

Управление спутниками в групповом полете с помощью электростатического взаимодействия

А.И.Шестопёров
Научный руководитель
к.ф.-м.н. *С.С.Ткачёв*



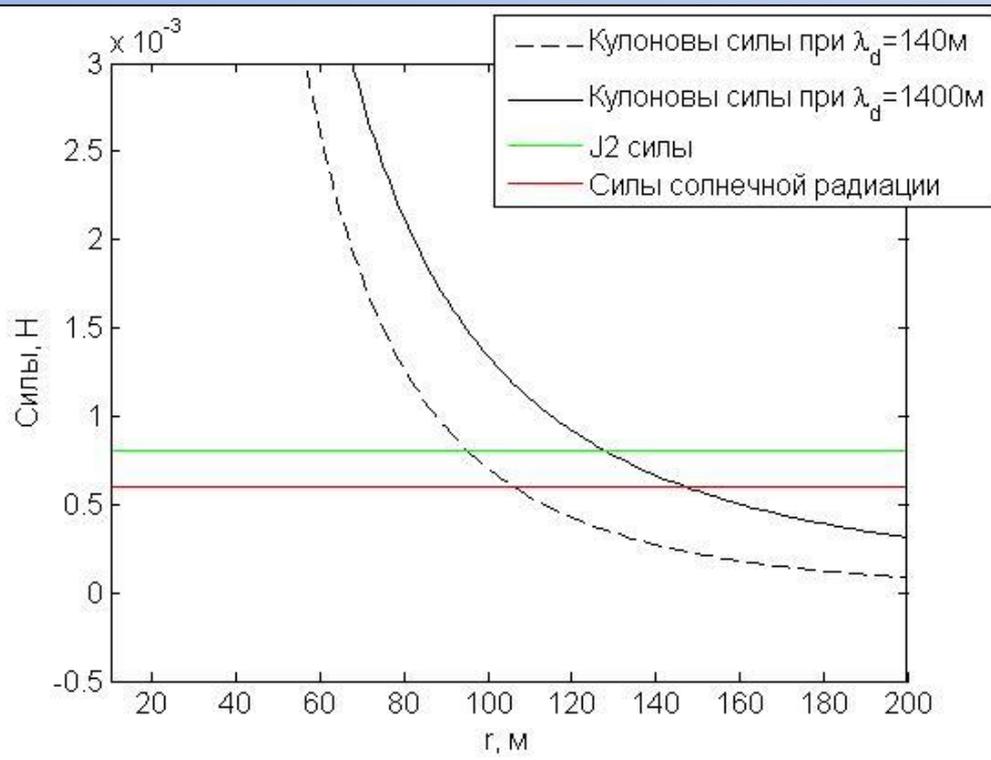
Содержание

1. Введение
2. Общие положения и постановка задачи
3. Управление тремя спутниками
 - Построение модельной функции управления
 - Анализ алгоритма управления
 - Численный пример
 - Моделирование в среде Matlab
4. Результаты

Введение



Спектр высот, допускающих концепцию электростатического взаимодействия



$$f_{12} = k_c \frac{r_{12}}{r_{12}^3} q_1 q_2 e^{-\frac{r_{12}}{\lambda_d}}$$

$$k_c = 8.99 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$$

λ_d – дебаевская длина

На графике $q_1 = q_2 = 40 \text{ мкКл}$

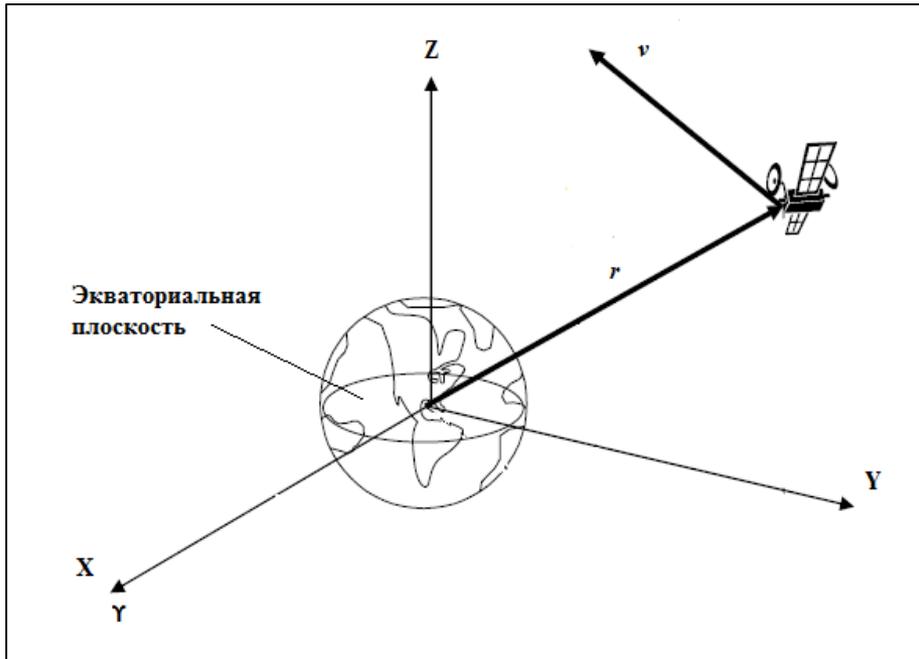
Плазменная среда	$\lambda_{d \text{ min}}, \text{ м}$	$\lambda_{d \text{ max}}, \text{ м}$
НОО	0.02	0.4
ГСО	142	1496
Межпланетная плазма	7.4	24

