Модели геомагнитного поля в задачах ориентации искусственных спутников Земли

А.В. Пичужкина

Московский физико-технический институт

Научный руководитель:

Д.С. Ролдугин, к.ф.-м.н.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

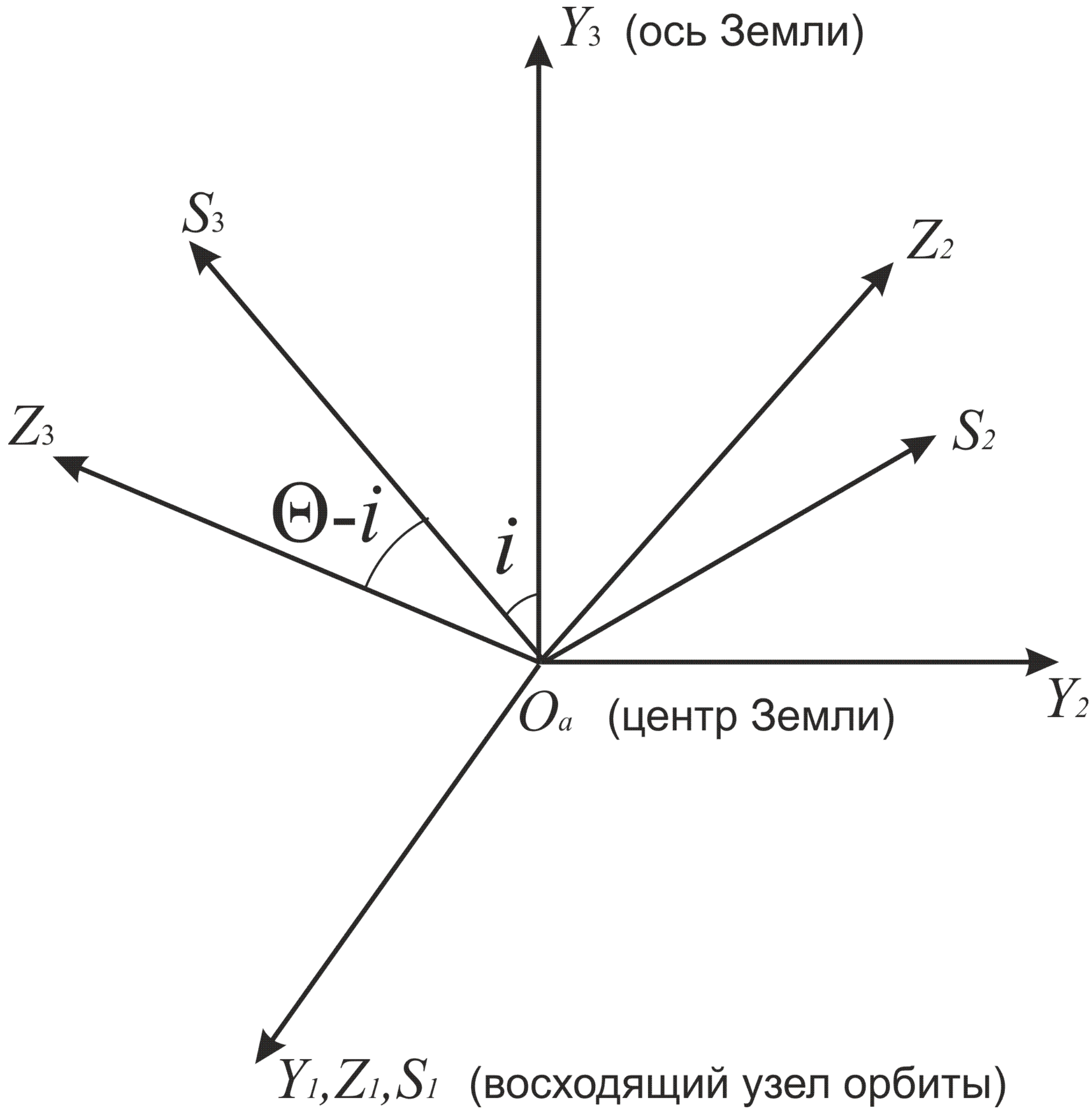
Цель работы

Определить наиболее удобные в разных ситуациях модели геомагнитного поля.

