

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования

«Московский физико-технический институт

(государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

**Управление спутниками в групповом полете с  
помощью электростатического взаимодействия**

Выпускная квалификационная работа  
(бакалаврская работа)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выполнил:

студент 172 группы \_\_\_\_\_ Шестопёров Алексей Игоревич

Научный руководитель:

к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Ткачёв Степан Сергеевич

Москва 2015

## Оглавление

Введение .....	3
Глава 1. Постановка задачи и вспомогательные замечания .....	5
1.1. <i>Постановка задачи</i> .....	5
1.2. <i>Системы координат, используемые в работе</i> .....	7
1.3. <i>Диапазон значений зарядов и токов, реализуемых в рамках концепции электростатического управления</i> .....	8
Глава 2. Построение и анализ управления для случая двух спутников .....	9
2.1. <i>Построение управления</i> .....	9
2.2. <i>Численное моделирование</i> .....	13
Глава 3. Построение и анализ управления для случая трех спутников.....	19
3.1. <i>Построение модельного управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость формации</i> .....	21
3.2. <i>Коррекция и анализ модельного управления</i> .....	23
3.3. <i>Численное моделирование</i> .....	26
Заключение .....	31
Список литературы .....	32

## Введение

Появление малых спутников привело к возникновению нового взгляда на способы формирования конфигураций космических систем, способы решения новых фундаментальных и прикладных задач в космосе. В частности, стало возможным формирование группы (*формации*) спутников, движущихся по орбите на небольшом удалении друг от друга и решающих единую задачу.



**Рис. 1 Формация спутников**

С появлением новых классов миссий возникла задача управления формацией спутников, и в частности относительным движением космических аппаратов. Помимо классического управления космическими аппаратами с помощью создания малой тяги, в последнее время появляется множество альтернативных способов управления относительным движением. Среди них методы, основанные на перебросе масс [1], на применении электромагнитных [2] и электростатических [3,4,5] сил. Последний способ управления и рассматривается в данной работе.

Как упоминалось ранее, с появлением возможности формировать группы близко расположенных спутников, класс реализуемых миссий заметно расширился. Это привело к тому, что при попытке приспособить классические способы управления к некоторым классам миссий, исследователи столкнулись с рядом значительных затруднений.

В качестве примера рассмотрим класс оптических миссий, целью которых является получение беспрецедентно высокого качества изображения (Separated Spacecraft Interferometry (SSI))[3]. Применение метода, использующего малую тягу, к данному классу миссий, сопряжено с определенными трудностями. Основной проблемой являются выхлопные газы, пагубно влияющие на космические аппараты, находящиеся поблизости. Результатом взаимодействия выхлопов с поверхностью аппаратов может стать нарушение работы чувствительных оптических приборов, возникновение нежелательного поверхностного заряда и даже изменение динамики космического аппарата. Электростатическое управление дает возможность преодолеть эти затруднения. Использование кулоновских сил также позволят уменьшить топливные затраты во время полета, что является важным для любых космических миссий.

Наряду с явными преимуществами, концепция электростатического управления имеет ряд особенностей, связанных с характером сил взаимодействия. Во-первых, это резко возрастающая взаимосвязанность движения. Изменение относительного положения одного лишь спутника повлечет за собой изменение движения всех космических аппаратов, что усложняет моделирование внутренней динамики системы. Во-вторых, область применимости концепции, связанная с внешними условиями, в которых находится формация. Вышеизложенные особенности будут учитываться при построении модели управления.

# Глава 1. Постановка задачи и вспомогательные замечания

## 1.1. Постановка задачи

Объектом исследования является формация спутников, центр масс которой движется вокруг притягивающего центра (Земли).

Целью работы является получение электростатических управляющих воздействий. Характер электростатического взаимодействия говорит о том, что силы, ответственные за управление КА будут действовать вдоль линий, которые соединяют пары спутников. Управляющие воздействия призваны обеспечивать асимптотическую устойчивость конфигурации спутников (заранее заданного расстояния между космическими аппаратами).

Эффективное управление с помощью кулоновского взаимодействия возможно только на больших высотах. Причиной тому является плазменная среда, окружающая спутники. На низких высотах дебаевское экранирование электрических полей происходит на малых расстояниях. Ниже приведена таблица, сравнивающая дебаевские длины на орбитах, соответствующих различным высотам [3].

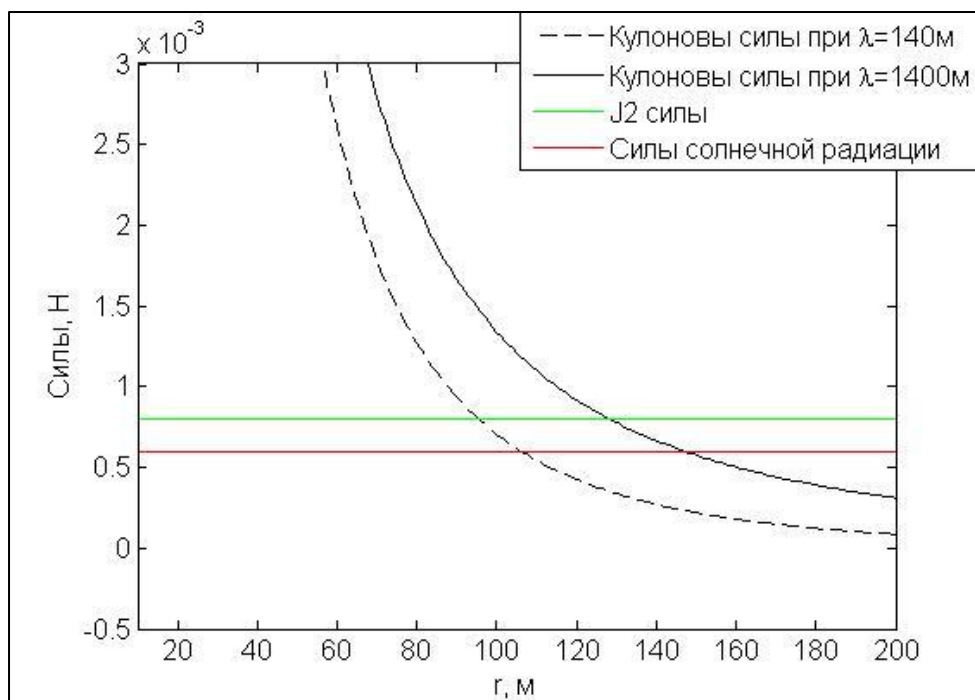
**Табл.1 Спектр дебаевских длин в различных плазменных средах**

Плазменная среда	Минимальная дебаевская длина, м	Максимальная дебаевская длина, м
Плазменная среда на НОО	0.02	0.4
Плазменная среда на ГСО	142	1496
Межпланетная плазма	7.4	24

Кулоновское взаимодействие пары спутников, погруженных в плазму, выглядит следующим образом [5]:

$$f_{12} = k_c \frac{r_{12}}{r_{12}} q_1 q_2 e^{-\frac{r_{12}}{\lambda_d}}, \quad (1.1)$$

где  $r_{12} = r_2 - r_1$ ;  $r_1, r_2$  - радиус-векторы спутников в инерциальной системе координат,  $k_c = 8.99 \cdot 10^9 \frac{H \cdot M^2}{Kl^2}$  - постоянная Кулона,  $\lambda_d$  - дебаевская длина.



**Рис. 2** Зависимость сил, действующих на КА, от относительного расстояния между ними

На рис. 4 представлена зависимость сил, действующих на КА, от относительного расстояния между спутниками. Расчеты проводились по формуле (1.1). Заряды полагались равными  $40\text{мкКл}$ , что соответствует полученным ниже значениям, необходимым для реализации предложенного в работе управления.

Из данного графика видно, что на низких околоземных орбитах, где дебаевская длина порядка сантиметров, концепция электростатического взаимодействия непрактична. Однако на геостационарной орбите, где дебаевская длина варьируется между 100-1400 метрами, данная концепция становится возможной и позволяет управлять спутниками на относительных расстояниях, достигающих 100м.

Таким образом, в работе используются следующие предположения:

- Влияние несферичности Земли не учитывается
- Орбита центра масс формации круговая
- Внешние возмущения (солнечное давление, неоднородность среды и т.п.) не учитываются

## 1.2. Системы координат, используемые в работе

В работе используется ряд систем координат.

OXYZ – геоцентрическая инерциальная система координат. Ось OX направлена на точку весеннего равноденствия, ось OZ перпендикулярна плоскости экватора, ось OY дополняет систему до правой тройки (рис. 2).

Oxyz - орбитальная система координат с началом, расположенном в центре масс формации. Ось Ox направлена по местной вертикали, ось Oz перпендикулярна плоскости орбиты, ось Oy дополняет систему до правой тройки (рис. 3).

