

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

## **ГАШЕНИЕ ВИБРАЦИЙ В НЕЖЕСТКОМ ЭЛЕМЕНТЕ КОНСТРУКЦИИ МАКЕТА**

Выпускная квалификационная работа  
(магистерская диссертация)

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика  
Магистерская программа: Управление динамическими системами

Выполнил:

студент 172 группы

Шестопёров Алексей Игоревич

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доц.

Ткачев Степан Сергеевич

Москва 2017

# Оглавление

Введение.....	3
1. Постановка задачи.....	6
1.1 Постановка задачи .....	6
1.2 Системы координат.....	8
2. Уравнения движения макета.....	9
2.1. Описание вибраций произвольного нежесткого элемента .....	9
2.2. Уравнения движения макета.....	11
3. Обзор методов гашения вибраций в КНЭК.....	17
3.1. Линейно квадратичный регулятор .....	17
3.2. Редукция модели управления. Подавление возмущений в остаточных модах .....	18
3.3. Концепция индивидуального управления модами.....	21
3.4. High Authority /Low Authority управление (HAC/LAC).....	22
3.5. Уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния (SDRE подход) .....	26
4. Построение управления в задаче стабилизации макета.....	28
4.1. Построение линейного квадратичного регулятора .....	28
4.2. Построение управления, подавляющего возмущения в остаточных модах .....	31
4.3. Реализация SDRE подхода.....	33
5. Компьютерное моделирование .....	38
Заключение .....	48

## Введение

Космические аппараты с крупногабаритными нежесткими элементами конструкции (КА с КНЭЖ) (рис. 1) используются для решения множества задач. Это телекоммуникационные аппараты с антеннами большого размера, аппараты исследования дальнего космоса с солнечным парусом, аппараты с роботизированными манипуляторами. Большая часть таких конструкций запускается в сложенном состоянии, а ее элементы и сочленения должны иметь по возможности малые массу, объем и линейные размеры. С целью уменьшения вышеупомянутых параметров спутника элементы конструкции изготавливаются из достаточно легких материалов, что может приводить к их деформации после развертывания на орбите.



**Рис.1.** КА с КНЭЖ

При этом в большинстве случаев (кроме манипулятора и специфических подходов к управлению парусом) изменение формы конструкции после развертывания нежелательно. Из-за больших размеров нежестких элементов в процессе орбитального и углового маневрирования, в них неизбежно возникают вибрации, которые могут не только ухудшать точность ориентации всего аппарата, но даже приводить к неустойчивости требуемых режимов движения, если управление строится в приближении твердого тела.

В настоящей работе рассматривается задача учета и гашения вибраций в нежестком элементе макета,двигающемся по столу [1] и состоящего из основного тела, предполагаемого твердым, и нежесткого стержня, прикрепленного к основному телу при помощи одностепенного шарнира (рис. 2). Такой выбор объекта исследования позволяет упростить уравнения движения объекта, не теряя при этом в общности подходов к построению управления.



**Рис. 2.** Стенд КОСМОС. Стол с воздушной подушкой.

Низкочастотные вибрации нежесткого элемента плохо демпфируются за счет собственных свойств конструкции КА, поэтому для их гашения требуется установка демпфирующих устройств. Обычно для этого используются пьезоэлектрические устройства, крепящиеся на нежесткий элемент. Однако интерес представляет задача, когда управление макетом осуществляется только при помощи устройств, расположенных на основном теле макета.

Поведение КА с КНЭЖ описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными, которая может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечной размерности.

Поэтому в процессе разработки алгоритма управления требуется редукция модели движения объекта.

Таким образом, жесткость элемента конструкции макета требует, не только иного подхода к описанию движения КА, но и иных способов синтеза управления движением. В настоящей работе рассматриваются некоторые алгоритмы гашения вибраций в жестком элементе конструкции макета, которые используются также для стабилизации макета на столе.

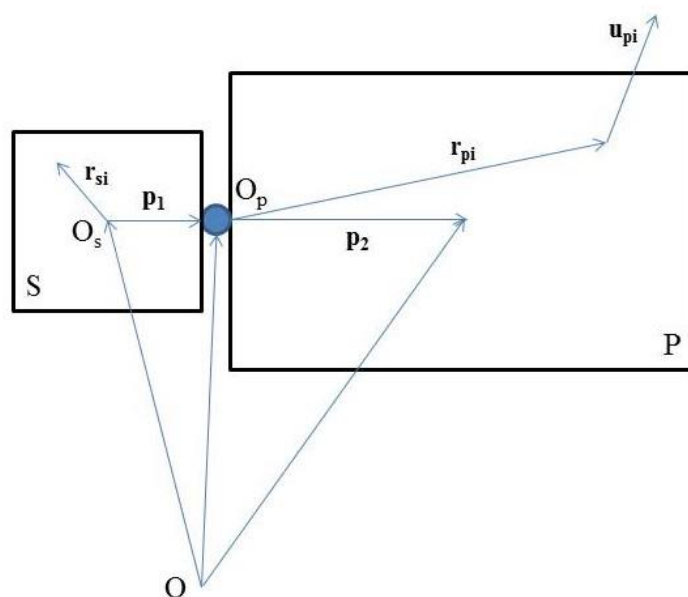
# 1. Постановка задачи

## 1.1 Постановка задачи

В настоящей работе рассматриваются три задачи:

- задача гашения вибраций в нежестком элементе макета, движущегося по столу;
- задача стабилизации макета в заданном угловом положении;
- задача стабилизации основного тела макета в заданной точке стола.

Макет состоит из основного тела, предполагаемого твердым, и нежесткого стержня, прикрепленного к основному телу при помощи одностепенного шарнира (рис. 3). Такая структура макета позволяет учесть, например, нежесткость крепления в точке соединения стержня и основного тела.



**Рис. 3.** Схема макета КА

На рисунке 3 введены обозначения

$r_{si}$  – радиус-векторы из центра масс основного тела в  $i$ -ую точку основного тела

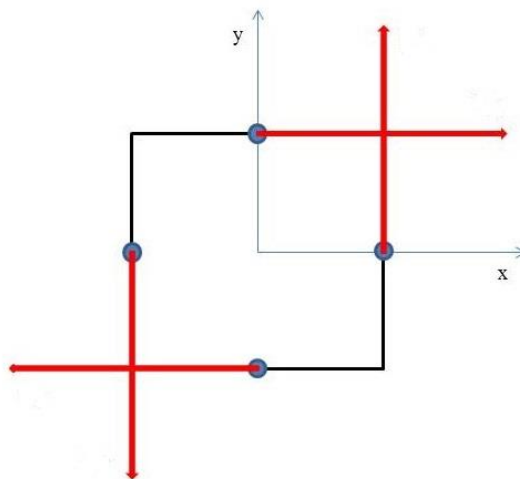
$r_{pi}$  – радиус-вектор из точки крепления недеформированного стержня к основному телу в  $i$ -ую точку недеформированного стержня;

$w_{pi}$  – смещения  $i$ -ых точек стержня, вызванные упругими деформациями;

$p_1$  – радиус-вектор из центра масс корпуса основного тела в точку крепления стержня;

$p_2$  – радиус-вектор из точки крепления стержня в центр масс недеформированного стержня.

Закон управления макетом предлагается реализовать с помощью управляющих устройств, расположенных на корпусе основного тела, а именно четырех вентиляторов, установленных на основном теле макета. Расположение вентиляторов на основном теле макета показано на рис. 4. Вентиляторы, расположенные на противоположных гранях основного тела, создают силы, направлены в противоположные стороны вдоль оси, которая лежит в плоскости стола и в плоскости параллельной соответствующим граням (направления указаны красными стрелками на рис.4). Такой принцип размещения и работы вентиляторов позволяет управлять, как движением центра масс основного тела, так и угловым движением макета.



**Рис. 4.** Схема расположения вентиляторов

Задача определения движения в работе не рассматривается и предполагается, что вся необходимая для работы алгоритмов информации известна

## 1.2 Системы координат

Введем используемые в работе системы координат (СК):

$OXYZ$  – инерциальная СК, ее начало лежит в заданной точке стола, ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости стола,  $OX$  и  $OY$  направлены вдоль краев стола.

$O_sxyz$  – связанная с корпусом спутника СК, ее начало лежит в центре масс корпуса спутника, оси – его главные центральные оси;

$O_px_py_pz_p$  – связанная со стержнем СК, ее начало помещается в шарнире, ось  $O_pz_p$  – ось вращения шарнира, ось  $O_px_p$  направлена вдоль недеформированного состояния стержня, третья дополняет систему до правой тройки.

