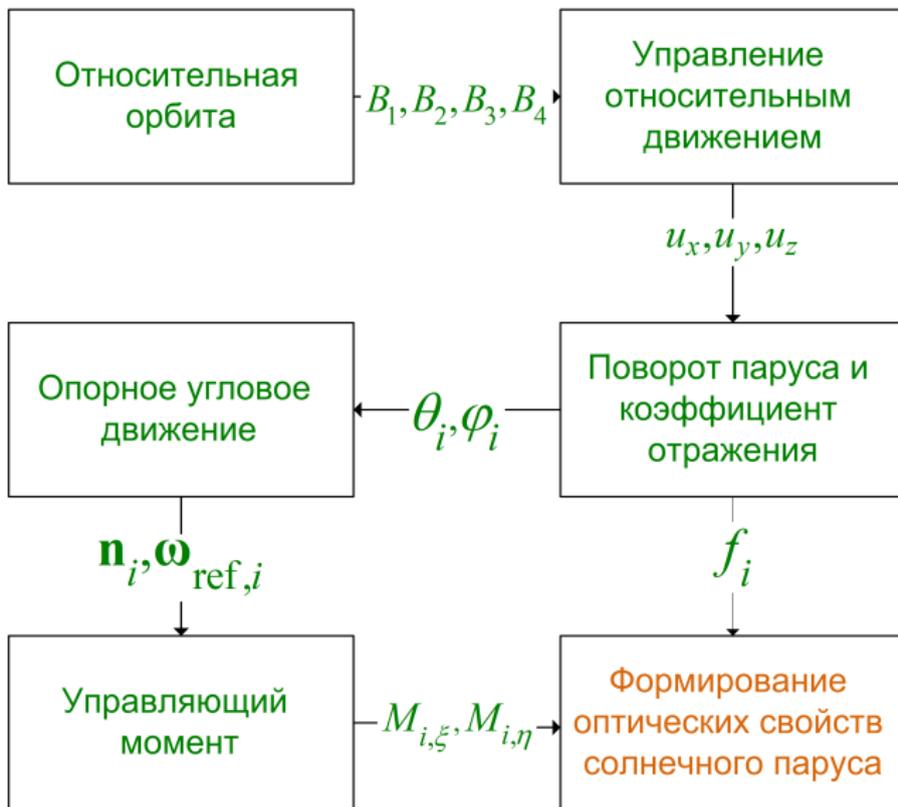
$$\mathbf{M}_{\text{упр}} = \frac{\Phi_0}{c} \cos \theta \begin{pmatrix} -P \cos \theta \\ -Q \cos \theta \\ Q \sin \theta \sin \beta + P \sin \theta \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$P = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \eta \alpha d\xi d\eta, \quad Q = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} -\xi \alpha d\xi d\eta$$

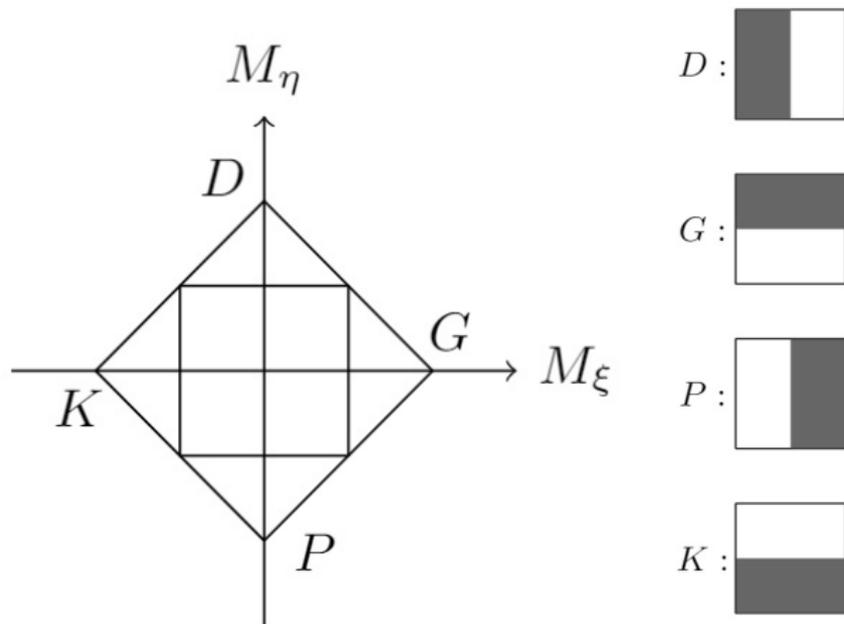
$\mathbf{r}_s \parallel \mathbf{n}$

$$\mathbf{M}_{\text{упр}} = \frac{\Phi_0}{c} \begin{pmatrix} -P \\ -Q \\ 0 \end{pmatrix}$$

