

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

**ПОДДЕРЖАНИЕ ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ
ТРАЕКТОРИЙ ГРУППЫ СПУТНИКОВ
С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕБРОСА МАССЫ**

Выпускная квалификационная работа
(магистерская диссертация)

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика
Магистерская программа: Управление динамическими системами

Выполнил:

студент 972 группы _____ Шестаков Сергей Алексеевич

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор _____ Овчинников Михаил Юрьевич

Научный консультант:

к.ф.-м.н. _____ Иванов Данил Сергеевич

Москва 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 Задача о перебросе массы	6
1.1 Постановка задачи	6
1.2 Скорость выброса	8
1.3 Изменение относительной траектории	9
ГЛАВА 2 Некоторые случаи относительного движения после переброса массы	13
2.1 Замкнутость орбиты одного спутника относительно другого	13
2.2 Замкнутость двух орбит	16
2.3 Общий случай выравнивания дрейфов	18
ГЛАВА 3 Оптимизационные задачи	22
3.1 Достижение траектории наиболее «близкой» к начальной	23
3.2 Минимизация скорости броска	24
3.3 Минимизация времени переброса	24
ГЛАВА 4 Влияние ошибок	27
4.1 Ошибка при определении точки выброса	27
4.2 Ошибка в скорости выброса	28
4.3 Нецентральное столкновение	29
4.4 Нелинейная модель	30
ГЛАВА 5 Учёт влияния несферичности Земли	32
5.1 Постановка задачи и метод решения	32
5.2 Поддержание относительной траектории	33
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	37
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	39

ВВЕДЕНИЕ

Групповой полет спутников расширяет возможности наблюдений и экспериментов, проводимых в космосе. Группа спутников, летающих на небольшом расстоянии друг от друга может решать различные задачи: обслуживание и монтаж станций на орбите [1], исследование пояса астероидов [2] или построение распределенной измерительной установки [3]. Спутники в группе могут образовывать специфические конфигурации [4] или же двигаться достаточно хаотично с единственным ограничением: ограниченной дистанцией между спутниками [5].

Основными преимуществами использования группы спутников являются способность одновременного выполнения множества наблюдений и экспериментов и повышенная работоспособность — неисправность одного из спутников не приводит к утрате работоспособности всей группы. Однако, для проведения исследований требуется возможность управлять относительным движением спутников в группе. В связи с увеличением роли малых спутников, имеющих ограничения по полезной нагрузке, наибольший интерес представляют алгоритмы управления относительным движением, не требующие расхода рабочего тела. Для создания сил и моментов, необходимых для управления, используются различные возобновляемые источники энергии. К настоящему времени известны несколько способов бестопливного управления групповым полётом спутников. В качестве примеров можно привести тросовые системы [6, 7], методы, основанные на использовании аэродинамического торможения [8], магнитных, электростатических [9] и лоренцевых сил [10].

В последние годы активно исследуется новая концепция управления групповым полётом. Основная идея состоит в следующем: один спутник создаёт импульс, возникающий при отделении дополнительной массы, другой спутник ловит массу и перенаправляет её обратно. Подобный подход был впервые предложен в статье Вае [11]. В ней рассматривается управление относительным движением с помощью лазерных лучей, при этом перенаправление пучка света производится с помощью зеркал. Создаваемый

лазером импульс порождает отталкивающую силу, которая и используется для управления. Идея Вае была развита в работе Tragesser [12]. В статье изучаются положения равновесия в группе спутников при наличии непрерывного потока массы между ними. Оригинальный подход к реализации концепции обмена импульсом был предложен Joslyn и Ketsdever [13]. Основная идея состоит в использовании потока жидкости: каждый спутник может генерировать и выпускать поток жидкости в виде капель. Капли жидкости ловятся вторым спутником и затем перенаправляются обратно. В статье также исследуются различные возмущения земной орбиты, способные привести к отклонению потока капель от требуемого пути. Schonig и Ketsdever [14] изучили методы обмена импульсом, способные обеспечивать устойчивость конфигурации спутников в группе.

В описанных работах предполагается, что масса, передаваемая между спутниками, является малой по сравнению с массой самих спутников, равно как и время совершения маневра — малым по сравнению с периодом обращения спутников вокруг Земли. Кроме того, силы, управляющие относительным движением и действующие на пару спутников, равны и противоположно направлены. Данная работа предлагает иной подход к управлению с помощью переброса массы. Дополнительное твёрдое тело служит для передачи импульса между спутниками в группе. До совершения переброса один из спутников состоит из двух частей: собственно спутника и дополнительного тела, которое само по себе может быть пассивной массой или независимым космическим аппаратом. В определённый момент по команде дополнительное тело отделяется от спутника с заданной относительной скоростью, при этом спутник получает импульс согласно закону сохранения импульса. Дополнительное тело движется по некоторой траектории и сталкивается со вторым спутником неупруго. При этом относительная траектория спутников в группе снова меняется, а дополнительное тело остаётся в системе и может быть использовано в дальнейшем. Подобный подход был предложен в статье [15], дальнейшее исследование проведено в статье [16].

Наиболее критичным для данной схемы управления является наличие механизма броска/ловли дополнительного тела. Таким механизмом может

быть некий манипулятор, установленный на спутниках (в качестве примера можно рассмотреть манипулятор из [17]). Вследствие этого важным представляется определение приемлемых возможных ошибок в определении места и скорости выброса тела, при которых переброс всё ещё будет осуществим и тело не будет потеряно в процессе управления движением. Предполагается, что механизм броска/ловли может ловить дополнительное тело в некоторой малой окрестности центра масс спутника. Допустимые значения ошибок рассчитаны и проиллюстрированы примерами.

С практической точки зрения самой сложной задачей, требующей высокой точности, является выброс массы в требуемом направлении, а также захват брошенного тела вторым спутником. Для возможности управления параметрами перебрасываемой массы спутники должны быть оборудованы манипуляторами, способными с достаточной точностью и скоростью ловить и выбрасывать массу. В качестве примера подобного устройства можно привести манипуляторы, разработанные для проекта по удалению космического мусора «Space Sweeper with Sling-Sat» [17]. Изменяемые длина плеча манипулятора и наклон «ложки» позволяют контролировать силу и направление броска груза. Концептуальное изображение представлено на рис. 1.

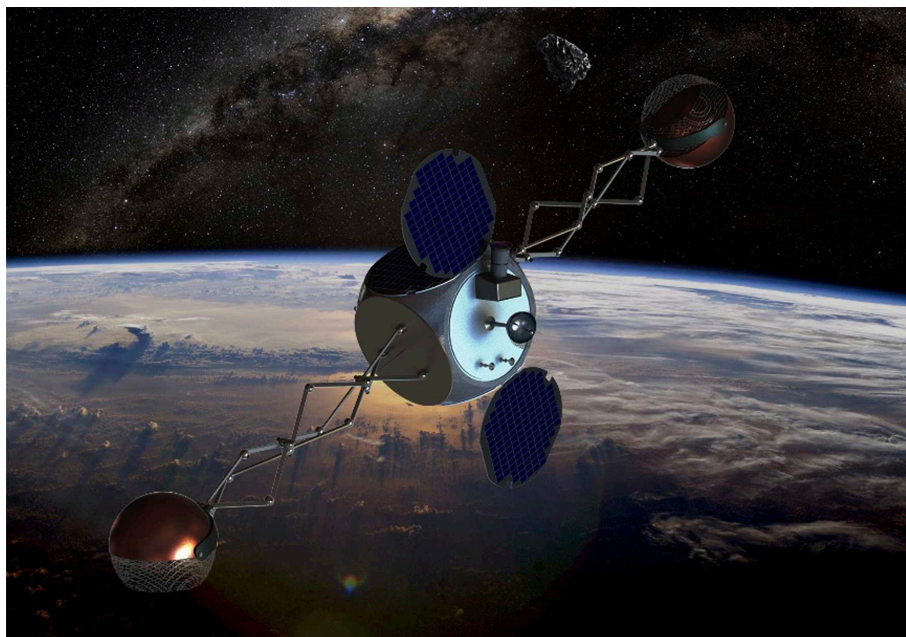


Рис. 1. Механизм броска/ловли для миссии Space Sweeper with Sling-Sat

ГЛАВА 1

Задача о перебросе массы

1.1 Постановка задачи

Будем рассматривать конфигурацию из двух спутников с близкими орбитами. Для описания траекторий в таком случае удобно пользоваться уравнениями движения в относительных координатах. Общий вид уравнения относительного движения двух спутников достаточно сложен для аналитического рассмотрения, поэтому в данной работе используется система уравнений Клохесси–Уилтшира (Clohessy–Wiltshire) [18], которая описывает движение спутника относительно некоторого опорного тела O , движущегося вокруг Земли. Система имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\omega\dot{z} &= 0, \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= 0, \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где ось Oz направлена вдоль радиус-вектора опорного тела от центра Земли, ось Oy — по нормали к плоскости опорной орбиты в направлении орбитального момента, ось Ox дополняет систему до правой тройки, O — опорное тело, движущееся по круговой орбите радиуса ρ с угловой скоростью $\omega = \sqrt{\mu/\rho^3}$, μ — гравитационный параметр Земли. Система координат $Oxyz$ — орбитальная система координат (ОСК) — схематично представлена на рис. 1.1.

Предположим, что изначально движение одного из спутников (далее «бросающего») в ОСК описывается уравнениями (1.1), а второй спутник (далее «ловящий») покоится в точке O .

Пусть поставлена задача Коши для системы (1.1) с начальными условиями

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0\end{aligned}\tag{1.2}$$

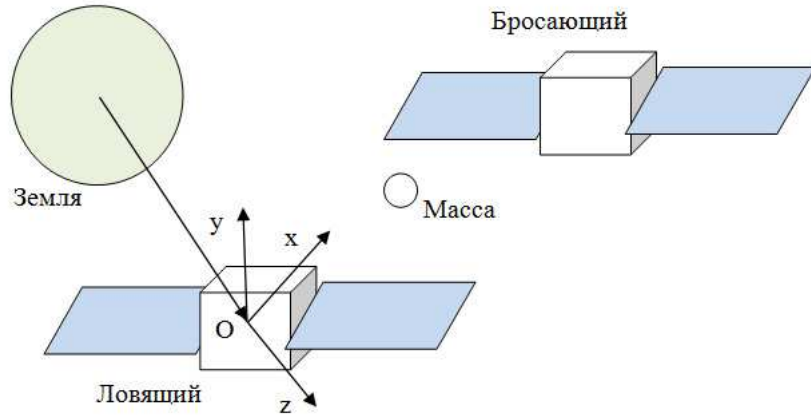


Рис. 1.1. Схематичное изображение группового полёта

Решение задачи (1.1, 1.2) есть

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \left[x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega} + 3\omega \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \right) t_0 \right] - 3 \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \right) \omega t \\
 &+ 2 \left[\frac{\dot{z}_0}{\omega} \cos \omega t_0 - \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \sin \omega t_0 \right] \cos \omega t \\
 &+ 2 \left[\frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t_0 + \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \cos \omega t_0 \right] \sin \omega t, \\
 y(t) &= \left(y_0 \sin \omega t_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos \omega t_0 \right) \sin \omega t \\
 &+ \left(y_0 \cos \omega t_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t_0 \right) \cos \omega t, \\
 z(t) &= \left[\frac{\dot{z}_0}{\omega} \cos \omega t_0 - \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \sin \omega t_0 \right] \sin \omega t \\
 &- \left[\frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t_0 + \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \cos \omega t_0 \right] \cos \omega t + 2 \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \right).
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Удобно ввести константы

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0, \\
C_2 &= \frac{\dot{z}_0}{\omega} \cos \omega t_0 - \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \sin \omega t_0, \\
C_3 &= \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t_0 + \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \cos \omega t_0, \\
C_4 &= x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega} + 3\omega \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \right) t_0, \\
C_5 &= y_0 \sin \omega t_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos \omega t_0, \\
C_6 &= y_0 \cos \omega t_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t_0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

С их помощью система (1.3) записывается в более простом виде

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2C_2 \cos \omega t + 2C_3 \sin \omega t + C_4 - 3C_1 \omega t, \\
y(t) &= C_5 \sin \omega t + C_6 \cos \omega t, \\
z(t) &= 2C_1 + C_2 \sin \omega t - C_3 \cos \omega t.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Из (1.5) видно, что относительная траектория замкнута, когда $C_1 = 0$. При этом, значение C_1 отвечает за величину относительного дрейфа спутников в группе. Величина $\sqrt{C_2^2 + C_3^2}$ определяет амплитуду колебаний траектории вдоль осей Ox и Oz , $\sqrt{C_5^2 + C_6^2}$ — амплитуду вдоль оси Oy . C_4 представляет собой постоянный сдвиг траектории. Введённые константы удобным образом описывают форму и размер относительной траектории.