Ниже приведена последовательность переходов между СК:

$$OXYZ \rightarrow O_sxyz \rightarrow O_px_py_pz_p.$$

В дальнейшем предполагается, что величины  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{r}_{si}$  заданы в  $O_sxyz$ , а  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{r}_{pi}$  и  $\mathbf{w}_{pi}$  в системе  $O_px_py_pz_p$ .

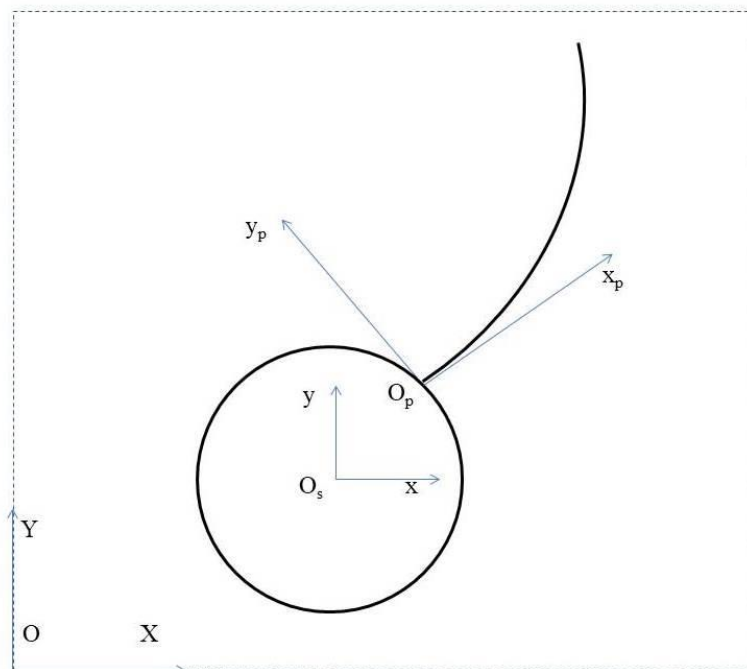


Рис. 5. Системы координат



## 2. Уравнения движения макета

### 2.1. Описание вибраций произвольного нежесткого элемента

Вибрации нежесткого элемента космического аппарата описываются уравнениями в частных производных. Системы такого типа являются системами с бесконечным числом степеней свободы. В общем случае, смещение  $\mathbf{w}(P,t)$  точки  $P$ , принадлежащей нежесткому элементу и имеющей радиус-вектор  $\mathbf{r}_i$  в недеформированном состоянии, описывается уравнением (см. [2],[3]):

$$M(P)\frac{\partial^2 \mathbf{w}(P,t)}{\partial t^2} + D(P)\frac{\partial \mathbf{w}(P,t)}{\partial t} + L\mathbf{w}(P,t) = \mathbf{f}(P,t) \quad (2.1)$$

с некоторыми граничными условиями  $B_i \mathbf{w}(P,t) = 0 (i = \overline{1,n})$ , где  $B_i$  – линейные дифференциальные операторы,  $M(P)$  – оператор плотности массы,  $D(P)$  – оператор затухания,  $L$  – независящий от времени линейный самосопряженный неотрицательно определенный дифференциальный оператор жесткости,  $\mathbf{f}(P,t)$  – вектор внешних управляющих воздействий (в том числе и управляющих).

Так как обычно затухание колебаний в нежестком элементе мало и точный вид оператора  $D(P)$  неизвестен [3],  $D(P)$  зачастую предполагается нулевым. Как итог, вместо (2.1) в работе рассматривается уравнение:

$$M(P)\frac{\partial^2 \mathbf{w}(P,t)}{\partial t^2} + L(P)\mathbf{w}(P,t) = \mathbf{f}(P,t). \quad (2.2)$$

Соответствующая задача на собственные значения имеет вид:

$$L(P)\phi_r(P) = \omega_r^2 M(P)\phi_r(P), r = \overline{1,\infty}, \quad (2.3)$$

где  $\phi_r(P)$  и  $\omega_r^2$  – собственные вектора и собственные значения, соответственно. В контексте нашей задачи используется следующая терминология:  $\phi_r(P)$  называется  $r$ -ой *собственной модой* колебаний, а  $\omega_r^2$  –  $r$ -ой *частотой колебаний*.

Так как оператор  $L$  – самосопряженный, собственные моды колебаний – ортогональны и могут быть нормализованы:

$$\int_D M(P) \phi_r(P) \phi_s(P) dD = \delta_{rs} \left( r, s = \overline{1, \infty} \right).$$

Тогда смещение точки нежесткого элемента относительно недеформированного положения, представляется в виде ряда:

$$\mathbf{w}(P, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(P) q_r(t), \quad (2.4)$$

где  $q_r(t)$  называется *амплитудой*  $r$ -ой собственной моды колебаний.

Подставляя (2.4) в (2.2), приходим к системе модальных уравнений:

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = f_r(t), r = \overline{1, \infty}, \quad (2.5)$$

где  $f_r(t) = \int_D \phi_r(P) \mathbf{f}(P, t) dS, r = \overline{1, \infty}$  называется  $r$ -ой *модальной силой*.

Таким образом, система уравнений в частных производных (2.2) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечной размерности (2.5). Этот результат важен, так как системы обыкновенных дифференциальных уравнений легче исследуются численно.

В большинстве своем, нежесткие элементы КА в реальных системах представляют довольно сложные конструкции и, поэтому поиск собственных чисел в конечном виде не представляется возможным.

В задаче численного определения собственных мод колебаний часто используется метод конечных элементов [4]. Смещение  $\mathbf{w}(\mathbf{r}_i, t)$  точки  $\mathbf{r}_i$  после конечно-элементного моделирования представимо в виде:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i) \mathbf{q}(t), \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i)$  – матрица собственных мод колебаний, полученная, например, в среде NASTRAN и описывающая численно вектор  $\phi_i(\mathbf{r}_i)$ . Величины  $\mathbf{A}_i$  задаются в СК, связанной с нежестким элементом  $(O_p, x_p, y_p, z_p)$ .

Из (2.6) видно, после конечно-элементного моделирования система уравнений в частных производных (2.2) заменяется системой обыкновенных

дифференциальных уравнений конечной размерности. Однако, так как частоты колебаний нежесткого элемента обычно очень близко расположены друг к другу, знание их точных значений требует наличия модели нежесткого элемента большой размерности.

Отметим, движение твердого тела может быть рассмотрено в рамках модели (2.1), как колебание нулевой частоты. Но, так как основная задача – правильно ориентировать КА в пространстве, будет нагляднее учитывать его отдельно от поведения колебательных мод нежесткого элемента.

## 2.2. Уравнения движения макета

Для вывода уравнений движения КА с КНЭК, находящегося на орбите, в работе [5] использовался принцип возможных перемещений для системы с идеальными связями:

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{R}_i = 0 \quad (2.7)$$

где  $\delta \mathbf{R}_i$  – возможное перемещение для  $i$ -ой точки системы,  $\mathbf{F}_i$  – равнодействующая всех активных сил, действующих на  $i$ -ую точку (предполагается, что связи идеальные, а значит, работа их реакций на возможных перемещениях равна нулю).

Элементарные точечные  $i$ -ые массы корпуса макета и стержня задаются в инерциальной СК, соответственно, векторами  $\mathbf{R}_{si}$ ,  $\mathbf{R}_{pi}$  и для них выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{si} &= \mathbf{R}_s + \mathbf{r}_{si}, \\ \mathbf{R}_{pi} &= \mathbf{R}_p + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{R}_s$ ,  $\mathbf{R}_p$  – радиус-векторы центра масс корпуса макета и в точку крепления стержня в инерциальной СК соответственно. Для исследуемой системы выражение (2.7) может быть записано в виде

$$\sum_i (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) \delta \mathbf{R}_{si} + \sum_i (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) \delta \mathbf{R}_{pi} - \sum_i \mathbf{F}_{hi} \delta \mathbf{R}_{hi} = 0. \quad (2.9)$$

Каждая сумма берется по соответствующему телу. Последнее слагаемое отвечает за шарнир, который предполагается невесомым. Для него можно написать:

$$\sum_i \mathbf{F}_{hi} \delta \mathbf{R}_{hi} = M_e \delta \varphi \quad (2.10)$$

Здесь  $M_e$  – момент сил сопротивления в шарнире,  $\delta \varphi$  – возможный поворот в шарнире. Для возможных перемещений в каждом теле можно записать:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{si} &= \delta \mathbf{R}_s + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{si}, \\ \delta \mathbf{R}_{pi} &= \delta \mathbf{R}_s + \delta \boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) + \mathbf{e} \delta \varphi \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) + \mathbf{A}_{pi} \delta \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь  $\delta \boldsymbol{\theta}$  – элементарный поворот всей системы (угловое движение корпуса спутника)