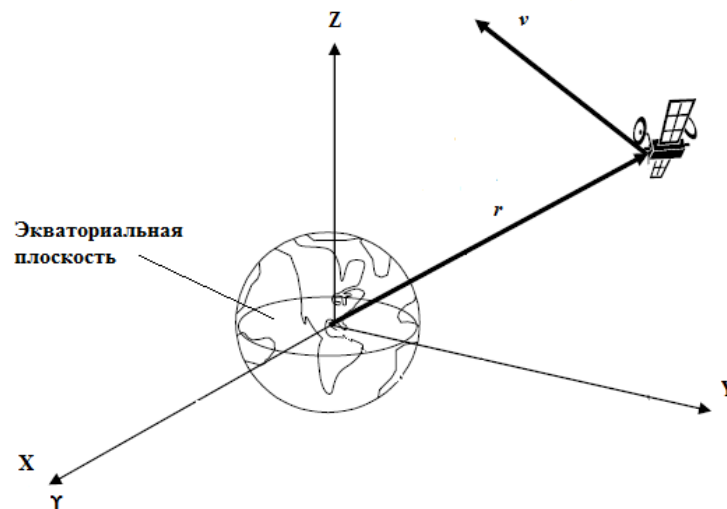


Рис. 3 Инерциальная система координат

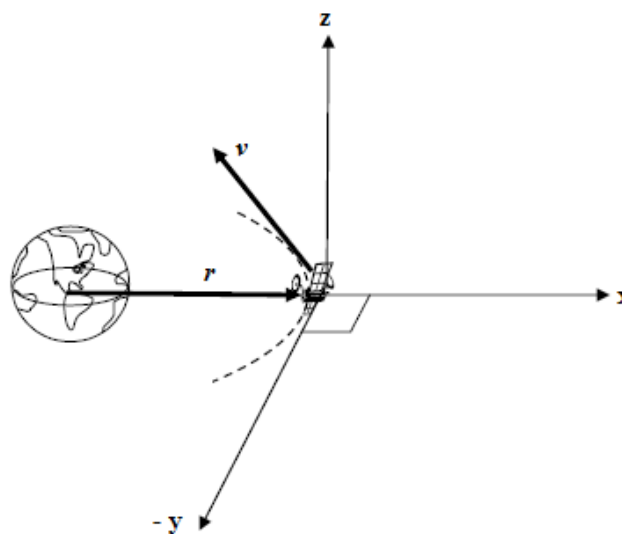


Рис. 4 Орбитальная система координат

### *1.3. Диапазон значений зарядов и токов, реализуемых в рамках концепции электростатического управления*

Важным аспектом при моделировании электростатического управления является способность реализовывать требуемые заряды и токи, генерируемые космическим аппаратом. С целью оценки возможных значений данных параметров, в 1979 году был запущен спутник SCATHA[6]. Управление потенциалом космического аппарата проводилось при помощи электронной пушки, которая обеспечивала эмиссию заряженных частиц в окружающую плазменную среду. Данная электронная пушка генерировала токи, достигающие 13 мА. При этом потенциал спутника с радиусом 0.5 м достигал 3кВ, что в зарядном эквиваленте составляет 50 мКл. Эти значения зарядов и токов будут использоваться в данной работе при численном моделировании в качестве критерия допустимости управления.



## Глава 2. Построение и анализ управления для случая двух спутников

### 2.1. Построение управления

В главе рассматривается управление формацией, состоящей из двух спутников. Целью управления является поддержание космических аппаратов на заданном расстоянии.

Относительное движение пары спутников в орбитальной системе координат описывается векторным дифференциальным уравнением (или системой из 3х скалярных уравнений) Хилла [7,9]. При этом в правую часть уравнения надо добавить член, отвечающий за управление.

Пусть  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор, соединяющий пару спутников,  $r = \sqrt{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}$  - расстояние между спутниками. Учитывая, что взаимодействие носит электростатический характер, будем искать его в следующем виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{\alpha(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\alpha(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  – функция управления, которую необходимо найти. Выбор функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  в качестве управляющего воздействия вполне обоснован. Действительно,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  убывает обратно пропорционально квадрату расстояния и действует вдоль оси, соединяющей космические аппараты, что в полной мере отражает природу кулоновских сил.

Для простоты выкладок и наглядности сделаем дополнительные предположения. Пусть масса одного спутника намного превышает массу другого. Тогда центр масс формации совпадет с началом координат орбитальной системы отчета. Массу легкого спутника положим равной единице. В итоге, уравнения движения (уравнения Хилла) примут следующий вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + 3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\alpha}{r^2}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  - угловая скорость вращения центра масс формации вокруг Земли.

Запишем в координатном виде уравнения Хилла для невозмущенного относительного движения спутников. Но прежде отметим, что для круговой орбиты  $\omega^2 = \frac{\mu}{r^3} = n^2$ , где  $n$  - среднее движение. Тогда уравнения примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x &= 0, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + n^2z &= 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

В системе уравнений (2.3) перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{aligned}x(r, \theta, \varphi) &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y(r, \theta, \varphi) &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z(r, \theta, \varphi) &= r \cos \theta.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Перепишем уравнения Хилла в новых координатах, помещая в правую часть все члены, не зависящие от вторых производных. Получаем:

$$\begin{aligned}\ddot{r} \sin \theta \cos \varphi + \ddot{\theta} r \cos \theta \cos \varphi - \ddot{\varphi} r \sin \theta \sin \varphi &= a(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}), \\ \ddot{r} \sin \theta \sin \varphi + \ddot{\theta} r \cos \theta \sin \varphi - \ddot{\varphi} r \sin \theta \cos \varphi &= b(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}), \\ \ddot{r} \cos \theta - \ddot{\theta} r \sin \theta &= c(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi});\end{aligned}\tag{2.5}$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} r \\ \ddot{\varphi} r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned}a(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) &= -2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta}^2 r \sin \theta \cos \varphi + \\ &+ 2\dot{\theta}\dot{\varphi} r \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 r \sin \theta \cos \varphi + 2n(\dot{r} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} r \cos \theta \sin \varphi + \\ &+ \dot{\varphi} r \sin \theta \cos \varphi) + 3n^2 r \sin \theta \cos \varphi, \\ b(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) &= -2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta}^2 r \sin \theta \sin \varphi - \\ &- 2\dot{\theta}\dot{\varphi} r \cos \theta \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 r \sin \theta \sin \varphi - \\ &- 2n(\dot{r} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} r \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \theta \sin \varphi), \\ c(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) &= 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 r \cos \theta - n^2 r \cos \theta.\end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Разрешим систему (2.6). Используя тот факт, что матрица  $A$  ортогональна, транспонируем ее и получаем:

$$\begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} r \\ \ddot{\varphi} r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Выпишем только радиальную составляющую ускорения и учтем добавочный член, связанный с управляющим воздействием:

$$\ddot{r} = r \sin^2 \theta (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + r \cos^2 \theta (\dot{\theta}^2 - n^2) + 3n^2 r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + 2n\dot{\varphi} r \sin^2 \theta + \frac{\alpha}{r^2}. \quad (2.9)$$

Для того чтобы добиться асимптотической устойчивости вдоль оси, соединяющей спутники, воспользуемся методом, основанным на построении функции Ляпунова [10,11]. Пусть  $a$  - расстояние, на которое требуется развести спутники. Тогда функцию Ляпунова будем искать в виде:

$$V = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k(r-a)^2, (PD-регулятор). \quad (2.10)$$

Найдем первую производную функции  $V$ :

$$\dot{V} = \dot{r}\ddot{r} + k\dot{r}(r-a) = \dot{r}(\ddot{r} + k(r-a)). \quad (2.11)$$

Функция  $V$  - знакопостоянная ( $V \geq 0$ ). Применим теорему Барбашина-Красовского. Для того чтобы удовлетворить условиям теоремы, необходимо подобрать управление, благодаря которому будет иметь место неравенство  $\dot{V} \leq 0$ . Этого можно добиться, приравняв  $\ddot{r} + k(r-a)$  к  $-g\dot{r}$ . Тогда  $\dot{V} = -g\dot{r}^2 \leq 0$ , что и требовалось. В итоге, нам осталось найти управление  $\alpha$  из дифференциального уравнения второго порядка:

$$\ddot{r} + g\dot{r} + k(r-a) = 0 \quad (2.12)$$

Получим  $\alpha$  в декартовых координатах. Подставим (2.9) в (2.12). Учитывая, что

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \dot{x} \sin \theta \cos \varphi + \dot{y} \sin \theta \sin \varphi + \dot{z} \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{\dot{x}}{r} \cos \theta \cos \varphi + \frac{\dot{y}}{r} \cos \theta \sin \varphi - \frac{\dot{z}}{r} \sin \theta, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\dot{x} \sin \varphi}{r \sin \theta} + \frac{\dot{y} \cos \varphi}{r \sin \theta},\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta &= \frac{x^2 + y^2}{r^2}, \cos \theta = \frac{z}{r}, \\ \sin \varphi &= \frac{y}{r \sin \theta}, \cos \varphi = \frac{x}{r \sin \theta},\end{aligned}$$

получаем искомое управление:

$$\begin{aligned}\alpha &= -(x^2 + y^2 + z^2) \left( g \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + k((x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} - a) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3n^2x^2 - n^2z^2 + 2n(xy - \dot{x}y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right)\end{aligned}\quad (2.13)$$

или в векторном виде:

$$\alpha = -r^2 (g v_r + k(r - a) + \frac{v_n^2}{r} + \frac{2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]^2}{r}). \quad (2.14)$$

где  $v_r$  и  $v_n$  – радиальная и нормальная составляющие скорости «легкого» КА соответственно.

Найдём такие соотношения между параметрами управления  $g$  и  $k$ , чтобы достигалась максимальная степень устойчивости. Приведем уравнение (2.12) приведем его к виду:

$$\ddot{l} + g\dot{l} + kl = 0, \quad (2.15)$$

где  $l = r - a$ . Корни характеристического уравнения для (2.15):

$$\lambda_{1,2} = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 - 4k}}{2}.$$

Для достижения максимальной степени устойчивости самый правый корень характеристического полинома должен лежать как можно левее [8]. Для этого потребуем выполнения условия:

$$k = \frac{g^2}{4}.$$

Таким образом, найдено управление  $\alpha$ , обеспечивающее асимптотическую устойчивость относительного движения пары спутников. В каждый момент времени оно рассчитывается по формуле (2.14).