Решаются задачи:

- Описание моделей геомагнитного поля
  - IGRF и WMM
  - Наклонный диполь
  - Прямой диполь
  - Осредненная модель
- Исследование преимуществ различных моделей при проведении аналитических исследований

Инерциальные системы координат



Разложение поля в ряд Гаусса: IGRF и WMM

$$V = -R\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{R}{r}\right)^{i+1}\sum_{n=0}^{m}\left(g_n^m(t)\cos m\lambda_0 + h_n^m(t)\sin m\lambda_0\right)P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right),\ \mathbf{B} = \mu_0\nabla V$$

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,кг\cdot м\cdot A^{-2}\cdot c^{-2}$$

λ_0 – долгота точки, в которой определяется вектор напряженности

$\vartheta_0 = 90^\circ - \theta_0$, θ_0 – ее широта

r – расстояние от центра Земли

P_n^m – квазинормализованные по Шмидту присоединенные функции Лежандра

R – средний радиус Земли

Дипольная модель

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_e}{r^5}\ \ \mathbf{k}r^2-3\ \ \mathbf{kr}\ \ \mathbf{r}$$

Наклонный диполь:

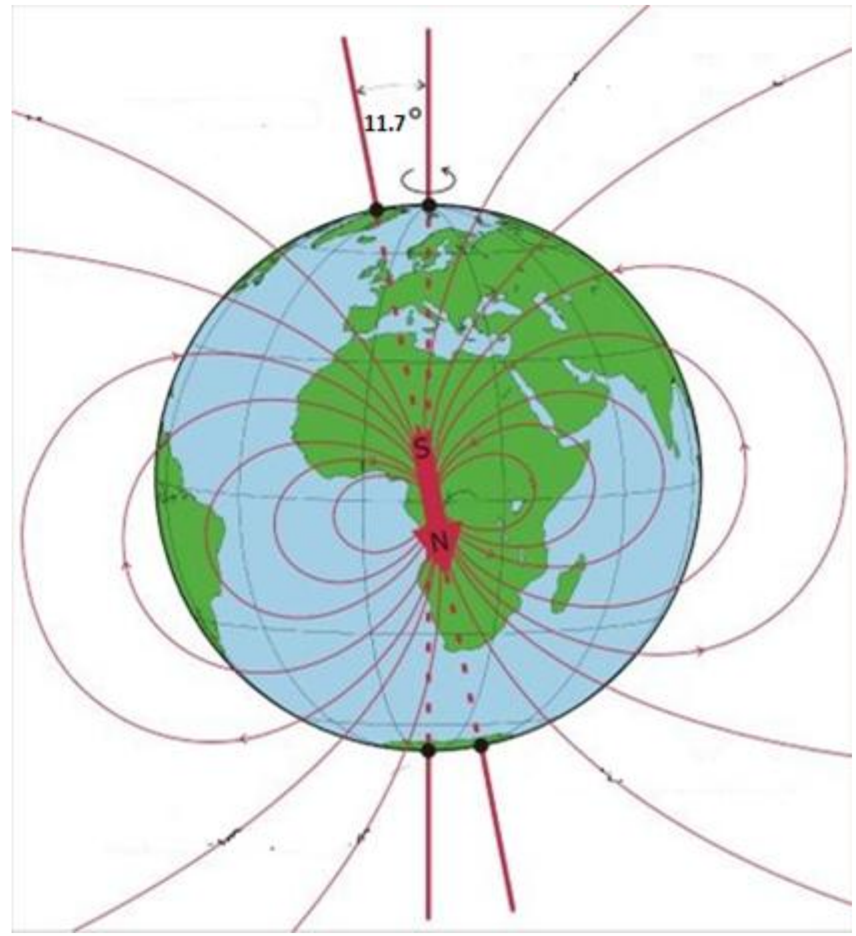
$$\mathbf{k}=\begin{pmatrix}\cos\lambda_0\sin\delta\\ \sin\lambda_0\sin\delta\\ \cos\delta\end{pmatrix}^T$$

$$\delta=168.3^\circ\quad \lambda_0=-71.88^\circ$$

Прямой диполь:

$$\mathbf{k}=\left(0,0,-1\right)$$

$$\delta=180^\circ\quad \lambda_0=0$$



Дипольная модель

прямой диполь:

$$\mathbf{B}_{ИСК}=\frac{\mu_e}{r^3}\begin{pmatrix}-1.5\sin i\sin 2u\\ -1.5\sin 2i\sin^2 u\\ 1-3\sin^2 i\sin^2 u\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}_{ОСК}=\frac{\mu_e}{r^3}\begin{pmatrix}\cos u\sin i\\ \cos i\\ -2\sin u\sin i\end{pmatrix}$$

