

Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)
ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
(Специализация «Управление динамическими системами»)

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ГРУППОВОГО ПОЛЕТА СПУТНИКОВ
С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕБРОСА МАСС

Выпускная бакалаврская квалификационная работа
студентки 972 группы
Шестакова С.А.

Научный руководитель
Овчинников М.Ю., д.ф.-м.н., проф.

Научный консультант
Иванов Д.С., аспирант

г. Москва

2013

Содержание

Введение	3
Глава 1. Решение задачи о перебросе массы	6
1.1 Постановка задачи	6
1.2 Скорость броска	8
1.3 Изменение относительной траектории	9
Глава 2. Некоторые случаи относительного движения после переброса массы	13
2.1 Замкнутость орбиты одного спутника относительно другого	13
2.2 Замкнутость двух орбит	17
Глава 3. Учёт влияния несферичности Земли	23
3.1 Постановка задачи и метод решения	23
3.2 Поддержание относительной траектории	24
Заключение	28
Список литературы	30

Введение

Групповой полет спутников расширяет возможности наблюдений, экспериментов, решения прикладных задач в космосе. Основными преимуществами являются способность одновременного выполнения множества наблюдений и экспериментов и повышенная работоспособность — неисправность одного из спутников не приводит к утрате работоспособности всей группы. Однако для проведения исследований требуется возможность управлять относительным движением спутников в группе. В связи с увеличением роли малых спутников, имеющих ограничения по полезной нагрузке, наибольший интерес представляют алгоритмы управления относительным движением, не требующие расхода рабочего тела. Существуют методы, основанные на использовании аэродинамической силы сопротивления о верхние слои атмосферы, магнитных и электростатических сил. Рассмотрим их подробнее.

При использовании электростатических сил взаимодействия для управления предполагается, что каждый спутник в формации способен накапливать заряд необходимого знака. Как указано в [1], использование подобных концепций управления не требует никаких новых устройств и технологий. Система управления зарядом была предложена в 1979 году на аппарате SCATHA [2]. Вычисления показывают [1], что для спутников с максимальным зарядом величиной в 4 мкКл, сила Кулона на расстоянии в 50-60 метров около 50 мкН. На настоящий момент существует ряд работ, посвященных динамике относительного движения спутников, взаимодействие которых осуществляется с помощью силы Кулона [1; 3; 4]. В частности, были изучены положения равновесия различных конфигураций, исследована их устойчивость. Сложность исследования заключается в том, что все спутники одновременно взаимодействуют между собой. С другой стороны, это позволяет рассматривать такую формацию как твердое тело [4].

Известно, что на заряженные частицы, которые движутся в магнитном поле, действует сила Лоренца. Такая же сила действует на заряженный спутник, который движется в магнитном поле Земли. Эта сила зависит от положения спутника и геометрии орбиты. Направление силы всегда перпендикулярно скорости космического аппарата. В работах [5;6] проведено исследование динамики формации спутников и предложен алгоритм управления, удерживающий группу спутников в нужной формации.

Для низкоорбитальных формаций, пожалуй, самым естественным является метод, основанный на дифференциальном эффекте торможения в атмосфере. Суть такого эффекта очень проста: управляя соответствующим образом ориентацией каждого спутника в группе, можно добиться того, чтобы на разные спутники действовали разные силы атмосферного сопротивления. Это позволяет осуществлять необходимые изменения относительного движения спутников в группе. Впервые высказанная в 1986 году [7], идея использования дифференциального эффекта торможения в атмосфере нашла свое развитие в многочисленных исследовательских работах лишь спустя полтора-два десятилетия — с началом бурного развития концепции группового полета. Были детально проанализированы возможности применения этого подхода в задачах стыковки КА[8; 9], предложены различные законы управления спутниковой формацией [10; 11].

В настоящей работе исследуется способ управления относительным движением, основанный на перебросе дополнительного тела между спутниками в группе.

Рассматривается группа, состоящая из двух спутников на близких орбитах (расстояние между спутниками мало по сравнению с характерным размером орбиты каждого из них). В некоторый момент времени в определенном направлении с заданной скоростью один из спутников выпускает дополнительное тело, которое затем неупруго и центрально сталкивается со вторым спутником, изменяя параметры его движения (скорость, наклонение и эксцентриситет ор-

биты, и т. д.) желаемым образом. Таким образом, с помощью переброса дополнительной массы можно производить маневры относительного движения спутников для удовлетворения требований миссии. Причем переброс масс не требует затраты топлива, для реализации броска можно использовать возобновляемую с помощью солнечного излучения электрическую энергию

С практической точки зрения самой сложной задачей, требующей высокой точности, является выброс массы в требуемом направлении, а также захват брошенного тела вторым спутником. Для возможности управления параметрами перебрасываемой массы спутники должны быть оборудованы манипуляторами, способными с достаточной точностью и скоростью ловить и выбрасывать массу. В качестве примера подобного устройства можно привести манипуляторы, разработанные для проекта по удалению космического мусора «Space Sweeper with Sling-Sat» [12]. Изменяемая длина плеча манипулятора и наклон «ложки» позволяют контролировать силу и направление броска груза (рис. 1).

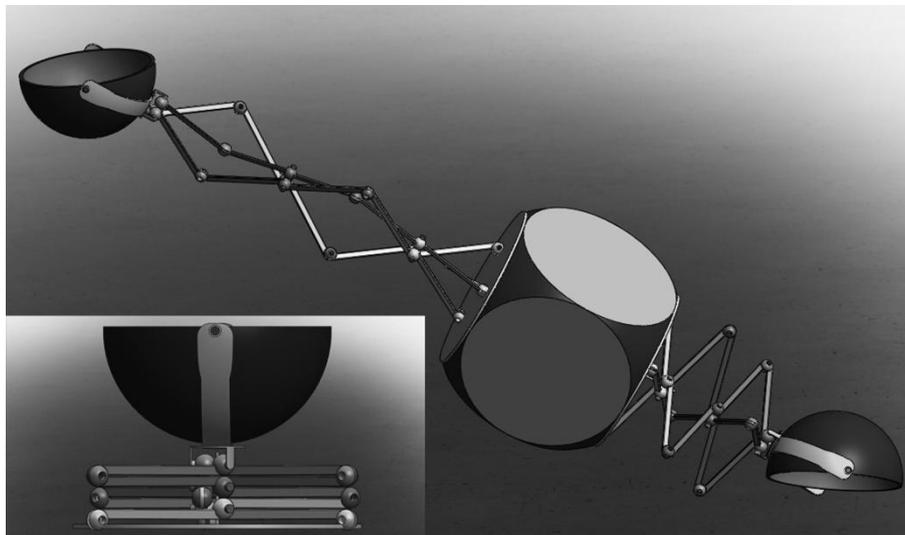


Рис. 1. Модель манипулятора для миссии «Space Sweeper with Sling-Sat»

Глава 1. Решение задачи о перебросе массы

1.1 Постановка задачи

Equation Section (Next) Будем рассматривать конфигурацию из двух спутников с близкими орбитами. Для описания траекторий в таком случае удобно пользоваться уравнениями движения в относительных координатах. Общий вид уравнения относительного движения двух спутников достаточно сложен для аналитического рассмотрения, поэтому в данной работе используется система уравнений Хилла–Клохесси–Уилтшира, которая соответствует движению двух спутников по близким околокруговым орбитам в центральном поле тяготения Земли [13; 14]. Используется орбитальная система координат, центр O которой движется по круговой орбите радиуса r_0 с угловой скоростью $\omega = \sqrt{\mu / r_0^3}$, μ — гравитационный параметр Земли, ось Oz направлена вдоль радиус-вектора первого (ловящего) спутника от центра Земли, ось Oy — по нормали к плоскости опорной орбиты в направлении орбитального момента, ось Ox дополняет систему до правой тройки.