1.2 Скорость выброса

Предположим, что в момент времени $t = t_e$ бросающий спутник производит выброс дополнительного тела массы m . В ОСК оно также движется по некоторой траектории $(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$, описываемой уравнениями (1.1). Потребуем, чтобы в некоторый момент $t = t_m$ эта дополнительная масса столкнулась с ловящим спутником, то есть чтобы выполнялось $x_s(t_m) = y_s(t_m) = z_s(t_m) = 0$.

Скорость массы $\dot{\mathbf{r}}_s$ в момент t_e равна:

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \dot{\mathbf{r}}_t(t_e) + \delta\mathbf{v},$$

где $\delta\mathbf{v} = (\delta\dot{x}, \delta\dot{y}, \delta\dot{z})$ — относительная скорость выброса, а $\dot{\mathbf{r}}_t(t_e)$ — скорость бросающего спутника в момент броска.

Найдем относительную скорость выброса. Для этого подставим скорости в решение (1.3) и положим $t_0 = t_e$, $t = t_m$

$$\delta\dot{y} = -\dot{y}_0 - y_0\omega \operatorname{ctg} u,$$

$$\begin{pmatrix} 4 \sin u - 3u & 2 \cos u - 2 \\ 2 - 2 \cos u & \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_0 + \delta\dot{x} \\ \dot{z}_0 + \delta\dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6z_0\omega(u - \sin u) - x_0\omega \\ z_0\omega(3 \cos u - 4) \end{pmatrix},$$

где $u = \omega(t_m - t_e)$. Неравенство нулю детерминанта $\Delta = 3u \sin u - 8(1 - \cos u)$ обеспечивает существование единственного решения:

$$\begin{aligned} \delta\dot{x} &= -\dot{x}_0 - 2z_0\omega + \frac{1}{\Delta}[x_0\omega \sin u + 2z_0\omega(\cos u - 1)], \\ \delta\dot{y} &= -\dot{y}_0 - y_0\omega \operatorname{ctg} u, \\ \delta\dot{z} &= -\dot{z}_0 - \frac{1}{\Delta}[2x_0\omega(1 - \cos u) + z_0\omega(3u \cos u - 4 \sin u)]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Определив начальную траекторию, зададим время начала переброса t_e и длительность переброса $t_m - t_e$ и вычислим необходимую для переброса относительную скорость выброса. Система вырождается при $\sin u = 0$, $y_0 \neq 0$ и при $\Delta = 0$. В этих случаях нет возможности для столкновения массы с ловащим спутником — краевая задача не имеет решений.

1.3 Изменение относительной траектории

Определим влияние переброса массы на относительное движение спутников. Как показано выше, любое изменение траектории влечёт изменение значений констант $C_1 \dots C_6$. Исследуем эти изменения при однократном перебросе.

Пусть масса каждого из двух спутников формации (без дополнительного тела) есть M , масса дополнительного тела есть m . Тогда, применяя

закон сохранения импульса в момент выброса тела (считаем импульс приложенным к центру масс бросающего, а потому не влияющим на его угловое движение), получаем

$$(M + m)\mathbf{v}_{t,0} = M\mathbf{v}_t + m(\mathbf{v}_{t,0} + \delta\mathbf{v}),$$

где $\mathbf{v}_{t,0}$ и \mathbf{v}_t — скорость бросающего в момент времени t_e до и сразу после отделения дополнительного тела соответственно. Отсюда находим скорость бросающего спутника после выброса

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{t,0} - \frac{m}{M}\delta\mathbf{v}.$$

Вместе с начальными условиями $x_t(t_e) = x_0$, $y_t(t_e) = y_0$, $z_t(t_e) = z_0$ она полностью определяет движение бросающего после совершения броска.

После столкновения с перебрасываемым телом траектория ловящего спутника также меняется. Для определения характера изменения вычислим траекторию дополнительного тела на отрезке времени $[t_e, t_m]$. Начальные условия для него есть $x_s(t_e) = x_0$, $y_s(t_e) = y_0$, $z_s(t_e) = z_0$, $\dot{x}_s(t_e) = \dot{x}_0 + \delta\dot{x}$, $\dot{y}_s(t_e) = \dot{y}_0 + \delta\dot{y}$, $\dot{z}_s(t_e) = \dot{z}_0 + \delta\dot{z}$, поэтому оно движется по траектории (1.5), где константы интегрирования имеют вид

$$\begin{aligned} C_{1,s} &= \frac{1}{\Delta}[x_0 \sin u + 2z_0(\cos u - 1)], \\ C_{2,s} &= \frac{\cos \omega t_e}{\Delta}[z_0(4 \sin u - 3u \cos u) - 2x_0(1 - \cos u)] \\ &\quad - \frac{\sin \omega t_e}{\Delta}[z_0(4(1 - \cos u) - 3u \sin u) + 2x_0 \sin u], \\ C_{3,s} &= \frac{\cos \omega t_e}{\Delta}[z_0(4(1 - \cos u) - 3u \sin u) + 2x_0 \sin u] \\ &\quad - \frac{\sin \omega t_e}{\Delta}[2x_0(1 - \cos u) + z_0(3u \cos u - 4 \sin u)], \\ C_{4,s} &= \frac{1}{\Delta}[4x_0(\cos u - 1) + 2z_0(3u \cos u - 4 \sin u)] \\ &\quad + \frac{1}{\Delta}[3x_0 \sin u + 6z_0(\cos u - 1)]\omega t_e, \\ C_{5,s} &= y_0 \sin \omega t_e - y_0 \operatorname{ctg} u \cos \omega t_e, \\ C_{6,s} &= y_0 \cos \omega t_e + y_0 \operatorname{ctg} u \sin \omega t_e. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Согласно закону сохранения импульса скорость ловящего спутника сразу

после столкновения его с дополнительным телом равна (начальная скорость ловящего в ОСК нулевая)

$$\mathbf{v}_c(t_m) = \frac{m}{M+m} \mathbf{v}_s(t_m).$$

Начальные условия для ловящего после переброса следующие: $\mathbf{r}_c(t_m) = 0$, $\mathbf{v}_c(t_m)$.

После совершения переброса оба спутника движутся в ОСК по орбитам вида (1.5) с некоторыми константами $C_1 \dots C_6$, которые являются функциями начальных условий, времени начала t_e и окончания t_m переброса и масс M и m . Аналитические выражения приведены далее в формулах (1.8) и (1.9) (индекс «t» для бросающего, «с» для ловящего). Здесь $\Delta = 3u \sin u - 8(1 - \cos u)$ и $k = m/M$. С помощью полученных формул можно исследовать и вычислить изменения относительных траекторий спутников для конкретных задач управления.

$$\begin{aligned} C_{1,c} &= \frac{k}{k+1} \frac{1}{\Delta} [x_0 \sin u - 2z_0(1 - \cos u)], \\ C_{2,c} &= \frac{k}{k+1} \frac{1}{\Delta} [4z_0(\sin \omega t_m - \sin \omega t_e) \\ &\quad + 2x_0(\cos \omega t_m - \cos \omega t_e) - 3z_0 u \cos \omega t_m], \\ C_{3,c} &= \frac{k}{k+1} \frac{1}{\Delta} [-4z_0(\cos \omega t_m - \cos \omega t_e) \\ &\quad + 2x_0(\sin \omega t_m - \sin \omega t_e) - 3z_0 u \sin \omega t_m], \\ C_{4,c} &= \frac{k}{k+1} \frac{1}{\Delta} [4x_0(1 - \cos u) + 3\omega t_m x_0 \sin u \\ &\quad + 6z_0 u \cos u - 6\omega t_e z_0(1 - \cos u) - 8z_0 \sin u], \\ C_{5,c} &= \frac{k}{k+1} y_0 \frac{-\cos \omega t_m}{\sin u}, \\ C_{6,c} &= \frac{k}{k+1} y_0 \frac{\sin \omega t_m}{\sin u}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
C_{1,t} &= (k+1) \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \right) + \frac{k}{\Delta} [2z_0(1 - \cos u) - x_0 \sin u], \\
C_{2,t} &= (k+1) \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega} \cos \omega t_e - \left(2\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \sin \omega t_e \right) \\
&\quad + \frac{\sin \omega t_e}{\Delta} [4kz_0(1 - \cos u) - 3kz_0u \sin u + 2kx_0 \sin u] \\
&\quad + \frac{\cos \omega t_e}{\Delta} [2kx_0(1 - \cos u) + 3kz_0u \cos u - 4kz_0 \sin u], \\
C_{3,t} &= (k+1) \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t_e + \left(2\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \cos \omega t_e \right) \\
&\quad - \frac{\cos \omega t_e}{\Delta} [4kz_0(1 - \cos u) - 3kz_0u \sin u + 2kx_0 \sin u] \\
&\quad + \frac{\sin \omega t_e}{\Delta} [2kx_0(1 - \cos u) + 3kz_0u \cos u - 4kz_0 \sin u], \\
C_{4,t} &= x_0 - 2(k+1) \frac{\dot{z}_0}{\omega} + 3(k+1) \left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \omega t_e \\
&\quad - \frac{1}{\Delta} [4kx_0(1 - \cos u) + 3k\omega t_e x_0 \sin u \\
&\quad - 8kz_0 \sin u + 6k\omega t_m z_0 \cos u - 6k\omega t_e z_0], \\
C_{5,t} &= y_0 \sin \omega t_e + (k+1) \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos \omega t_e + ky_0 \cos \omega t_e \operatorname{ctg} u, \\
C_{6,t} &= y_0 \cos \omega t_e - (k+1) \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t_e - ky_0 \sin \omega t_e \operatorname{ctg} u;
\end{aligned} \tag{1.9}$$

ГЛАВА 2

Некоторые случаи относительного движения после переброса массы

Для работы пары спутников требуется, по крайней мере, чтобы они образовывали группу, то есть не удалялись друг от друга на большие расстояния. В связи с этим целесообразно рассмотреть возможность переброса массы, останавливающего относительный дрейф спутников. Рассмотрим некоторые возможные перебросы.