## 2.2 Численное моделирование

Покажем на численном примере реакцию пары спутников на управление, полученное в 2.1. Для расчетов возьмем следующую модель. Как предполагалось в 2.1, спутник с большой массой находится в начале координат орбитальной системы отсчета и движется вместе с ней. Значит достаточно задать начальные условия лишь для спутника малой массы. Также зададим шаг интегрирования  $h$ , коэффициенты управления  $k, g$  и требуемое расстояние между спутниками  $a$ :

$$\begin{aligned} x &= 5m; \quad y = 4m; \quad z = 3m; \\ v_x &= 0.4m/c, \quad v_y = 0.2m/c, \quad v_z = 0.2m/c; \\ k &= 0.0025c^{-2}, \quad g = 0.1c^{-1}; \\ a &= 10m; \\ h &= 0.1c. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Результаты расчетов при данных условиях приведены на рисунках 5-10. Все рисунки приведены в конце раздела.

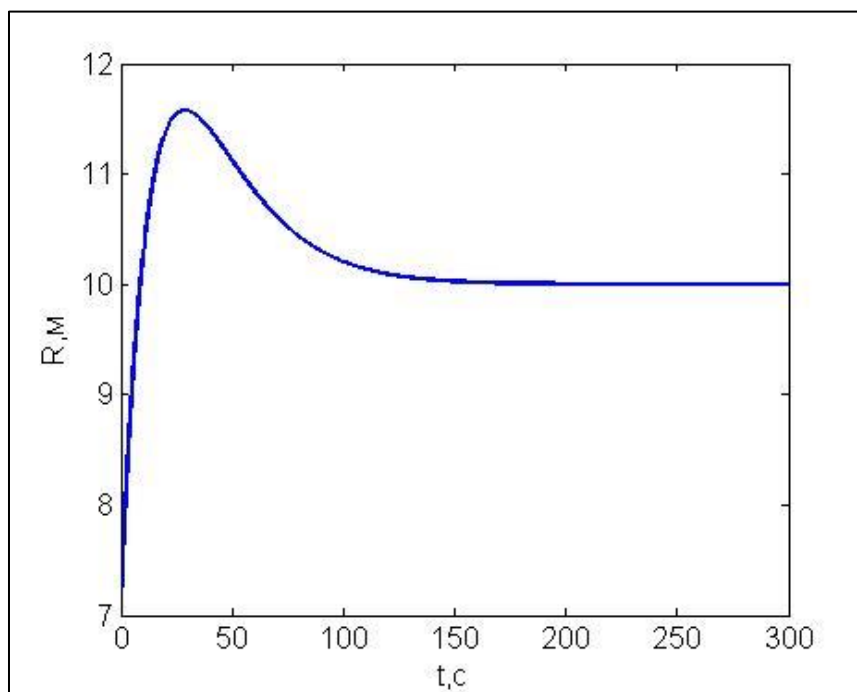
На рис. 5,6 показана зависимость расстояния между спутниками от времени. Видно, что формация расходитя на заданное расстояние (рис.5) и в асимптотическом режиме величина расстояния совершает колебания около требуемого значения (рис.6), величина амплитуды которых зависит от шага интегрирования. Также в этом можно убедиться из рис.7, на котором изображена

зависимость  $\delta = \frac{\sqrt{(R-a)^2}}{a}$  от времени, где  $\delta$  - относительного отклонения

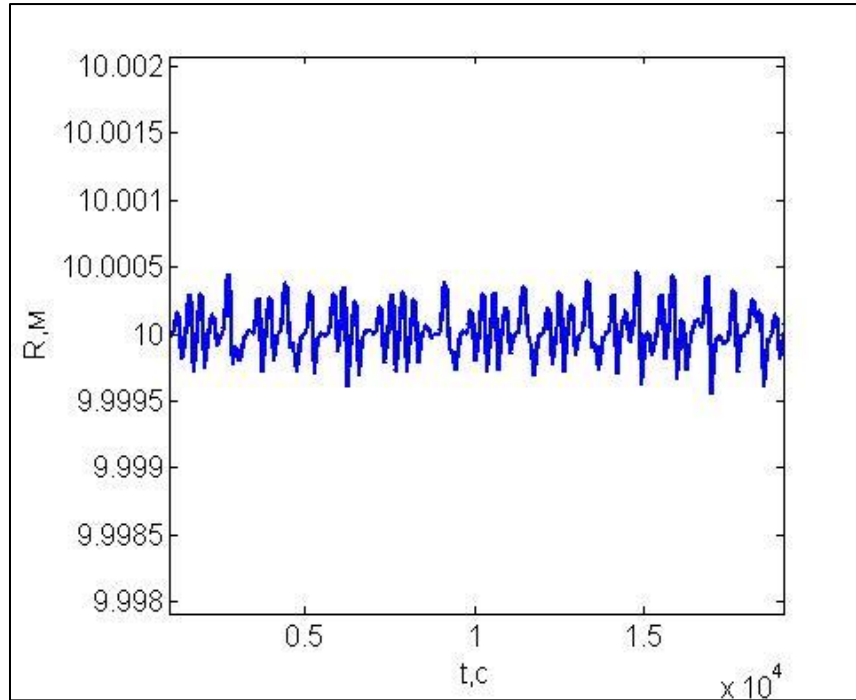
расстояния от заданного значения. Дополнительно, на рис.8, приведен график движения малого спутника в орбитальной системе отсчета. Графики 5–8 наглядно

демонстрируют, что моделируемое управление поддерживает спутники на заранее заданном расстоянии.

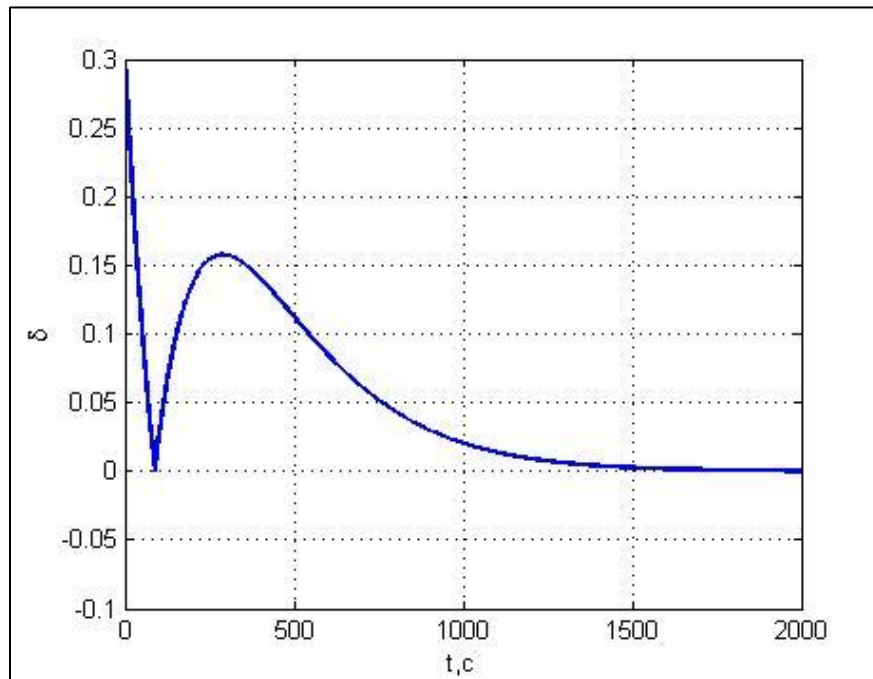
Рис. 9-10 описывают зависимости управляющих воздействий от времени. Графики построены на различных временных интервалах. График на рис.9 описывает поведение управления на стадии стабилизации формации. На рис.10 отражены значения управлений в установившемся режиме. Абсолютные значения силы, генерируемой в установившемся режиме, не превышают 4мН. Графики на рис.11 и 12 изображают зависимость зарядов на спутниках и токов эмиссии от времени соответственно. Расчет показал, что абсолютные значения зарядов не превышают 1мкКл, а токи эмиссии 0.05мкА. Сравнивая полученные значения с результатами, изложенными в разделе 1.4, можно заключить, что управление реализуемо на практике.