*King L.B., Parker G.G., Deshmukh S., et al.,
Spacecraft Formation – Flying using Inter – Vehicle Coulomb Forces. –
 Tech. rep., NASA/ NIAC – January, 2002.

Общая постановка задачи

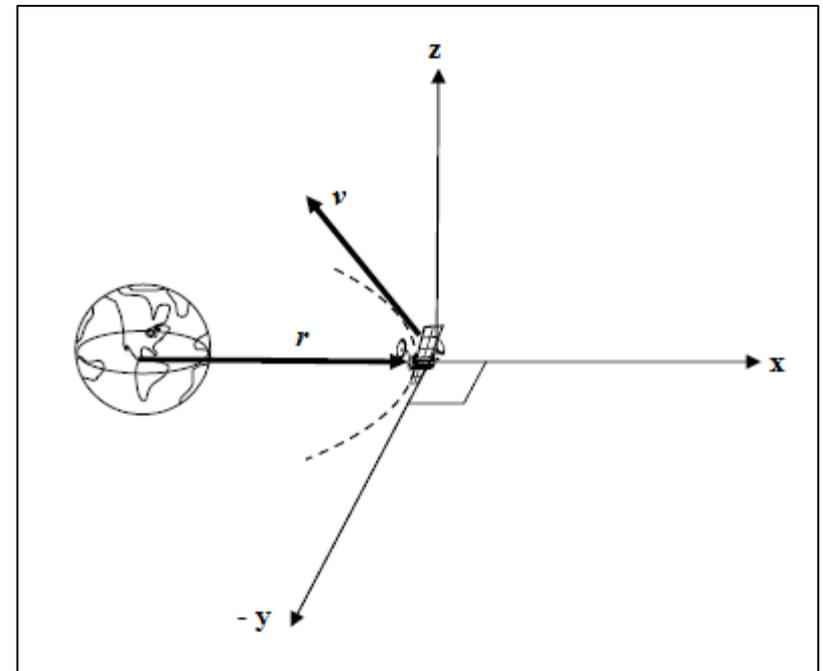
- Объект исследования: формации из 2х/3х спутников, центр масс которых движется в центральном поле Земли по круговой орбите.
- Управление КА происходит посредством электростатического взаимодействия.
- Цель работы - получение управляющих воздействий, обеспечивающих асимптотическую устойчивость конфигурации спутников (заранее заданного расстояния между космическими аппаратами).

Системы отсчета



Инерциальная

Орбитальная



Характер управляющих воздействий и уравнения движения

Вид управляющих воздействий,
действующих между i – м и j – м КА :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{\alpha(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где \mathbf{r} – радиус - вектор,
соединяющий пару спутников,

Здесь $\alpha(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = k_c q_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) q_j(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$,

где q_i и q_j – заряды на i – ом и j – ом КА.

Для трех КА $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)^T$ –

искомый вектор управления,

так как управление ведется вдоль 3х осей.

Уравнения движения формации, состоящей из трех спутников в орбитальной системе отсчета

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_1 + 3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 = \frac{1}{m_1} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \cdot \frac{\alpha_3}{r_{12}^2} - \frac{1}{m_1} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}} \cdot \frac{\alpha_2}{r_{31}^2}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_2 + 3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2 = -\frac{1}{m_2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \cdot \frac{\alpha_3}{r_{12}^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}} \cdot \frac{\alpha_1}{r_{23}^2}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_3 + 3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_3 = \frac{1}{m_3} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}} \cdot \frac{\alpha_2}{r_{31}^2} - \frac{1}{m_3} \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}} \cdot \frac{\alpha_1}{r_{23}^2}$$