2.1 Замкнутость орбиты одного спутника относительно другого

Если два спутника движутся в одной и той же ОСК по различным орбитам, то, как видно из (1.5), разность их координат будет ограниченной для любого времени t тогда и только тогда, когда константы C_1 у этих спутников равны между собой. Из (1.8) и (1.9) получаем

$$\begin{aligned} (k+1) \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \right) + \frac{k}{\Delta} [2z_0(1 - \cos u) - x_0 \sin u] = \\ = \frac{k}{k+1} \frac{1}{\Delta} [x_0 \sin u - 2z_0(1 - \cos u)] \end{aligned}$$

Обозначив $s = \frac{u}{2}$, получим

$$\left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) + \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \cdot \frac{x_0 \cos s - 2z_0 \sin s}{8 \sin s - 6s \cos s} = 0 \quad (2.1)$$

Решая это уравнение относительно s при заданных начальных данных, находим требуемое время переброса, а из него — требуемую скорость выброса (1.6) и окончательные параметры движения ловящего (1.8) и бросающего (1.9) спутников.

Рассмотрим пример. Зададим начальные данные: $\omega = 0.0011 \text{ с}^{-1}$, $x_0 = 242 \text{ м}$, $y_0 = 67 \text{ м}$, $z_0 = 62 \text{ м}$, $\dot{x}_0 = -0.1254 \text{ м/с}$, $\dot{y}_0 = 0.11 \text{ м/с}$, $\dot{z}_0 = 0.11 \text{ м/с}$, $k = 1/20$, для простоты положим $t_e = 0$. Заметим, что $C_1 = 10 \text{ м}$, так что

начальная относительная траектория незамкнута. Тогда из (2.1):

$$15098 \sin s + 4961 \cos s - 13230s \cos s = 0; \quad (2.2)$$

Это уравнение вида $\operatorname{tg} x = l_1 x + l_2$, оно имеет бесконечно много корней. Возьмем первый положительный корень этого уравнения: $s = 4.4386 = \frac{\omega t_m}{2}$, найдём время переброса $t_m = 8070$ с. Подставляя полученные данные в (1.6), находим скорость выброса $|\delta \mathbf{v}| = 0.85$ м/с.

На рис. 2.1 представлены траектории всех тел в процессе переброса в ОСК, а на рис. 2.2 представлена траектория бросающего спутника относительно ловящего после совершения переброса. Изначально бросающий спутник совершал дрейф по оси Ox , так как $C_1 = 10$ м. После переброса массы в исходной системе координат дрейф сохранился, однако вследствие столкновения с ловящим спутником у последнего появился такой же дрейф, поэтому после переброса спутники движутся друг относительно друга по замкнутой траектории. В ОСК спутники дрейфуют, не разлетаясь друг от друга.

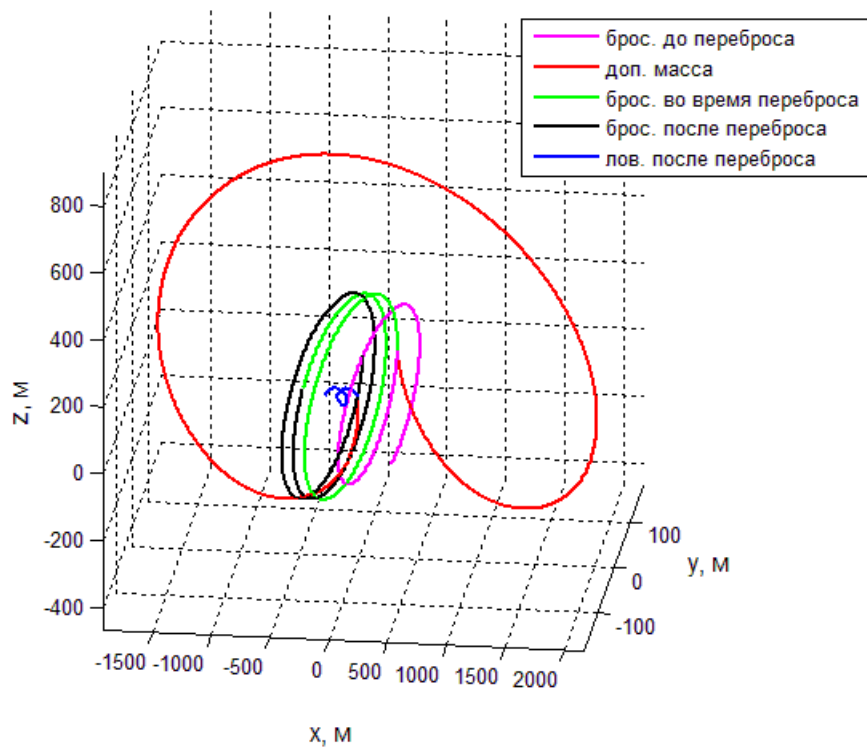


Рис. 2.1. Траектория в ОСК, первый корень

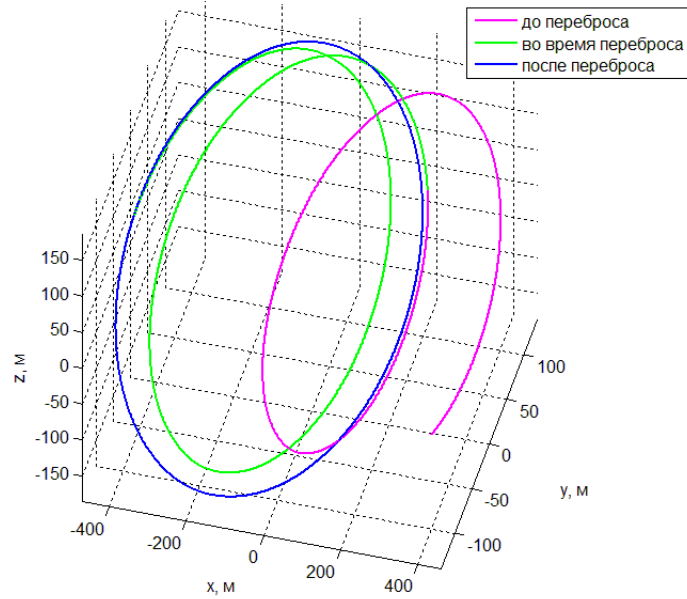


Рис. 2.2. Относительная траектория, первый корень

Возьмем теперь следующий положительный корень уравнения (2.2): $s = 7.6994$ тогда $t_m = 13999$ с, переброс совершается почти за 2.5 периода обращения ОСК вокруг Земли. В данном случае $|\delta\mathbf{v}| \approx 1.42$ м/с. Как и в предыдущем случае, относительный дрейф остановлен. Соответствующие траектории показаны на рис. 2.3 и 2.4.

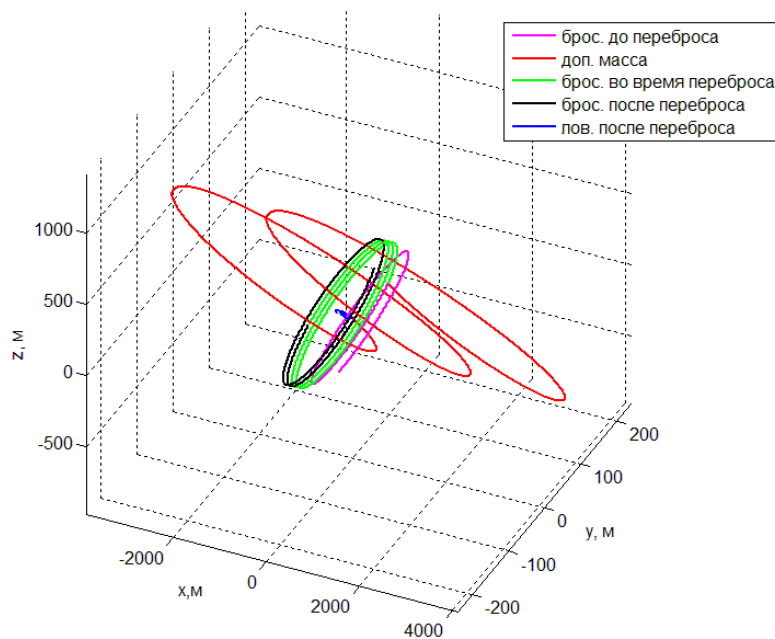


Рис. 2.3. Траектория в ОСК, второй корень

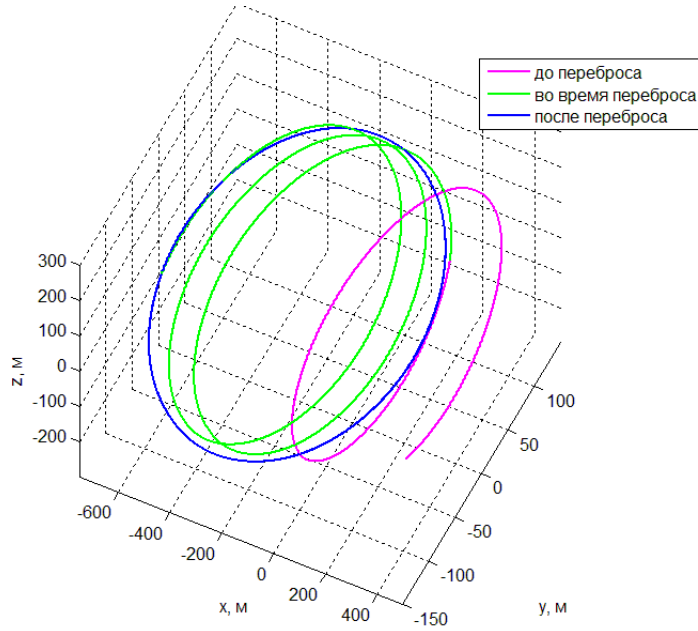


Рис. 2.4. Относительная траектория, второй корень

2.2 Замкнутость двух орбит

Более сильным условием ограниченности движения является замкнутость орбит обоих спутников в ОСК. Исследуем возможность такого переброса. Из (1.8) и (1.9) с условиями $C_{1,t} = C_{1,c} = 0$ получим систему уравнений относительно времени переброса (положительные множители опущены):

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \right) + \frac{k}{k+1} \frac{1}{\Delta} [2z_0(1 - \cos u) - x_0 \sin u] = 0, \\ \frac{1}{\Delta} [x_0 \sin u - 2z_0(1 - \cos u)] = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, $C_1 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 = 0$.

Следовательно, замкнутые орбиты относительно исходной системы координат после переброса массы можно получить только в случае изначально замкнутой относительной орбиты. Если верно, что $C_1 = 0$, то время переброса можно получить из уравнения

$$\frac{x_0 \sin u - 2z_0(1 - \cos u)}{3u \sin u - 8(1 - \cos u)} = 0.$$

$$x_0 \cos \frac{u}{2} = 2z_0 \sin \frac{u}{2}, \quad \frac{3u}{2} \cos \frac{u}{2} - 4 \sin \frac{u}{2} \neq 0. \quad (2.3)$$

В качестве примера рассмотрим случай круговой относительной начальной орбиты. Для этого положим

$$x_0 = 2a, y_0 = -\sqrt{3}b, z_0 = -b,$$

$$\dot{x}_0 = 2b\omega, \dot{y}_0 = \sqrt{3}a\omega, \dot{z}_0 = a\omega,$$

где a, b — произвольные константы. Относительная орбита круговая, т.к.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4(a^2 + b^2) \quad \text{и} \quad (x, y, z) \perp (0, -1, \sqrt{3}).$$

Уравнение (2.3) переходит в

$$a \cos \frac{u}{2} + b \sin \frac{u}{2} = 0.$$

В простейшем случае $a = b$, $u = 2\pi n + \frac{3\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть $a = 100$ м, $n = 0$, $u = \frac{3\pi}{2}$, $t_0 = 0$ с, траектории тел в процессе переброса показаны на рис. 2.5. Видно, что начальная траектория бросаемого и конечные траектории двух спутников замкнуты.