наклонный диполь:

$$\mathbf{B}_{ИСК}=\frac{\mu_e}{r^3}\begin{pmatrix}\sin\lambda\sin\delta-3\xi\cos u\\ -\cos\lambda\sin\delta-3\xi\cos i\sin u\\ \cos\delta-3\xi\sin i\sin u\end{pmatrix}$$

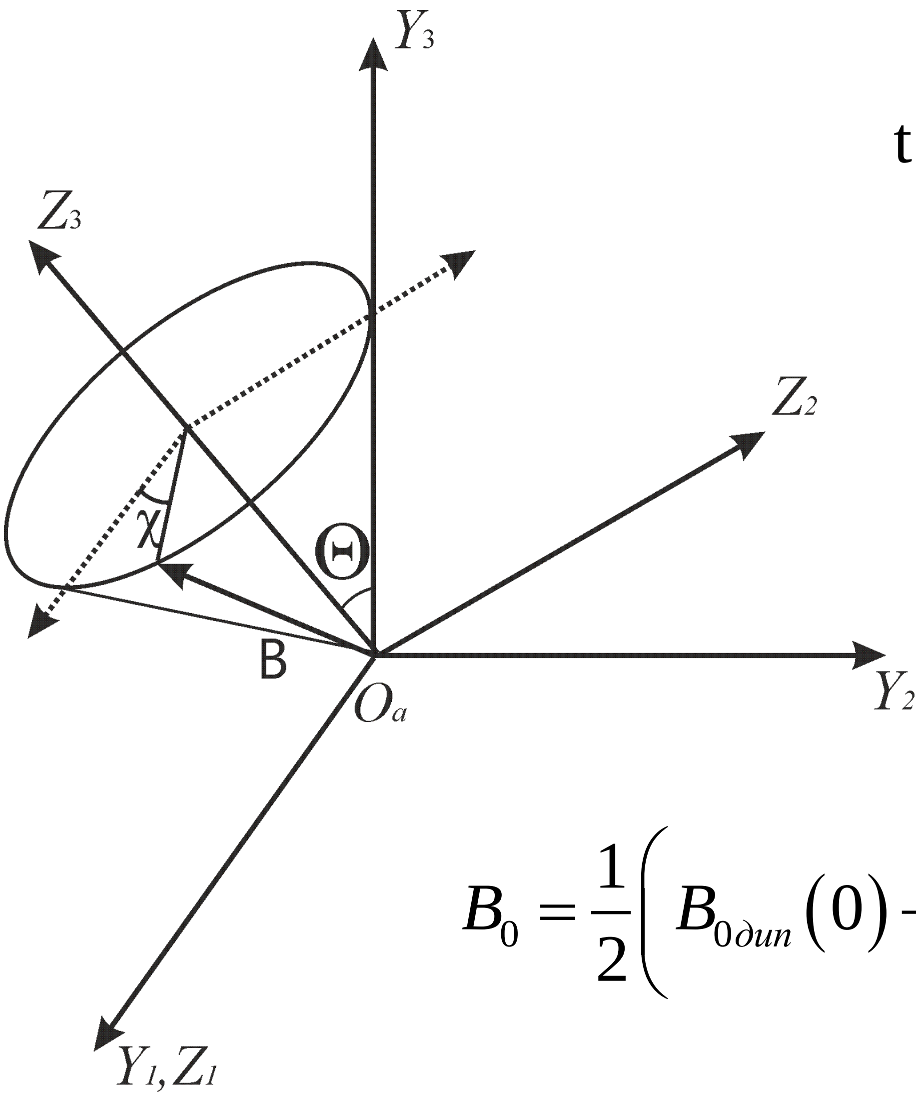
$$\lambda=\omega_З t+\lambda_0,\quad \mu_e=7.812\cdot 10^6\,км^3\cdot кг\cdot с^{-2}\cdot A^{-1}$$

$\omega_З$ – угловая скорость вращения Земли

$$\xi=\cos u\sin\delta\sin\lambda-\sin u\cos i\sin\delta\cos\lambda+\sin u\cos\delta\sin i$$

Осредненная модель

вектор индукции имеет постоянную длину и равномерно движется по поверхности кругового конуса