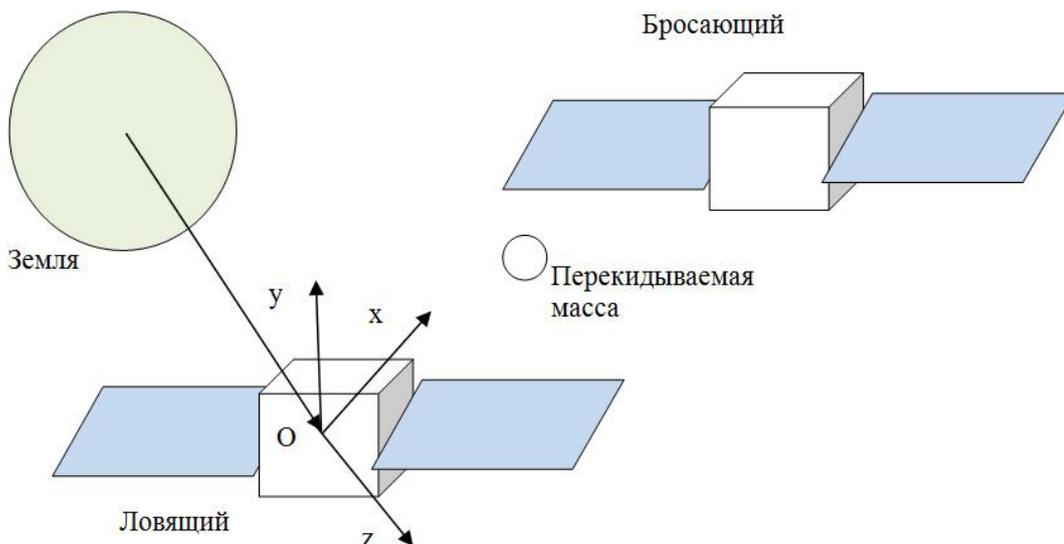


Рис. 2. Схематичное изображение группового полета

До переброса один из спутников, далее называемый ловающим, покоится в начале отсчета рассматриваемой системы координат, а система уравнений, описывающая движение второго (бросающего) спутника, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Решение системы есть

$$\begin{cases} x = -3C_1\omega t + 2C_2 \cos \omega t - 2C_3 \sin \omega t + C_4, \\ y = C_5 \sin \omega t + C_6 \cos \omega t, \\ z = 2C_1 + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t, \end{cases} \quad (1.2)$$

где константы интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ выражаются через начальные условия $x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0 = z(0), \dot{x}_0 = \dot{x}(0), \dot{y}_0 = \dot{y}(0), \dot{z}_0 = \dot{z}(0)$ следующим образом:

$$\begin{cases} C_1 = 2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}, \\ C_2 = \frac{\dot{z}_0}{\omega}, \\ C_3 = -3z_0 - \frac{2\dot{x}_0}{\omega}, \\ C_4 = x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega}, \\ C_5 = \frac{\dot{y}_0}{\omega}, \\ C_6 = y_0. \end{cases}$$

Как видно, относительная траектория бросающего спутника замкнута тогда и только тогда, когда $C_1 = 0$.

Требуется исследовать принципиальную возможность и особенности изменения относительного движения спутников в группе с помощью переброса между ними некоторой дополнительной массы.

1.2 Скорость броска

Предположим, что в момент времени $t = 0$ бросающий спутник выстреливает тело некоторой массы m . В орбитальной системе координат оно также движется по некоторой хилловской траектории с константами, задаваемыми положением и скоростью бросающего спутника в момент времени $t = 0$ и относительной скоростью выброса. Потребуем, чтобы в некоторый момент $t = t_1$ эта дополнительная масса столкнулась с ловящим спутником, т. е., чтобы выполнялось $x_1(t_1) = y_1(t_1) = z_1(t_1) = 0$.

Скорость массы $\dot{\mathbf{r}}_m$ в момент $t = 0$ равна:

$$\dot{\mathbf{r}}_m = \dot{\mathbf{r}}_0 + \Delta\mathbf{v},$$

где $\Delta\mathbf{v} = (\Delta\dot{x}, \Delta\dot{y}, \Delta\dot{z})^T$ — есть относительная скорость выброса, а $\dot{\mathbf{r}}_0$ — скорость бросающего спутника в момент броска. Подставим скорость в константы в решении системы уравнений Хилла (1.2) и используем начальные условия движения бросающего спутника. Окончательно, зануляя левую часть вследствие столкновения с ловящим спутником, покоящимся в центре системы координат, получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -3\left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}}{\omega}\right)\omega t_1 + 2\frac{\dot{z}_0 + \Delta\dot{z}}{\omega}\cos\omega t_1 - 2\left(-3z_0 - 2\frac{\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}}{\omega}\right)\sin\omega t_1 + \\ \quad + \left(x_0 - 2\frac{\dot{z}_0 + \Delta\dot{z}}{\omega}\right) = 0, \\ \frac{\dot{y}_0 + \Delta\dot{y}}{\omega}\sin\omega t_1 + y_0\cos\omega t_1 = 0, \\ 2\left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}}{\omega}\right) + \frac{\dot{z}_0 + \Delta\dot{z}}{\omega}\sin\omega t_1 + \left(-3z_0 - 2\frac{\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}}{\omega}\right)\cos\omega t_1 = 0, \end{array} \right.$$

линейную относительно $\Delta\dot{x}, \Delta\dot{y}, \Delta\dot{z}$. Решая её, находим требуемое значение относительной скорости выброса:

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = -\dot{x}_0 - 2z_0\omega + \omega \frac{x_0 \sin \omega t_1 - 2z_0(1 - \cos \omega t_1)}{8 \cos \omega t_1 + 3\omega t_1 \sin \omega t_1 - 8}, \\ \Delta\dot{y} = -\dot{y}_0 - y_0\omega \frac{\cos \omega t_1}{\sin \omega t_1}, \\ \Delta\dot{z} = -\dot{z}_0 - \omega \frac{2x_0(1 - \cos \omega t_1) + z_0(3\omega t_1 \cos \omega t_1 - 4 \sin \omega t_1)}{8 \cos \omega t_1 + 3\omega t_1 \sin \omega t_1 - 8}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Система вырождается при $\sin \omega t_1 = 0$, $y_0 \neq 0$ и при $8 \cos \omega t_1 + 3\omega t_1 \sin \omega t_1 - 8 = 0$. В этих случаях нет возможности для столкновения массы с ловящим спутником — краевая задача не имеет решений.

1.3 Изменение относительной траектории

Определим влияние переброса массы на относительное движение спутников. Пусть масса каждого из двух спутников формации (без перебрасываемой массы) M , дополнительная масса — m . Тогда, применяя закон сохранения импульса в момент выброса груза, получаем: $(M + m)\mathbf{v}_0 = M\mathbf{v}_1 + m(\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v})$, где \mathbf{v}_0 и \mathbf{v}_1 — скорости бросающего спутника до и после броска соответственно.

Отсюда получаем: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 - \Delta\mathbf{v} \cdot m / M$. Соответственно, изменяются константы в системе (1.1), описывающей траекторию бросающего спутника.

После столкновения с перебрасываемой массой ловящий спутник покидает начало орбитальной системы координат и начинает двигаться в ней по хилловской относительной траектории.

Найдем влияние столкновения с массой на траекторию ловящего спутника в системе координат, двигающейся по круговой орбите. Для этого, зная координаты x_0, y_0, z_0 и скорость из (1.3), сначала находим константы интегрирования, описывающие движение массы в орбитальной системе координат. Выражая их через начальные константы кидającego спутника и неизвестное время до столкновения, получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{1,m} = \frac{1}{A}((4C_1 + 2C_3)(\cos \omega t_1 - 1) + (2C_2 + C_4) \sin \omega t_1), \\ C_{2,m} = -\frac{1}{A}((4C_2 + 2C_4)(1 - \cos \omega t_1) - (8C_1 + 4C_3) \sin \omega t_1 + (6C_1 + 3C_3) \omega t_1 \cos \omega t_1), \\ C_{3,m} = -\frac{1}{A}((8C_1 + 4C_3)(1 - \cos \omega t_1) - (4C_2 + 2C_4) \sin \omega t_1 - (6C_1 + 3C_3) \omega t_1 \sin \omega t_1), \\ C_{4,m} = \frac{1}{A}((8C_2 + 4C_4)(\cos \omega t_1 - 1) - (16C_1 + 8C_3) \sin \omega t_1 + \\ \quad + (12C_1 + 6C_3) \omega t_1 \cos \omega t_1 + (6C_2 + 3C_4) \omega t_1 \sin \omega t_1), \\ C_{5,m} = -C_6 \operatorname{ctg} \omega t_1, \\ C_{6,m} = C_6, \end{array} \right.$$

здесь и далее $A = 8 \cos \omega t_1 + 3 \omega t_1 \sin \omega t_1 - 8$, индекс «m» относится к перебрасываемой массе.

Затем найдем скорость \mathbf{u} груза в момент времени $t = t_1$. В точке столкновения, а именно в начале координат, из закона сохранения импульса (начальная скорость ловящего тела нулевая) получаем:

$$\mathbf{v}_c = \frac{m}{M + m} \mathbf{u}(t_1),$$

где \mathbf{v}_c — скорость ловящего спутника после столкновения с массой.