Возможные перемещения  $\delta \mathbf{R}_s$ ,  $\delta \boldsymbol{\theta}$ ,  $\delta \varphi$ ,  $\delta \mathbf{q}$  полагаются независимыми, поэтому равенство (2.9) выполняется в том и только в том случае, когда соответствующие множители перед возможными перемещениями обращаются в нуль, т.е.:

$$\begin{aligned} \sum_i (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_i (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) &= 0, \\ \sum_i \mathbf{r}_{si} \times (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) &= 0, \\ \sum_i \mathbf{e}^T ((\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi})) &= M_e, \\ \sum_i \mathbf{A}_{pi}^T (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Система уравнений (2.12) является базой, на которой строится вывод уравнения движения КА с КНЭК в [5]. Она также должна быть дополнена соответствующими кинематическими соотношениями. Опираясь на (2.12) и адаптируя уравнения, полученные в работе [5], под сформулированную в пункте 1.1 задачу, получаем уравнения движения макета на столе:

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_s - \mathbf{N}_{\omega p} - \mathbf{f}_{\omega p} \\ -\mathbf{e}_p^T (\mathbf{N}_{\varphi p} + \mathbf{f}_{\varphi p}) + M_p \\ -\mathbf{f}_p - \mathbf{N}_p \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

где

$$\mathbf{f}_{\omega p} = (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times m_p \left( \frac{\mathbf{F}_O}{m} - \frac{\mathbf{F}_p}{m_p} \right) + (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \mathbf{F}_p - \mathbf{T}_p, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{f}_{\varphi p} = (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times m_p \left( \frac{\mathbf{F}_O}{m} - \frac{\mathbf{F}_p}{m_p} \right) + (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \mathbf{F}_p - \mathbf{T}_p, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{f}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \left( \frac{\mathbf{F}_O}{m} - \frac{\mathbf{F}_{pi}}{m_{pi}} - \frac{\mathbf{L}_{pi}}{m_{pi}} \right), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\omega p} &= 2 \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times \boldsymbol{\omega}_p \times m_{pi} \dot{\mathbf{w}}_{pi} - \\ &\quad - \omega_p^2 m_p \mathbf{p}_1 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + m_p (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times (-\omega^2 \mathbf{p}_1 + \mathbf{g}), \\ \mathbf{N}_{\varphi p} &= 2 \sum_i (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times \boldsymbol{\omega}_p \times m_{pi} \dot{\mathbf{w}}_{pi} + m_a (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times (-\omega^2 \mathbf{p}_1 + \mathbf{g}), \\ \mathbf{N}_p &= \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T (-\omega_p^2 (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) + 2\boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\mathbf{w}}_{pi} - \omega^2 \mathbf{p}_1 + \mathbf{g}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{g} = -\frac{m_p}{m} (-\omega^2 \mathbf{p}_1 - \omega_p^2 (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2)$ .

Матрица  $\mathbf{S}$  при старших производных выглядит следующим образом:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega\varphi p} \mathbf{e}_p & \mathbf{S}_{\omega p} \\ \mathbf{e}_p^T \mathbf{S}_{\omega\varphi p}^T & \mathbf{e}_p^T \mathbf{J}_{\varphi p} \mathbf{e}_p & \mathbf{e}_p^T \mathbf{S}_{p\varphi p}^T \\ \mathbf{S}_{\omega p}^T & \mathbf{S}_{p\varphi p}^T \mathbf{e}_p & \mathbf{M}_p \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_s + \tilde{\mathbf{J}}_p + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2, \mathbf{p}_1) + \\ &\quad + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) - \frac{1}{m} K(m_p (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2), m_p (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2)), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$\mathbf{J}_s = \sum_i m_{si} \mathbf{K}(\mathbf{r}_{si}, \mathbf{r}_{si})$  – тензор инерции спутника,

$\tilde{\mathbf{J}}_p = \sum_i \mathbf{K}(\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}, \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi})$  – тензор инерции деформированной панели,

$$\mathbf{S}_{\omega\varphi p} = \tilde{\mathbf{J}}_p + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) - \frac{m_p}{m} \mathbf{K}(m_p (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2), \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2), \quad (2.20)$$

$$\mathbf{S}_{\omega p} = \sum_i m_{pi} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times \mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m} (m_p (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2)) \times \mathbf{A}_p, \quad (2.21)$$

где  $\mathbf{A}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}$ ,

$$\mathbf{J}_{\varphi p} = \tilde{\mathbf{J}}_p - \frac{m_p^2}{m} \mathbf{K}(\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2, \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2), \quad (2.22)$$

$$\mathbf{S}_{p\varphi p} = \sum_i m_{pi} (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times \mathbf{A}_{pi} - \frac{m_p}{m} (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \mathbf{A}_p, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{M}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m} \mathbf{A}_p^T \mathbf{A}_p. \quad (2.24)$$

Выше использованы следующие обозначения:

$m_s$  – масса тела спутника;  $m_p$  – масса панели;  $m_{si}$  – масса  $i$ -ой точки тела спутника;  $m_{pi}$  – масса  $i$ -ой точки панели;  $m = m_s + m_p$  – масса всей системы;

$\boldsymbol{\omega}$  – абсолютная угловая скорость спутника;

$\varphi_p$  – угол поворота панели в шарнире;

$\psi_p = \dot{\varphi}_p$  – угловая скорость поворота панели в шарнире;

$\mathbf{q}$  – амплитуда собственных мод колебаний панели;

$\mathbf{e}_p$  – ось шарнира, вектор деформации записан в виде разложения по собственным функциям;

$\boldsymbol{\omega}_p = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{e}_p \dot{\varphi}$  – абсолютная угловая скорость панели;

$M_p$  – момент в шарнире (управляющий и, быть может, сил сопротивления);

$\mathbf{T}_s = \sum_i \mathbf{r}_{si} \times \mathbf{F}_{si}$  – момент внешних сил, действующих на спутник;

$\tilde{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{m_p} \sum_i m_{pi} \mathbf{w}_{pi} = \frac{\sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}}{m_p}$  – смещение центра масс панели за счет ее

деформации, где  $\mathbf{A}_{pi}(\mathbf{r}_{pi})$  – матрица собственных мод колебаний. Величины

$\mathbf{A}_{pi}$  задаются в системе координат  $O_p x_p y_p z_p$ ;

$\mathbf{T}_p = \sum_i (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times \mathbf{F}_{pi}$  – момент внешних сил, действующих на панель,

относительно точки крепления;

$\mathbf{F}_0$  – главный вектор всех активных сил (в том числе и управляющих воздействий), действующих на всю систему;

$\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_p$  – главные векторы всех активных сил, действующих на тело спутника и на панель, соответственно;

$\mathbf{F}_{si}, \mathbf{F}_{pi}$  – главные векторы всех активных сил, действующих на  $i$ -ю точку тела спутника и панели, соответственно;

$\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  – матрица двойного векторного произведения, задаваемого как

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{b}) = \mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{y}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_2b_2 + a_3b_3 & -a_2b_1 & -a_3b_1 \\ -a_1b_2 & a_1b_1 + a_3b_3 & -a_3b_2 \\ -a_1b_3 & -a_2b_3 & a_1b_1 + a_2b_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что главные векторы всех активных сил, действующих на  $i$ -ю точку панели, содержит в себе часть, отвечающую за силы, возникающие при деформации. Такая часть в дальнейшем обозначается, как  $\mathbf{L}_{pi}$  и пишется отдельно. Ее  $\mathbf{L}_{pi}$  можно задать как:

$$\mathbf{L}_{pi} = -m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}, \quad (2.25)$$

где  $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots)$  – матрица собственных частот колебаний. Если учесть демпфирование, то

$$\mathbf{L}_{pi} = -m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}, \quad (2.26)$$

где  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots)$  – матрица декрементов затухания.