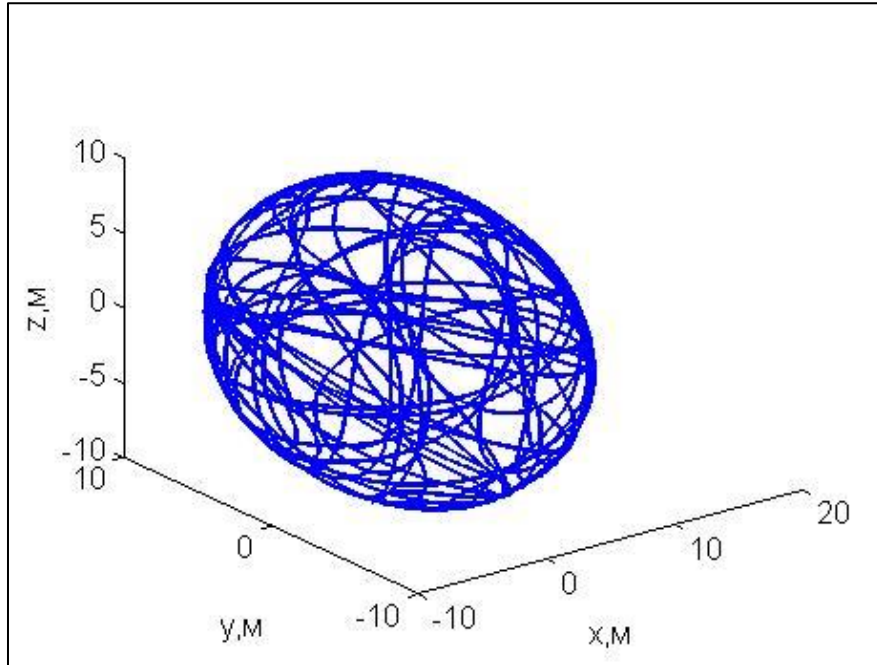
**Рис. 5** Зависимость расстояния между спутниками от времени( t = 300 сек )



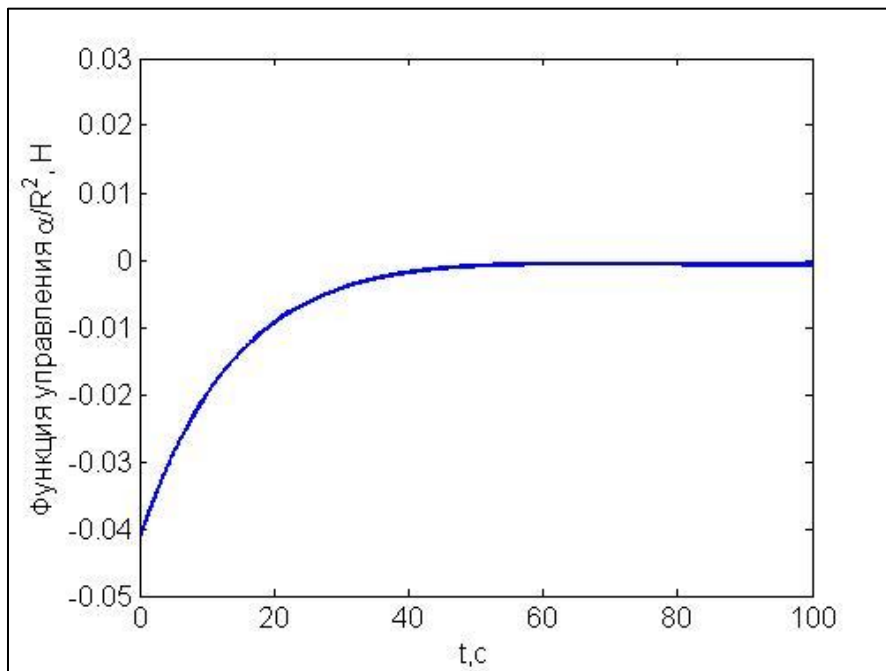
**Рис. 6** Зависимость расстояния между спутниками от времени (  $t = 20000$ сек )



**Рис. 7** Относительное отклонение расстояния между спутниками от времени (  $t = 2000$  сек )

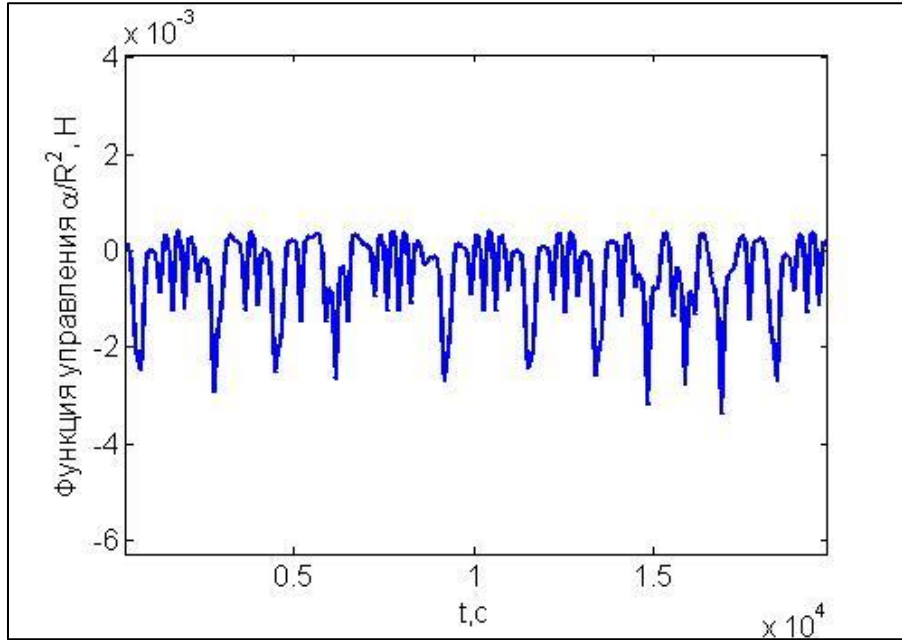


**Рис. 8** Движение спутника с малой массой в орбитальной с.к.

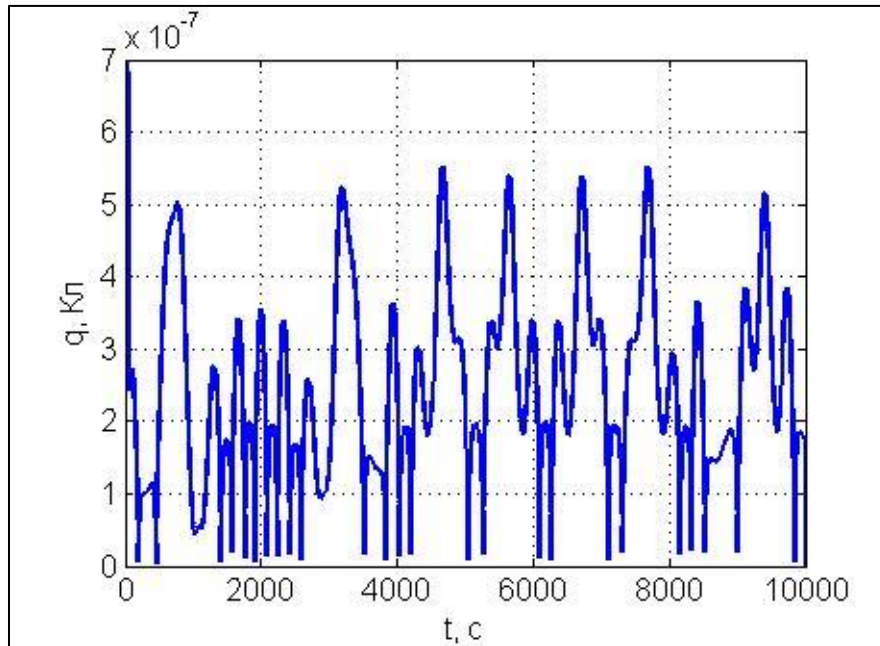


**Рис. 9** Зависимость функции управления от времени (  $t = 100$  сек )

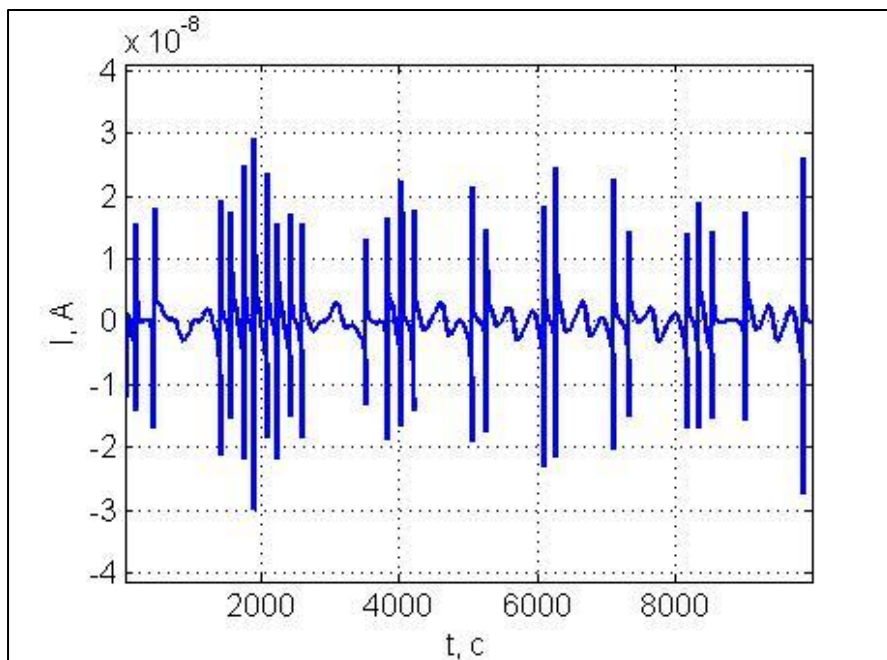




**Рис. 10** Зависимость функции управления от времени (  $t = 20000$  сек )



**Рис.11** Зависимость заряда на спутнике от времени (  $t = 10000$  с )



**Рис.12** Зависимость тока эмиссии от времени (  $t = 10000$  с )

## Глава 3. Построение и анализ управления для случая трех спутников

Целью главы является построение электростатического управления для трех спутников, которое сможет поддерживать их на заданном расстоянии друг относительно друга. Все модельные предположения, используемые для двух спутников в главе 2, сохраняются и для трех. Исключением является предположение относительно масс спутников, используемое локально в главе 2. Нотация также остается прежней.