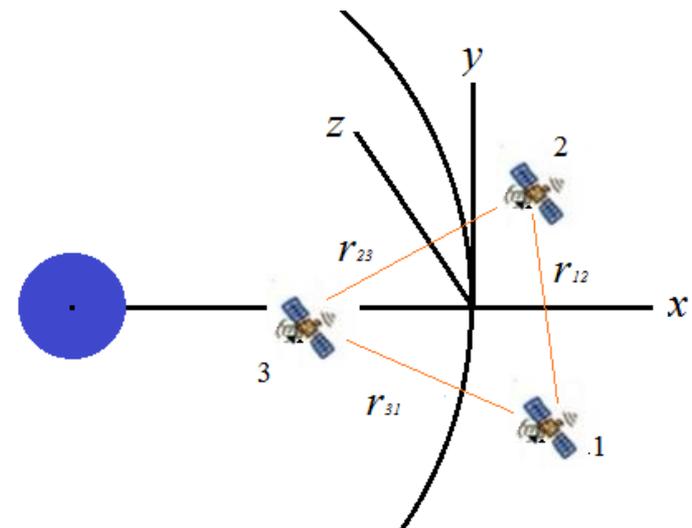
где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения центра масс формации вокруг Земли.

$$\alpha_i(\mathbf{r}_{jk}, \dot{\mathbf{r}}_{jk}) = k_c q_j(\mathbf{r}_{jk}, \dot{\mathbf{r}}_{jk}) q_k(\mathbf{r}_{jk}, \dot{\mathbf{r}}_{jk}),$$

где $i \neq j \neq k$ q_1, q_2, q_3 – заряды на КА,

$\mathbf{r}_i, i = \overline{1, 3}$ – радиус-векторы спутников в орбитальной системе координат.

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{31} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3.$$



Этапы построения управления

- Построение модельного управления
 - Поиск радиальной составляющей ускорения
 - Построение функции Ляпунова
 - Получение управляющих воздействий
- Получение алгоритма управления на основе модельного управления

Радиальная составляющая ускорения и функция Ляпунова

$$r = \sqrt{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}, \dot{r} = \frac{(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{r}, \ddot{r} = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) + (\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}})}{r} - \frac{(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})^2}{r^3},$$

где \ddot{r} – радиальная составляющая ускорения.

Функция Ляпунова :

$$V = \frac{1}{2} \dot{r}_{12}^2 + \frac{1}{2} \dot{r}_{23}^2 + \frac{1}{2} \dot{r}_{31}^2 + \frac{1}{2} k_1 (r_{12} - a_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (r_{23} - a_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (r_{31} - a_3)^2,$$

где k_1, k_2, k_3 – первые константы управления.

$$\dot{V} = \dot{r}_{12} (\ddot{r}_{12} + k_1 (r_{12} - a_1)) + \dot{r}_{23} (\ddot{r}_{23} + k_2 (r_{23} - a_2)) + \dot{r}_{31} (\ddot{r}_{31} + k_3 (r_{31} - a_3)).$$

Функция V – знакопостоянная.

За счет выбора управления добьемся : $\dot{V} \leq 0$

Для этого вдоль каждой оси управления приравняем

$$\ddot{r}_{ij}(\alpha) + k(r_{ij} - a) \text{ к } -g\dot{r}_{ij}, \text{ где } i, j \text{ – соответствуют выбранной оси.}$$

g_1, g_2, g_3 – вторые константы управления. Тогда $\dot{V} \leq 0$.

Система уравнений для нахождения управляющих воздействий

$$\ddot{r}_{12}(\alpha_3) + g_1 \dot{r}_{12} + k_1(r_{12} - a_1) = 0,$$

$$\ddot{r}_{23}(\alpha_1) + g_2 \dot{r}_{23} + k_2(r_{23} - a_2) = 0,$$

$$\ddot{r}_{31}(\alpha_2) + g_3 \dot{r}_{31} + k_3(r_{31} - a_3) = 0.$$

После подстановки $\ddot{r}_{ij}, \dot{r}_{ij}$:

$$\frac{(\dot{r}_{12}, \dot{r}_{12}) + (r_{12}, \ddot{r}_{12}(\alpha_3))}{r_{12}} - \frac{(r_{12}, \dot{r}_{12})^2}{r_{12}^3} + g_1 \frac{(r_{12}, \dot{r}_{12})}{r_{12}} + k_1(r_{12} - a_1) = 0,$$

$$\frac{(\dot{r}_{23}, \dot{r}_{23}) + (r_{23}, \ddot{r}_{23}(\alpha_1))}{r_{23}} - \frac{(r_{23}, \dot{r}_{23})^2}{r_{23}^3} + g_2 \frac{(r_{23}, \dot{r}_{23})}{r_{23}} + k_2(r_{23} - a_2) = 0,$$

$$\frac{(\dot{r}_{31}, \dot{r}_{31}) + (r_{31}, \ddot{r}_{31}(\alpha_2))}{r_{31}} - \frac{(r_{31}, \dot{r}_{31})^2}{r_{31}^3} + g_3 \frac{(r_{31}, \dot{r}_{31})}{r_{31}} + k_3(r_{31} - a_3) = 0;$$

Анализ модельного управления и построение алгоритма управления

Модельное управление : $\alpha = A^{-1} \cdot b$, где $\alpha = (\alpha_3 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2)^T$

$$\alpha_3 = q_1 q_2, \alpha_1 = q_2 q_3, \alpha_2 = q_1 q_3.$$

$$\Phi = (q_1 q_2 - \alpha_3)^2 + (q_2 q_3 - \alpha_1)^2 + (q_1 q_3 - \alpha_2)^2 \rightarrow \min$$