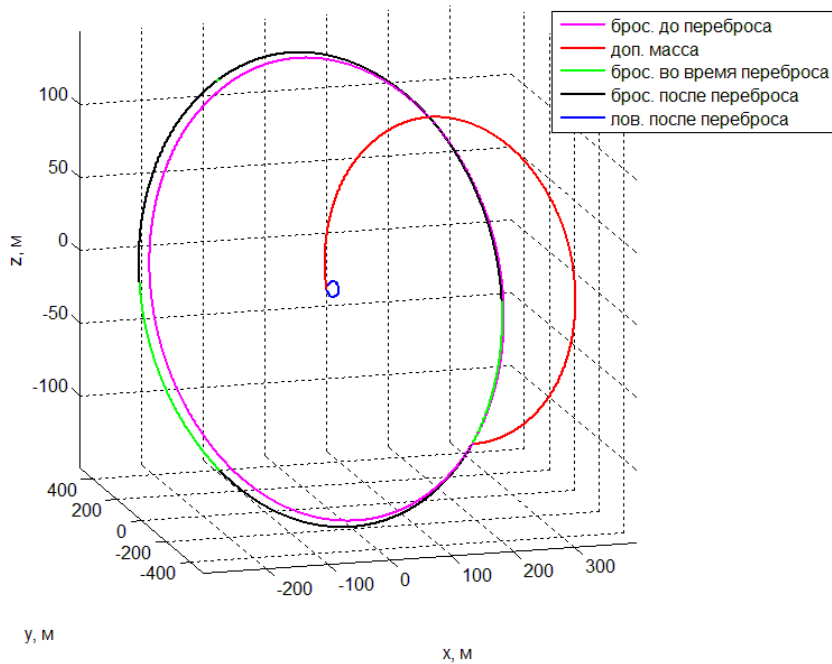


Рис. 2.5. Две замкнутые траектории

Зависимость относительной траектории после переброса от точки выброса исследована ранее в статье [15].

2.3 Общий случай выравнивания дрейфов

Обобщим постановку задачи: пусть изначально оба спутника (бросающий и ловящий) движутся некоторым образом в ОСК, пусть начальные данные для бросающего $x_{t,0}$, $y_{t,0}$, $z_{t,0}$, $\dot{x}_{t,0}$, $\dot{y}_{t,0}$, $\dot{z}_{t,0}$, а для ловящего $x_{c,0}$, $y_{c,0}$, $z_{c,0}$, $\dot{x}_{c,0}$, $\dot{y}_{c,0}$, $\dot{z}_{c,0}$. Предположим также, что массы бросающего, ловящего и перебрасываемого тела равны m_t , m_c и m_s соответственно. Как и раньше, бросок производится в момент времени $t = t_e$, столкновение — в момент $t = t_m$. Конечные формулы для констант, аналогичные формулам (1.8) и (1.9), громоздки, приведём, однако, формулы для константы C_1 , описывающей дрейф спутника в ОСК (при этом будем опускать индекс "1").

Обозначим символами C_t^* , C_c^* дрейфы для бросающего и ловящего спутников после переброса, пусть также $k_t = m_s/m_t$, $k_c = m_s/m_c$, $u = \omega(t_m - t_e)$, $v = \omega(t_e - t_0)$. Тогда верны формулы:

$$\begin{aligned} C_t^* &= C_t + k_t(C_t - C_c) + k_t f, \\ C_c^* &= C_c - \frac{3k_c C_c}{1 + k_c} - \frac{k_c}{1 + k_c} f + \\ &\quad + \frac{2k_c(2C_{1,c} - z_{c,0})}{k_c + 1} \cos(u + v) - \frac{2k_c \dot{z}_{c,0}}{\omega(k_c + 1)} \sin(u + v) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} f &= (C_t - C_c) \frac{3v \cos u/2 - 8 \sin v/2 \cos(u/2 + v/2)}{3u \cos u/2 - 8 \sin u/2} + \\ &\quad + \frac{\dot{z}_{t,0} - \dot{z}_{c,0}}{\omega} \cdot \frac{4 \sin v/2 \sin(u/2 + v/2)}{3u \cos u/2 - 8 \sin u/2} + \\ &\quad + (z_{t,0} - z_{c,0}) \frac{2 \sin(u/2 + v)}{3u \cos u/2 - 8 \sin u/2} - (x_{t,0} - x_{c,0}) \frac{\cos u/2}{3u \cos u/2 - 8 \sin u/2} \end{aligned}$$

Уравнения (2.4) позволяют вычислить дрейфы спутников после пере-

броса. Следствием из уравнений является

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k_c}\right) (C_c^* - C_c) + \frac{1}{k_t} (C_t^* - C_t) &= \\ &= (C_t - 4C_c) + 2(2C_c - x_{c,0}) \cos(u + v) - \frac{2\dot{x}_{c,0}}{\omega} \sin(u + v) \end{aligned}$$

Слева стоит "приведённая" разница между начальным и конечным дрейфами спутников, при этом правая часть уравнения не зависит от масс.

Перепишем уравнения (2.4) в форме

$$\begin{aligned} (4(C_t - C_c) - 2(z_{t,0} - z_{c,0})) \sin\left(\frac{u}{2} + v\right) + 2\frac{\dot{z}_{t,0} - \dot{z}_{c,0}}{\omega} \cos\left(\frac{u}{2} + v\right) - \\ - (8(C_t^* - C_t)/k_t - 4(C_t - C_c)) \sin\frac{u}{2} + \\ + \left(2\frac{\dot{z}_{t,0} - \dot{z}_{c,0}}{\omega} - 3(C_t - C_c)(u + v) + (x_{t,0} - x_{c,0}) + 3u\frac{C_t^* - C_t}{k_t}\right) \cos\frac{u}{2} = 0 \\ \left(1 + \frac{1}{k_c}\right) (C_c^* - C_c) + \frac{1}{k_t} (C_t^* - C_t) - (C_t - 4C_c) = \\ = 2(2C_c - z_{c,0}) \cos(u + v) - \frac{2\dot{z}_{c,0}}{\omega} \sin(u + v) \end{aligned}$$

Подставляя $\xi = u/2 + v$, $\eta = u/2$, получаем

$$\begin{aligned} \xi &= -\eta + \alpha \pm \arccos \frac{M}{\sqrt{N^2 + L^2}} + 2\pi n, \\ \operatorname{tg} \eta \left[F_1 \frac{\dot{z}_{t,0} - \dot{z}_{c,0}}{\omega} - F_2 ((z_{t,0} - z_{c,0}) - 2(C_t - C_c)) + (z_{t,0} - z_{c,0}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{k_t} (C_t^* - C_t) \right] + \frac{3(C_t^* - C_t)}{k_t} \eta = \\ &= \left[F_1 ((z_{t,0} - z_{c,0}) - 2(C_t - C_c)) - F_2 \frac{\dot{z}_{t,0} - \dot{z}_{c,0}}{\omega} - \frac{1}{2} (x_{t,0} - x_{c,0}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} (C_t - C_c) \left(\alpha \pm \arccos \frac{M}{\sqrt{N^2 + L^2}} + 2\pi n \right) \right] \end{aligned}$$

где $n \in \mathbb{Z}$ и

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{LM \pm N\sqrt{N^2 + L^2 - M^2}}{N^2 + L^2} \\ F_2 &= \frac{N^2 + L^2 - NM \pm L\sqrt{N^2 + L^2 - M^2}}{N^2 + L^2} \end{aligned}$$

$$\alpha : \quad \cos \alpha = \frac{N}{\sqrt{N^2 + L^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{L}{\sqrt{N^2 + L^2}}$$

$$M = \left(1 + \frac{1}{k_c}\right) (C_c^* - C_c) + \frac{1}{k_t} (C_t^* - C_t) - (C_t - 4C_c)$$

$$N = 2(2C_c - z_{c,0})$$

$$L = -\frac{2\dot{z}_{c,0}}{\omega}$$

Решения уравнения существуют, если выполняется неравенство

$$\left| \frac{M}{\sqrt{N^2 + L^2}} \right| \leq 1 \quad (2.5)$$

Рассмотрим случай трёх спутников, движущихся в ОСК. Мы хотим произвести переброс массы, приравнивающий дрейфы трёх спутников и тем самым ограничивающий все относительные траектории спутников в группе. Пусть дрейфы для спутников, участвующих непосредственно в перебросе, равны C_t и C_c , дрейф третьего спутника равен C_r . Потребуем выполнения условий $C_t^* = C_c^* = C_r$. Пусть также $K_t = 1/k_t$, $K_c = 1/k_c$. Условие (2.5) переходит в

$$A - B \leq C_r \leq A + B \quad (2.6)$$

где $A = \frac{C_c(K_c-3)+C_t(K_t+1)}{1+K_c+K_t}$, $B = \frac{2}{1+K_c+K_t} \sqrt{(2C_c - z_{c,0})^2 + \frac{\dot{z}_{c,0}^2}{\omega^2}}$.

Рассмотрим пример выравнивания дрейфов трёх спутников. Пусть начальные условия (точнее, те из них, которые присутствуют в (2.6))

№	1	2	3
C_1 (м)	-10	10	20
z_0 (м)	20	-15	-40
\dot{z}_0 (м/с)	0.1	-0.09	-0.1

Положим $K = 20$ для каждого из спутников. Есть шесть различных способов выбрать ловящий и бросающий среди трёх спутников (и тем самым определить требуемый дрейф), однако согласно (2.6) только вариант, при котором спутник номер 3 является бросающим, а номер 1 — ловящим, позволяет уравнивать дрейфы. В этом случае (2.6) переходит в $9.2 \leq C \leq 19.6$. Вычисления для $C_r = 10$ дают $t_e = 4168$ с. и $t_m = 5063$ с. После

переброса дрейфы C_1 трёх спутников равны 10 м. Схема переброса относительно спутника номер 2 представлена на рисунке 2.6.