Далее, считая t_1 новой точкой отсчета времени, получим окончательные уравнения движения ловящего спутника в орбитальной системе координат после переброса, то есть, определим новые константы интегрирования через начальные данные и значение сдвига по времени t_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\hat{C}_{1,c} = \frac{(4C_1 + 2C_3)(\cos \omega t_1 - 1) + (2C_2 + C_4) \sin \omega t_1}{(k+1)A}, \\
\hat{C}_{2,c} = \frac{(4C_2 + 2C_4)(1 - \cos \omega t_1) + (8C_1 + 4C_3) \sin \omega t_1 - (6C_1 + 3C_3) \omega t_1}{(k+1)A}, \\
\hat{C}_{3,c} = \frac{(8C_1 + 4C_3)(1 - \cos \omega t_1) - (4C_2 + 2C_4) \sin \omega t_1}{(k+1)A}, \\
\hat{C}_{4,c} = \frac{(8C_2 + 4C_4)(\cos \omega t_1 - 1) - (16C_1 + 8C_3) \sin \omega t_1 + (12C_1 + 6C_3) \omega t_1}{(k+1)A}, \\
\hat{C}_{5,c} = -C_6 \frac{1}{(k+1) \sin \omega t_1}, \\
\hat{C}_{6,c} = 0,
\end{array} \right. \quad (1.4)$$

здесь $k = M / m$, индекс «с» относится к ловащему спутнику.

Кроме того, для полного описания относительного положения спутников в группе требуется дополнительно пересчитать новые (после выстрела) константы интегрирования для бросающего спутника, сдвинув их на время t_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\hat{C}_{1,t} = \frac{1}{kA} \{ (8kC_1 + 4C_1 - 2C_3)(1 - \cos \omega t_1) + (2C_2 + C_4) \sin \omega t_1 - \\
\quad - 3(k+1)C_1 \omega t_1 \sin \omega t_1 \}, \\
\hat{C}_{2,t} = \frac{1}{2kA} \{ 4C_1 [3\omega t_1 - 4 \sin \omega t_1] + C_2 [(k+1)(3\omega t_1 \sin 2\omega t_1 + 8 \cos 2\omega t_1) - \\
\quad - 8(2k+1) \cos \omega t_1 + 8k] + C_3 [(k+1)(3\omega t_1 \cos 2\omega t_1 + 8 \sin 2\omega t_1) + \\
\quad + 8(2k+1) \sin \omega t_1 + 3(1-k)\omega t_1] + 4C_4 [\cos \omega t_1 - 1] \}, \\
\hat{C}_{3,t} = \frac{1}{2kA} \{ 16C_1 [\cos \omega t_1 - 1] + C_2 [(k+1)(8 \sin 2\omega t_1 + 3\omega t_1 (1 - \cos 2\omega t_1)) - \\
\quad - 8(2k+1) \sin \omega t_1] + C_3 [(k+1)(\cos 2\omega t_1 + 3\omega t_1 \sin 2\omega t_1) - \\
\quad - 8(2k+1) \cos \omega t_1 + 8k] + 4C_4 \sin \omega t_1 \}, \\
\hat{C}_{4,t} = \frac{1}{kA} \{ C_1 [16 \sin \omega t_1 - 12\omega t_1 - 3A(k+1)\omega t_1] + 8C_2 [1 - \cos \omega t_1] + \\
\quad + 2C_3 [4 \sin \omega t_1 - 3\omega t_1] + C_4 [3(k+1)\omega t_1 \sin \omega t_1 + 4(\cos \omega t_1 - 1) - 8k] \}, \\
\hat{C}_{5,t} = \frac{C_5(k+1)}{k} \cos \omega t_1 + \frac{C_6(\cos^2 \omega t_1 - k \sin^2 \omega t_1)}{k \sin \omega t_1}, \\
\hat{C}_{6,t} = \frac{k+1}{k} (C_5 \sin \omega t_1 + C_6 \cos \omega t_1),
\end{array} \right. \quad (1.5)$$

индекс «t» относится к бросающему спутнику.

Системы (1.4) и (1.5) вместе описывают положение спутников после переброса в орбитальной системе координат, которая движется по круговой орбите радиуса r_0 . Далее рассмотрим некоторые случаи относительного движения, и влияние на него переброса массы.

Глава 2. Некоторые случаи относительного движения после переброса массы

Для работы пары спутников требуется, по крайней мере, чтобы они образовывали группу, то есть не удалялись друг от друга на большие расстояния. В связи с этим целесообразно рассмотреть возможность переброса массы, который приводит к остановке начального дрейфа одного из спутников. В нашем случае это означает, что константа $C_1 \neq 0$.

Рассмотрим два возможных случая.

2.1 Замкнутость орбиты одного спутника относительно другого

Если два спутника движутся в одной и той же орбитальной системе координат по различным хилловским орбитам, то, как видно из (1.2), разность их координат будет ограниченной для любого времени t тогда и только тогда, когда константы C_1 у этих спутников равны между собой.

Из (1.4) и (1.5), обозначая $n = \omega t_1$, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{(8kC_1 + 4C_1 - 2C_3)(1 - \cos n) + (2C_2 + C_4)\sin n - 3(k+1)C_1 n \sin n}{k(8(\cos n - 1) + 3n \sin n)} = \\ & = -\frac{(4C_1 + 2C_3)(1 - \cos n) - (2C_2 + C_4)\sin n}{(k+1)(8(\cos n - 1) + 3n \sin n)}. \end{aligned}$$

Далее, переходим к половинному углу:

$$n = 2x, \quad 1 - \cos n = 2\sin^2 x, \quad \sin n = 2\sin x \cos x,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k}((8kC_1 + 4C_1 - 2C_3)\sin x + (2C_2 + C_4)\cos x - 6(k+1)C_1 x \cos x) = \\ & = \frac{1}{k+1}((4C_1 + 2C_3)\sin x - (2C_2 + C_4)\cos x). \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} & (8k^2C_1 + (2k+1)(4C_1 - 2C_3))\sin x + \\ & + (2k+1)(2C_2 + C_4)\cos x - 6(k+1)^2C_1 x \cos x = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Решая это уравнение относительно x для заданных констант, находим требуемое время переброса, а из него — требуемую скорость выброса (1.3) и окончательные параметры движения спутников группы (1.4) и (1.5).

Рассмотрим пример.

Зададим начальные данные: $C_1 = 10\text{m}$, $C_2 = 100\text{m}$, $C_3 = 87\text{m}$, $C_4 = 42\text{m}$, $C_5 = 100\text{m}$, $C_6 = 67\text{m}$, $k = 20$, $\omega = 0.0011\text{s}^{-1}$, период обращения орбитальной системы координат вокруг Земли $T = 2\pi / \omega \approx 5700\text{с}$.

Тогда уравнение (2.1) переходит в:

$$26506 \sin x + 9922 \cos x - 26460x \cos x = 0; \quad (2.2)$$

Это уравнение вида $\tan x = Ax + B$, оно имеет бесконечное число корней. Возьмем первый положительный корень этого уравнения: $x = 4.4726\text{рад} = \omega t_1 / 2$. Отсюда находим время переброса $t_1 = 8132\text{с}$. Подставляя затем полученные данные в (1.3), находим скорость выброса: $|\Delta \mathbf{v}| = 0.86\text{м/с}$.

На рис. 3 представлены траектории всех тел в процессе переброса в орбитальной системе координат, а на рис. 4 представлена траектория бросающего спутника относительно ловящего после совершения переброса. Изначально бросающий спутник совершал дрейф по оси Ox , так как $C_1 = 10\text{м}$. После переброса массы в исходной системе координат дрейф остался, однако после столкновения с ловящим спутником у последнего появился такой же дрейф. Поэтому в итоге спутники имеют уже замкнутую относительную траекторию. Как видно, спутники совершают дрейф в орбитальной системе координат, не разлетаясь друг от друга.