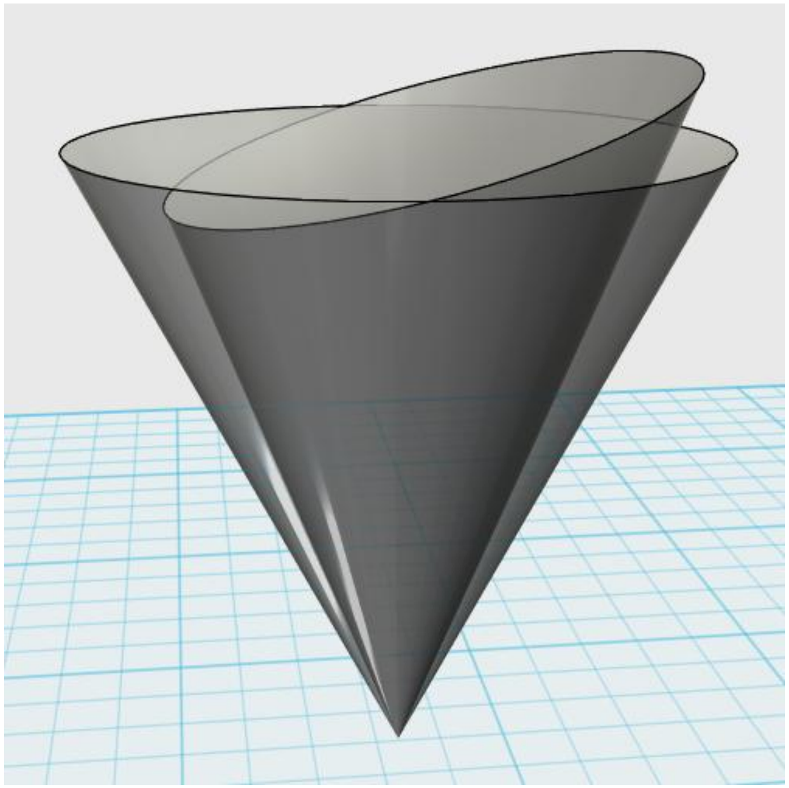


$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{3\sin 2i}{2\left(1 - 3\sin^2 i + \sqrt{1 + 3\sin^2 i}\right)}$$

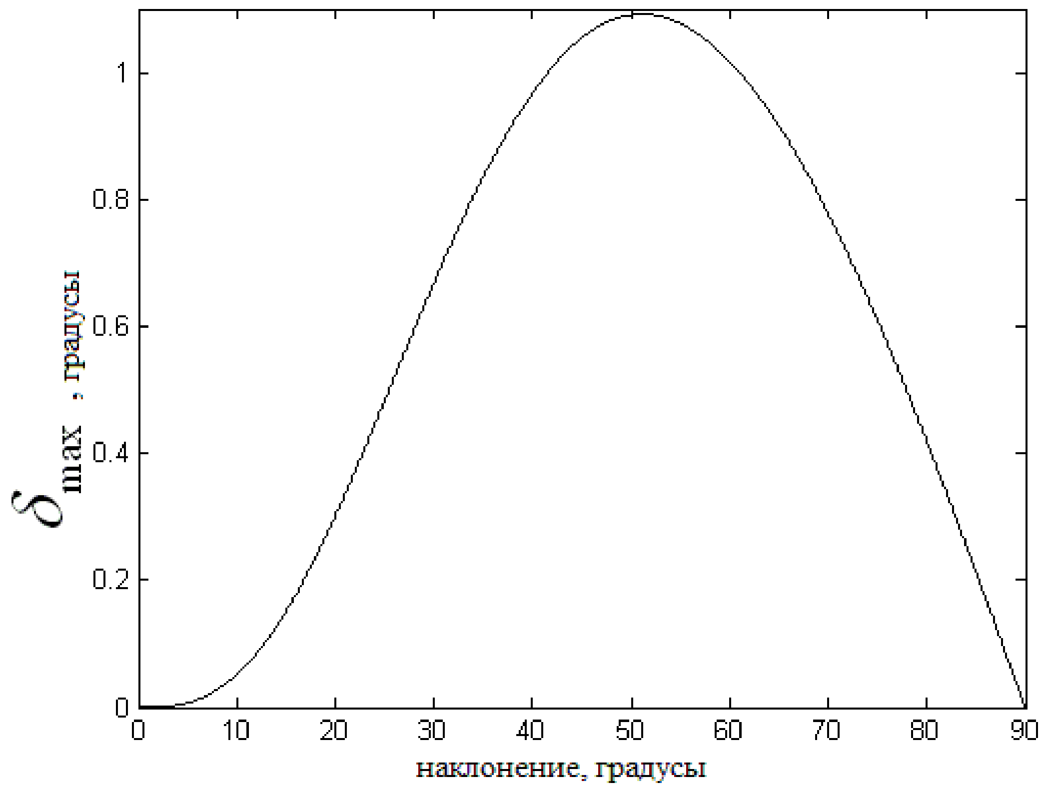
$$\mathbf{B}_{ИСК} = B_0 \begin{pmatrix} -\sin\Theta\sin\left(2u + \chi_0\right) \\ \sin\Theta\cos\left(2u + \chi_0\right) \\ \cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \frac{1}{2}\left(B_{0дип}\left(0\right) + B_{0дип}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\mu_e}{2r^3}\left(1 + \sqrt{1 + 3\sin^2 i}\right)$$