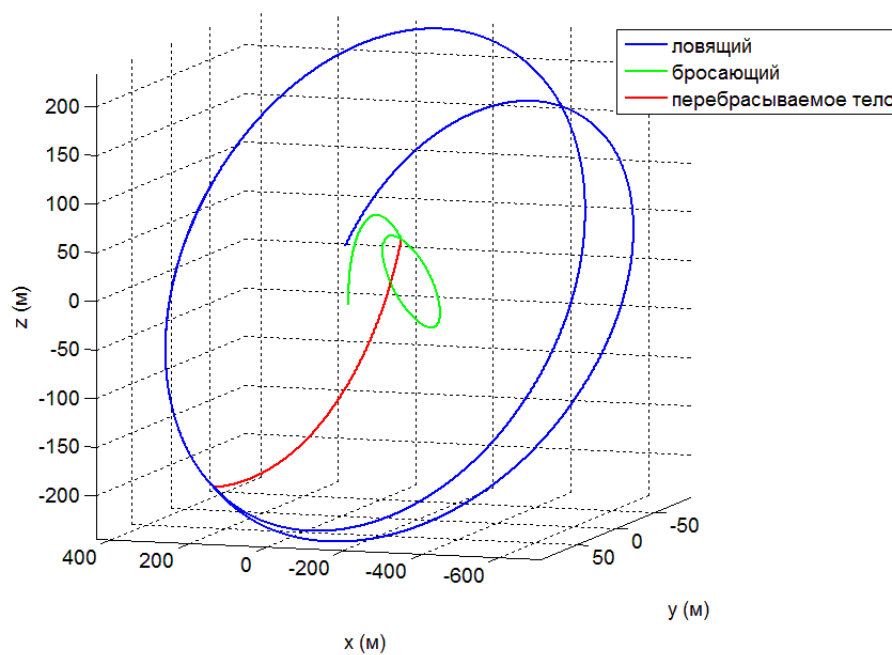


Рис. 2.6. Выравнивание дрейфов

ГЛАВА 3

Оптимизационные задачи

Прежде всего, заметим, что после переброса движение двух спутников в ОСК описывается уравнениями (1.5) с константами $C_{1,t} \dots C_{6,t}$ для бросающего и $C_{1,c} \dots C_{6,c}$ для ловящего спутников. Поэтому, относительная орбита спутников также описывается уравнениями (1.5), при этом константы равны разностям соответствующих констант бросающего и ловящего спутников. Для более наглядного представления рассмотрим решение задачи (1.1, 1.2) в амплитудно-частотной форме

$$\begin{aligned}x(t) &= -3C_1\omega t + 2A \cos(\omega t - \varphi) + C_4, \\y(t) &= B \cos(\omega t - \psi), \\z(t) &= 2C_1 + A \sin(\omega t - \varphi),\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $A = \sqrt{C_2^2 + C_3^2}$, $B = \sqrt{C_5^2 + C_6^2}$, а дополнительные углы задаются выражениями

$$\begin{aligned}\varphi : \cos \varphi &= \frac{C_2}{A}, \sin \varphi = \frac{C_3}{A}; \\ \psi : \sin \psi &= \frac{C_5}{B}, \cos \psi = \frac{C_6}{B}.\end{aligned}$$

Константы для относительной орбиты после переброса будем обозначать символами с чертой: \bar{C}_1 , \bar{C}_4 , \bar{A} , \bar{B} , $\bar{\psi}$ и $\bar{\varphi}$. Они есть функции от t_e и t_m , при этом C_1 , C_4 , A , B , ψ , φ выступают как параметры, зависящие от начальных условий.

Для получения значений t_e и t_m , а затем и для расчёта необходимых скоростей выброса по (1.6) при каком-то дополнительном оптимизирующем условии следует явно задать функцию, подлежащую минимизации на перебросе. Конкретный вид функции определяется оптимизирующими условиями. Также разумно требовать $\bar{C}_1 = 0$ для отсутствия постоянного дрейфа относительной орбиты после переброса.

3.1 Достижение траектории наиболее «близкой» к начальной

Предположим, оптимизирующее условие есть минимальность различия форм начальной и конечной относительных орбит. \bar{C}_4 , $\bar{\psi}$ и $\bar{\varphi}$ не влияют на форму орбиты, а потому в качестве функции, подлежащей минимизации, выберем

$$\Phi_1(t_e, t_m) = (\bar{A} - A)^2 + (\bar{B} - B)^2.$$

Для замкнутости относительной орбиты после переброса потребуем $\bar{C}_1 = 0$.

Рассмотрим пример относительной начальной траектории: пусть в начальный момент времени $x_0 = 242$ м, $y_0 = 67$ м, $z_0 = 140$ м, $\dot{x}_0 = -0.2244$ м/с, $\dot{y}_0 = 0.11$ м/с, $\dot{z}_0 = 0.11$ м/с, $\omega = 0.0011$ с⁻¹, $k = 1/20$, при этом $A = 100.7$ м, $B = 120.4$ м, $C_1 = 76$ м, $|v| = 1.30$ м/с. Численный расчёт дает значения $t_e = 4380$ с и $t_m = 5286$ с. Новые константы $\bar{A} = 101.2$ м, $\bar{B} = 115.8$ м. На рис. 3.1 представлен график траекторий тел формации во время переброса в ОСК.

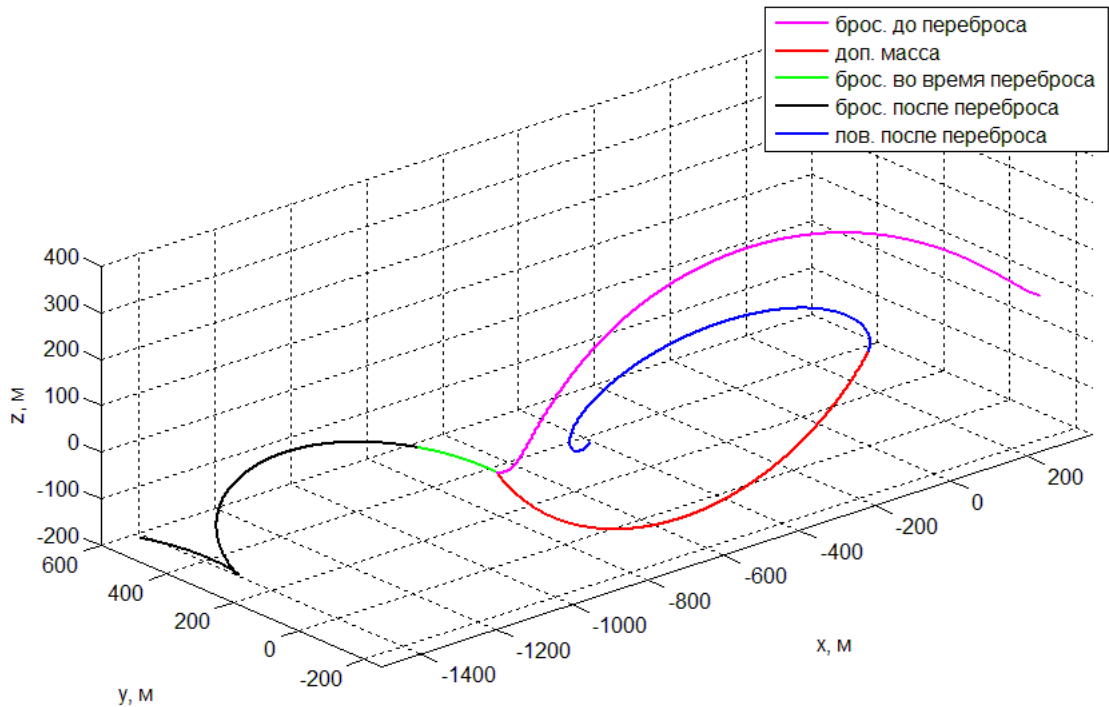


Рис. 3.1. Траектории в ОСК: «ближайшая» к исходной

3.2 Минимизация скорости броска

Предположим, критичной для миссии спутников является не форма или размер орбиты, а потребляемая при перебросе энергия, а следовательно, и скорость, придаваемая при броске дополнительному телу. В качестве минимизируемой функции выберем

$$\Phi_2(t_e, t_m) = \|\delta\mathbf{v}\|^2 = \delta\dot{x}^2 + \delta\dot{y}^2 + \delta\dot{z}^2.$$

Как и раньше, требование $\bar{C}_1 = 0$ обязательно.

Для той же начальной траектории численный расчёт даёт значения $t_e = 1806$ с и $t_m = 2424$ с. При этом $\delta\mathbf{v} = (0.816, -0.024, -0.941)$ м/с, $|v| = 1.25$ м/с. На рис. 3.2 представлены траектории движения спутников и перебрасываемого тела, записанные в ОСК

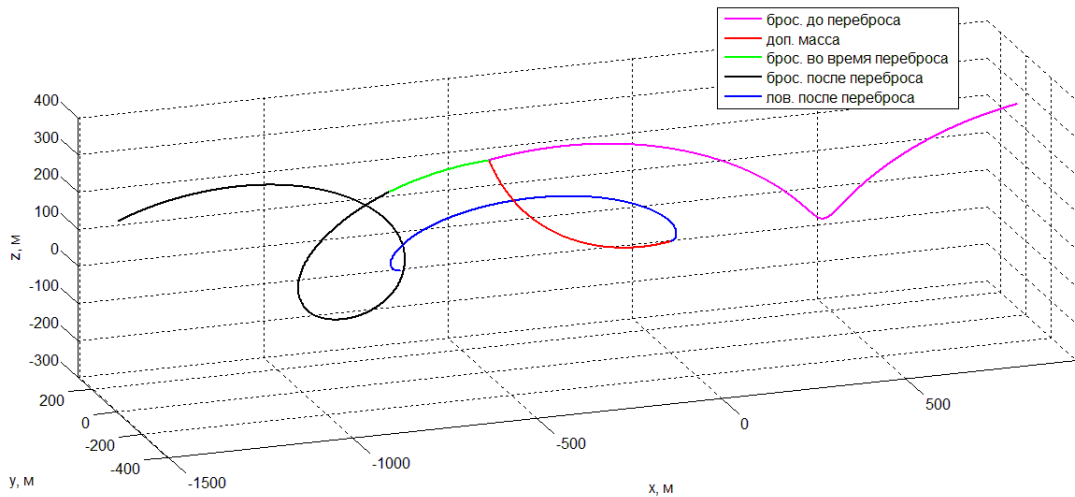


Рис. 3.2. Траектории в ОСК: минимальная скорость броска

3.3 Минимизация времени переброса

Также найдём переброс, минимизирующий продолжительность полёта дополнительного тела, что соответствует задаче наискорейшей остановке относительного дрейфа. Минимизируемая функция есть

$$\Phi_3(t_e, t_m) = t_m - t_e.$$

Численный расчёт даёт значения $t_e = 925$ с и $t_m = 1025$ с. Относительная скорость выброса при этом $|v| = 2.86$ м/с. На рис.3.3 представлены траектории движения спутников и перебрасываемого тела, записанные в ОСК.

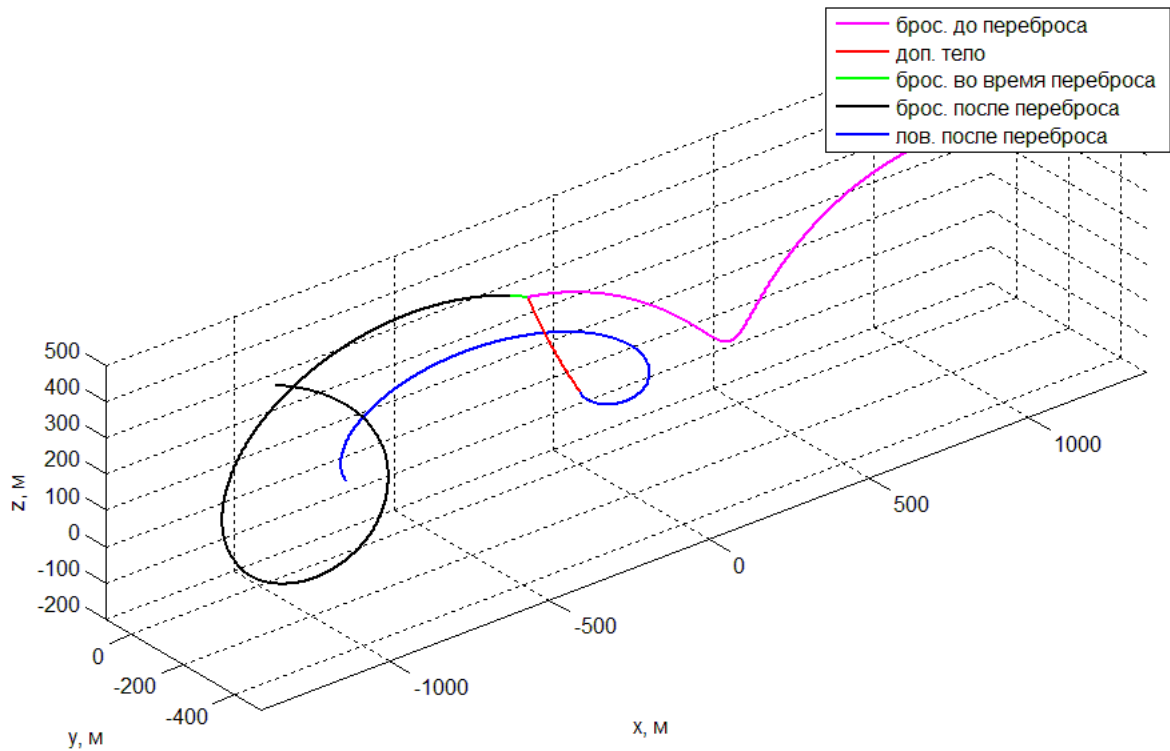


Рис. 3.3. Траектории в ОСК: минимальное время переброса

На рис. 3.4 одновременно представлены три относительные траектории после соответствующих перебросов. Жирными линиями представлены пространственные траектории. Тонкими — проекции на оси координат.