Находим экстремумы :

$$q_2(q_1 q_2 - \alpha_3) + q_3(q_1 q_3 - \alpha_2) = 0,$$

$$q_1(q_1 q_2 - \alpha_3) + q_3(q_2 q_3 - \alpha_1) = 0,$$

$$q_2(q_2 q_3 - \alpha_1) + q_1(q_1 q_3 - \alpha_2) = 0.$$

Решаем систему. Получаем четыре пары решений.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm \sqrt{-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3}} \\ \mp \sqrt{-\frac{\alpha_3 \alpha_1}{\alpha_2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \sqrt{-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3}} \\ 0 \\ \mp \sqrt{-\frac{\alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \sqrt{-\frac{\alpha_3 \alpha_1}{\alpha_2}} \\ \mp \sqrt{-\frac{\alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{\alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1}} \\ \pm \sqrt{\frac{\alpha_3 \alpha_1}{\alpha_2}} \\ \pm \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3}} \end{pmatrix}$$

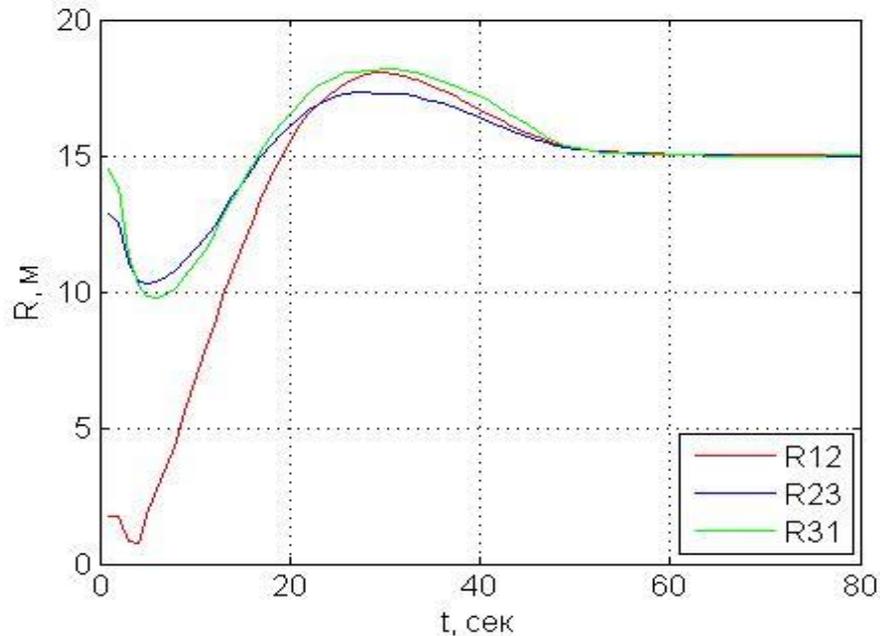
Первые три пары соответствуют случаю $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 < 0$,

четвертая случаю $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 > 0$.

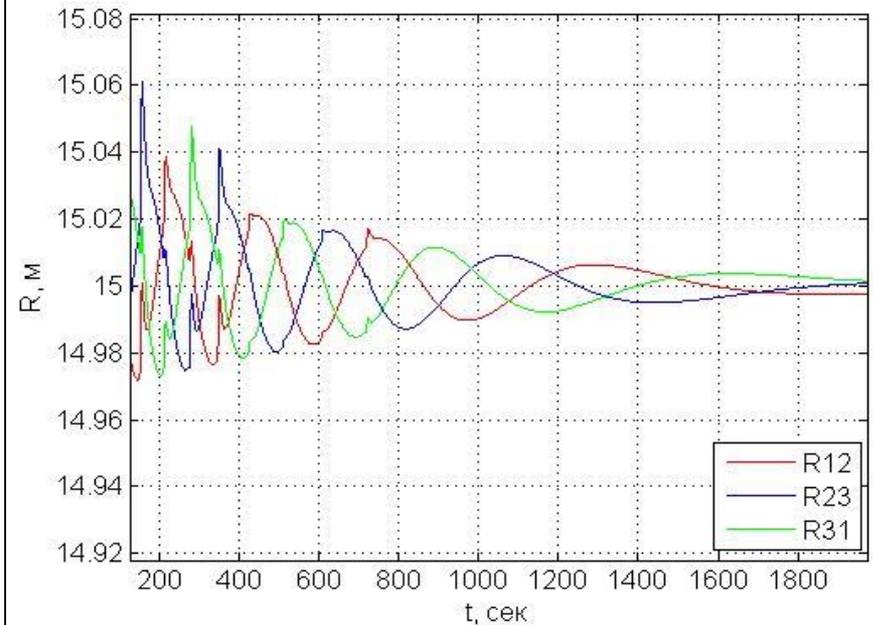
Алгоритм управления формацией из трех спутников