Первое уравнение из (2.12) описывает движение центра масс основного тела макета, и может быть переписано:

$$\begin{aligned} \sum_i m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} + \sum_i m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} = \sum_i m_{si} (\ddot{\mathbf{R}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{si} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{si}) + \\ + \sum_i m_{pi} (\ddot{\mathbf{R}}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{w}}_{pi} + \ddot{\mathbf{w}}_{pi}) = \mathbf{F}_0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Учитывая, что:

$$\ddot{\mathbf{R}}_p = \ddot{\mathbf{R}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1,$$

в СК  $O_sxyz$ , связанной с центром масс основного тела, получаем уравнение:

$$\begin{aligned} & m\ddot{\mathbf{R}}_s + m_p (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1) + \\ & + m_p (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2)) + \\ & + 2m_p \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + m_p \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 = \mathbf{F}_0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Переносим члены со старшими производными в левую часть уравнения (2.28), приходим к описывающему движению центра масс основного тела макета:

$$\begin{aligned} & \ddot{\mathbf{R}}_s + \frac{m_p}{m} \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \frac{m_p}{m} \dot{\psi} \mathbf{e}_p \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \ddot{\mathbf{q}} = \\ & = \frac{\mathbf{F}_0}{m} - \frac{m_p}{m} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2) = \frac{\mathbf{F}_0}{m} - \mathbf{N}_s, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

$$\mathbf{N}_s = \frac{m_p}{m} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2). \quad (2.30)$$

Так как движение происходит в плоскости стола, уравнения движения (2.13), (2.29) дополняются следующими кинематическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_3 &= \frac{1}{2} Q_0 \omega, \\ \dot{\phi}_p &= \psi_p, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где  $\mathbf{Q} = (Q_0 \ 0 \ 0 \ Q_3)^T$  – кватернион ориентации макета, компоненты которого, связаны между собой равенством:

$$Q_0^2 + Q_3^2 = 1. \quad (2.32)$$

После перехода к координатной записи уравнения движения будут записаны в СК  $O_sxyz$ , связанной с корпусом спутника. Некоторая неуместность использования кватернионов в описании плоского движения макета объясняется желанием в будущем обобщить полученные результаты на случай движения КА с КНЭК по орбите.



### 3. Обзор методов гашения вибраций в КНЭК

#### 3.1. Линейно квадратичный регулятор

Гашение вибраций в нежестком элементе конструкции макета играет основную роль в процессе его стабилизации в заданном положении. В данной главе описываются методы гашения вибраций в нежестких элементах. Как следует из пункта 2.1, объектом исследования в задачах такого типа являются линейные стационарные непрерывные системы большой размерности:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.1)$$

с фиксированными начальными условиями:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.2)$$

где  $t$  – непрерывное время,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния системы,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  – управление (управляющее воздействие).

Хотя на практике обычно само состояние системы не известно, а известен лишь ее линейный выход (т.е. вектор измерений)  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}, \quad (3.3)$$

в данной работе, если не оговорено иное, они предполагаются равными, т.е.  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Также в дальнейшем система (3.1) считается полностью определенной, т.е. матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  заданы точно.

Отправной точкой при разработке закона управления  $\mathbf{u}(t)$  в задачах гашения вибраций в нежестком элементе конструкции является построение линейного квадратичного гауссового регулятора (LQG регулятора) (см. [6],[7]), которое происходит в два этапа:

1. Построение фильтра Калмана, который позволяет получить оптимальную оценку  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  вектора состояния по вектору измерений  $\mathbf{y}(t)$

2. Построение обратной связи по оценке вектора состояния:  
 $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)$

Фильтрация измерений проводится отдельно от задачи линейно квадратичного регулирования и выходит за рамки данной работы.

Закон управления, минимизирующий функционал:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt, \text{ где } \mathbf{Q} > 0, \mathbf{R} > 0, \quad (3.4)$$

при ограничениях (3.1), задается выражением (см. [8]):

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (3.5)$$

где матрица усиления  $\mathbf{K}$  имеет вид:  $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$ . Для нахождения матрицы  $\mathbf{P}$  необходимо решить алгебраическое уравнение Риккати:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}. \quad (3.6)$$

Задача о минимизации функционала (3.4) при ограничениях (3.1) называется задачей о линейно квадратичном регуляторе (LQR).

### ***3.2. Редукция модели управления. Подавление возмущений в остаточных модах***

Прямое использование линейного квадратичного регулирования в задаче гашения вибраций в нежестком элементе конструкции наталкивается на определенные трудности. Так как вычислительные затраты необходимые для решения уравнения Риккати тем больше, чем больше размерность вектора состояния системы, возникает проблема осуществимости LQR-алгоритма в режиме реального времени бортовыми средствами.

Одним из возможных способов преодолеть данное затруднение, является редукция части системы (3.1). В задаче гашения вибраций редуцированной частью системы является, часть, включающая в себя моды с наиболее высокими частотами колебаний, так как их поведение слабо влияет на движение объекта управления.

В работе [2] приведена следующая классификация мод колебаний модели, которой мы будем пользоваться в дальнейшем:

- *Учитываемые управляемые моды* – моды, учтенные в математической модели объекта, к которым приложено управляющее воздействие (включая твердотельные колебательные моды нулевой частоты)

- *Учитываемые неуправляемые (или остаточные) моды* – моды, учтенные в математической модели объекта, к которым не приложено управляющее воздействие

- *Неучитываемые моды*, то есть те моды колебаний, которые отбрасываются на этапе конечно-элементного моделирования (отсутствуют в (3.1))

С учетом данной терминологии система уравнений (3.1) разбивается на два независимых векторных уравнения:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_c & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{B}_r \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{x}_c$  – вектор учитываемых управляемых мод,  $\mathbf{x}_r$  – вектор остаточных мод. В задаче гашения вибраций матрица  $\mathbf{A}$  в (3.1) и матрицы  $\mathbf{A}_c, \mathbf{A}_r$  в (3.7) имеют блочно-диагональный вид [9], так как в качестве вектора состояний выбираются модальные координаты (см. (2.5)).

Линейно квадратичный регулятор, построенный на базе управляемой части модели, минимизирует функционал:

$$J_{cont} = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}_c^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_c \mathbf{u}] dt, \quad (3.8)$$

при условии

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{u}. \quad (3.9)$$

Закон управления, решающий задачу (3.8), (3.9) имеет вид:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_c \mathbf{x}_c. \quad (3.10)$$

Рассмотрим, как управление (3.10) влияет на систему (3.7). Замкнутая обратная связь (3.10), она принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K}_c & 0 \\ -\mathbf{B}_r \mathbf{K}_c & \mathbf{A}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Если недиагональный элемент  $-\mathbf{B}_s \mathbf{K}_c \neq 0$ , то управление выбранными модами будет влиять на остаточные моды [10]. Таким образом, т.к. LQR–алгоритм (3.10) не учитывает остаточную динамику системы, то в процессе гашения управляемых мод может возникнуть возмущение остаточных мод. Данный эффект носит название *spillover*. Поэтому желательно построить закон управления, при котором  $\mathbf{B}_r \mathbf{K}_c \equiv 0$  или  $\mathbf{B}_r \mathbf{K}_c \rightarrow 0$ .

Если редуцированная система управления может работать в стационарной точке остаточных состояний, т.е. следующее выражение выполняется тождественно:

$$0 \equiv \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{u}, \quad (3.12)$$

то для подавления возмущений в остаточных модах можно использовать концепцию, предложенную в работах [9], [11], [12] (возможные названия: Model Error Sensitivity suppression (MESS), Forced Singular Perturbation (FSP)). Из (3.12) получаем:

$$\mathbf{x}_r = -\mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r \mathbf{u}. \quad (3.13)$$

Для системы (3.7) функционал качества имеет вид:

$$J_{full} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}_c^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_r^T \mathbf{Q}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt, \quad (3.14)$$

После подстановки  $\mathbf{x}_s$  в  $J_{full}$ , задача принимает вид:

$$J_{red} = \int_0^{\infty} \left( \mathbf{x}_c^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{u}^T \left[ \mathbf{R}_c + (\mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r)^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r \right] \mathbf{u} \right) dt \rightarrow \min, \quad (3.15)$$

при условии  $\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{u}$ .

Основная идея концепции, состоит в том, что закон управления (3.10), в процессе минимизации функционала (3.15), уменьшает возмущающее влияние члена  $\mathbf{B}_r \mathbf{u}$  на поведение остаточных мод, за счет слагаемого

$(\mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r)^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r$  в  $J_{red}$ . Влияние данного слагаемого может быть усилено за

счет использования большой по норме весовой матрицы  $Q_r$ . Отметим, что данный алгоритм управления не предотвращает возмущений неучитываемых мод. Чтобы минимизировать данный эффект необходимо увеличить количество учитываемых в модели мод.

### 3.3. Концепция индивидуального управления модами

Альтернативным способом предотвращения возмущений остаточных мод является *концепция индивидуального управления модами (IMSC)* [2]. Она основана на координатном преобразовании, посредством которого система уравнений, описывающая объект, представляется в виде множества независимых подсистем второго порядка (см. п. 2.1), и управление (в частности, линейное квадратичное) разрабатывается для каждой подсистемы отдельно.