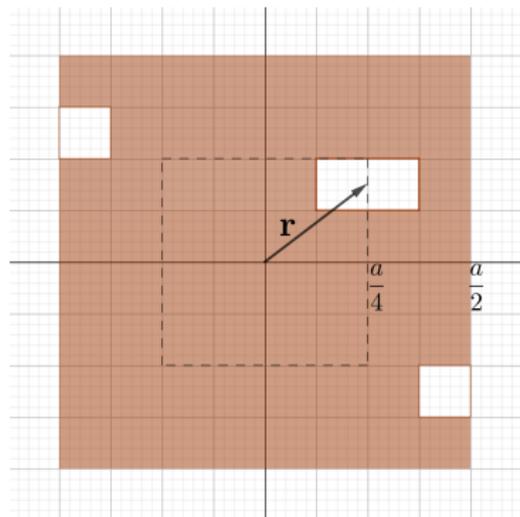
Синтез управления



Выбор засветки солнечного паруса (1)



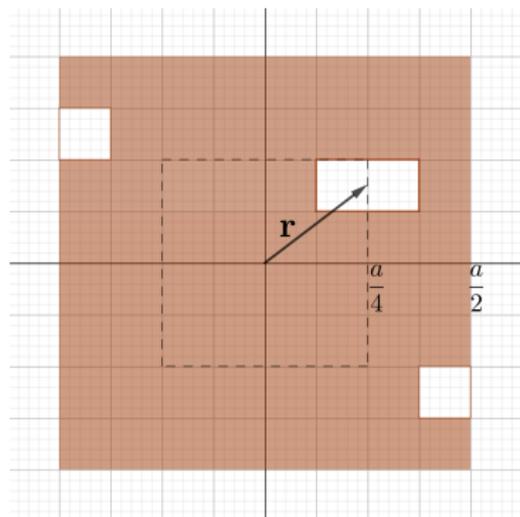
Выбор засветки солнечного паруса (2)



1. Центр

$$\begin{cases} \frac{\xi}{\eta} = -\frac{M_\eta}{M_\xi}; \\ \xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2; \\ \text{sign}(\eta) = -\text{sign}(M_\xi) \end{cases}$$

Выбор засветки солнечного паруса (2)



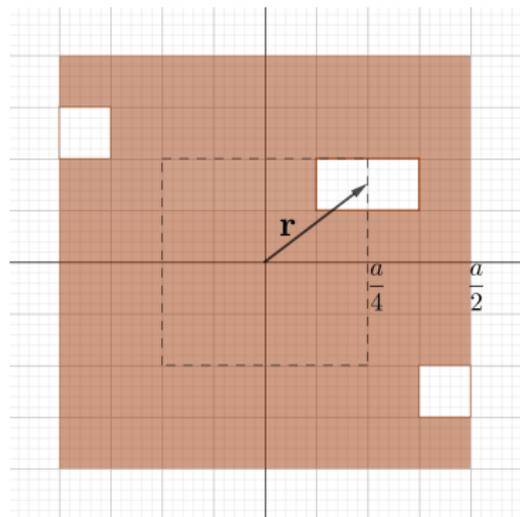
1. Центр

$$\begin{cases} \frac{\xi}{\eta} = -\frac{M_\eta}{M_\xi}; \\ \xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2; \\ \text{sign}(\eta) = -\text{sign}(M_\xi) \end{cases}$$

2. Площадь

$$\begin{cases} F_{s,\zeta} = \frac{\Phi_0}{c} (-\cos^2 \theta) S_{\text{пр}}; \\ M_\xi^2 + M_\eta^2 = (\xi^2 + \eta^2) F_{s,\zeta}^2; \\ \text{sign}(F_{s,\zeta}) = -1 \end{cases}$$

Выбор засветки солнечного паруса (2)