Зависимость расстояний между спутниками от времени



Зависимость расстояний между спутниками от времени (t = 80 сек)



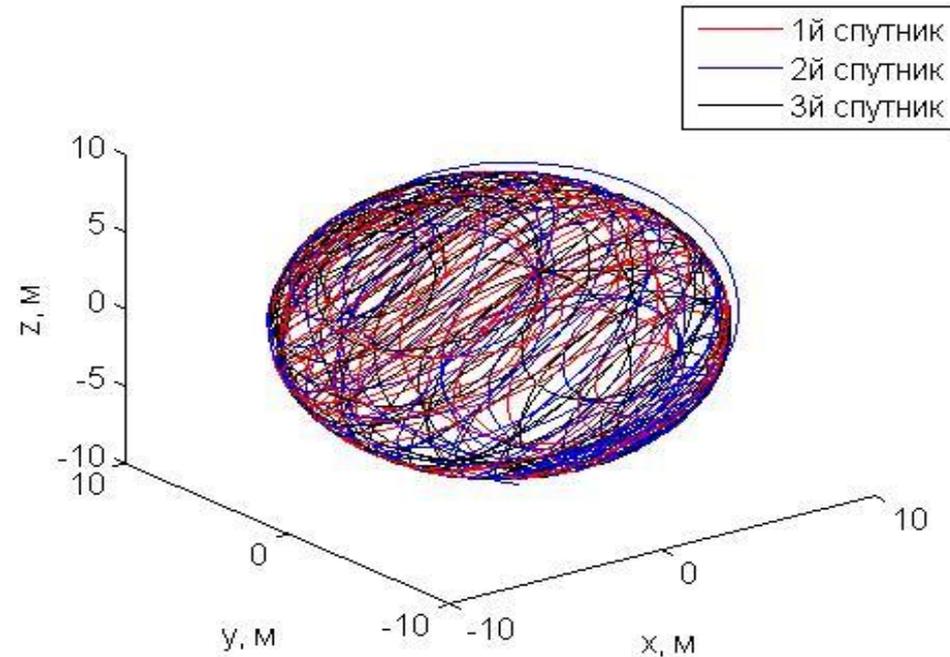
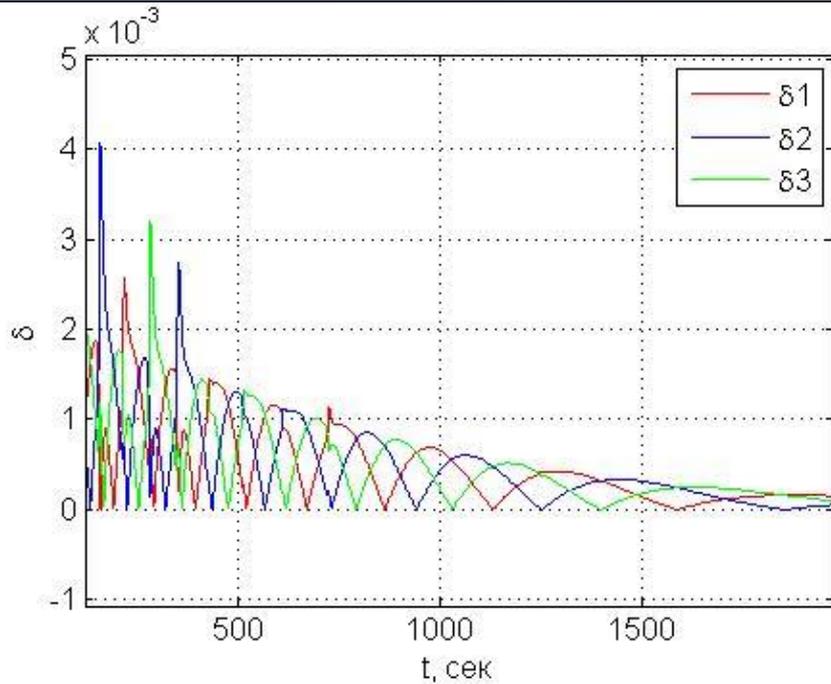
Зависимость расстояний между спутниками от времени (t = 2000 сек)

$$x_1 = 2м, y_1 = 3м, z_1 = 4м, x_2 = 1м, y_2 = 2м, z_2 = 3м; v_{x_1} = 1м/с, v_{y_1} = 0м/с, v_{z_1} = 1м/с, v_{x_2} = 0м/с, v_{y_2} = 0м/с, v_{z_2} = 0м/с;$$

$$(x_3 \ y_3 \ z_3 \ v_{x_3} \ v_{y_3} \ v_{z_3})^T = -(x_1 \ y_1 \ z_1 \ v_{x_1} \ v_{y_1} \ v_{z_1})^T - (x_2 \ y_2 \ z_2 \ v_{x_2} \ v_{y_2} \ v_{z_2})^T;$$

$$g_1 = g_2 = g_3 = g = 0.45с^{-1}, k_1 = k_2 = k_3 = k = \frac{g^2}{4}с^{-2}; a_1 = a_2 = a_3 = 15м; h = 1с.$$

Поведение спутников в орбитальной с.к.