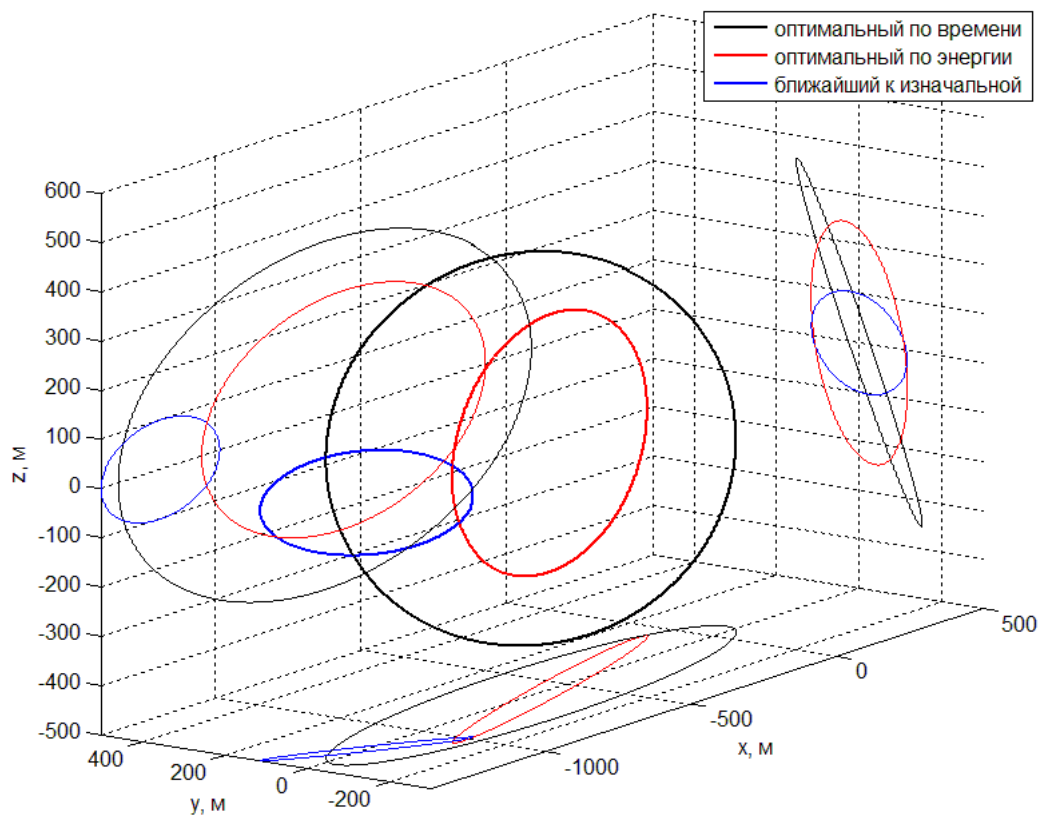


Рис. 3.4. Относительные траектории для различных задач

ГЛАВА 4

Влияние ошибок

Предположим, что в системе, реализующей бросок/ловлю дополнительного тела, есть ошибки исполнения. Рассмотрим в качестве такой системы манипулятор. Будем считать, что существует некоторая окрестность относительно центра масс ловящего спутника, внутри которой перебрасываемая масса будет поймана. Исследуем возможные ошибки исполнения броска в этом случае.

4.1 Ошибка при определении точки выброса

Пусть для некоторого переброса было рассчитано требуемое время выброса t_e и время столкновения t_m . Однако, вследствие неучтённых факторов, реальное отделение дополнительного тела произошло в момент времени $t_e + \epsilon_t$. Исследуем влияние этой ошибки на переброс.

В описанном выше случае движение тела описывается решением задачи (1.1, 1.2), где начальные условия задаются положением и скоростью бросающего спутника не в момент времени $t = t_e$, а в момент $t = t_e + \epsilon_t$.

В расчётный момент столкновения $t = t_m$ тело будет располагаться не в начале координат ОСК, а в некоторой точке $\mathbf{R}_t = (X_t, Y_t, Z_t)$. Точная формула достаточно громоздка, однако заметим, что при $\epsilon_t = 0$ $\mathbf{R}_t = \mathbf{0}$. Разложим \mathbf{R}_t в ряд по степеням $\omega\epsilon_t$ и далее, считая ϵ_t малой величиной, отбросим члены второго и более высоких порядков. В таком случае формулы преобразуются к виду

$$\begin{aligned} X_t &= \omega\epsilon_t \left(6z_0(\cos u - 1) - \frac{\dot{x}_0}{\omega}(3 - 4\cos u) - 2\frac{\dot{z}_0}{\omega}\sin u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2z_0(1 - \cos u) - x_0\sin u}{\Delta} \right), \\ Y_t &= \omega\epsilon_t \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\cos u + y_0\frac{\cos^2 u}{\sin u} \right), \\ Z_t &= \omega\epsilon_t \left(3z_0\sin u + 2\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin u + \frac{\dot{z}_0}{\omega}\cos u + \frac{z_0(3u - 4\sin u) - 2x_0(1 - \cos u)}{\Delta} \right). \end{aligned}$$

Предположим, существует некоторое устройство, позволяющее ловящему спутнику поймать тело даже при наличии ошибок в совершении переброса. Будем считать переброс совершённым удачно, если в момент времени t_m тело сталкивается с шаром некоторого радиуса R с центром в ловящем спутнике. Получим численные оценки для примера 2.1: $\mathbf{R}_t = (-0.293, 0.009, -0.834)\epsilon_t$. Следовательно, тело попадает в шар радиуса 1 м при $\epsilon_t \leq 1.13$ с.

4.2 Ошибка в скорости выброса

Теперь предположим, что вследствие ошибок относительная скорость выброса в момент времени $t = t_e$ отличается от предполагаемой: $\delta\mathbf{v} + \vec{\epsilon}_v = (\delta\dot{x} + \epsilon_x, \delta\dot{y} + \epsilon_y, \delta\dot{z} + \epsilon_z)$, здесь $\delta\mathbf{v}$ получено из (1.6).

В расчётный момент столкновения $t = t_m$ дополнительное тело будет находиться в некоторой точке $\mathbf{R}_v = \mathbf{r}_s(t_m) = (X_v, Y_v, Z_v)$. Получим выражение для \mathbf{R}_v : подставим начальные данные в (1.3) и воспользуемся (1.6)

$$\begin{aligned} X_v &= \frac{\epsilon_x}{\omega}(4 \sin u - 3u) + \frac{2\epsilon_z}{\omega}(\cos u - 1), \\ Y_v &= \frac{\epsilon_y}{\omega} \sin u, \\ Z_v &= \frac{2\epsilon_x}{\omega}(1 - \cos u) + \frac{\epsilon_z}{\omega} \sin u. \end{aligned}$$

Положим $X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2 = R^2$, тогда

$$R^2\omega^2 = A\epsilon_x^2 + B\epsilon_y^2 + C\epsilon_z^2 + 2D\epsilon_x\epsilon_z$$

где

$$A = 8(1 - \cos u) + 12 \sin u(\sin u - 2u) + 9u^2,$$

$$B = \sin^2 u,$$

$$C = 5 + 3 \cos^2 u - 8 \cos u,$$

$$D = 6(\sin u - u)(\cos u - 1).$$

Пусть $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$. Для удачного совершения переброса необходимо

$$\epsilon \leq \frac{R\omega}{\sqrt{A + B + C + 2D}}.$$

Пусть допустимая ошибка в пролёте тела мимо ловящего $R = 1$ м. Для трёх примеров из предыдущей главы получим:

— для примера 3.1 $u = 0.9966$, $A = 1.0013$, $B = 0.7050$, $C = 1.5398$,
 $D = 0.4303$, $\epsilon \leq 5.4 \cdot 10^{-2}$ см/с,

— для примера 3.2 $u = 0.6798$, $A = 2.3825$, $B = 0.3952$, $C = 0.5929$,
 $D = 0.0682$, $\epsilon \leq 5.9 \cdot 10^{-2}$ см/с,

— для примера 3.3 $u = 0.1100$, $A = 0.8932$, $B = 0.0121$, $C = 0.0122$,
 $D \approx 8 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon \leq 0.11$ см/с.

4.3 Нецентральное столкновение

Пусть из-за ошибок наведения дополнительное тело столкнулось с ловящим спутником нецентралью. После такого столкновения центр масс системы ловящий–тело сместится из начала координат ОСК.

Предположим, задачей переброса была остановка дрейфа. Тогда, после переброса константа C_1 в (1.5) должна была бы обнулиться. Однако, вследствие изменения положения центра масс, изменились и начальные данные движения ловящего спутника после совершения переброса. Это изменение само по себе может привести к появлению относительного дрейфа.

За один виток ($\omega t = 2\pi$) согласно (1.5) между спутниками накапливается дрейф $d = 6\pi C_1$, где $C_1 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0$. Центральное столкновение даёт $C_1 = 0$, в случае нецентрального член $2z_0$ заменяется на $2(z_0 + \delta z)$. Окончательно, за один виток накапливается дрейф $d = 12\pi\delta z$.

Пусть как и прежде, тело пролетает мимо ловящего спутника на расстоянии $R = 1$ м, пусть, кроме того, масса ловящего спутника в двадцать раз больше массы тела: $M = 20m$. Тогда $\delta z \leq \frac{m}{m+M}R$, $d \leq \frac{12\pi}{21} \approx 1.8$ м.

4.4 Нелинейная модель

Рассмотрим более точную, нелинейную модель движения спутников в группе относительно тела, вращающегося по круговой орбите

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\omega\dot{z} - \omega^2x + \frac{\mu x}{(x^2 + y^2 + (\rho + z)^2)^{3/2}} &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{\mu y}{(x^2 + y^2 + (\rho + z)^2)^{3/2}} &= 0, \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - \omega^2z + \frac{\mu(\rho + z)}{(x^2 + y^2 + (\rho + z)^2)^{3/2}} - \frac{\mu}{\rho^2} &= 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

Пусть движение спутников и перебрасываемого тела рассчитывается согласно уравнениям (4.1), однако время и скорость переброса вычисляются по линейной модели. Исследуем, насколько сильно отклонится перебрасываемое тело из-за несовершенства модели.