1. Центр

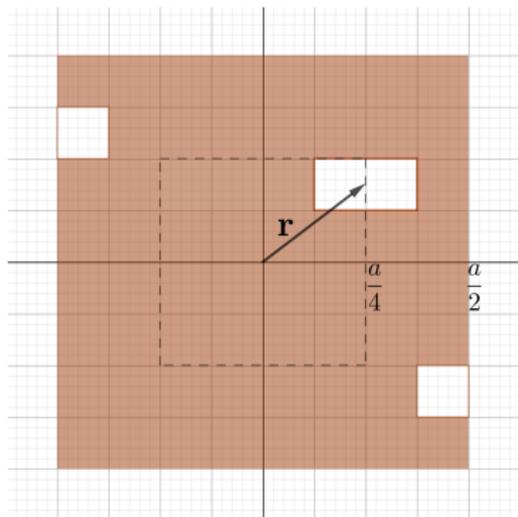
$$\begin{cases} \xi = -\frac{M_\eta}{M_\xi}; \\ \eta = \frac{M_\xi}{M_\xi}; \\ \xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2; \\ \text{sign}(\eta) = -\text{sign}(M_\xi) \end{cases}$$

2. Площадь

$$\begin{cases} F_{s,\zeta} = \frac{\Phi_0}{c} (-\cos^2 \theta) S_{\text{пр}}; \\ M_\xi^2 + M_\eta^2 = (\xi^2 + \eta^2) F_{s,\zeta}^2; \\ \text{sign}(F_{s,\zeta}) = -1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{S_{\text{пр}} n^2}{a^2} - AB \right) \xrightarrow{A, B \in \mathbb{N}} 0$$

Выбор засветки солнечного паруса (2)



1. Центр

$$\begin{cases} \frac{\xi}{\eta} = -\frac{M_\eta}{M_\xi}; \\ \xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2; \\ \text{sign}(\eta) = -\text{sign}(M_\xi) \end{cases}$$

2. Площадь

$$\begin{cases} F_{s,\zeta} = \frac{\Phi_0}{c} (-\cos^2 \theta) S_{\text{пр}}; \\ M_\xi^2 + M_\eta^2 = (\xi^2 + \eta^2) F_{s,\zeta}^2; \\ \text{sign}(F_{s,\zeta}) = -1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{S_{\text{пр}} n^2}{a^2} - AB \right) \xrightarrow{A, B \in \mathbb{N}} 0$$

3. Добавление сегментов

$$f = \frac{N_{\text{треб}}}{n^2}; \quad N_{\text{треб}} \geq N$$

$$N = AB$$

Численный пример (1)

орбита ведущего КА: $R_{\text{орб}} = 9000$ км, $e = 0$, $\Omega = 0^\circ$, $\omega = 0^\circ$, $i = 109.32^\circ$;

эклиптическая долгота Солнца: $\lambda = 0^\circ$;

начальная относительная орбита: $\mathbf{r}_{\text{отн}} = (200 \ 100 \ 50)$ м, $\mathbf{v}_{\text{отн}} = (0.05 \ 0.5 \ 1)$ м/с

масса КА: $m = 10$ кг;

размер паруса: 5×5 м;

тензор инерции: $\mathbf{J} = \text{diag}(2.1 \ 2.1 \ 3.8)$ кг·м²;

начальная угловая скорость:

$\omega_1 = (0.005 \ 0.003 \ 0.001)$ рад/с, $\omega_2 = (0.001 \ 0.003 \ 0.002)$ рад/с;

ориентация нормали паруса: $\theta_1 = \theta_2 = 10^\circ$;

параметры управления:

$k_1 = k_3 = k_4 = 20$, $k_2 = 10^{-6}$ с⁻¹, $k_\omega = 0.02$ Н·м·с, $k_a = 10^{-4}$ Н·м;

максимальное управление: $u_{\text{max}} = 10^{-6}$ Н;

максимальный управляющий момент: $M = 3 \cdot 10^{-5}$ Н·м;

разбиение паруса: 50×50 сегментов;