Зависимость $\delta = \frac{\sqrt{(R-a)^2}}{a}$ от времени (t = 2000 сек)

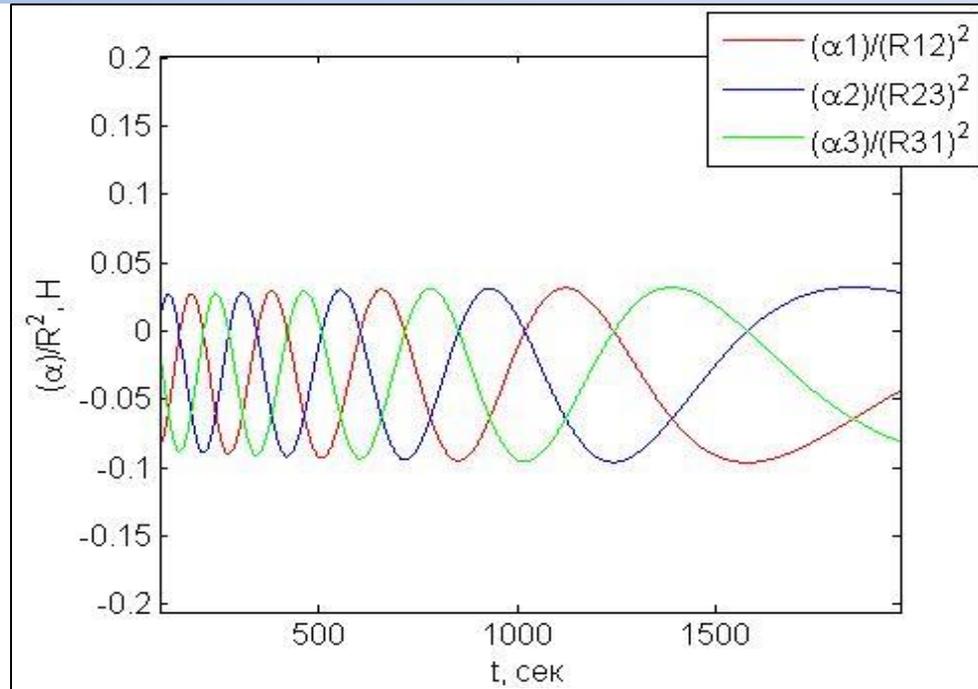
Положение спутников в орбитальной с.к. (t = 2000 сек)

$$x_1 = 2m, y_1 = 3m, z_1 = 4m, x_2 = 1m, y_2 = 2m, z_2 = 3m; v_{x_1} = 1m/c, v_{y_1} = 0m/c, v_{z_1} = 1m/c, v_{x_2} = 0m/c, v_{y_2} = 0m/c, v_{z_2} = 0m/c;$$

$$(x_3 \ y_3 \ z_3 \ v_{x_3} \ v_{y_3} \ v_{z_3})^T = -(x_1 \ y_1 \ z_1 \ v_{x_1} \ v_{y_1} \ v_{z_1})^T - (x_2 \ y_2 \ z_2 \ v_{x_2} \ v_{y_2} \ v_{z_2})^T;$$

$$g_1 = g_2 = g_3 = g = 0.45c^{-1}, k_1 = k_2 = k_3 = k = \frac{g^2}{4}c^{-2}; a_1 = a_2 = a_3 = 15m; h = 1c.$$