Предположим, что имеется  $m$  управляющих устройств, каждое из которых может действовать лишь на одну точку нежесткого элемента  $P_j$ . Тогда управляющее воздействие запишется в виде:

$$\mathbf{f}(P, t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_j(t) \delta(P - P_j), \quad (3.16)$$

и модальные силы, после подстановки примут вид

$$f_r(t) = \sum_{j=1}^m \phi_r(P_j) \mathbf{F}_j(t), r = \overline{1, \infty}. \quad (3.17)$$

В общем случае, каждая модальная сила зависит от всех мод колебаний системы (2.5):

$$f_r = f_r(w_1, \dot{w}_1, \dots, w_n, \dot{w}_n), r = \overline{1, n}, \quad (3.18)$$

где  $n$  - число учитываемых управляемых мод. Уравнения в (2.5) связаны друг с другом за счет их правых частей. Однако, в случае, когда

$$f_r = f_r(w_r, \dot{w}_r), r = \overline{1, n}, \quad (3.19)$$

система (2.5) распадается на подсистемы второго порядка, управление которыми может производиться независимо друг от друга. Поиск

управляющих воздействий в таком виде и составляет суть концепции индивидуального управления модами. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_c(t) &= [\mathbf{w}_1(t) \dots \mathbf{w}_n(t)]^T, \\
 \mathbf{f}(t) &= [\mathbf{f}_1(t) \dots \mathbf{f}_n(t)]^T, \\
 \mathbf{F}(t) &= [\mathbf{F}_1(t) \dots \mathbf{F}_m(t)]^T, \\
 \mathbf{\Omega}_c &= \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2), \\
 \mathbf{B} &= [\phi_i(P_j)], i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

В матричном виде уравнения (2.5) имеют вид:

$$\ddot{\mathbf{w}}_c(t) + \mathbf{\Omega}_c \mathbf{w}_c = \mathbf{f}(t), \tag{3.21}$$

где  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{B}\mathbf{F}(t)$ . Чтобы вернуться к реальным возмущающим воздействиям необходимо обратное преобразование к физическим координатам:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{f}(t), \tag{3.22}$$

где  $\mathbf{B}^\dagger$  – псевдо-обратная матрица. Только в случае, когда количество управляющих устройств равно размерности системы, т.е.  $n = m$ , матрицу  $\mathbf{B}$  можно обратить и  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{f}(t)$ .

Таким образом, преимуществом концепции IMS [2] является то, что она не допускает влияния возмущающих воздействий управления на остаточные моды. С другой стороны, для построения управления в рамках данной концепции необходимо использовать управляющие устройства, в количестве равном размерности системы, что является существенным недостатком.

### 3.4. High Authority /Low Authority управление (HAC/LAC)

Математическая модель нежесткого элемента не содержит в себе неучитываемых колебательных мод. В то же время LQR-алгоритм *не обладает свойством робастности* по отношению к модели объекта. Поэтому управление с помощью LQR на основе неточной модели приводит к неустойчивости системы.

Попытка совместить робастные характеристики управления, рассеивающего энергию, с высоким потенциалом LQR привела к построению *НА/ЛА управляющего устройства* [6]. Оно имеет двухуровневую структуру. На первом этапе *НА управление*, которое воздействует на редуцированную модель объекта управления, содержащую моды с низкими частотами, и приводит систему в окрестность требуемого состояния. НА управление реализуется при помощи LQR. Так как НА управление использует редуцированную модель объекта, возникает возмущение остаточных мод. Задача *ЛА управления* – стабилизировать систему при помощи управляющих устройств (УУ), рассеивающих энергию.

Для построения ЛА управления необходимо прибегнуть к методам теории возмущений [13]. Рассмотрим систему с обратной связью по вектору наблюдений:

$$\begin{aligned} \text{Динамика : } \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u}, \\ \text{Измерения : } \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x}, \\ \text{Управление : } \mathbf{u} &= \mathbf{C}\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Так как после реализации НА управления система находится в окрестности требуемого положения, управляющую матрицу  $\mathbf{C}$  можно считать малой и, введя

$$\mathbf{GCH} \equiv \delta\mathbf{F}, \quad (3.24)$$

и рассматривать матрицу  $\delta\mathbf{F}$ , как возмущающую по отношению к матрице  $\mathbf{F}$ . Тогда динамика системы с обратной связью может быть записана в виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} + \mathbf{GCH})\mathbf{x} = (\mathbf{F} + \delta\mathbf{F})\mathbf{x}. \quad (3.25)$$

Пусть  $\lambda_n$  –  $n$ -ое собственное значение  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{L}_n, \mathbf{R}_n$ , соответствующие ему, левый и правый нормированные собственные вектора  $\mathbf{F}$ , т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_n^T \mathbf{F} &= \lambda_n \mathbf{L}_n^T, \\ \mathbf{F} \mathbf{R}_n &= \lambda_n \mathbf{R}_n, \\ \mathbf{L}_n^T \mathbf{R}_n &= 1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Для малой  $\mathbf{C}$  определим  $\delta\lambda_n$  как сдвиги  $n$ -ого собственного значения и  $n$ -ого собственного вектора соответствующие  $\delta\mathbf{F}$ . Тогда из второго равенства в (3.26) следует:

$$(\mathbf{F} + \delta\mathbf{F})(\mathbf{R}_n + \delta\mathbf{R}_n) = (\lambda_n + \delta\lambda_n)(\mathbf{R}_n + \delta\mathbf{R}_n), \quad (3.27)$$

Равенство (3.27) после подстановки в него второго равенства из (3.26) упрощается до:

$$\mathbf{F}\delta\mathbf{R}_n + \delta\mathbf{F}(\mathbf{R}_n + \delta\mathbf{R}_n) = \lambda_n\delta\mathbf{R}_n + \delta\lambda_n(\mathbf{R}_n + \delta\mathbf{R}_n). \quad (3.28)$$

Умножая (3.28) слева на  $\mathbf{L}_n^T$ , учитывая, что сдвиг  $\delta\mathbf{R}_n$  достаточно мал, приходим к формуле Якоби, которая описывает сдвиги  $n$ -ого собственного значения в процессе LAC управления:

$$\delta\lambda_n \cong \mathbf{L}_n^T \delta\mathbf{F} \mathbf{R}_n \equiv \mathbf{L}_n^T \mathbf{G} \mathbf{C} \mathbf{H} \mathbf{R}_n \equiv (\phi_n^L) \mathbf{C} (\phi_n^R), \quad (3.29)$$

где  $\phi_n^L = \mathbf{L}_n^T \mathbf{G}$  – обобщенные моды УУ,  $\phi_n^R = \mathbf{H} \mathbf{R}_n$  – обобщенные моды сенсора. Тогда:

$$\delta\lambda_n \cong \sum_{a,r} C_{ar} \phi_{an}^L \phi_{rn}^R, \quad (3.30)$$

где  $a = \overline{1, N_a}$  и  $b = \overline{1, N_r}$  – индексы, описывающие положения УУ и сенсоров соответственно.

Рассмотрим физическую модель, в которой пары сенсор/УУ:

1. *совмещены*, т.е. расположены на нежестком элементе очень близко друг другу

2. *сопряжены*, т.е. имеют соответствующие типы (например, смещение/сила, вращение/момент)

В работе [14] отмечается, что в этом случае:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{G}^T, \\ \mathbf{G}^T \mathbf{L}_n &= \mathbf{H} \mathbf{R}_n. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Из (3.31) следует, что

$$\phi_n^L = \mathbf{G}^T \mathbf{L}_n = \mathbf{H} \mathbf{R}_n = \phi_n^R \equiv \phi_n. \quad (3.32)$$



В итоге основная формула устанавливающая зависимость сдвигов собственных значений с помощью достаточно малых коэффициентов усиления  $C_{ar}$  имеет вид:

$$\delta\lambda_n \cong \sum_{a,r} C_{ar} \phi_{an} \phi_{rn}. \quad (3.33)$$

$C_{ar}$  выбираются так, чтобы

$$J(\mathbf{C}) = \sum_n W_n \left( (\delta\lambda_n)_p - (\delta\lambda_n)_d \right)^2 + \sum_{a,r} C_{ar}^2 \rightarrow \min, \quad (3.34)$$

где  $(\delta\lambda_n)_p$  - спрогнозированные сдвиги собственных значений, описываемые формулой (3.33), а  $(\delta\lambda_n)_d$  - требуемые для приведения системы в нужное положение сдвиги собственных значений. Коэффициент  $W_n$  штрафует за отклонения собственных значений от требуемых значений, а добавка  $\sum_{a,r} C_{ar}^2$  минимизирует затраты на управление. Так как функционал  $J(\mathbf{C})$  квадратичный по  $\mathbf{C}$ ,  $C_{ar}$  могут быть получены алгебраически, как решения линейной системы уравнений:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = 0. \quad (3.35)$$

Обозначим требуемые сдвиги собственных значений  $(\delta\lambda_n)_d$  как  $\mathbf{d}_n$ , и вектор, состоящий из компонент  $\mathbf{d}_n$ , как  $\mathbf{d}$ . Окончательно, матрица обратной связи имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \left[ \left[ \Phi^{(2)} \right]^T \mathbf{W} \Phi^{(2)} + I \right]^{-1} \left[ \Phi^{(2)} \right]^T \mathbf{W} \mathbf{d}, \\ \mathbf{W} &= \text{diag} \| W_n \|, \\ \Phi^{(2)} &= \text{vector} \left( \Phi_{n\alpha}^{(2)} \right)_{\alpha=1}^{N_a N_r}, \\ \Phi_{n\alpha}^{(2)} &= \sum_{a,r} C_{ar} \phi_{an} \phi_{rn}, \\ \alpha &= a \otimes r, a = \overline{1, N_a}, r = \overline{1, N_r}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

НА/ЛА управление универсально в использовании за исключением требования совмещенности и сопряженности пар сенсор/УУ. Основное отличие НА/ЛА управления от IMS концепции заключается в том, что мы не предотвращаем возмущения остаточных мод на стадии разработки LQR, а исправляем последствия этого процесса при помощи ЛА управления.