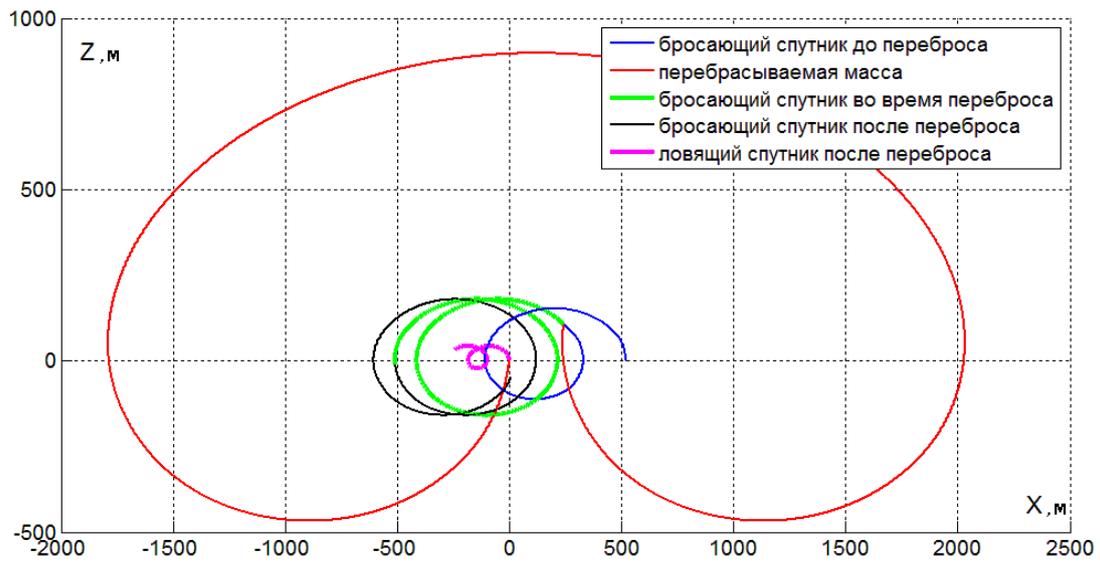


Рис. 3а. Пример траектории при перебросе массы. Проекция Oxz

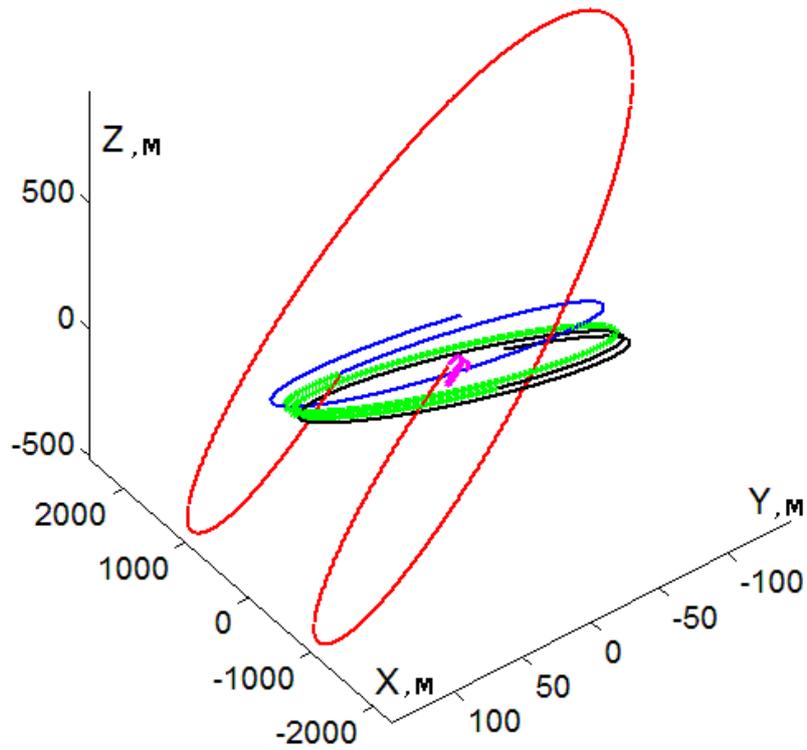


Рис. 3б. Пример траектории при перебросе массы. Общий вид.

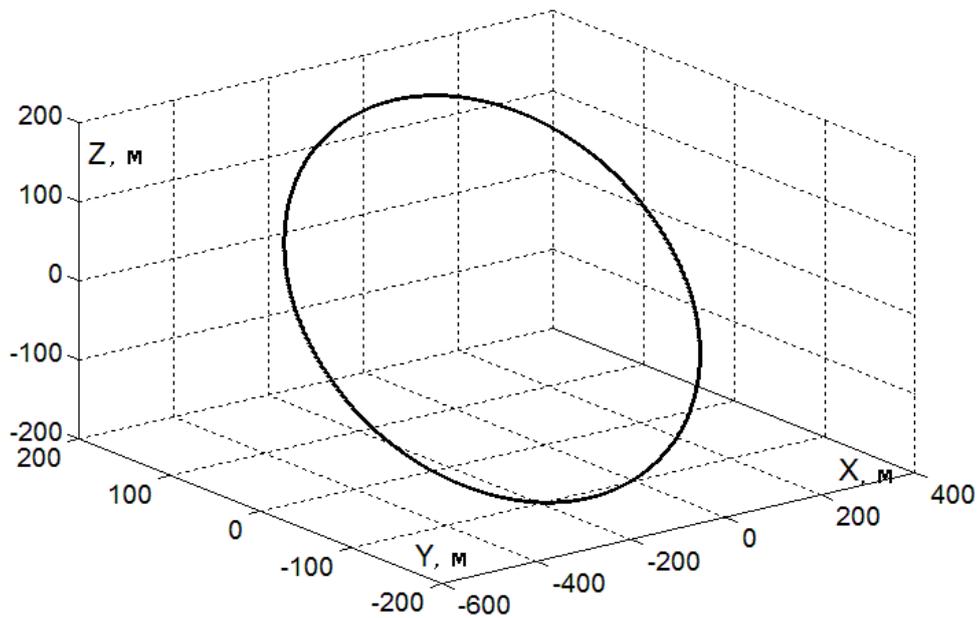


Рис. 4. Пример переброса — относительная траектория

Возьмем теперь следующий положительный корень уравнения (2.2): $x = 10.9007 \text{ рад}$, тогда $t_1 = 19819 \text{ с}$, то есть, переброс совершается почти за 3.5 периода обращения СК вокруг Земли. В данном случае $|\Delta v| \approx 2 \text{ м/с}$. Соответствующие траектории показаны на рис. 5 и 6.

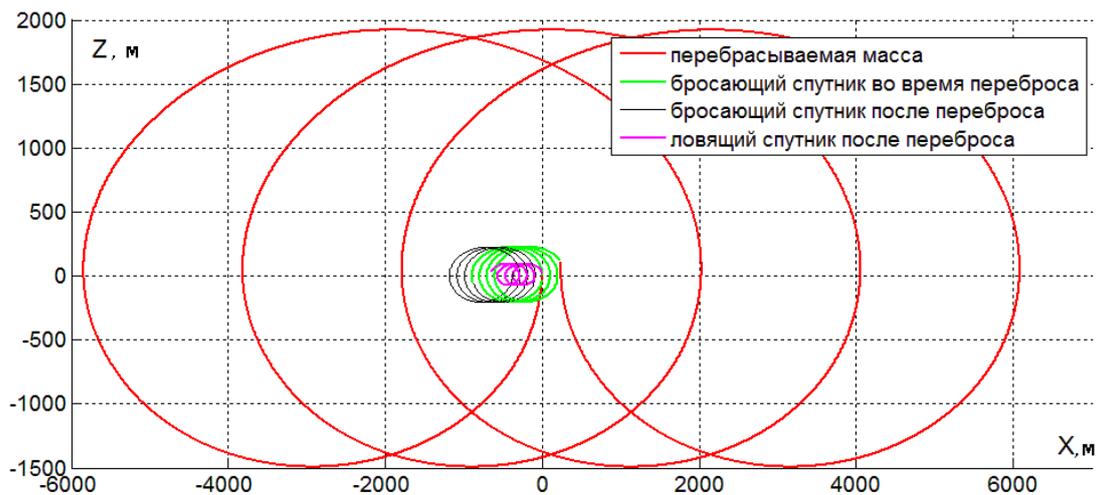


Рис. 5. Переброс массы, второй корень

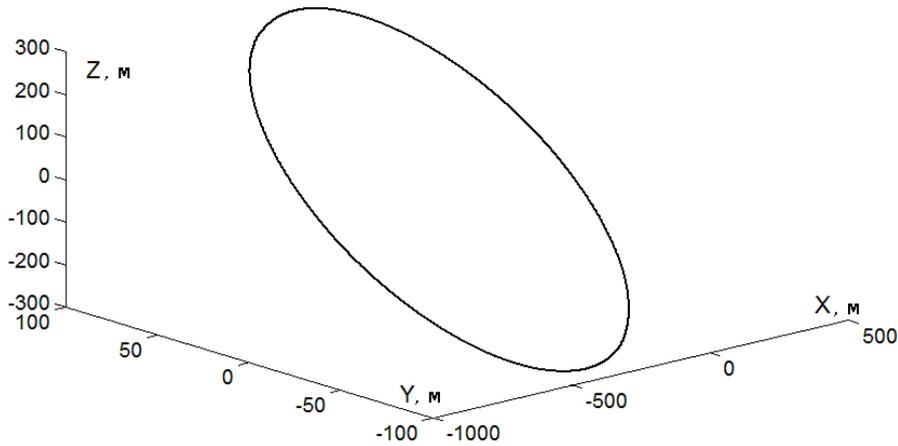


Рис. 6. Относительная траектория после переброса при втором корне

2.2 Замкнутость двух орбит

Более сильным условием ограниченности движения является замкнутость орбит обоих спутников в исходной орбитальной системе координат.