Зависимость сил взаимодействия от времени



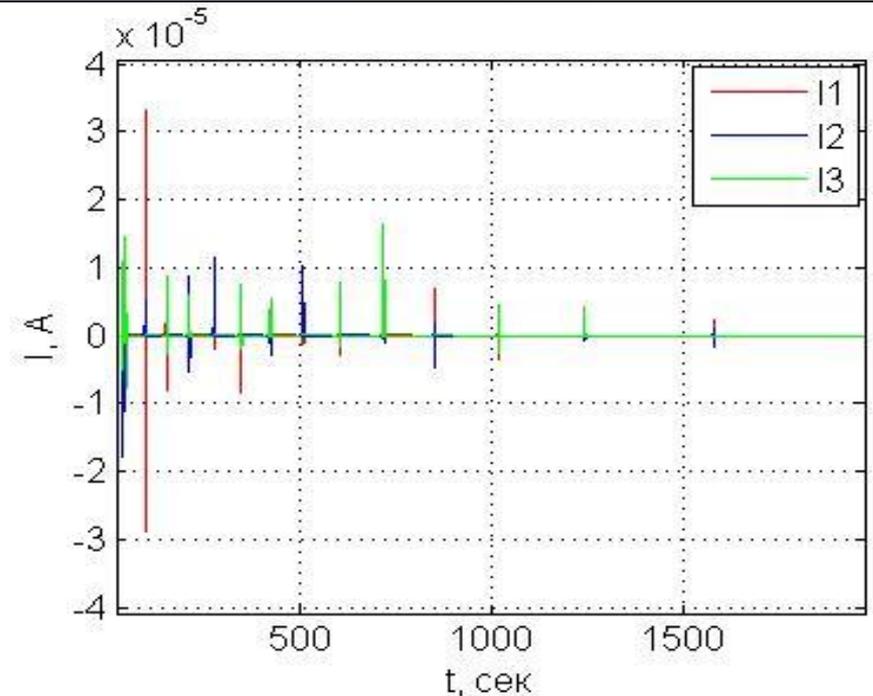
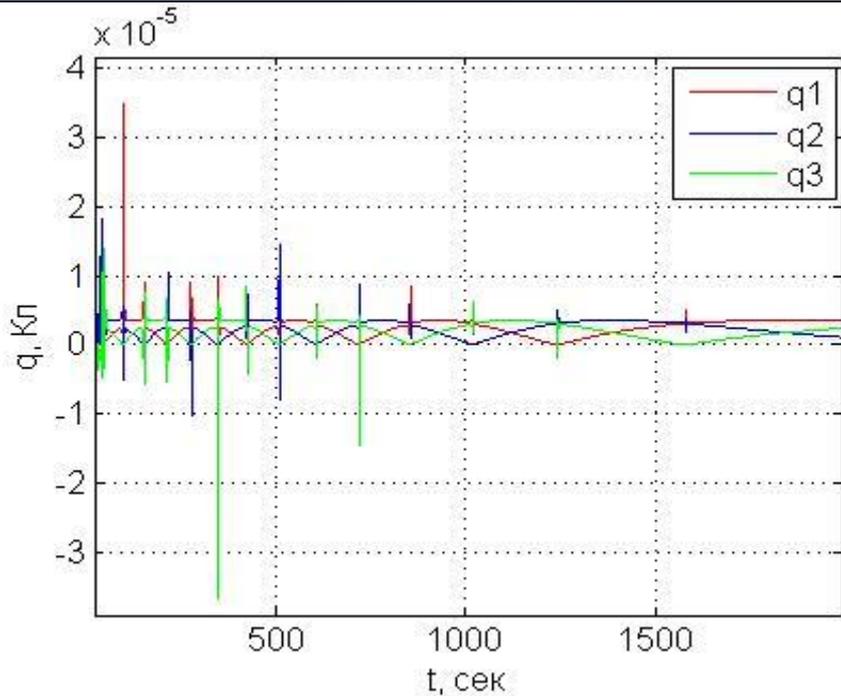
**Зависимость сил взаимодействия от времени
(t = 2000 сек)**

$$x_1 = 2м, y_1 = 3м, z_1 = 4м, x_2 = 1м, y_2 = 2м, z_2 = 3м; v_{x_1} = 1м/с, v_{y_1} = 0м/с, v_{z_1} = 1м/с, v_{x_2} = 0м/с, v_{y_2} = 0м/с, v_{z_2} = 0м/с;$$

$$(x_3 \ y_3 \ z_3 \ v_{x_3} \ v_{y_3} \ v_{z_3})^T = -(x_1 \ y_1 \ z_1 \ v_{x_1} \ v_{y_1} \ v_{z_1})^T - (x_2 \ y_2 \ z_2 \ v_{x_2} \ v_{y_2} \ v_{z_2})^T;$$

$$g_1 = g_2 = g_3 = g = 0.45c^{-1}, k_1 = k_2 = k_3 = k = \frac{g^2}{4}c^{-2}; a_1 = a_2 = a_3 = 15м; h = 1с.$$

Зависимость зарядов на спутниках и токов эмиссии от времени



Зависимость зарядов на спутниках от времени
(t = 2000 сек)