### 3.5. Уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния (SDRE подход)

Выше были рассмотрены различные методы управления линейными системами. Одним из быстроразвивающихся методов для проектирования нелинейных регуляторов является метод синтеза управления с использованием уравнения Риккати, параметры которого зависят от состояния объекта (State Dependent Riccati Equation (SDRE) technique) [15]. SDRE подход, применительно к задаче гашения вибраций в нежестком элементе КА, использован в работе [16]. Рассмотрим автономную, нелинейную по состоянию и линейную по управлению систему:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.37)$$

где  $\mathbf{x} \in \Omega \in \mathbb{R}^n$  ( $0 \in \Omega$ ),  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \neq 0 \forall \mathbf{x}$  и  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C^k, k \geq 0$ . Функционал качества представлен в виде:

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t)) dt, \quad (3.38)$$

где  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{R}(\mathbf{x}) > 0$ . Требуется построить управление с обратной связью:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}, \mathbf{K}(\cdot) \in C^0(\Omega) \quad (3.39)$$

Факторизация нелинейной системы (или *SDC параметризация*):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}. \quad (3.40)$$

приводит к системе линейной структуры с матрицами  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , которые называются *SDC (State-dependent coefficient) матрицами*.

В работе [15] приводится следующее предположение, условия которого выполняются в задаче, поставленной в работе:

Предположение. Пусть функция  $\mathbf{f} \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  такая, что  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{f} \in C^k(\Omega), k \geq 1$ . Тогда для  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ , SDC параметризация (3.40)  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  всегда существует для некоторой  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ . Одна из возможных SDC матриц имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\lambda \mathbf{x}} d\lambda, \quad (3.41)$$

где  $\lambda$  некоторая фиктивная переменная интегрирования.

В SDC представлении система (3.37) принимает вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.42)$$

Как следует из [15], управление для нелинейных систем (3.37) с функционалом качества (3.38) ищется в следующем виде:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t). \quad (3.43)$$

где  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  является решением алгебраического уравнения Риккати:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.44)$$

Отметим, что в отличие от стандартного LQR, алгебраическое уравнение Риккати с SDC матрицами решается на каждом шаге интегрирования управления.

Сформулируем преимущества SDRE подхода:

- предлагает эффективный алгоритм синтеза управления с обратной связью без необходимости линеаризации модели;
- обеспечивает большую гибкость управления, так как весовые матрицы зависят от состояния;
- отсутствие уникальности SDC параметризации системы создает дополнительные степени свободы при построении управления, а значит, может быть использовано для улучшения характеристик регулятора.

## 4. Построение управления в задаче стабилизации макета

### 4.1. Построение линейного квадратичного регулятора

Для того чтобы построить линейное квадратичное управление (3.5) для задачи стабилизации макета в заданных угловом положении и положении на столе, необходимо линеаризовать уравнения движения макета (2.13), (2.29), (2.31) в окрестности положения равновесия. В пространстве состояний система определяется вектором:

$$\mathbf{x} = \left( \mathbf{R}_{sx} \quad \mathbf{R}_{sy} \quad \mathbf{V}_{sx} \quad \mathbf{V}_{sy} \quad \mathbf{Q}_3 \quad \omega \quad \mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{q}} \quad \varphi \quad \psi \right)^T, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{R}_{sx}, \mathbf{R}_{sy}$  – компоненты радиус-вектора центра масс основного тела макета  $\mathbf{R}_s$ , а  $\mathbf{V}_{sx} \triangleq \dot{\mathbf{R}}_{sx}, \mathbf{V}_{sy} \triangleq \dot{\mathbf{R}}_{sy}$  – его скорости. Всюду в работе состояние, в которое должен быть приведен макет, задается вектором  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_{(8+2n) \times 1}$ . То есть требуемое угловое положение основного тела макета задается кватернионом  $\mathbf{Q} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ . Линеаризованные уравнения движения (2.13), (2.29), (2.31) имеют вид:

$$\mathbf{S}_0 \begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\psi}_{p1} \\ \dot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_s - \mathbf{f}_{\omega p} \\ -\mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{f}_{\varphi p} + M_{p1} \\ -\mathbf{f}_p \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_s + \frac{m_p}{m} \dot{\omega} \times \mathbf{p} + \frac{m_p}{m} \dot{\psi} \mathbf{e}_p \times \mathbf{p}_2 + \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \ddot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{F}_0}{m}, \quad (4.3)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_3 = \frac{1}{2} \omega, \quad (4.4)$$

$$\dot{\varphi}_p = \psi_p,$$

где

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_0 & \mathbf{S}_{0\omega\varphi p} \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{S}_{0\omega p} \\ \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0\omega\varphi p}^T & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{J}_{0\varphi p} \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0p\varphi p} \\ \mathbf{S}_{0\omega p}^T & \mathbf{S}_{0p\varphi p}^T \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{M}_p \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_p + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - \frac{m_p^2}{m} \mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}),$$

$$\mathbf{J}_{0\omega p} = \mathbf{J}_p - \frac{m_p^2}{m} \mathbf{K}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{M}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m} \mathbf{A}_p^T \mathbf{A}_p,$$

$$\mathbf{S}_{0\omega\omega p} = \mathbf{J}_p + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - \frac{m_p^2}{m} \mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2),$$

$$\mathbf{S}_{0\omega p} = \sum_i m_{pi} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi}) \times \mathbf{A}_{pi} - \frac{m_p}{m} \mathbf{p} \times \mathbf{A}_p, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{S}_{0p\omega p} = \sum_i m_{pi} \mathbf{r}_{pi} \times \mathbf{A}_{pi} - \frac{m_p}{m} \mathbf{p}_2 \times \mathbf{A}_p,$$

В (4.6)-(4.7) использованы следующие обозначения:  $\mathbf{A}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}$ ;

$\mathbf{J}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{K}(\mathbf{r}_{pi}, \mathbf{r}_{pi})$  – тензор инерции недеформированного стержня.

В работе предполагается, что на КА не действуют внешние силы. Исключение составляют управляющие воздействия  $\mathbf{F}_O = (F_{0x} \ F_{0y} \ 0)^T$ , создаваемые при помощи четырех вентиляторов (см. п.1.1). В этом случае, они действуют только на основное тело, и линеаризованные  $\mathbf{f}_{\omega p}, \mathbf{f}_{\omega p}, \mathbf{f}_p$  принимают вид:

$$\mathbf{f}_{0\omega p} = \mathbf{p} \times \frac{m_p}{m} \mathbf{F}_O,$$

$$\mathbf{f}_{0\omega p} = \mathbf{p}_2 \times \frac{m_p}{m} \mathbf{F}_O, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{f}_{0p} = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \left( \frac{\mathbf{F}_O}{m} - \frac{\mathbf{L}_{pi}}{m_{pi}} \right).$$

Запишем линеаризованные уравнения движения в пространстве состояний:

$$\hat{\mathbf{S}}_{lin} \dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_{lin} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}}_{lin} \mathbf{u}, \quad (4.9)$$

где  $\mathbf{u} = (\mathbf{F}_{0x} \quad \mathbf{F}_{0y} \quad \mathbf{T}_{sz})^T$  – вектор управляющих воздействий; здесь  $\mathbf{T}_{sz}$  – момент управляющих сил, действующих на основное тело макета который создается при помощи вентиляторов на борту макета. Матрица при старших производных имеет вид:

$$\hat{\mathbf{S}}_{lin} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (4+2n)} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{D}_{lin} \\ \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{S}_{lin} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{S}_{lin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{J}_0 \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0\omega p} & 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0\omega p} \mathbf{e}_{p1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{S}_{0\omega p}^T \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{M}_p & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{S}_{0p\phi p}^T \mathbf{e}_{p1} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0\omega p} \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0p\phi p} & 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{J}_0 \mathbf{e}_{p1} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{D}_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{m_p}{m} p_y & \mathbf{0}_{1 \times n} & \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^x & 0 & -\frac{m_p}{m} p_{2y} \\ 0 & \frac{m_p}{m} p_x & \mathbf{0}_{1 \times n} & \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^y & 0 & \frac{m_p}{m} p_{2x} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