Исследуем возможность такого переброса. Примем $\hat{C}_{1,c} = 0$ и $\hat{C}_{1,t} = 0$. В тех же обозначениях получим систему уравнений относительно времени переброса (положительные множители опущены):

$$\begin{cases} \frac{(8kC_1 + 4C_1 - 2C_3)(1 - \cos n) + (2C_2 + C_4)\sin n - 3(k+1)C_1 n \sin n}{8(\cos n - 1) + 3n \sin n} = 0, \\ \frac{(4C_1 + 2C_3)(1 - \cos n) - (2C_2 + C_4)\sin n}{8(\cos n - 1) + 3n \sin n} = 0. \end{cases}$$

Переходя к половинному углу, имеем:

$$\begin{cases} \frac{(8kC_1 + 4C_1 - 2C_3)\sin x + (2C_2 + C_4)\cos x - 6(k+1)C_1 x \cos x}{3x \cos x - 4 \sin x} = 0, \\ \frac{(4C_1 + 2C_3)\sin x - (2C_2 + C_4)\cos x}{3x \cos x - 4 \sin x} = 0. \end{cases}$$

Складываем уравнения:

$$\frac{(8kC_1 + 8C_1)\sin x - 6(k+1)C_1 x \cos x}{3x \cos x - 4 \sin x} = 0,$$

из чего следует $C_1 = 0$.

Следовательно, замкнутые орбиты относительно исходной системы координат после переброса массы можно получить только в случае изначально замкнутой орбиты.

Если верно, что $C_1 = 0$, то время переброса можно получить из уравнения:

$$\frac{-2C_3 \sin x + (2C_2 + C_4) \cos x}{3x \cos x - 4 \sin x} = 0.$$

Выражая константы через начальные данные, находим:

$$x_0 \cos \frac{\omega t_1}{2} = 2z_0 \sin \frac{\omega t_1}{2}. \quad (2.3)$$

$$\omega t_1 = 2 \arctan \frac{x_0}{2z_0}. \quad (2.4)$$

В качестве примера рассмотрим случай круговой относительной начальной орбиты. Для этого положим

$$C_1 = 0, C_2 = a \cos \alpha, C_3 = a \sin \alpha, C_4 = 0, C_5 = \sqrt{3}a \cos \alpha, C_6 = \sqrt{3}a \sin \alpha, \quad (2.5)$$

где α параметризует точку выброса массы на окружности. Относительная орбита круговая, т.к.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \quad \text{и} \quad (x, y, z) \perp (0, -1, \sqrt{3}).$$

Тогда из (1.4) и (1.5) (и в их обозначениях), учитывая (2.3), получаем выражения констант интегрирования после переброса (ωt_1 выражается из (2.4)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_{1,c} = 0, \\ \hat{C}_{2,c} = -\frac{3a \sin \alpha \cdot \omega t_1}{(k+1)A}, \\ \hat{C}_{3,c} = 0, \\ \hat{C}_{4,c} = \frac{6a \sin \alpha \cdot \omega t_1}{(k+1)A}, \\ \hat{C}_{5,c} = -\frac{\sqrt{3}a \sin \alpha}{(k+1) \sin \omega t_1}, \\ \hat{C}_{6,c} = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_{1,t} = 0, \\ \hat{C}_{2,t} = \frac{a}{kA} (3 \sin \alpha \cdot \omega t_1 \cos \omega t_1 + 4k[\cos \alpha - \sin \alpha] - 8 \cos \alpha [\cos \omega t_1 - 1]), \\ \hat{C}_{3,t} = \frac{a(k+1)}{kA} (3 \cos \alpha \cdot \omega t_1 [1 - \cos \omega t_1]), \\ \hat{C}_{4,t} = -\frac{a}{k \cos \alpha}, \\ \hat{C}_{5,t} = \sqrt{3} a \cot \omega t_1 \sin \alpha, \\ \hat{C}_{6,t} = \frac{\sqrt{3} a \sin \alpha (k+1)}{k}, \end{array} \right.$$

а из (1.3) — значения относительной скорости выброса:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{x} = 0 \\ \Delta \dot{y} = -\frac{\sqrt{3} \omega a}{2 \cos \alpha}, \\ \Delta \dot{z} = -\frac{3 \omega^2 a t_1 \sin \alpha}{A}. \end{array} \right.$$

На рис. 7 и 8 показаны зависимости времени переброса и необходимой относительной скорости дополнительной массы в зависимости от точки выброса, которая задается углом α , для круговой начальной орбиты радиуса $a = 100\text{m}$.

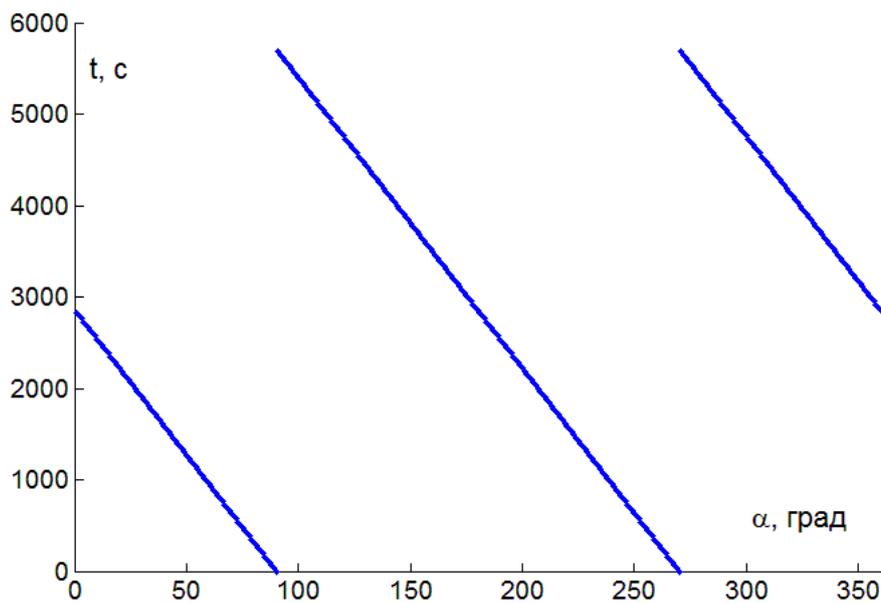


Рис. 7. Зависимость времени переброса от точки броска

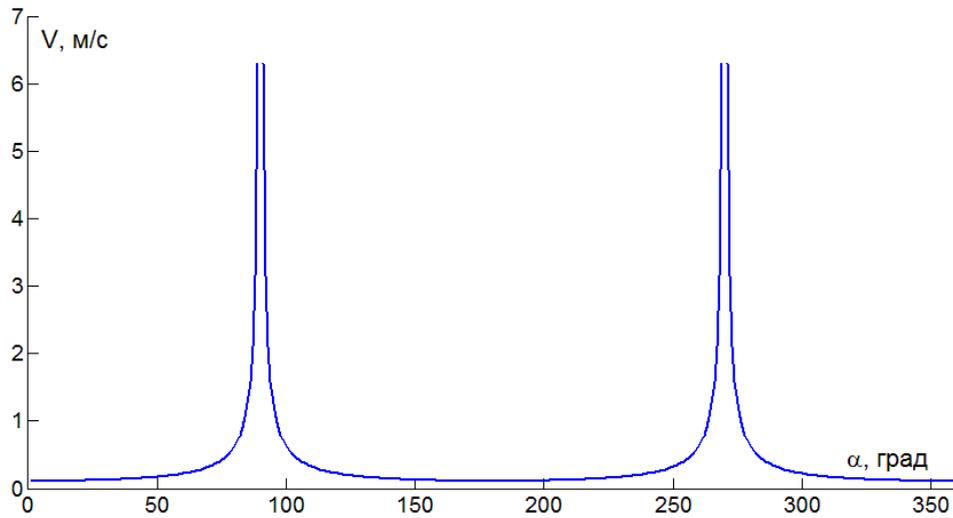


Рис. 8. Зависимость относительной скорости от точки броска

Исследуем подробнее относительную траекторию. До переброса она описывалась уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2a \cos(\omega t + \alpha), \\ y = \sqrt{3}a \sin(\omega t + \alpha), \\ z = a \sin(\omega t + \alpha). \end{cases}$$