Сравнение конусов



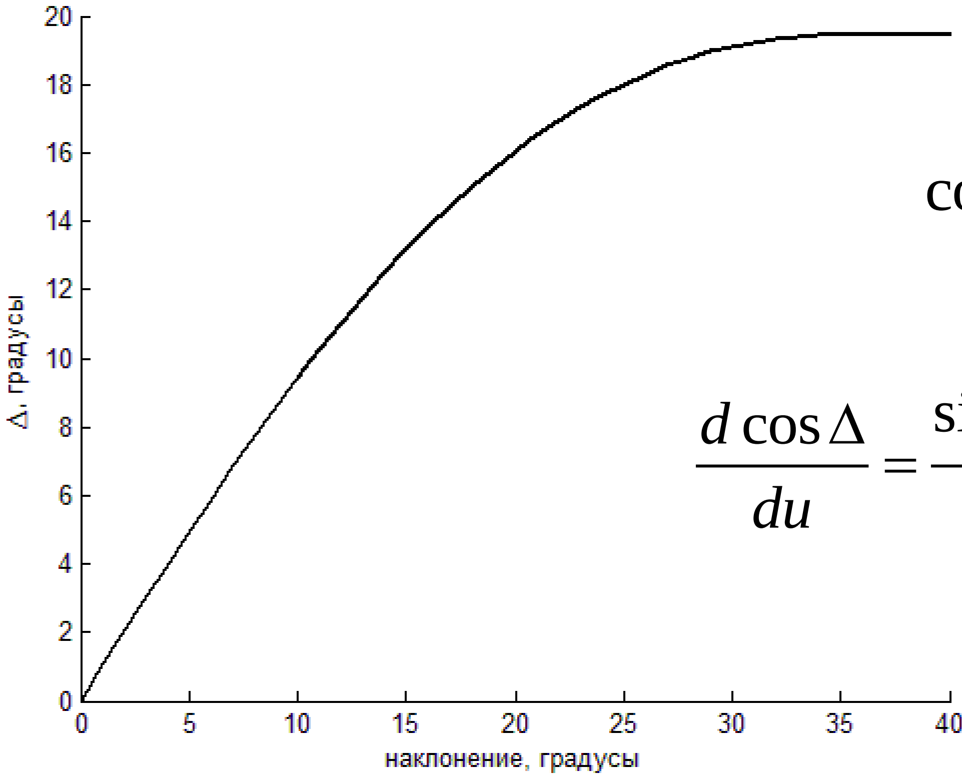
Конусы прямого диполя
и осредненного поля



Максимальное отклонение
вектора геомагнитной индукции
в дипольной модели от конуса
осредненной модели

Сравнение векторов индукции

Максимальное угловое расстояние Δ между векторами геомагнитной индукции в модели прямого диполя и осредненной при движении спутника по орбите – до 19°



$$\cos\Delta = \frac{1+\sin^2 i \sin^2 u}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 u}}$$

$$\frac{d\cos\Delta}{du} = \frac{\sin^2 i \sin u \cos u \left(3\sin^2 i \sin^2 u - 1\right)}{\left(1+3\sin^2 i \sin^2 u\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Переходные процессы и метод разделения движений