Уравнения движения в данной главе выписываются по аналогии со случаем двух спутников. Кулоновские силы действуют вдоль осей, соединяющих каждую пару спутников. В случае трех космических аппаратов имеем три оси. Член, ответственный за аппаратное взаимодействие, имеет следующий вид:

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}_{jk}, \dot{\mathbf{r}}_{jk}) = \frac{\alpha_i(\mathbf{r}_{jk}, \dot{\mathbf{r}}_{jk})}{r_{jk}^2} \frac{\mathbf{r}_{jk}}{r_{jk}}, \quad (3.1)$$

где  $i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3}; i \neq j \neq k$ .  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_3 \ \alpha_1 \ \alpha_2)^T$  - искомый вектор управлений. Как видно из (3.1), вектор  $\mathbf{u}_i$  сонаправлен с  $\mathbf{r}_{jk}$  и убывает с квадратичной скоростью относительно  $r_{ij}$ . Такое поведение функции  $\mathbf{u}_i$  полностью отражает характер электростатического взаимодействия. На каждый космический аппарат действуют силы со стороны двух других аппаратов.

Важную роль в записи уравнений движения играют направления радиус-векторов, соединяющих спутники. В дальнейших вычислениях принято следующее:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{12} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{r}_{23} &= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{r}_{31} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{r}_i$ , где  $i = \overline{1,3}$  - радиус-векторы спутников в орбитальной системе координат. В итоге уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_1 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_1 + 3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 &= \frac{1}{m_1} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \cdot \frac{\alpha_3}{r_{12}^2} - \frac{1}{m_1} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}} \cdot \frac{\alpha_2}{r_{31}^2} \\
\ddot{\mathbf{r}}_2 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_2 + 3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2 &= -\frac{1}{m_2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \cdot \frac{\alpha_3}{r_{12}^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}} \cdot \frac{\alpha_1}{r_{23}^2} \\
\ddot{\mathbf{r}}_3 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_3 + 3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_3 &= \frac{1}{m_3} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}} \cdot \frac{\alpha_2}{r_{31}^2} - \frac{1}{m_3} \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}} \cdot \frac{\alpha_1}{r_{23}^2}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь  $r_{ij} = \sqrt{(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_{ij})}$ . В дальнейшем нам понадобятся выражения для первых и вторых производных  $r_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
\dot{r}_{ij} &= \frac{(\mathbf{r}_{ij}, \dot{\mathbf{r}}_{ij})}{r_{ij}}, \\
\ddot{r}_{ij} &= \frac{(\dot{\mathbf{r}}_{ij}, \dot{\mathbf{r}}_{ij}) + (\mathbf{r}_{ij}, \ddot{\mathbf{r}}_{ij})}{r_{ij}} - \frac{(\mathbf{r}_{ij}, \dot{\mathbf{r}}_{ij})^2}{r_{ij}^3}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Прежде чем начать построение и анализ искомого управления для формации из трех спутников следует отметить, что мы столкнемся с определенными затруднениями, не имеющими места в случае с двумя спутниками. А именно, придется учесть ограничения, которые будут касаться множества значений вектора зарядов  $\mathbf{q} = (q_1 \quad q_2 \quad q_3)^T$ . Компонентами  $\mathbf{q}$  являются заряды на трех космических аппаратах в данный момент времени.

Построение алгоритма управления в данной главе проводится в два этапа:

1. Вычисляется управление (в дальнейшем оно будет называться *модельным* или *теоретическим*), обеспечивающее асимптотическую устойчивость формации вдоль трех осей взаимодействия (раздел 3.1).
2. Производится коррекция модельного управления, учитывающая ограничения, связанные с характером управления, на значения зарядов (раздел 3.2).

В качестве иллюстрации работоспособности алгоритма управления, проводится его численное моделирование для формации из трех спутников (раздел 3.3).

### 3.1. Построение модельного управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость формации

Построение управления аналогично разделу 2.1. Воспользуемся методом анализа устойчивости, в основе которого лежит поиск функции Ляпунова. Пусть  $a_1, a_2, a_3$  – расстояния, соответствующие осям  $r_{12}, r_{23}, r_{31}$ , на которые требуется развести спутники. Будем искать ее в следующем виде:

$$V = \frac{1}{2}\dot{r}_{12}^2 + \frac{1}{2}\dot{r}_{23}^2 + \frac{1}{2}\dot{r}_{31}^2 + \frac{1}{2}k_1(r_{12} - a_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(r_{23} - a_2)^2 + \frac{1}{2}k_3(r_{31} - a_3)^2. \quad (3.4)$$

Найдем первую производную функции  $V$ :

$$\dot{V} = \dot{r}_{12}(\ddot{r}_{12} + k_1(r_{12} - a_1)) + \dot{r}_{23}(\ddot{r}_{23} + k_2(r_{23} - a_2)) + \dot{r}_{31}(\ddot{r}_{31} + k_3(r_{31} - a_3)). \quad (3.5)$$

Как и в случае с двумя спутниками добьемся выполнения неравенства  $\dot{V} \leq 0$  с той целью, чтобы применить теорему Барбашина-Красовского. Далее повторим последовательность шагов, в результате которых было получено выражение (2.12), описывающее радиальное движение пары спутников. Приравняем  $\ddot{r}_{12}(\alpha_3) + k_1(r_{12} - a_1)$  к  $-g_1\dot{r}_{12}$ ;  $\ddot{r}_{23}(\alpha_1) + k_2(r_{23} - a_2)$  к  $-g_2\dot{r}_{23}$ ;  $\ddot{r}_{31}(\alpha_2) + k_3(r_{31} - a_3)$  к  $-g_3\dot{r}_{31}$ . Несложно заметить, что при этом условие  $\dot{V} \leq 0$  выполняется, и мы приходим к следующей системе уравнений на  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{12}(\alpha_3) + g_1\dot{r}_{12} + k_1(r_{12} - a_1) &= 0, \\ \ddot{r}_{23}(\alpha_1) + g_2\dot{r}_{23} + k_2(r_{23} - a_2) &= 0, \\ \ddot{r}_{31}(\alpha_2) + g_3\dot{r}_{31} + k_3(r_{31} - a_3) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ясно, что каждое из уравнений системы совпадает с формулой (2.12). После подстановки  $\dot{r}_{ij}, \ddot{r}_{ij}$  в (3.6), уравнения на управляющие воздействия принимают окончательный вид:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{r}_{12}, \ddot{\mathbf{r}}_{12}(\alpha_3))}{r_{12}} + \frac{(v_{12})_n^2}{r_{12}} + g_1(v_{12})_r + k_1(r_{12} - a_1) &= 0, \\ \frac{(\mathbf{r}_{23}, \ddot{\mathbf{r}}_{23}(\alpha_1))}{r_{23}} + \frac{(v_{23})_n^2}{r_{23}} + g_2(v_{23})_r + k_2(r_{23} - a_2) &= 0, \\ \frac{(\mathbf{r}_{31}, \ddot{\mathbf{r}}_{31}(\alpha_2))}{r_{31}} + \frac{(v_{31})_n^2}{r_{31}} + g_3(v_{31})_r + k_3(r_{31} - a_3) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $(v_{ij})_r$  и  $(v_{ij})_n$  – радиальная и нормальная составляющие скорости вдоль оси, соединяющей  $i$  и  $j$  КА.

Запишем систему (3.7) в матричном виде и разрешим ее относительно

$$\boldsymbol{\alpha} = \left( \frac{\alpha_3}{r_{12}^2} \quad \frac{\alpha_1}{r_{23}^2} \quad \frac{\alpha_2}{r_{31}^2} \right)^T.$$

В итоге получаем:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}, \quad (3.8)$$

где матрица системы  $\mathbf{A}$  имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) & \frac{(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{23})}{m_2 r_{12} r_{23}} & \frac{(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{31})}{m_1 r_{12} r_{31}} \\ \frac{(\mathbf{r}_{23}, \mathbf{r}_{12})}{m_2 r_{23} r_{12}} & -\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) & \frac{(\mathbf{r}_{23}, \mathbf{r}_{31})}{m_3 r_{23} r_{31}} \\ \frac{(\mathbf{r}_{31}, \mathbf{r}_{12})}{m_1 r_{31} r_{12}} & \frac{(\mathbf{r}_{31}, \mathbf{r}_{23})}{m_3 r_{31} r_{23}} & -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\right) \end{pmatrix},$$

а свободный столбец  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ , где:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{12}} (2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{12}, \dot{\mathbf{r}}_{12}) + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{12}]^2) \\ \frac{1}{r_{23}} (2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{23}, \dot{\mathbf{r}}_{23}) + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{23}]^2) \\ \frac{1}{r_{31}} (2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{31}, \dot{\mathbf{r}}_{31}) + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{31}]^2) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{(v_{12})_n^2}{r_{12}} - (g_1 (v_{12})_r + k_1 (r_{12} - a_1)) \\ -\frac{(v_{23})_n^2}{r_{23}} - (g_2 (v_{23})_r + k_2 (r_{23} - a_2)) \\ -\frac{(v_{31})_n^2}{r_{31}} - (g_3 (v_{31})_r + k_3 (r_{31} - a_3)) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получено модельное управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость формации, состоящей из трех спутников, вдоль каждой из трех осей взаимодействия.

### 3.2. Коррекция и анализ модельного управления

Как и говорилось в начале главы 3, на втором этапе работы перед нами стоит задача: скорректировать теоретическое управление, полученное в разделе 3.1 данной главы, учитывая особенности электростатического управления спутниками.