Рассмотрим пример из раздела 2.1. На рисунке 4.1 показаны расстояния между ловящим спутником и перебрасываемым телом в случае первого корня $t_m = 8070$ с. При этом разница между расчётным значением 0 и значением, вычисленным по нелинейной модели, составляет $\delta d = 0.13$ м.

На рисунке 4.2 представлены те же величины для второго корня $t_m = 13999$ с, $\delta d = 0.27$ м.

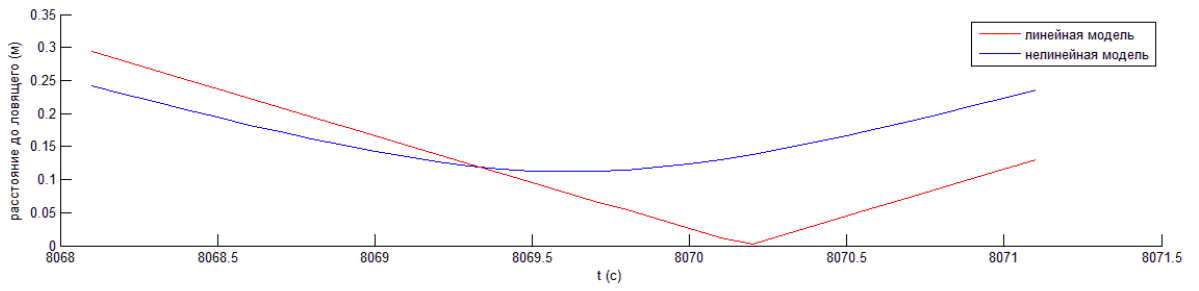
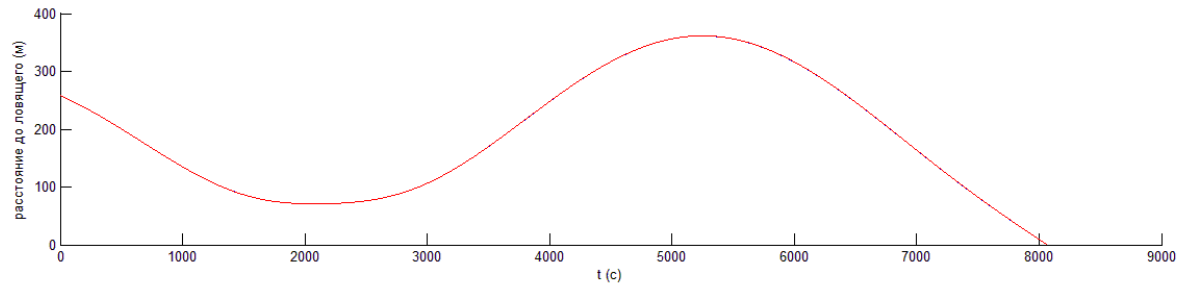


Рис. 4.1. Расстояние до ловащего, первый корень

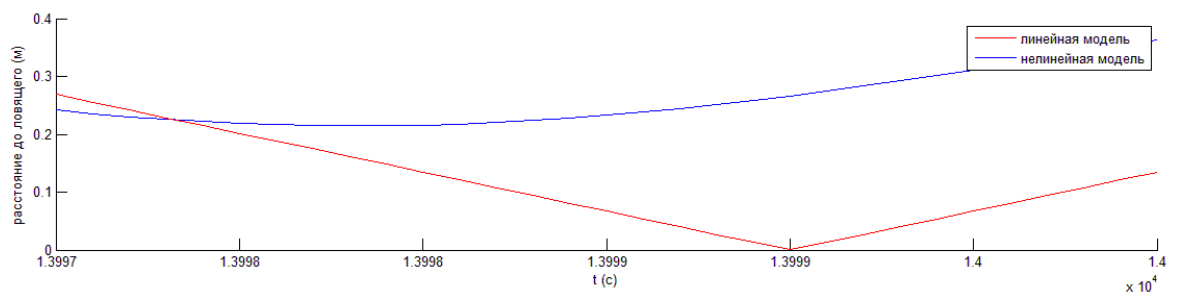
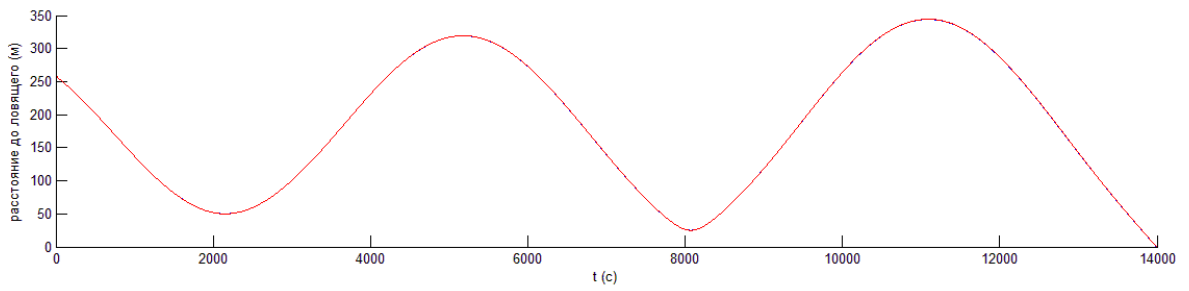


Рис. 4.2. Расстояние до ловащего, второй корень

Учёт влияния несферичности Земли

5.1 Постановка задачи и метод решения

Основной недостаток уравнений (1.1) — низкая точность на больших промежутках времени. Основной причиной этого является влияние второй гармоники J_2 гравитационного поля Земли. Уравнения (1.1) были модифицированы Седвиком и Швайгардом [19], чтобы учитывать влияние J_2 на движение спутника.

Пусть орбиты двух спутников близки к некоторой опорной круговой орбите. i_0, i_1, i_2 — наклонения опорной орбиты и орбит двух спутников соответственно. Пусть $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ — координаты первого и второго спутников в ОСК. Тогда для $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \ddot{x} + A\dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + q^2y = 2lq \cos(qt + \varphi), \\ \ddot{z} - A\dot{x} - Bz = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

где

$$A = 2\omega c,$$

$$B = \omega^2(5c^2 - 2),$$

$$c = \sqrt{1 + \frac{3J_2R_\oplus^2}{8r_0^2}(1 + 3 \cos 2i_0)},$$

$$q = \omega c + \frac{3\omega J_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \left(\cos^2 i_2 - \frac{(\cos i_1 - \cos i_2)(\operatorname{ctg} i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0 - \cos i_2)}{\sin^2 \Delta\Omega_0 + (\operatorname{ctg} i_1 \sin i_2 - \cos i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2} \right),$$

$$l = -\frac{3\omega J_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \frac{(\cos i_1 - \cos i_2) \sin i_1 \sin i_2 \sin \Delta\Omega_0}{\sqrt{1 - (\cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2}},$$

$$\Delta\Omega_0 = \frac{y_0}{r_0 \sin i_0},$$

где R_\oplus — радиус Земли, r_0 — радиус опорной орбиты, ω — угловая скорость

вращения по опорной орбите. φ находится из уравнения

$$l \sin \varphi + qy_0 \operatorname{ctg} \varphi = \dot{y}_0.$$

Решение системы (5.1) есть

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{A}{a^3}(A\dot{x}_0 + Bz_0) \sin at + \frac{A\dot{z}_0}{a^2}(\cos at - 1) - \frac{B}{a^2}(\dot{x}_0 + Az_0)t, \\ y &= \left(lt + \frac{y_0}{\sin \varphi} \right) \sin(qt + \varphi), \\ z &= \frac{A}{a^2}(\dot{x}_0 + Az_0) + \frac{\dot{z}_0}{a} \sin at - \frac{1}{a^2}(A\dot{x}_0 + Bz_0) \cos at, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $a = \sqrt{A^2 - B}$, (x_0, y_0, z_0) , $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ — координаты и скорости в момент времени $t = 0$. Следует заметить, что \dot{y}_0 присутствует в (5.2) неявно, влияя на фазу φ .

Однако, применение общего алгоритма, описанного выше, для рассматриваемой системы уравнений затрудняется тем, что в (5.2) константы зависят от относительной орбиты спутника, а значит, вместо линейной системы вида (1.6) мы получим некоторую неявную зависимость. Упростим задачу: будем рассчитывать движение спутника по уравнениям Швайгарда-Седвика (5.1), однако переброс будем осуществлять согласно линейной модели. Такой подход оправдан тем, что на малых промежутках времени (порядка периода вращения по опорной орбите) уравнения (1.1) хорошо описывают движение спутника.

5.2 Поддержание относительной траектории

Рассмотрим следующий пример: начальные условия обеспечивают круговую относительную орбиту, однако вследствие влияния члена J_2 орбиты спутников расходятся, орбита одного спутника относительно другого смещается, что соответствует росту константы C_4 в уравнениях (1.5). Требуется осуществлять переброс дополнительной массы с тем, чтобы спутники не расходились друг от друга.

Продемонстрируем возможность этого на конкретном примере: начальные данные возьмём из секции 2.3.

Изменение констант Хилла под действием J_2 приведено на рис. 5.1. Как можно заметить, наблюдается постоянное уменьшение C_4 и, соответственно, расхождение спутников.

Будем поступать следующим образом: с некоторым шагом по времени проверять, не опустилось ли C_4 ниже выбранной критической отметки. Если это произошло, то в ближайший подходящий момент (в данном случае, увеличивающий C_4 на приемлемую величину) производим переброс, изменение констант после которого рассчитываем по уравнениям Хилла. Значения тех же констант с учетом управления перебросами приведено на рис. 5.2. Как можно видеть, переброс масс позволяет противодействовать относительному дрейфу спутника, однако тот же самый переброс изменяет форму орбиты, делая её более вытянутой. Таким образом, изменяя точку выброса дополнительной массы на орбите, мы можем менять влияние переброса на форму, размер и сдвиг орбиты.