После переброса:

$$\begin{cases} x_{\text{отн}} = 2A_1 \cos(\omega t + 2\phi) + B, \\ y_{\text{отн}} = A_2 \sin(\omega t + \psi), \\ z_{\text{отн}} = A_1 \sin(\omega t + \phi), \end{cases}$$

где ϕ и ψ — некоторые фазы, а амплитуды A_1 , A_2 и сдвиг B равны:

$$A_1 = \sqrt{(\hat{C}_{2,t} - \hat{C}_{2,c})^2 + (\hat{C}_{3,t} - \hat{C}_{3,c})^2},$$

$$A_2 = \sqrt{(\hat{C}_{5,t} - \hat{C}_{5,c})^2 + (\hat{C}_{6,t} - \hat{C}_{6,c})^2},$$

$$B = \hat{C}_{4,t} - \hat{C}_{4,c}.$$

Качественная зависимость изменения A_1 , A_2 и B в зависимости от точки выброса массы видна из рис. 9 — амплитуды слабо изменяются при всех точках

выброса, кроме небольших участков возле мест вырождения. Сдвиг B , с другой стороны, достаточно значителен.

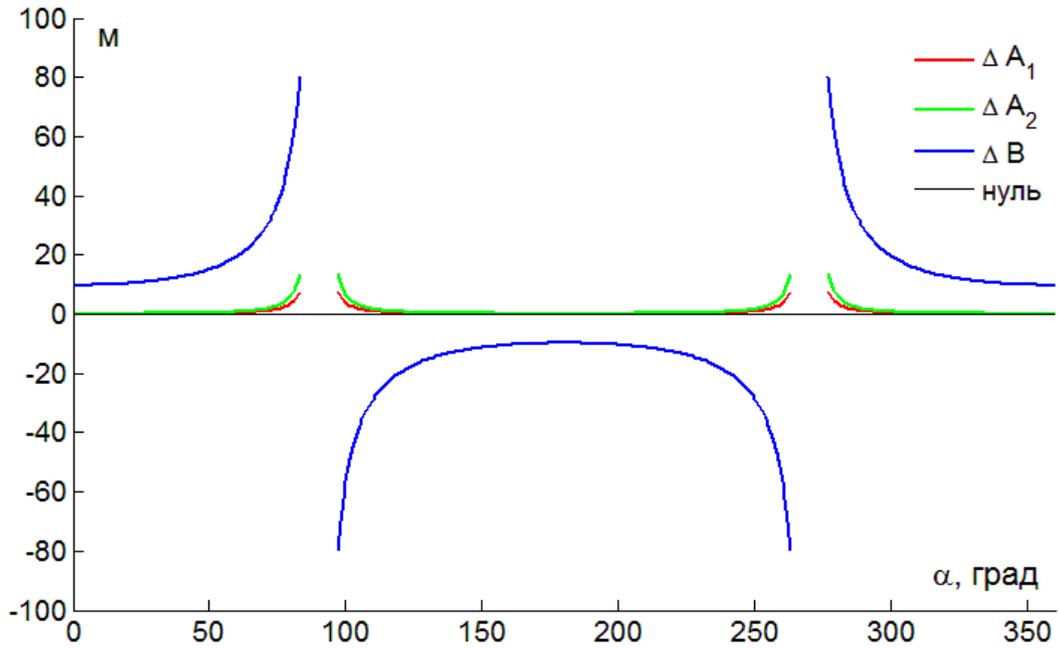


Рис. 9. Изменение констант A_1, A_2, B

На рис. 10 и 11 в качестве примера показаны два варианта переброса массы на круговой относительной орбите.

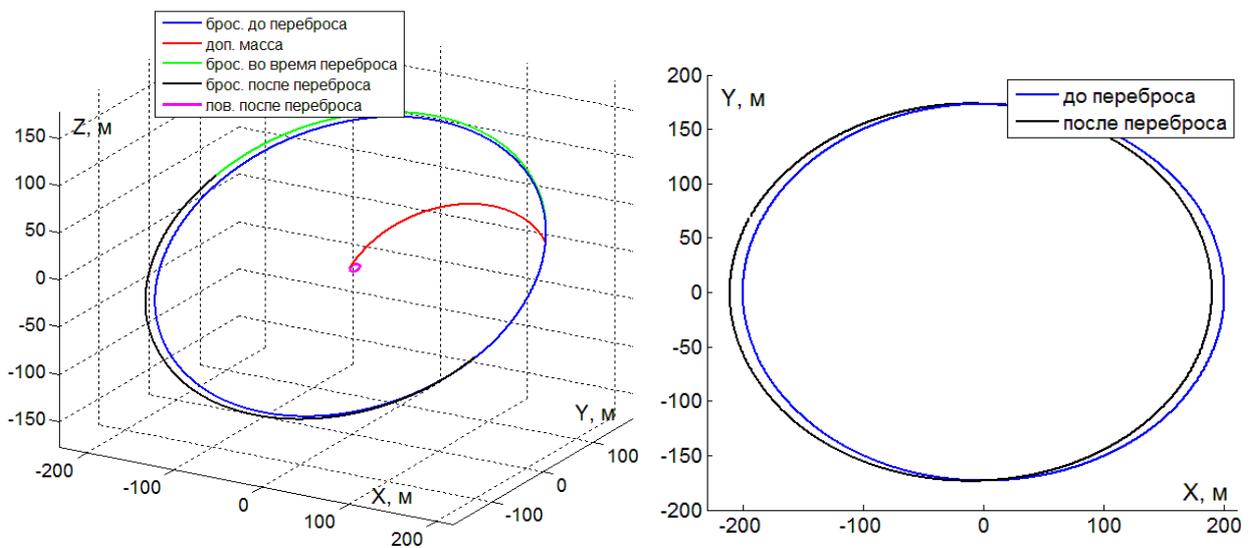


Рис. 10. Переброс при $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Орбитальная и относительная СК

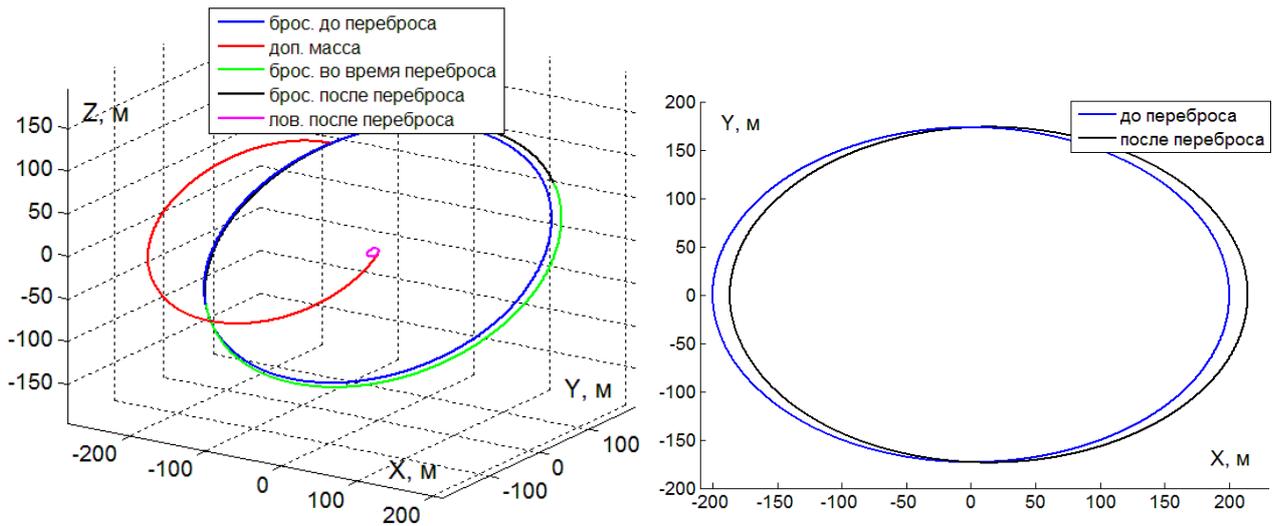


Рис. 11. Переброс при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Орбитальная и относительная СК

Таким образом, рассмотренные примеры изменения относительных траекторий изначально замкнутых орбит с помощью переброса массы показывают, что, выбирая точку переброса массы, можно сдвигать по оси Ox положение ловящего тела. При этом размеры круговой орбиты изменяются слабо. Однако, если выбрать точку переброса вблизи углов $\pi/2$ и $3\pi/2$, то возможно также значительно изменить и размеры замкнутой относительной траектории. Причем, изменение размеров можно производить многократно с использованием одной и той же перебрасываемой массы — после переброса ловящий и бросающий спутник меняются ролями и можно совершить переброс снова.