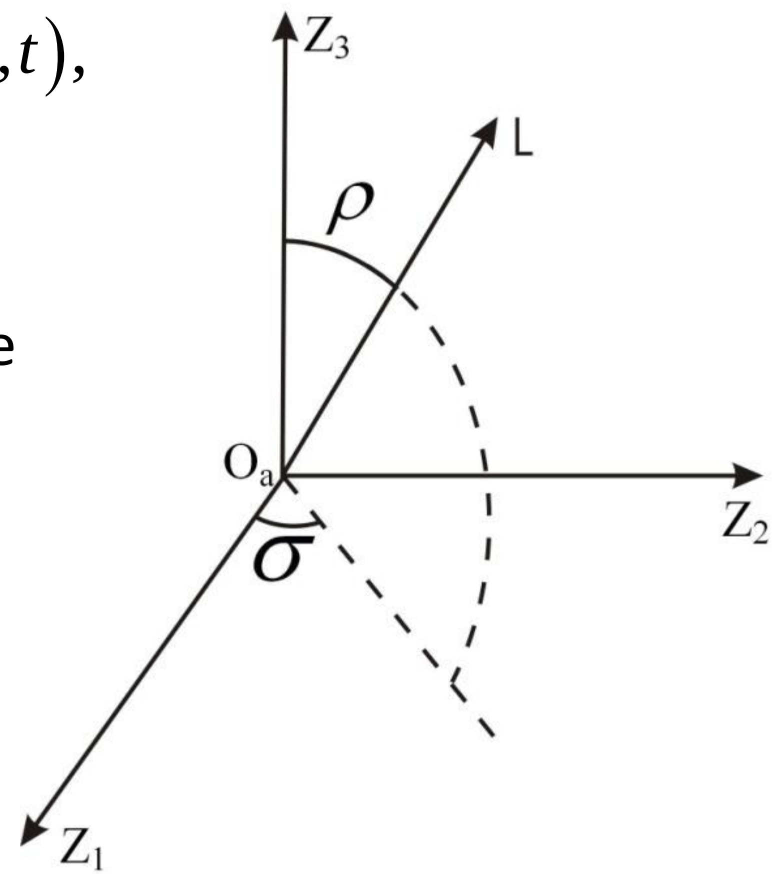
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \ \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t),$$

$\mathbf{y} = (\varphi, \psi, u)$ – быстрые переменные,

$\mathbf{x} = (L, \rho, \sigma, \theta)$ – медленные переменные

L – модуль вектора кинетического момента,

ρ, σ определяют его ориентацию относительно любой инерциальной системы, например, $O_a Z_1 Z_2 Z_3$



Усредненные уравнения (осредненная модель)

$$\frac{dl}{du} = -\varepsilon l\left[2p + (1-3p)\sin^2\rho\right]\left(\cos^2\theta + \frac{C}{A}\sin^2\theta\right)$$

$$\frac{d\rho}{du} = \varepsilon(3p-1)\sin\rho\cos\rho\left(\cos^2\theta + \frac{C}{A}\sin^2\theta\right),$$

$$\frac{d\sigma}{du} = 0,$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(1-\frac{C}{A}\right)\left[2(1-p) + (3p-1)\sin^2\rho\right]\sin\theta\cos\theta,$$

Существует полный набор первых интегралов в конечном виде

Усредненные уравнения (прямой диполь)

$$\frac{dl}{du} = -\varepsilon l \left[\frac{20}{9} a + \sin^2 \rho \left(c - a\cos^2 \sigma - \frac{11}{9} a \sin^2 \sigma \right) + 2d \cos^2 \rho \sin \sigma \cos \sigma \right] \times$$

$$\times \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right),$$

$$\frac{d\rho}{du} = \varepsilon \left[\left(\frac{11}{9} a \sin^2 \sigma + a \cos^2 \sigma - c \right) \sin \rho \cos \rho - d \sin \sigma \cos 2\rho \right] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right),$$

$$\frac{d\sigma}{du} = \varepsilon \left[\frac{2}{9} a \sin \sigma \cos \sigma + d \cos \sigma \operatorname{ctg} \rho \right] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right),$$