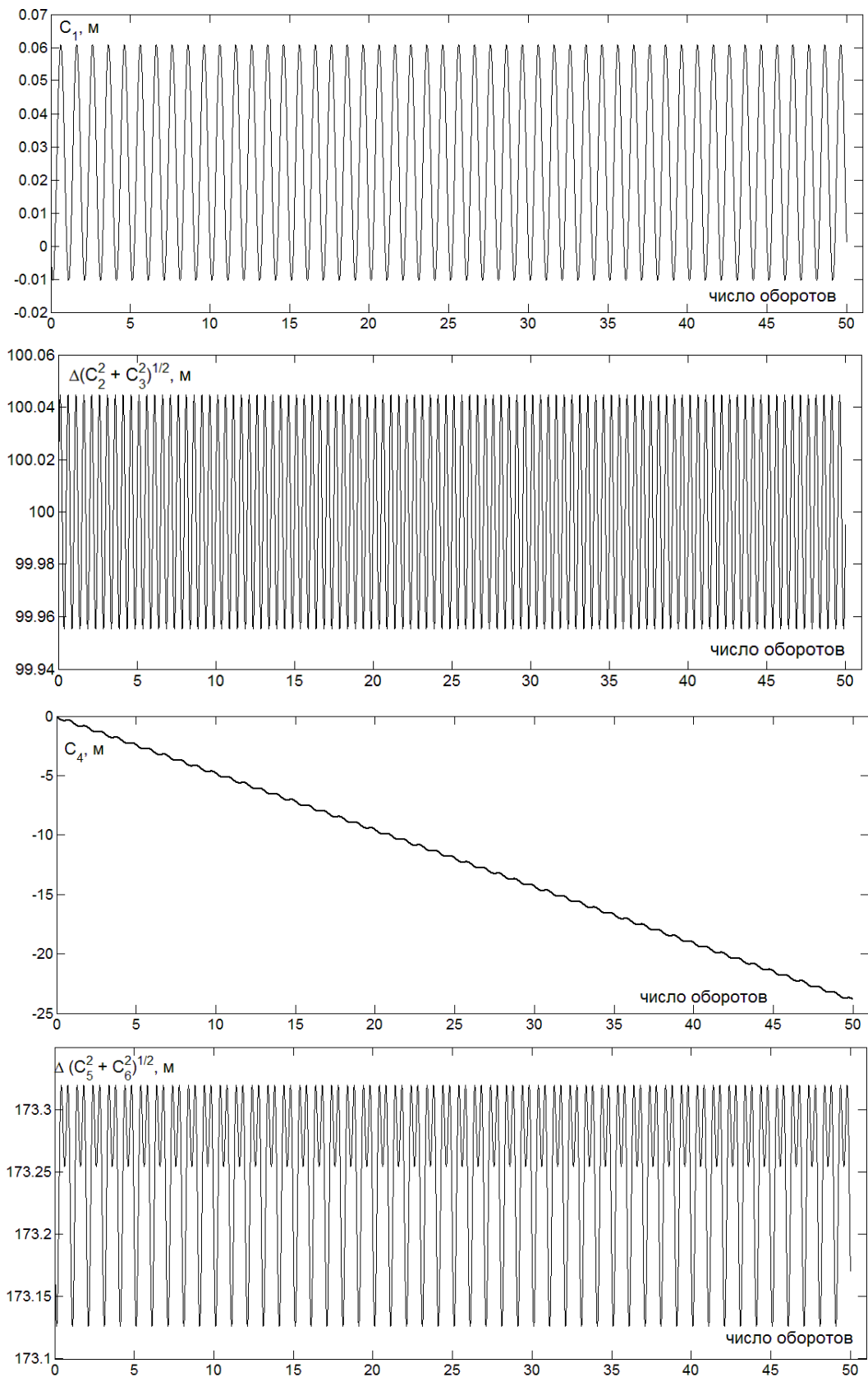


Рис. 5.1. Изменение констант без перебросов

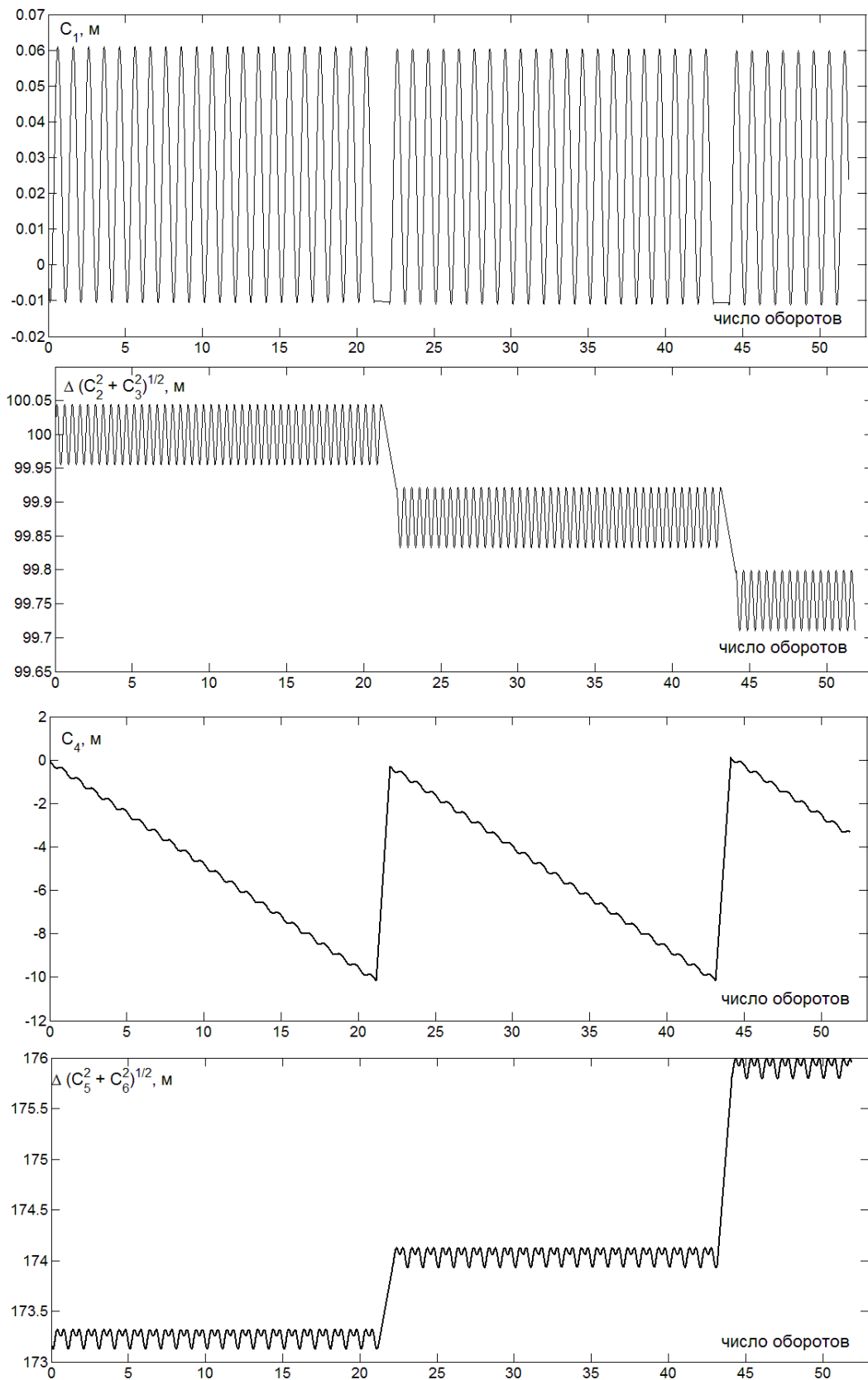


Рис. 5.2. Изменение констант с перебросами

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе было проведено исследование возможности управления относительным движением спутников в группе с помощью переброса масс. Для линейной модели полета были выведены основные уравнения, связывающие параметры относительного движения до и после переброса. Показано, что с помощью переброса массы можно остановить относительный дрейф двух спутников и в некоторых случаях приравнять дрейфы трёх спутников группы.

Рассмотренные оптимизационные задачи показали возможность выбора параметров переброса, дающих минимум выбранному функционалу (сохранение исходной формы орбиты, минимальное время переброса и минимальная скорость броска массы) при условии остановки относительного дрейфа. Для одних и тех же начальных условий разные задачи оптимизации естественно приводят к сильно отличающимся, но замкнутым относительным траекториям.

Ошибки исполнения броска неизбежны для реальной системы. В настоящей работе предполагается, что бросок и захват массы производится с помощью специального манипулятора, установленного на спутнике. Исследование различных типов ошибок — ошибка точки броска, скорости выброса — показало наличие ограничений на их значения при фиксированной ошибке попадания перебрасываемой массы. Само значение допустимой ошибки определяется расстоянием от центра масс, на котором манипулятор способен поймать перебрасываемое тело.

Так как основное влияние на относительное движение оказывает вторая гармоника разложения гравитационного поля Земли, были рассмотрены уравнения, учитывающие это возмущение. Было показано на примере, что с помощью переброса массы возможно бороться с дрейфом относительного движения, выбирая необходимую для этого точку переброса.

Таким образом, предложенный метод управления относительным движением спутников в группе с помощью переброса массы может успешно применяться для относительных маневров, для изменения конфигурации

полета, а также для поддержания заданной траектории. Однако следует учитывать, что с помощью переброса массы возможно не произвольное изменение траектории, а только некоторый ограниченный набор вариантов, который определяется параметрами начальной орбиты, массами спутников и дополнительного тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Izzo D., Pettazzi L. Autonomous and distributed motion planning for satellite swarm // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2007. — Vol. 30, no. 2. — P. 449–459.
- [2] D'Arrigo P., Santandrea S. The apies mission to explore the asteroid belt // Advances in Space Research. — 2006. — Vol. 38, no. 9. — P. 2060–2067.
- [3] Folkner W., Hellings R., Maleki L. et al. LISA — laser interferometer space antenna for gravitational wave measurements // AIAA, Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 33 rd, Reno, NV. — 1995.
- [4] Sabol C., Burns R., McLaughlin C. A. Satellite formation flying design and evolution // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2001. — Vol. 38, no. 2. — P. 270–278.
- [5] Morgan D., Chung S.-J., Blackmore L. et al. Swarm-keeping strategies for spacecraft under j_2 and atmospheric drag perturbations // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2012. — Vol. 35, no. 5. — P. 1492–1506.
- [6] Guerman A. D., Smirnov G., Paglione P. Stationary configurations of a tetrahedral tethered satellite formation // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2008. — Vol. 31, no. 2. — P. 424–428.
- [7] Misra A. K. Equilibrium configurations of tethered three-body systems and their stability // The Journal of the astronautical sciences. — 2002. — Vol. 50, no. 3. — P. 241–253.
- [8] Reid T., Misra A. K. Formation flight of satellites in the presence of atmospheric drag // Journal of Aerospace Engineering. — 2011. — Vol. 3, no. 1. — P. 64.

- [9] Schaub H., Parker G. G., King L. B. Challenges and prospects of coulomb spacecraft formation control // *Journal of Astronautical Sciences*. — 2004. — Vol. 52, no. 1. — P. 169–193.
- [10] Peck M. A., Streetman B., Saaj C. M. Spacecraft formation flying using lorentz forces // *Journal of the British Interplanetary Society*. — 2007. — Vol. 60. — P. 263–267.
- [11] Bae Y. K. A contamination-free ultrahigh precision formation flying method for micro-, nano-, and pico-satellites with nanometer accuracy // *Space Technology and Applications International Forum- Staif 2006*. — Vol. 813. — 2006. — P. 1213–1223.
- [12] Tragesser S. G. Static formations using momentum exchange between satellites // *Journal of guidance, control, and dynamics*. — 2009. — Vol. 32, no. 4. — P. 1277–1286.
- [13] Joslyn T., Ketsdever A. Constant momentum exchange between microspacecraft using liquid droplet thrusters // *46th joint Propulsion Conference*. — Vol. 6966. — 2010. — P. 25–28.
- [14] Schonig J. A. et al. Constant momentum exchange to maintain spacecraft formations // *Journal of Spacecraft and Rockets*. — 2012. — Vol. 49, no. 1.
- [15] Ivanov D., Ovchinnikov M., Shestakov S. Satellite formation flying control by mass exchange // *Acta Astronautica*. — 2014. — Vol. 102. — P. 392–401.
- [16] Shestakov S., Ivanov D., Ovchinnikov M. Formation-flying momentum exchange control by separate mass // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. — 2015. — P. 1–10.
- [17] Missel J., Mortari D. Removing space debris through sequential captures and ejections // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. — 2013. — Vol. 36, no. 3. — P. 743–752.
- [18] Clohessy W. H., Wiltshire R. S. Terminal guidance system for satellite rendezvous // *Aerospace Sci.* — 1960. — Vol. 27. — P. 653–658.

- [19] Schweighart S. A., Sedwick R. J. High-fidelity linearized J2 model for satellite formation flight // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2002. — Vol. 25, no. 6. — P. 1073–1080.