Глава 3. Учёт влияния несферичности Земли

3.1 Постановка задачи и метод решения

Equation Section (Next)Основной недостаток уравнений (1.1) — низкая точность на больших промежутках времени. Основной причиной этого является влияние второй гармоники J_2 гравитационного поля Земли. Уравнения (1.1) были модифицированы Седвиком и Швайгардом [15], чтобы учитывать влияние J_2 на движение спутника.

Пусть орбиты двух спутников близки к некоторой опорной круговой орбите. i_0, i_1, i_2 — наклонения опорной орбиты и двух спутников соответственно. Пусть $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ — координаты первого и второго спутников в опорной системе координат. Тогда для $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \ddot{x} + A\dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + q^2 y = 2lq \cos(qt + \phi), \\ \ddot{z} - A\dot{x} - Bz = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$A = 2\omega c,$$

$$B = \omega^2(5c^2 - 2),$$

$$c = \sqrt{1 + \frac{3J_2 R_\oplus^2}{8r_0^2}(1 + 3\cos 2i_0)},$$

$$q = \omega c + \frac{3\omega J_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \left(\cos^2 i_2 - \frac{(\cos i_1 - \cos i_2)(\cot i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0 - \cos i_2)}{\sin^2 \Delta\Omega_0 + (\cot i_1 \sin i_2 - \cos i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2} \right),$$

$$l = -\frac{3\omega J_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \frac{(\cos i_1 - \cos i_2) \sin i_1 \sin i_2 \sin \Delta\Omega_0}{\sqrt{1 - (\cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2}},$$

$$\Delta\Omega_0 = \frac{y_0}{r_0 \sin i_0},$$

где R_\oplus — радиус Земли, r_0 — радиус опорной орбиты, ω — угловая скорость вращения по опорной орбите.

ϕ находится из уравнения

$$l \sin \phi + q y_0 \cot \phi = \dot{y}_0.$$

Решение системы (3.1) есть

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{A}{a^3} (A\dot{x}_0 + Bz_0) \sin at + \frac{A\dot{z}_0}{a^2} (\cos at - 1) - \frac{B}{a^2} (\dot{x}_0 + Az_0)t, \\ y = \left(lt + \frac{y_0}{\sin \phi} \right) \sin(qt + \phi), \\ z = \frac{A}{a^2} (\dot{x}_0 + Az_0) + \frac{\dot{z}_0}{a} \sin at - \frac{1}{a^2} (A\dot{x}_0 + Bz_0) \cos at, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $a = \sqrt{A^2 - B}$, $(x_0, y_0, z_0), (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ — координаты и скорости в момент времени $t = 0$. Следует заметить, что \dot{y}_0 присутствует в (3.2) неявно, влияя на ϕ .

Однако, применение общего алгоритма, описанного выше, для рассматриваемой системы уравнений затрудняется тем, что в (3.2) константы зависят от относительной орбиты спутника, а значит, вместо линейной системы вида (1.3) мы получим некоторую нелинейную зависимость. Упростим задачу: будем считать движение спутника по уравнениям Швайгарда-Седвика(3.1), однако переброс будем осуществлять согласно уравнениям Хилла. Такой подход оправдан тем, что на малых промежутках времени (порядка периода вращения по опорной орбите) уравнения (1.1) хорошо описывают движение спутника.

3.2 Поддержание относительной траектории

Рассмотрим следующий пример: начальные условия обеспечивают круговую относительную орбиту, однако вследствие влияния члена J_2 орбиты спутников расходятся, орбита одного спутника относительно другого смещается, что соответствует росту константы C_4 в уравнениях (1.2). Требуется осуществлять переброс дополнительной массы с тем, чтобы спутники не расходились друг от друга.

Продemonстрируем возможность этого на конкретном примере: возьмем константы из (2.5), α положим равным $\frac{\pi}{4}$.

Изменение констант Хилла под действием J_2 приведено на рис. 12. Как можно заметить, наблюдается постоянное уменьшение C_4 и, соответственно, расхождение спутников.

Будем поступать следующим образом: с некоторым шагом по времени проверять, не опустилось ли C_4 ниже выбранной критической отметки. Если это произошло, то в ближайший подходящий момент (в данном случае, увеличивающий C_4 на приемлемую величину) производим переброс, изменение констант после которого рассчитываем по уравнениям Хилла. Значения тех же констант с учетом управления перебросами приведено на рис. 13.

Как можно видеть, переброс масс позволяет противодействовать относительному дрейфу спутника, однако тот же самый переброс изменяет форму орбиты, делая её более вытянутой. Таким образом, изменяя точку выброса дополнительной массы на орбите, мы можем менять влияние переброса на форму, размер и сдвиг орбиты.