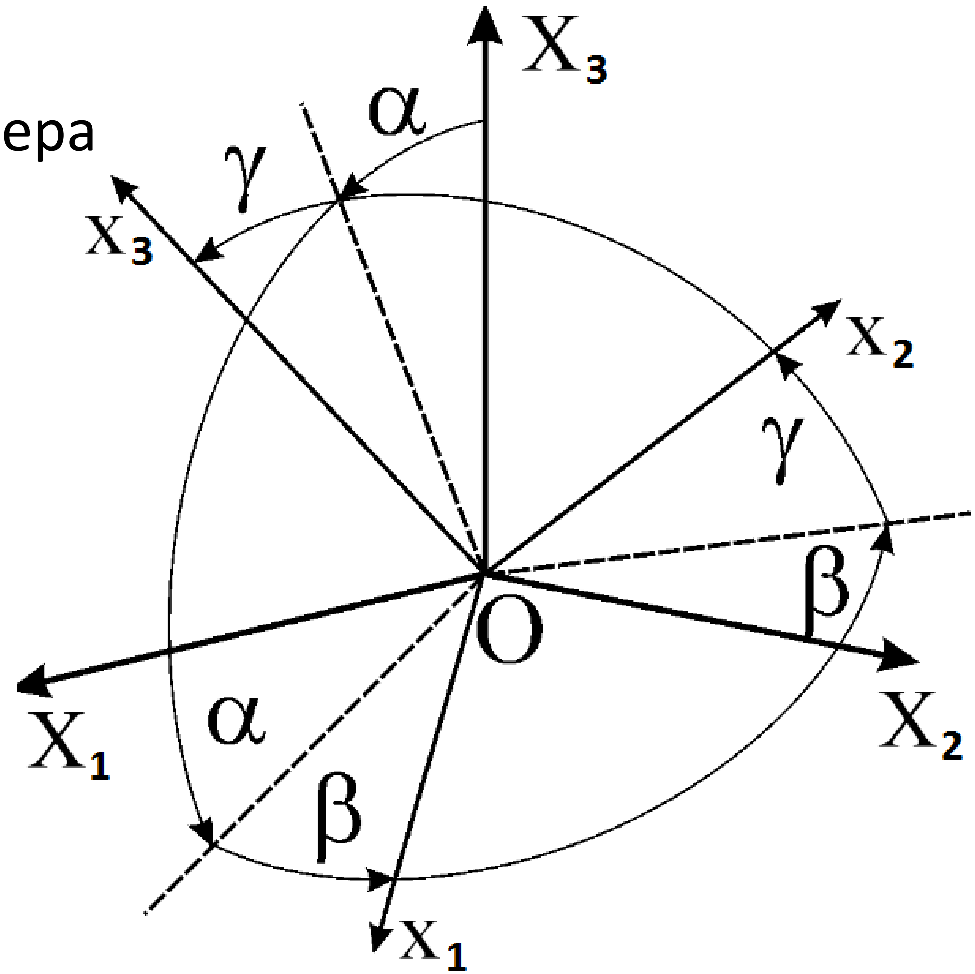
$$\frac{d\theta}{du} = \varepsilon \lambda \left[\frac{20}{9} a + c\left(1 + \cos^2 \rho\right) + a \sin^2 \rho \left(\cos^2 \sigma + \frac{11}{9} \sin^2 \sigma \right) + 2d \sin \rho \cos \rho \sin \sigma \right] \times$$

$$\times \sin \theta \cos \theta.$$

В случае прямого диполя можно найти лишь некоторые первые интегралы, причем только в виде квадратур

Установившееся движение

- Используются уравнения Эйлера и самолетные углы
- Осредненная модель и прямой диполь допускают плоское движение
  - полярная орбита
  - постоянный магнит
- Пространственное движение
  - тангажный маховик
  - магнитное демпфирование



Уравнение плоского движения

$$\Delta\ddot{\beta}+\Delta\beta\left(\lambda^2+\varepsilon\cos 2u\right)=-\frac{\varepsilon}{2}\sin 2u$$ (осредненная модель)

$$\Delta\ddot{\beta}+\Delta\beta\left(\frac{3\lambda^2}{2}+\frac{2\varepsilon-\lambda^2}{2}\cos 2u\right)=\frac{\lambda^2-\varepsilon}{2}\sin 2u$$ (прямой диполь)

Характеристическое уравнение:

$$\Delta\dot{\beta}=z,$$

$$\dot{z}=-\lambda^2\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\cos 2u\right)\Delta\beta.$$

$$\rho^2-2A\left(\lambda,\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\right)\rho+1=0,$$

$$\rho\left(\lambda,\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\right)=A\pm\sqrt{A^2-1}.$$

Границы областей устойчивости и неустойчивости:

$$A\left(\lambda,\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\right)=+1,\quad A\left(\lambda,\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\right)=-1.$$