малая полуось: $B_0 = 150$ м

Допустимая область начальных данных

1. Относительное расстояние

$$(\mathbf{r}_{\text{отн}})_x = 47 \text{ км}$$

$$(\mathbf{r}_{\text{отн}})_y = 10 \text{ км}$$

$$(\mathbf{r}_{\text{отн}})_z = 3 \text{ км}$$

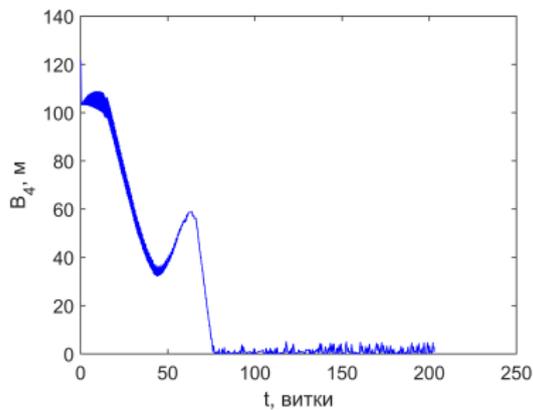
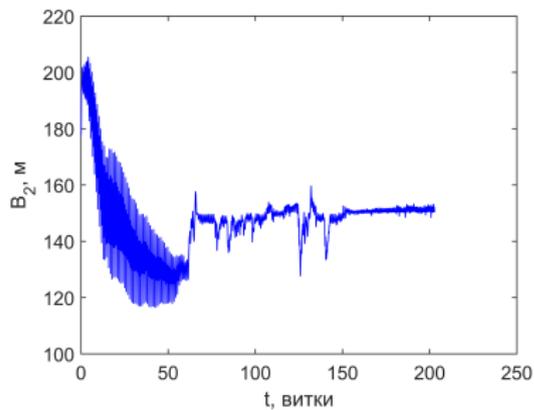
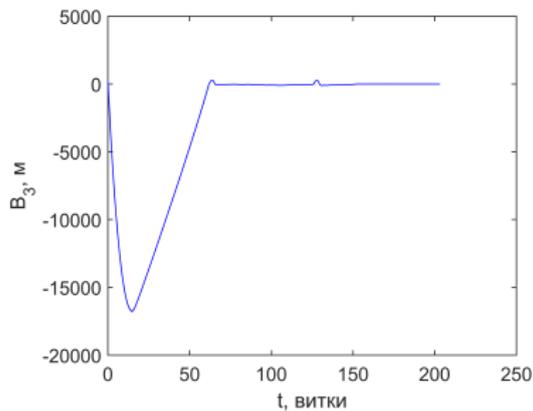
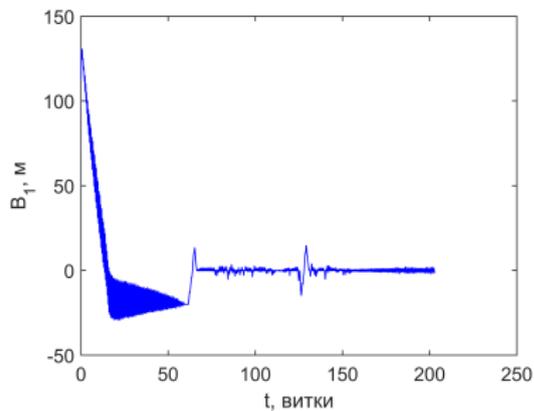
2. Демпфирование первой компоненты угловой скорости

$$t_{\min} = \frac{J_{\xi} \omega_{\xi,0}}{\frac{\Phi_0}{c} \frac{a^3}{8} \cos^2 \theta}, \quad t_{\min} \simeq 150 \text{ с}$$