матрица состояния системы:

$$\hat{\mathbf{A}}_{lin} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (4+2n)} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (4+2n)} \\ \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{A}_{lin} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{A}_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} & -\mathbf{\Omega} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

матрица управления:

$$\hat{\mathbf{B}}_{lin} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (1+n)} \\ \hline \frac{1}{m} \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (1+n)} \\ \hline -\mathbf{D}_{lin}^T & \mathbf{B} \end{array} \right), \quad (4.15)$$

$$\mathbf{B} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} \\ 1 & \mathbf{0}_{1 \times n} \\ \hline \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{E}_{n \times n} \\ \hline 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} \end{array} \right). \quad (4.16)$$

Здесь  $\mathbf{\Omega} = diag(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots)$  – матрица собственных частот колебаний.

Преобразуя уравнения (4.9), получаем :

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{S}}_{lin}^{-1} \hat{\mathbf{A}}_{lin} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{S}}_{lin}^{-1} \hat{\mathbf{B}}_{lin} \mathbf{u} \triangleq \mathbf{A}_{lin}^{cont} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{lin}^{cont} \mathbf{u}. \quad (4.17)$$

В процессе линейного квадратичного управления макетом минимизируется функционал:

$$J_{lin} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_{lin} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_{lin} \mathbf{u}(t)) dt, \text{ где } \mathbf{Q}_{lin} > 0, \mathbf{R}_{lin} > 0, \quad (4.18)$$

при ограничениях (4.17). Минимизация  $J_{lin}$  приводит систему в нулевое состояние, которое совпадает с  $\mathbf{x}_0$ . Закон управления описывается выражением (см. 3.1):

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}_{lin}^{-1} (\mathbf{B}_{lin}^{cont})^T \mathbf{P}_{lin} \mathbf{x}, \quad (4.19)$$

где для нахождения матрицы  $\mathbf{P}$  необходимо решить алгебраическое уравнение Риккати:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A}_{lin}^{cont})^T \mathbf{P}_{lin} + \mathbf{P}_{lin} \mathbf{A}_{lin}^{cont} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}_{lin} \mathbf{B}_{lin}^{cont} \mathbf{R}_{lin}^{-1} (\mathbf{B}_{lin}^{cont})^T \mathbf{P}_{lin}. \quad (4.20)$$

#### 4.2. Построение управления, подавляющего возмущения в остаточных модах

Матрица состояния  $\mathbf{A}_{lin}^{cont}$  в модели макета (4.17), в отличие от соответствующей матрицы в модели нежесткого элемента, описанной в

пункте 3.2, не является блочно-диагональной, т.к. в модели учитывается движение макета в целом. Однако алгоритм подавления возмущений в остаточных модах из пункта 3.2 может быть обобщен и на случай системы (4.17). Покажем это.

Управляя макетом при помощи вентиляторов, напрямую можем влиять только на угловую скорость и на положения центра масс основного тела макета. Поэтому разобьем систему (4.17) на две части следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{B}_r \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad (4.21)$$

где  $\mathbf{x}_c = (\mathbf{R}_{sx} \quad \mathbf{R}_{sy} \quad \mathbf{V}_{sx} \quad \mathbf{V}_{sy} \quad \mathbf{Q}_3 \quad \omega)^T$  – вектор управляемых состояний  $\mathbf{x}_r = (\mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{q}} \quad \varphi \quad \psi)^T$  – вектор остаточных состояний. Так как редуцированная часть системы (4.21) может работать в стационарной точке остаточных состояний, то есть следующее выражение выполняется тождественно:

$$0 \equiv \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_c + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r\mathbf{u}. \quad (4.22)$$

Отсюда:

$$\mathbf{x}_r = -\mathbf{A}_{22}^{-1}(\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_r\mathbf{u}) \triangleq -\mathbf{A}_x\mathbf{x}_c - \mathbf{A}_u\mathbf{u}. \quad (4.23)$$

Подставим (4.23) в (4.21):

$$\dot{\mathbf{x}}_c = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})\mathbf{x}_c + (\mathbf{B}_c - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_r)\mathbf{u}. \quad (4.24)$$

Для системы (4.21) функционал качества  $J_{lin}$  может быть записан, как:

$$J_{lin} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}_c^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_r^T \mathbf{Q}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt, \quad (4.25)$$

Используя (4.23), преобразуем слагаемое  $\mathbf{x}_r^T \mathbf{Q}_r \mathbf{x}_r$  в  $J_{lin}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r^T \mathbf{Q}_r \mathbf{x}_r &= (\mathbf{A}_x \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_u \mathbf{u})^T \mathbf{Q}_r (\mathbf{A}_x \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_u \mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{x}_c^T \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_x \mathbf{x}_c + 2\mathbf{x}_c^T \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{A}_u^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

и подставим его в (4.25). В результате, получаем функционал для управляемой части системы:



$$J_{red} = \int_0^{\infty} \left( \mathbf{x}_c^T (\mathbf{Q}_c + \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_x) \mathbf{x}_c + 2 \mathbf{x}_c^T \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u \mathbf{u} + \mathbf{u}^T (\mathbf{R} + \mathbf{A}_u^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u) \mathbf{u} \right) dt. \quad (4.27)$$

Чтобы построить LQR для управляемой части системы (4.24) необходимо минимизировать функционал  $J_{red}$  при ограничениях (4.24). В итоге, искомый закон управления имеет вид:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1} \left( \mathbf{B}_{red}^T \mathbf{P}_{red} + \mathbf{N}_{red}^T \right) \mathbf{x}, \quad (4.28)$$

где матрица  $\mathbf{P}_{red}$  находится из обобщенного уравнения Риккати:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_{red}^T \mathbf{P}_{red} + \mathbf{P}_{red} \mathbf{A}_{red} + \mathbf{Q} - \left( \mathbf{P}_{red} \mathbf{B}_{red} + \mathbf{N}_{red} \right) \mathbf{R}^{-1} \left( \mathbf{B}_{red}^T \mathbf{P}_{red} + \mathbf{N}_{red}^T \right). \quad (4.29)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{red} &= \mathbf{Q}_c + \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_x, \\ \mathbf{B}_{red} &= \mathbf{R} + \mathbf{A}_u^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u, \\ \mathbf{N}_{red} &= \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u. \end{aligned} \quad (4.30)$$

### 4.3. Реализация SDRE подхода

Чтобы воспользоваться методом SDRE, необходимо выполнить SDC параметризацию (3.40) системы (2.13), (2.29), (2.31). Для этого преобразуем слагаемые  $\mathbf{N}_s, \mathbf{N}_{\varphi p}, \mathbf{N}_{\omega p}, \mathbf{N}_p$  в уравнениях (2.13) и (2.31):