Изучим характер управляющих воздействий. Функция управления вдоль  $i$ -ой оси, как и раньше, обозначается  $\alpha_i$ , где  $i = \overline{1,3}$ . Так как в работе рассматривается электростатическое управление,  $\alpha_i$  будут иметь следующий вид:

$$\alpha_i(\mathbf{r}_{jk}, \dot{\mathbf{r}}_{jk}) = q_j(\mathbf{r}_{jk}, \dot{\mathbf{r}}_{jk})q_k(\mathbf{r}_{jk}, \dot{\mathbf{r}}_{jk}), \quad (3.9)$$

где  $q_j$  и  $q_k$  - заряды  $j$ -го ( $i = \overline{1,3}$ ) и  $k$ -го ( $k = \overline{1,3}$ ),  $i \neq j \neq k$  космических аппаратов соответственно. Ранее мы получили теоретические (модельные) значения управляющих воздействий, обеспечивающих асимптотическую устойчивость формации. Но на практике, не всё множество значений функций  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) (соответственно и вектора  $\mathbf{q}$ ) может быть реализовано. Затруднения связаны со знаками зарядов на том или ином спутнике. Действительно, запишем систему уравнений относительно зарядов  $q_k$ , где  $k = \overline{1,3}$ , считая управления  $\alpha_i$  известными (в соответствии с формулой (3.8)):

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= q_1 q_2, \\ \alpha_1 &= q_2 q_3, \\ \alpha_2 &= q_3 q_1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из системы найдем для заряда  $q_1$ :

$$q_1 = \pm \sqrt{\frac{\alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1}}.$$

Отсюда ясно, что для вещественности заряда  $q_1$  необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 > 0$ . Это же условие будет необходимым для вещественности  $q_2$  и  $q_3$ . Таким образом полученное модельное управление (формула (3.8)) не всегда может быть реализовано на практике, а именно в случаях, когда  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 < 0$ .

Для преодоления данного затруднения предлагается следующий подход. Имея на руках значения теоретических управлений  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ), найденных в соответствии с (3.8), получим такие значения зарядов  $q_1, q_2, q_3$ , что их попарные произведения  $q_1q_2, q_2q_3, q_3q_1$  как можно меньше отличались от значений  $\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2$  соответственно. С этой целью возьмем функционал

$$\Phi = (q_1q_2 - \alpha_3)^2 + (q_2q_3 - \alpha_1)^2 + (q_1q_3 - \alpha_2)^2 \quad (3.11)$$

и минимизируем его. Система уравнений для поиска экстремумов данного функционала будет иметь вид:

$$\begin{aligned} q_2(q_1q_2 - \alpha_3) + q_3(q_1q_3 - \alpha_2) &= 0, \\ q_1(q_1q_2 - \alpha_3) + q_3(q_2q_3 - \alpha_1) &= 0, \\ q_2(q_2q_3 - \alpha_1) + q_1(q_1q_3 - \alpha_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Разрешая ее относительно  $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T$ , получим четыре пары решений (тривиальное решение означает отсутствие управления и здесь не выписывается):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}} \\ \mp \sqrt{\frac{\alpha_3\alpha_1}{\alpha_2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}} \\ 0 \\ \mp \sqrt{\frac{\alpha_3\alpha_2}{\alpha_1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{\alpha_3\alpha_1}{\alpha_2}} \\ \mp \sqrt{\frac{\alpha_3\alpha_2}{\alpha_1}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{\alpha_3\alpha_2}{\alpha_1}} \\ \pm \sqrt{\frac{\alpha_3\alpha_1}{\alpha_2}} \\ \pm \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Из условия вещественности зарядов можно заключить, что первые три пары решений удовлетворяют случаю  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 < 0$ , а четвертая пара случаю  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 > 0$ . Отсюда можно сделать вывод:

- Если  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 > 0$ , то из системы (3.10) сразу находим  $q_1, q_2, q_3$ , что соответствует четвертой паре решений.
- Если  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 < 0$ , система не разрешима, в этом случае из зарядов обнуляется. Простой подстановкой можно убедиться, что оставшаяся  $\alpha_i$  будет максимальной по модулю в данный момент времени.

В связи с вышесказанным предлагается алгоритм управления формацией, представленный в виде блок схемы на рисунке 12.



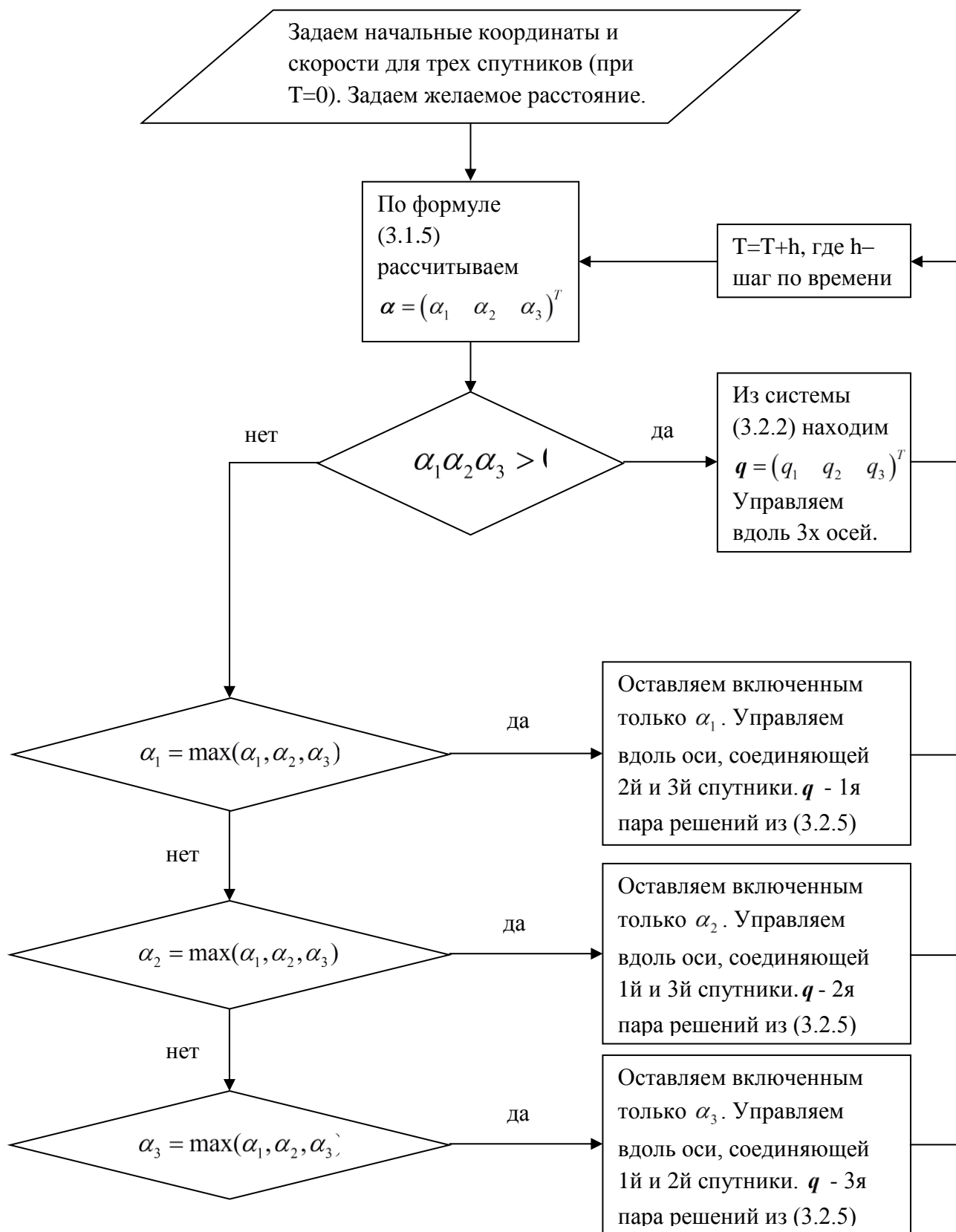


Рис.13 Алгоритм управления формацией из трех спутников

Таким образом, проанализированы возможные решения  $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T$  относительно  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_3 \ \alpha_1 \ \alpha_2)^T$ , учитывающие электростатический характер управления. Приведен скорректированный алгоритм управления формацией из трех спутников.

### 3.3. Численное моделирование

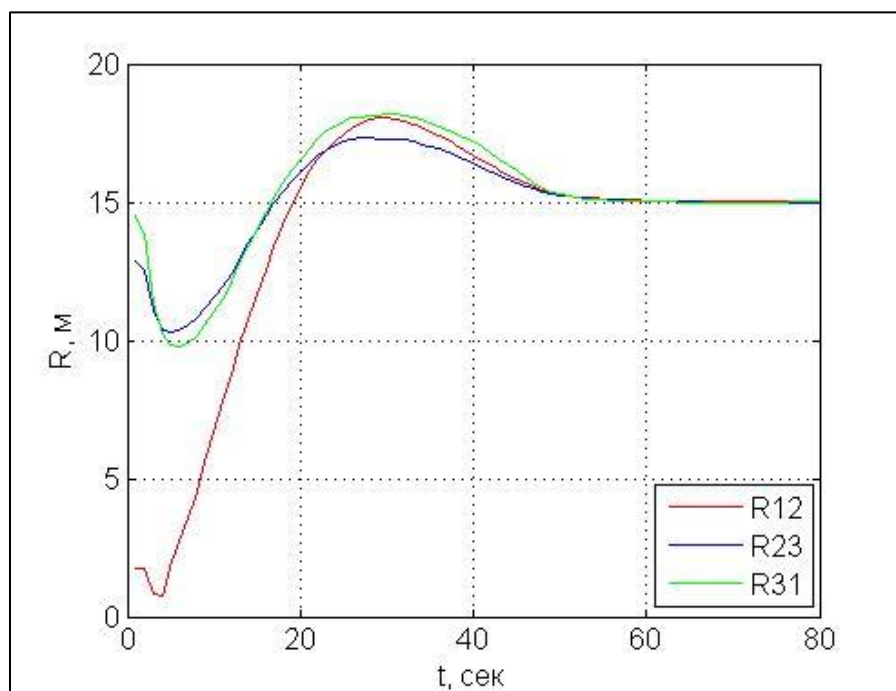
Для примера проводится численное моделирование поведения формации, состоящей из трех спутников и использующей управление, полученное в 3.2. Зададим координаты и скорости спутников в начальный момент времени. Также зададим шаг интегрирования  $h$ , коэффициенты управления  $k, g$  и требуемые расстояния между спутниками  $a$ :