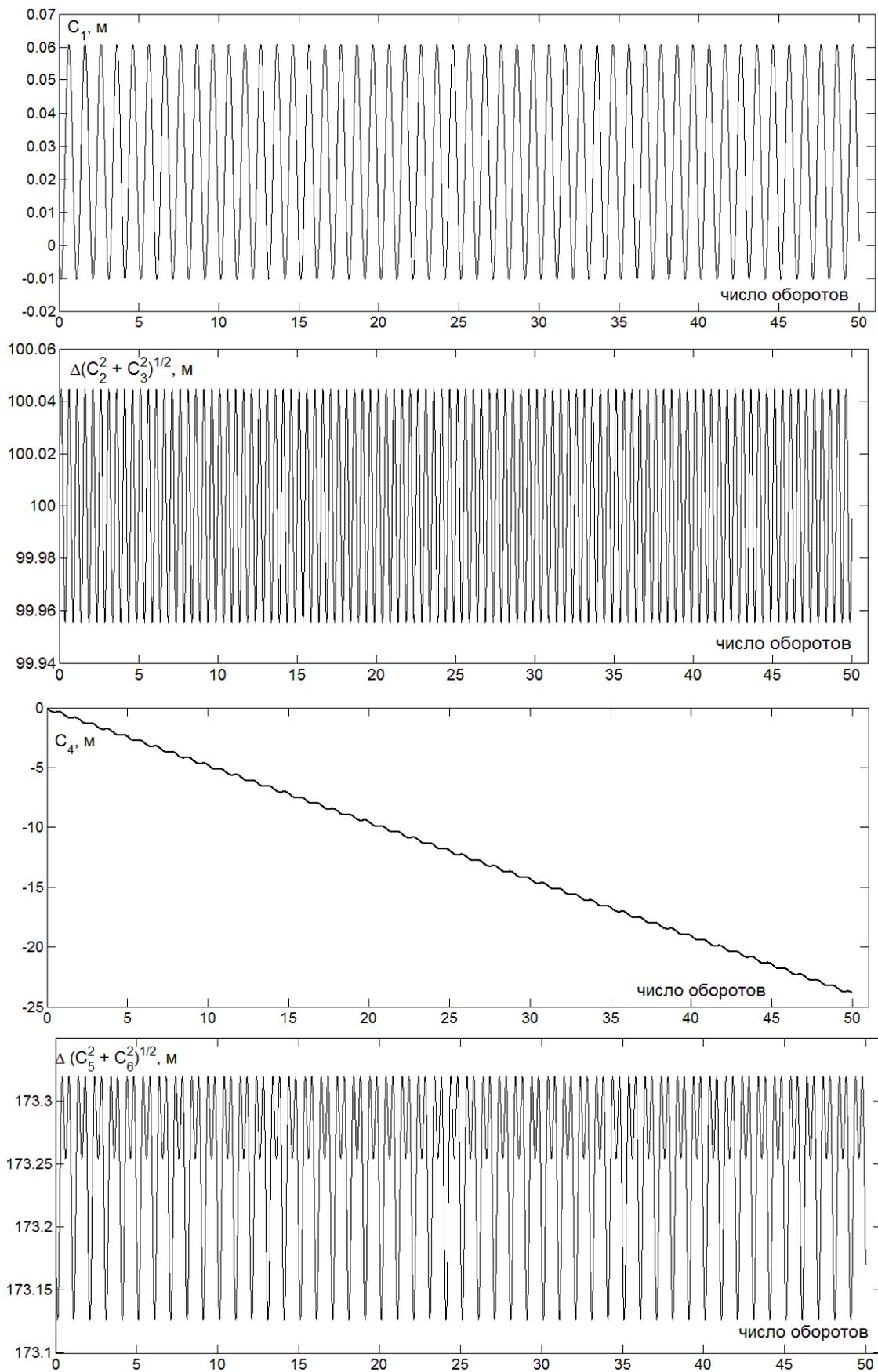


Рис. 12. Изменение констант без перебросов

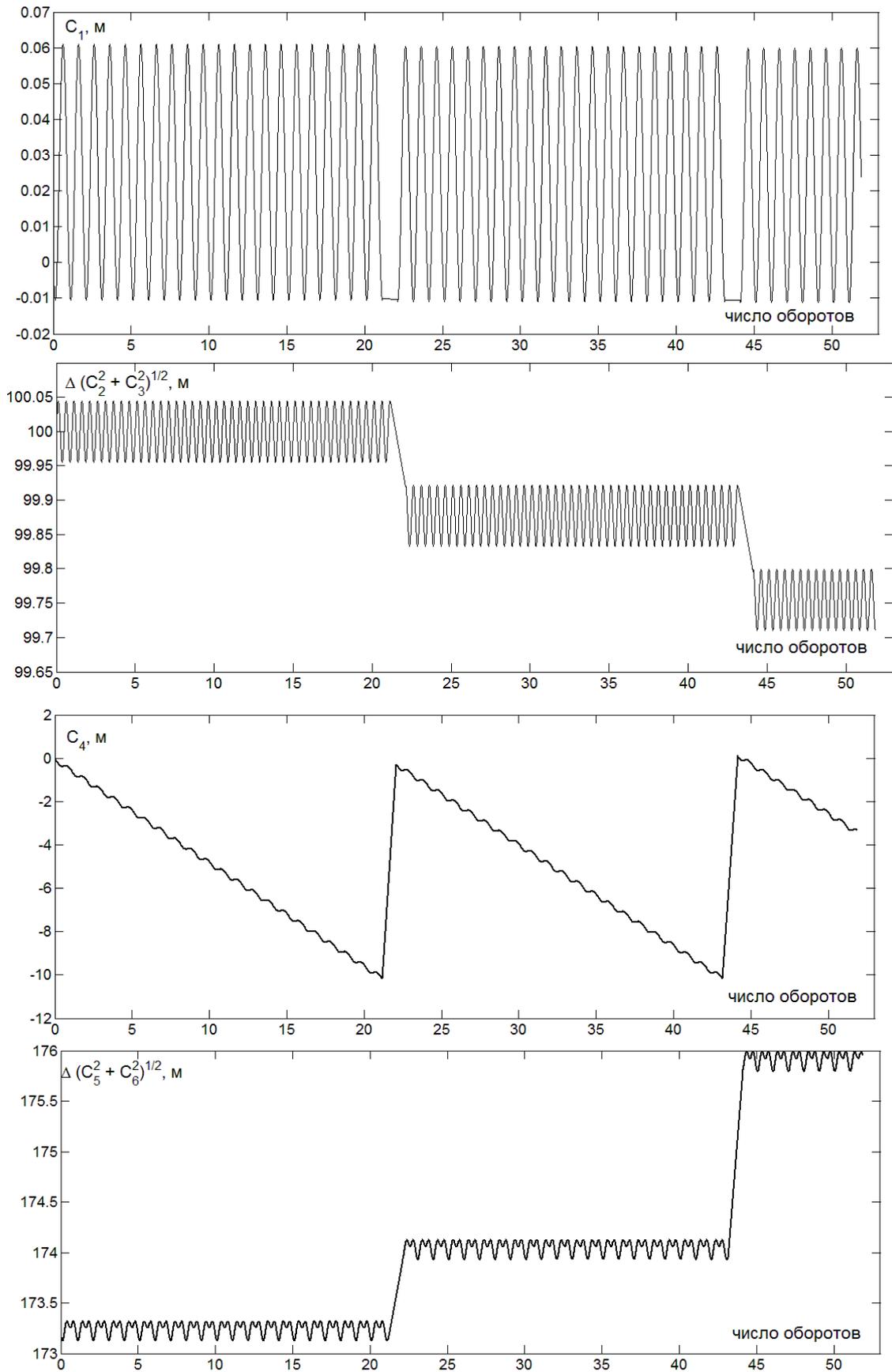


Рис. 13. Изменение констант с перебросами

Заключение

В настоящей работе было проведено исследование возможности управления относительным движением спутников в группе с помощью переброса масс. Для хилловской модели полета были выведены основные уравнения, связывающие параметры относительного движения до и после переброса. Показано, что с помощью переброса массы можно остановить относительный дрейф двух спутников. В случае изначально замкнутой орбиты возможно сдвинуть относительную траекторию по оси Ox , при этом слабо изменяя форму относительной траектории. Выбрав точку бросания массы, возможно изменить также и форму траектории.

Так как основное влияние на относительное движение оказывает вторая гармоника разложения гравитационного поля Земли, были рассмотрены уравнения, учитывающие это возмущение. Было показано на примере, что с помощью переброса массы возможно бороться с дрейфом относительного движения, выбирая необходимую для этого точку переброса.

Таким образом, предложенный метод управления относительным движением спутников в группе с помощью переброса массы может успешно применяться для относительных маневров, для изменения конфигурации полета, а также для поддержания заданной траектории. Однако следует учитывать, что с помощью переброса массы возможно не произвольное изменение траектории, а только некоторый ограниченный набор вариантов, который определяется параметрами начальной орбиты, массами спутников и дополнительного тела.

В дальнейшем планируется изучить чувствительность относительной траектории к ошибкам исполнения броска — в скорости и направлении. С помощью манипуляторов возможно осуществить захват перебрасываемого тела на некотором расстоянии от центра масс, однако в этом случае требуется рассчитать передаваемый массой импульс и учесть движение спутника относительно центра масс. Также следует рассмотреть задачу управления манипулятором и

управления движением относительно центра масс бросающего спутника. Эти задачи планируется решить в рамках магистерской работы.

Список литературы

1. Schaub H. и др. Challenges and Prospects of Coulomb Spacecraft Formation Control of the Astronautical Sciences // *Journal of the Astronautical Sciences*. 2004. Т. 52. С. 169–193.
2. Mullen E.G., Gussenhoven M.S., Hardy D.A. SCATHA Survey of High-Voltage Spacecraft Charging in Sunlight // *Journal of the Geophysical Sciences*. 1986. Т. 91. С. 1074–1090.
3. King L.B., Parker G.G. Spacecraft Formation-flying using Inter-vehicle Coulomb Forces. : NASA/NIAC, 2002.
4. Joe H., Schaub H., Parker G.G. Formation Dynamics of Coulomb Satellites // 6th International Conference on Dynamics and Control of Systems and Structures in Space. 2004. С. 79–90.
5. Saaj С.М. и др. Electostatic Forces for Satellite Swarm Navigation Reconfiguration С. 96.
6. Peck M.A. и др. Spacecraft Formation Flying Using Lorentz Forces // *Journal of the British Interplanetary Society*. 2007. Т. 60. С. 263–267.
7. Leonard C.L. Formation Keeping of Spacecraft via Differential Drag // Master Thesis, Massachusetts Institute of Technology. 1986.
8. Bevilacqua R., Romano M. Rendezvous Maneuvers of Multiple Spacecraft Using Differential Drag under J2 Perturbation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2008. Т. 31. № 6. С. 1595–1607.
9. Bevilacqua R., Hall J.S., Romano M. Multiple Spacecraft Rendezvous Maneuvers by Differential Drag and Low Thrust Engines // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2010. Т. 106. № 1. С. 69–88.
10. Reid T., Misra A. Formation Flying of Satellites in the Presence of Atmospheric Drag // *Journal of Aerospace Engineering, Sciences and Applications*. 2011. Т. 3. С. 64–91.
11. Kumar B.S. и др. Differential Drag as a Means of Spacecraft Formation Control // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2011. Т. 47. № 2. С. 1125–1135.
12. Missel J., Mortari D. Removing Space Debris Through Sequential Captures and Ejections // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2013. С. 1–10.

13. Hill G.W. Researches in Lunar Theory // American Journal of Mathematics. 1878. T. 1. C. 5–26.

14. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // Journal of the Astronautical Sciences. 1960. T. 27. № 9. C. 653–678.

15. Schweighart S., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2002. T. 25. № 6. C. 1073–1080.