Области неустойчивости

1) для осредненной модели

$$1-\frac{\varepsilon}{2\lambda^2}+\frac{7}{32}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\right)^2+\ldots\le\lambda^2\le 1+\frac{\varepsilon}{2\lambda^2}+\frac{7}{32}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\right)^2+\ldots$$

Области неустойчивости нет, если $\frac{\varepsilon}{\lambda^2}=\frac{3(A-B)\omega_0^2}{mB_0}=0,$

т.е. спутник заведомо отслеживает направление вектора индукции при отсутствии гравитационного момента

2) для прямого диполя

$$1-\frac{2\varepsilon-\lambda^2}{6\lambda^2}+\frac{7}{32}\left(\frac{2\varepsilon-\lambda^2}{3\lambda^2}\right)^2+\ldots\le\lambda^2\le 1+\frac{2\varepsilon-\lambda^2}{6\lambda^2}+\frac{7}{32}\left(\frac{2\varepsilon-\lambda^2}{3\lambda^2}\right)^2+\ldots$$

Области неустойчивости нет при $\frac{2\varepsilon-\lambda^2}{3\lambda^2}=\frac{2|A-B|\omega_0^2}{mB_0}-\frac{1}{3}\le 0,$

отслеживание вектора, если гравитационный момент мал по сравнению с магнитным.

Метод Пуанкаре

Уравнения движения представляем в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{du} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \text{где} \quad \mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma),$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – момент гравитационных и гироскопических сил;

$\varepsilon \mathbf{g}$ – момент сил, создаваемых за счет действия МСО;

ε – малый параметр.

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{du} + \varepsilon \frac{d\mathbf{x}_1}{du} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) + O(\varepsilon^2),$$

$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ – матрица Якоби

Уравнения первого приближения
(прямой диполь)

$$\frac{d\omega_1}{du} = -\theta_A\omega_2 + \frac{k}{A\omega_0}\left(\frac{\mu_e}{r^3}\right)^2 \sin u \sin i \cos i,$$

$$\frac{d\omega_2}{du} = \theta_B\omega_1 - 3\lambda_B\alpha - \frac{k}{B\omega_0}\left(\frac{\mu_e}{r^3}\right)^2 2\cos u \sin i \cos i,$$

$$\frac{d\alpha}{du} = \omega_2 - \gamma,$$

$$\frac{d\gamma}{du} = \omega_1 + \alpha.$$

Движение в плоскости орбиты

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\omega_3}{du} &= 3\lambda_C\beta + \frac{k}{C\omega_0}\left(\frac{\mu_e}{r^3}\right)^2 2\sin^2 i, \\ \frac{d\beta}{du} &= \omega_3, \end{aligned}} \Rightarrow$$

$$\beta_{общ} = C_1 \cos\sqrt{3\lambda_C}\,u + C_2 \sin\sqrt{3\lambda_C}\,u$$

$$\beta_{част} = -\frac{k}{3\lambda_C C\omega_0}\left(\frac{\mu_e}{r^3}\right)^2 2\sin^2 i$$

Сравнение (полярная орбита)

осредненная модель

$$\frac{d\omega_3}{du} = 3\lambda_C \beta + \frac{k}{C\omega_0} B_0^2,$$

$$\frac{d\beta}{du} = \omega_3.$$

прямой диполь

$$\frac{d\omega_3}{du} = 3\lambda_C \beta + \frac{k}{C\omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2 2\sin^2 i,$$

$$\frac{d\beta}{du} = \omega_3.$$

Частное решение:

$$\beta = -\frac{3}{4} \frac{k}{C\lambda_C \omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2$$

$$\beta = -\frac{2}{3} \frac{k}{C\lambda_C \omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2$$

Заключение

Описаны модели геомагнитного поля

Получены уравнения движения и исследованы их решения

- в случае переходных процессов
  - ✓ Получение полного набора первых интегралов усредненных уравнений движения в конечном виде возможно только при использовании осредненной модели.
- в случае установившегося движения
  - ✓ В случае плоского движения исследованы области неустойчивости и показано, что модель прямого диполя позволяет получить более точную как качественно, так и количественно картину поведения динамической системы.
  - ✓ Для определения точности достижения стационарного решения при использовании магнитной системы лучше использовать прямой диполь, так как он дает более точную оценку ошибки ориентации.