$$\begin{aligned}
 & x_1 = 2m, \ y_1 = 3m, \ z_1 = 4m, \ x_2 = 1m, \ y_2 = 2m, \ z_2 = 3m; \\
 & v_{x_1} = 1m/c, v_{y_1} = 0m/c, v_{z_1} = 1m/c, v_{x_2} = 0m/c, v_{y_2} = 0m/c, v_{z_2} = 0m/c; \\
 & (x_3 \ y_3 \ z_3 \ v_{x_3} \ v_{y_3} \ v_{z_3})^T = \\
 & = -(x_1 \ y_1 \ z_1 \ v_{x_1} \ v_{y_1} \ v_{z_1})^T - (x_2 \ y_2 \ z_2 \ v_{x_2} \ v_{y_2} \ v_{z_2})^T; \\
 & g_1 = g_2 = g_3 = g = 0.45c^{-1}, k_1 = k_2 = k_3 = k = \frac{g^2}{4}c^{-2}; \\
 & a_1 = a_2 = a_3 = 15m; \\
 & h = 1c.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

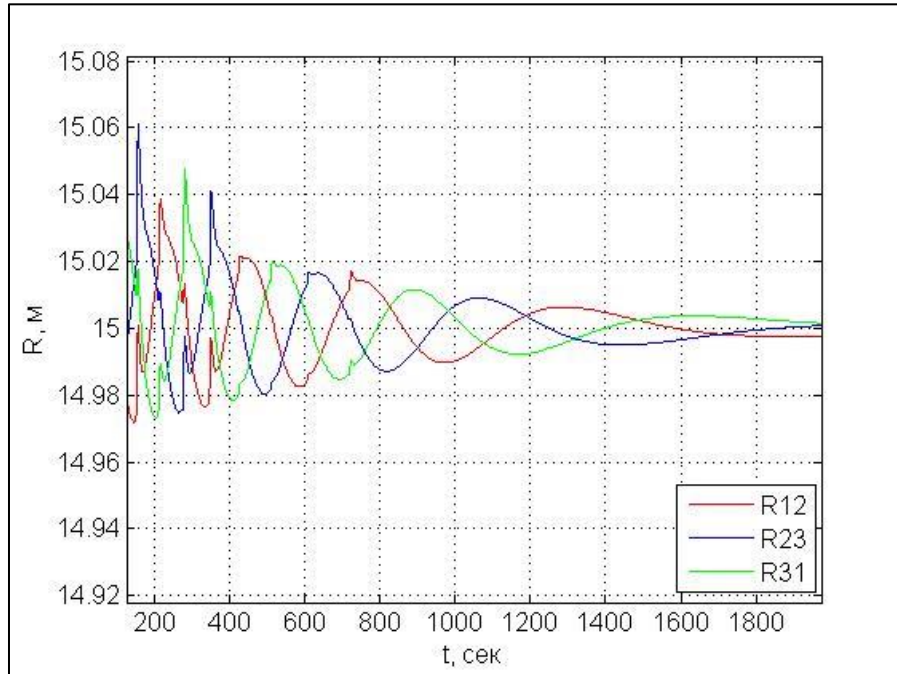
Результаты расчетов при данных условиях приведены на рисунках 14-21. Все рисунки приведены в конце раздела.

На рис. 14,15 исследуется зависимость расстояний между спутниками от времени. Спутники расходятся на заданные расстояния (рис.14) и в асимптотическом режиме мало смещаются друг относительно друга (рис.15), в чем можно еще раз убедиться, исходя из результатов, представленных на рис.16. На нём изображена зависимость относительных отклонений расстояний от заданных значений во времени. Дополнительно, на рис.17, приведен график движения формации в орбитальной системе отсчета. Из вышесказанного можно утверждать, что моделируемое управление поддерживает спутники на заранее заданном расстоянии с хорошей точностью. Основной причиной ошибок, как и в случае с двумя спутниками, является грубый способ интегрирования системы. Также важную роль играет негладкость при переключении режимов управления.

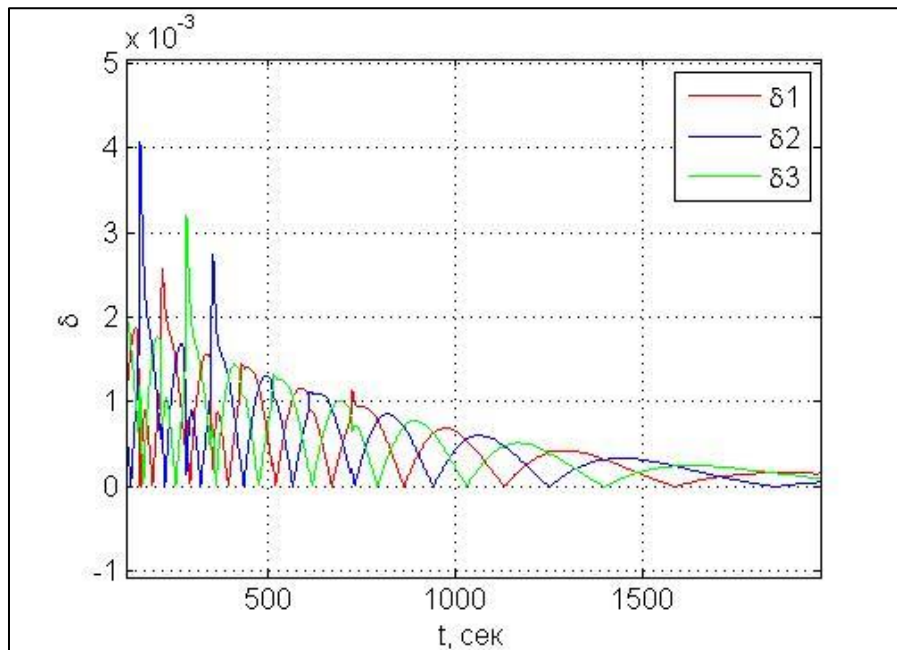
По аналогии с графиком на управление (рис.10) раздела 2.2 строятся графики на рис. 18. Они описывают зависимости управляющих воздействий от времени. Графики построены в различных временных интервалах. На рис.18 отражены значения управлений в установившемся режиме. Абсолютные значения силы, генерируемой в установившемся режиме, не превышают 50мН. Графики на рис.19 и 20 изображают зависимость зарядов на спутниках и токов эмиссии от времени соответственно. Расчет показал, что абсолютные значения зарядов имеют порядок 0.1мКл, а в установившемся режиме не превышают 0.01мКл. В свою очередь токи эмиссии в ходе изменения относительного расстояния между спутниками не превышают 0.15мА, а в установившемся режиме не превышают 10μА. Сравнивая полученные значения с результатами, изложенными в разделе 1.4, можно заключить, что управление реализуемо на практике. Пики на графиках зависимости заряда и тока от времени (рис.19, рис.20) объясняются характером управления формацией. Они появляются в моменты переключения режимов управления, то есть при включении/выключении управления вдоль осей.



**Рис. 14** Расстояния между спутниками от времени ( t = 80 сек )



**Рис. 15 Расстояния между спутниками от времени ( t = 2000 сек )**



**Рис. 16 Относительное отклонение расстояний между спутниками от времени ( t = 2000 сек )**

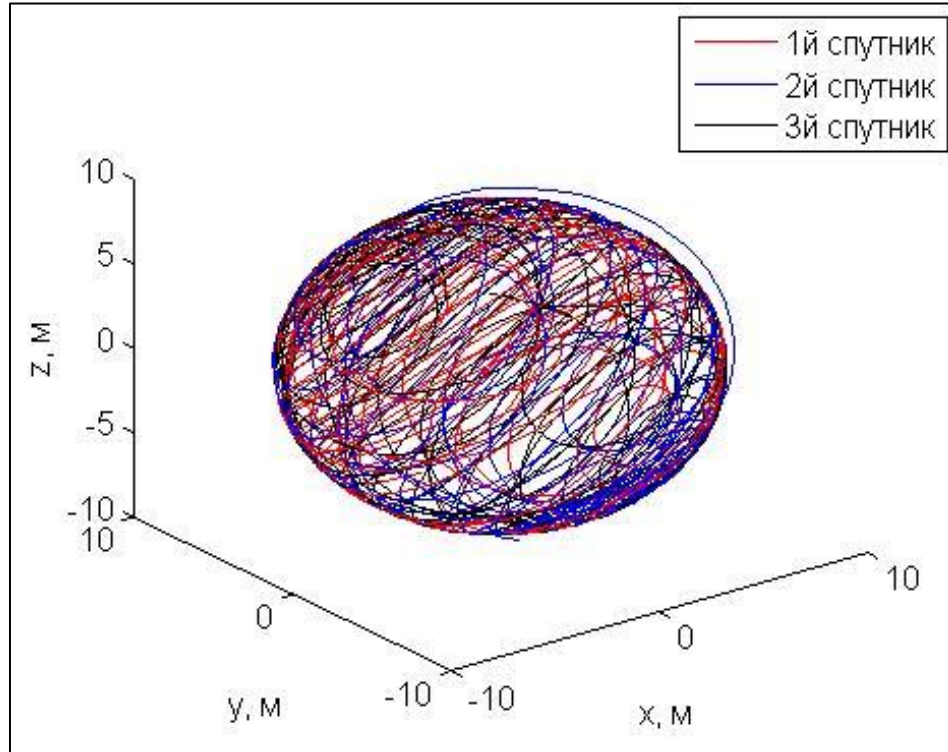


Рис. 17 Положение спутников в орбитальной с.к. (  $t = 2000$  сек )