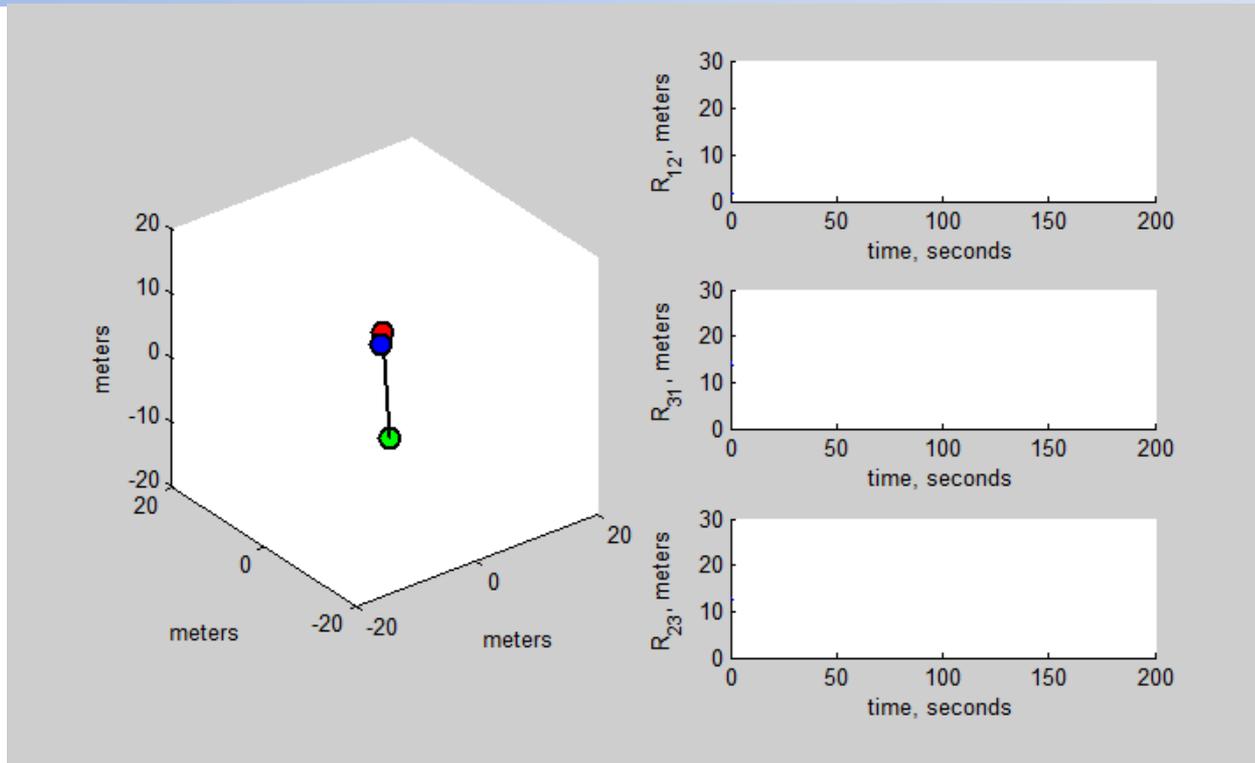
Зависимость токов эмиссии от времени (t =
2000 сек)

$$x_1 = 2m, y_1 = 3m, z_1 = 4m, x_2 = 1m, y_2 = 2m, z_2 = 3m; v_{x_1} = 1m/c, v_{y_1} = 0m/c, v_{z_1} = 1m/c, v_{x_2} = 0m/c, v_{y_2} = 0m/c, v_{z_2} = 0m/c;$$

$$(x_3 \ y_3 \ z_3 \ v_{x_3} \ v_{y_3} \ v_{z_3})^T = -(x_1 \ y_1 \ z_1 \ v_{x_1} \ v_{y_1} \ v_{z_1})^T - (x_2 \ y_2 \ z_2 \ v_{x_2} \ v_{y_2} \ v_{z_2})^T;$$

$$g_1 = g_2 = g_3 = g = 0.45c^{-1}, k_1 = k_2 = k_3 = k = \frac{g^2}{4}c^{-2}; a_1 = a_2 = a_3 = 15m; h = 1c.$$

Симуляция Matlab



$$x_1 = 2 \text{ м}; y_1 = 3 \text{ м}; z_1 = 4 \text{ м}; x_2 = 1 \text{ м}; y_2 = 2 \text{ м}; z_2 = 3 \text{ м}$$

$$v_{x_1} = 1 \text{ м/с}; v_{y_1} = 0 \text{ м/с}; v_{z_1} = 1 \text{ м/с}; v_{x_2} = 0 \text{ м/с}; v_{y_2} = 0 \text{ м/с}; v_{z_2} = 0 \text{ м/с}$$

$$(x_3 \quad y_3 \quad z_3 \quad v_{x_3} \quad v_{y_3} \quad v_{z_3})^T = -(x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad v_{x_1} \quad v_{y_1} \quad v_{z_1})^T - (x_2 \quad y_2 \quad z_2 \quad v_{x_2} \quad v_{y_2} \quad v_{z_2})^T$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 16 \text{ м}; k_1 = k_2 = k_3 = k = \frac{g^2}{4} c^{-2}; g_1 = g_2 = g_3 = g = 0.44 c^{-1}$$

Результаты

- Получено управление для двух спутников, обеспечивающее асимптотическую устойчивость заданного движения.
- Построено модельное управление для трех спутников, обеспечивающее асимптотическую устойчивость заданного движения.
- На основе модельных управляющих воздействий реализован алгоритм управления формацией, состоящей из трех спутников, позволяющий поддерживать КА на заранее заданном расстоянии.

Спасибо за внимание!