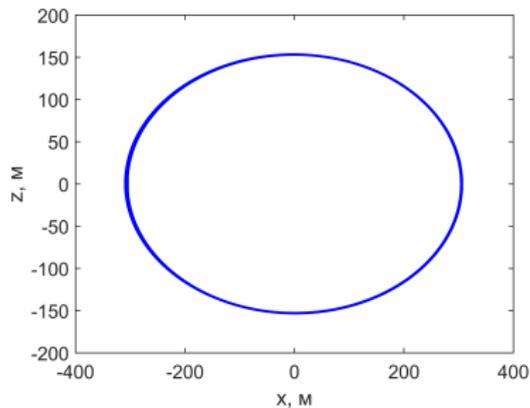
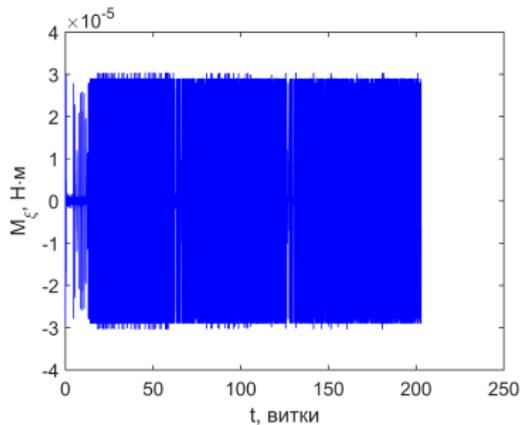
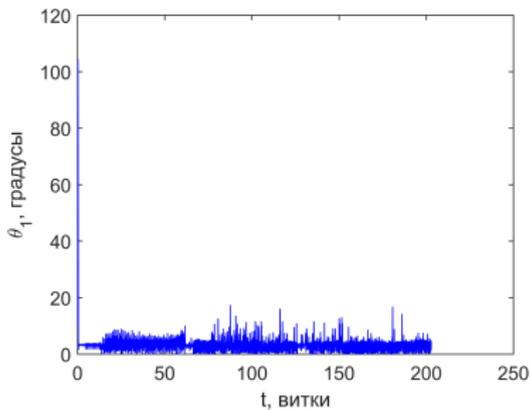
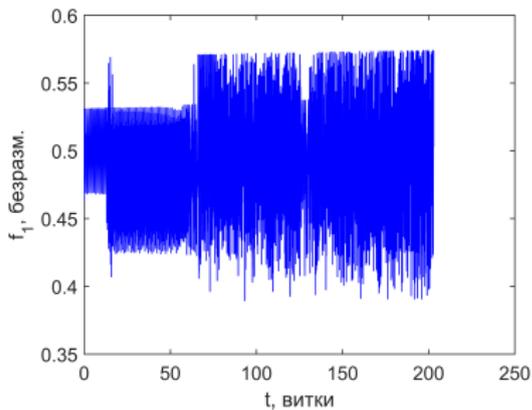
3. Дрейф

$$t_{\min} = \frac{\omega_{\text{орб}} |B_{1,0}|}{u_{\max}}, \quad t_{\min} \simeq 1.2 \cdot 10^5 \text{ с} \simeq 15 \text{ периодов}$$

Численный пример (2)



Численный пример (управление)



Заключение

1. Предложена схема управления формацией из двух спутников с помощью солнечных парусов с изменяемыми коэффициентами отражения.
2. Показано, что управление относительным движением и ориентацией возможно с использованием только солнечного паруса.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-01-00739 и 17-01-00449.

Работа доложена на конференциях

1. 69th International Astronautical Congress, 1-5 October 2018
(публикация в Scopus)
2. IAA SciTech Forum 2018, 13-15 November
3. 61-я Всероссийская научная конференция МФТИ, 19-25 ноября 2018
4. International Workshop on Satellite Constellations & Formation Flying, 16-19 July 2019 (принята)

1. Относительное расстояние

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 0^\circ & \omega_1 &= \mathbf{0} \text{ рад/с} & (\mathbf{v}_{\text{отн}})_{y,z} &= 0 \text{ м/с} \\ \theta_2 &= 0^\circ & \omega_2 &= \mathbf{0} \text{ рад/с} & (\mathbf{v}_{\text{отн}})_x &= -2\omega(\mathbf{r}_{\text{отн}})_z\end{aligned}$$

2. Демпфирование угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_{\xi,0} \quad 0 \quad \omega_{\zeta})^T, \quad \omega_{\xi,0} \neq 0$$

а) Время

$$\begin{aligned}J_{\xi}\dot{\omega}_{\xi} &= (\mathbf{M}_{\text{упр}})_{\xi} \\ \Downarrow \\ t &= \frac{J_{\xi}\omega_{\xi,0}}{\frac{\Phi_0}{c} \cos^2 \theta \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \eta \alpha d\xi d\eta \right)}\end{aligned}$$

б) Смещение

$$\Delta(a_0\theta_r) = -3B_1\omega t$$

3. Дрейф: $B_{1,0} \neq 0$

$$\begin{cases} (a_0 \dot{\theta}_r) = -3B_1\omega \\ \dot{B}_1 = \frac{1}{\omega} u_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_0 \dot{\theta}_r) = -3B_1\omega (*) \\ B_1 = \frac{1}{\omega} (\pm u_{\max})t + B_{1,0} \end{cases}$$

а) Время

$$t : B_1(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\omega |B_{1,0}|}{u_{\max}}$$

б) Смещение (интегрирование уравнения (*))

$$\Delta(a_0 \theta_r) = -\frac{3\omega^2}{2} \frac{B_{1,0}^2}{u_{\max}} \text{sign}(B_{1,0})$$