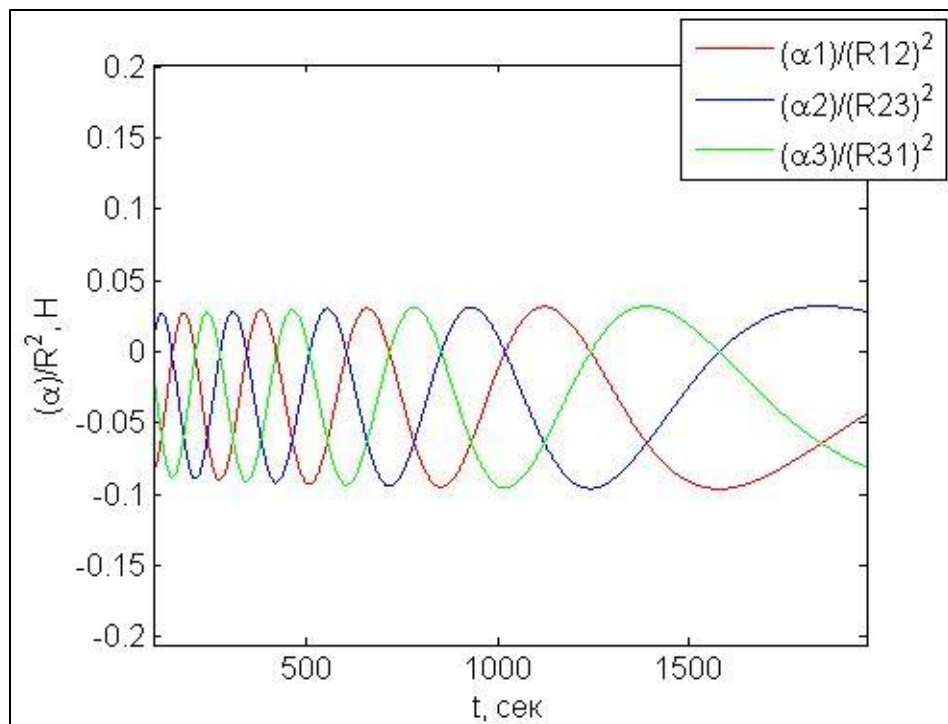


Рис. 18 Зависимость функций управления от времени (  $t = 2000$  сек )

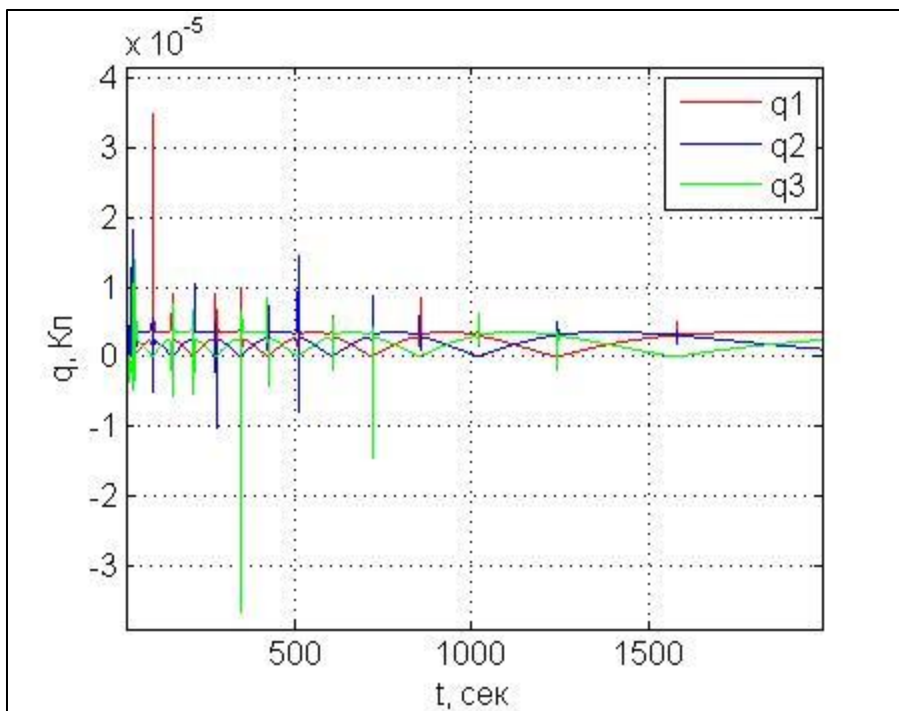


Рис.19 Зависимость зарядов на спутниках от времени ( t = 2000 сек )

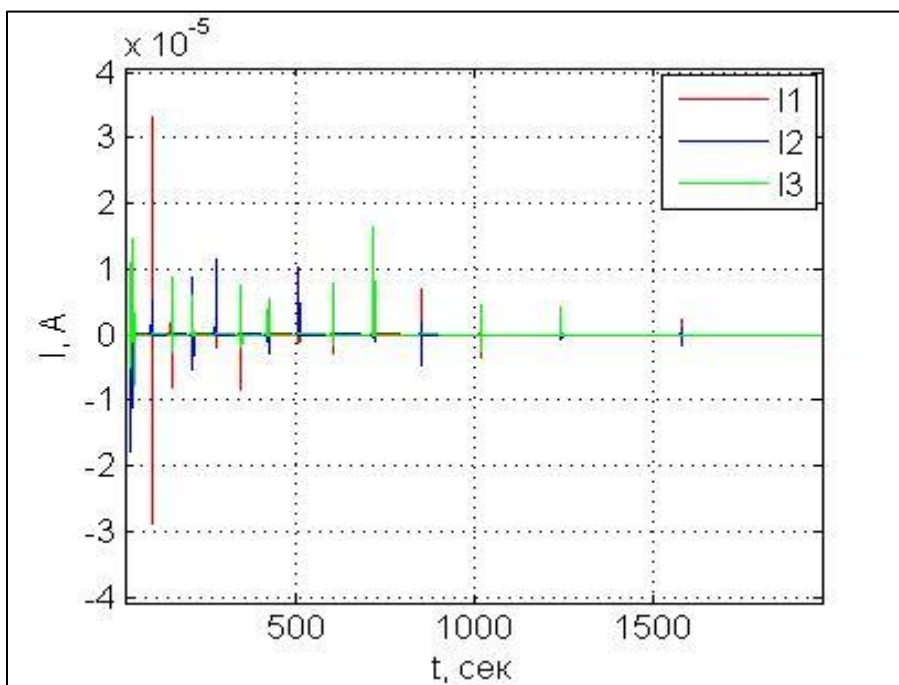


Рис.20 Зависимость токов эмиссии от времени ( t = 2000 сек )

## Заключение

В работе построено электростатическое управление для двух спутников, обеспечивающее асимптотическую устойчивость заданного движения. Также на основе модельных управляющих воздействий получен алгоритм управления формацией, состоящей из трех спутников. Разработанный алгоритм позволяет поддерживать КА на заранее заданном расстоянии. Результаты численного моделирования позволяют говорить о принципиальной реализуемости алгоритма управления движением трех спутников в реальных условиях. Следует отметить, что в данной работе не были учтены влияние эллиптичности орбиты центра масс формации и влияние несферичности Земли. Учет указанных факторов является предметом дальнейшей работы

## Список литературы

1. *Шестаков С.А., Иванов Д.С.* , Управление движением спутников в групповом полете с помощью переброса массы. – Препринт ИПМ №81, Москва – 2013
2. *Miller D.W., Sedwick J. et al.*, Electromagnetic Formation Flight. – NIAC Phase I Final Report, MIT – December, 2002
3. *King L.B., Parker G.G., Deshmukh S.*, et al., Spacecraft Formation-Flying using Inter-Vehicle Coulomb Forces. - Tech. rep., NASA/NIAC – January, 2002.
4. *Schaub H., Parker G.G., King L.B.*, Challenges and Prospects of Coulomb Spacecraft Formation Control. - Journal of the Astronautical Sciences. – 2004 - V.52.
5. *Joe H., Schaub H., Parker G.G.* , Formation Dynamics of Coulomb Satellites. – 6<sup>th</sup> International Conference on Dynamics and Control of Systems and Structures in Space, Cinque Terre, Liguria, Italy – July 18-22, 2004
6. *Mullen E.G., Gussenhoven M.S., Hardy D.A.* , SCATHA Survey of High-Voltage Spacecraft Charging in Sunlight. – Journal of the Geophysical Sciences – 1986 – Vol. 91. – pp. 1074-1090
7. *Clohessy W.H., Wiltshire R.S.*, Terminal guidance system for satellite rendezvous. -Journal of Aerospace Science – 1960 - V.27. - pp. 653-658.
8. *Мурер С.А., Приленский И.В.* , Оптимальные параметры гравитационной системы спутник-стабилизатор. – Препринт ИПМ №48, Москва– 2008
9. *Alfriend K., Vadali S.R., Gurfil P., How J., Breger L.* Spacecraft Formation Flying: Dynamics, Control, and Navigation. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2010. – 352 p.
10. *Гантмахер Н.Н.*, Лекции по аналитической механике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 264с.
11. *Малкин И.Г.* , Теория устойчивости движения. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 431с.