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_s &= \frac{m_p}{m} \left( \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 \right) = \\ &= \frac{m_p}{m} \left( -\omega_2^2 \mathbf{p}_1 - \omega_2^2 (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) - 2 \mathbf{k}(\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2) \boldsymbol{\omega}_2 \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\varphi p} &= 2 \sum_i m_{pi} \mathbf{K}(\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}, \dot{\mathbf{u}}_{pi}) \boldsymbol{\omega}_p - m_p (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \mathbf{p}_1 \omega^2 - \\ &- m_p (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \frac{m_p}{m} \left( -\omega^2 \mathbf{p}_1 - \omega_p^2 (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2 \boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 \right) = \\ &= 2 \sum_i m_{pi} \mathbf{K}(\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}, \dot{\mathbf{u}}_{pi}) \boldsymbol{\omega}_p - \frac{(m - m_p) m_p}{m} (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \mathbf{p}_1 \omega^2 - \\ &- 2 \frac{m_p^2}{m} \mathbf{K}(\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2, \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2) \boldsymbol{\omega}_p, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\omega p} &= \mathbf{N}_{\varphi p} + 2 \sum_i \mathbf{p}_1 \times \boldsymbol{\omega}_p \times m_{pi} \dot{\mathbf{u}}_{pi} - \omega_p^2 m_p \mathbf{p}_1 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \\
&+ m_p \mathbf{p}_1 \times \left( -\omega^2 \mathbf{p}_1 - \frac{m_p}{m} \left( -\omega^2 \mathbf{p}_1 - \omega_p^2 (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2 \boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 \right) \right) = \\
&= \mathbf{N}_{\varphi p} + 2 m_p \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2) \boldsymbol{\omega}_p - m_p \mathbf{p}_1 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \omega_p^2 + \\
&+ \frac{m_p^2}{m} \mathbf{p}_1 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \omega_p^2 - 2 \frac{m_p^2}{m} \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2) \boldsymbol{\omega}_p = \\
&= \mathbf{N}_{\varphi p} - \frac{(m - m_p) m_p}{m} \mathbf{p}_1 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \omega_p^2 + 2 \frac{(m - m_p) m_p}{m} \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2) \boldsymbol{\omega}_p,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_p &= \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \left( -\omega_p^2 (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) + 2 \boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\mathbf{u}}_{pi} - \omega^2 \mathbf{p}_1 \right) + \\
&- \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \left( \frac{m_p}{m} \left( -\omega^2 \mathbf{p}_1 - \omega_p^2 (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2 \boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 \right) \right) = \\
&= \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \left( -\omega_p^2 (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) - 2 \mathbf{k}(\dot{\mathbf{u}}_{pi}) \boldsymbol{\omega}_p - \frac{(m - m_p) m_p}{m} \omega^2 \mathbf{p}_1 \right) + \\
&+ \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \frac{m_p}{m} \left( \omega_p^2 (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2 \mathbf{k}(\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2) \boldsymbol{\omega}_p \right),
\end{aligned} \tag{4.34}$$

где

$$\mathbf{k}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

Разложим  $\mathbf{N}_s = (\mathbf{N}_{sx} \quad \mathbf{N}_{sy} \quad 0)^T, \mathbf{N}_{\varphi p}, \mathbf{N}_{\omega p}, \mathbf{N}_p$  по  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{sx} &= \mathbf{N}_{sx}^\omega \boldsymbol{\omega} + \mathbf{N}_{sx}^\varphi \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \\
\mathbf{N}_{sy} &= \mathbf{N}_{sy}^\omega \boldsymbol{\omega} + \mathbf{N}_{sy}^\varphi \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \\
\mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{N}_{\varphi p} &= \mathbf{N}_{\varphi p}^\omega \boldsymbol{\omega} + \mathbf{N}_{\varphi p}^\varphi \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \\
\mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{N}_{\omega p} &= \mathbf{N}_{\omega p}^\omega \boldsymbol{\omega} + \mathbf{N}_{\omega p}^\varphi \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \\
\mathbf{N}_p &= \mathbf{N}_p^\omega \boldsymbol{\omega} + \mathbf{N}_p^\varphi \dot{\boldsymbol{\varphi}}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Здесь:

$$\mathbf{N}_{sx}^\omega = -p_{1x} \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2)_x \omega_2 + 2 \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_{2y}, \tag{4.37}$$

$$\mathbf{N}_{sx}^\varphi = -(\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2)_x \omega_2 + 2 \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_{2y}, \tag{4.38}$$

$$\mathbf{N}_{sy}^{\omega} = -\mathbf{p}_{1y}\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2)_y \boldsymbol{\omega}_2 - 2\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_{2x}, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{N}_{sy}^{\varphi} = -(\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2)_y \boldsymbol{\omega}_2 - 2\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_{2x}. \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\varphi p}^{\varphi} = & 2 \sum_i m_{pi} \left[ \left( (\mathbf{r}_{pi})_x + (\mathbf{u}_{pi})_x \right) (\dot{\mathbf{u}}_{pi})_x + \left( (\mathbf{r}_{pi})_y + (\mathbf{u}_{pi})_y \right) (\dot{\mathbf{u}}_{pi})_y \right] - \\ & - 2 \frac{m_p^2}{m} \left[ \left( (\mathbf{p}_2)_x + (\tilde{\mathbf{p}}_2)_x \right) (\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2)_x + \left( (\mathbf{p}_2)_y + (\tilde{\mathbf{p}}_2)_y \right) (\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2)_y \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\varphi p}^{\omega} = & \mathbf{N}_{\varphi p}^{\varphi} - \\ & - \frac{(m - m_p)m_p}{m} \left[ \left( (\mathbf{p}_2)_x + (\tilde{\mathbf{p}}_2)_x \right) (\mathbf{p}_1)_y + \left( (\mathbf{p}_2)_y + (\tilde{\mathbf{p}}_2)_y \right) (\mathbf{p}_1)_x \right] \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{N}_{\omega p}^{\varphi} = \mathbf{N}_{\varphi p}^{\varphi} + \mathbf{N}_{\omega p}^{ed}, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{N}_{\omega p}^{\omega} = \mathbf{N}_{\varphi p}^{\omega} + \mathbf{N}_{\omega p}^{ed},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\omega p}^{ed} = & \frac{(m - m_p)m_p}{m} \left[ \left( (\mathbf{p}_2)_x + (\tilde{\mathbf{p}}_2)_x \right) (\mathbf{p}_1)_y + \left( (\mathbf{p}_2)_y + (\tilde{\mathbf{p}}_2)_y \right) (\mathbf{p}_1)_x \right] \boldsymbol{\omega}_p + \\ & + 2 \frac{(m - m_p)m_p}{m} \left[ (\mathbf{p}_1)_x (\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2)_x + (\mathbf{p}_1)_y (\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2)_y \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_p^{\varphi} = & \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \left( -\boldsymbol{\omega}_p (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) + 2\mathbf{k} (\dot{\mathbf{u}}_{pi}) \mathbf{e}_{p1} \right) + \\ & + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \frac{m_p}{m} \left( \boldsymbol{\omega}_p (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) - 2\mathbf{k} (\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2) \mathbf{e}_{p1} \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{N}_p^{\omega} = \mathbf{N}_p^{\varphi} - \frac{(m - m_p)m_p}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{p}_1 \boldsymbol{\omega}. \quad (4.46)$$

В матричном виде уравнения движения макета (2.13), (2.29), (2.31), имеют вид:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.47)$$

где матрица при старших производных  $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$ :

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (4+2n)} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{D} \\ \hline \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{S} \end{array} \right), \quad (4.48)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{J} \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{\omega p} & 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{\omega \varphi p} \mathbf{e}_{p1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{S}_{\omega p}^T \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{M}_p & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{S}_{p \varphi p}^T \mathbf{e}_{p1} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{\omega \varphi p} \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{p \varphi p} & 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{J}_{\varphi p} \mathbf{e}_{p1} \end{array} \right). \quad (4.49)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \left( \begin{array}{cccccc} 0 & -\frac{m_p}{m}(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2)_y & \mathbf{0}_{1 \times n} & \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^x & 0 & -\frac{m_p}{m}(\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2)_y \\ 0 & \frac{m_p}{m}(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2)_x & \mathbf{0}_{1 \times n} & \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^y & 0 & \frac{m_p}{m}(\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2)_x \end{array} \right); \quad (4.50)$$

матрица состояния  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ :

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (4+2n)} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{G} \\ \hline \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{A} \end{array} \right), \quad (4.51)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left( \begin{array}{cccccc} 0 & \frac{1}{2} \mathbf{Q}_0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{N}_{\omega p}^\omega & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & -\mathbf{N}_{\omega p}^\varphi \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & -\mathbf{N}_p^\omega & -\mathbf{\Omega} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} & -\mathbf{N}_p^\varphi \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 1 \\ 0 & -\mathbf{N}_{\varphi p}^\omega & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & -1 & -\mathbf{N}_{\varphi p}^\varphi \end{array} \right), \quad (4.52)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \left( \begin{array}{cccccc} 0 & \mathbf{N}_{sx}^\omega & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & \mathbf{N}_{sx}^\varphi \\ 0 & \mathbf{N}_{sy}^\omega & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & \mathbf{N}_{sy}^\varphi \end{array} \right); \quad (4.53)$$

матрица управления  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ :

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (2+n)} \\ \hline \frac{1}{m} \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (2+n)} \\ \hline -\mathbf{D}^T & \mathbf{B} \end{array} \right). \quad (4.54)$$

Здесь  $\mathbf{A}_{pi}^x, \mathbf{A}_{pi}^y, \mathbf{A}_{pi}^z$  – вектор-строки матрицы  $\mathbf{A}_{pi} = (\mathbf{A}_{pi}^x \quad \mathbf{A}_{pi}^y \quad \mathbf{A}_{pi}^z)^T$ , размерность которых равна числу колебательных мод нежесткого элемента макета. После умножения на  $\hat{\mathbf{S}}^{-1}(\mathbf{x})$ , уравнения (4.47) преобразуются к виду (3.42), и закон управления задается выражением (3.43). К сожалению, на данный момент не удалось выбрать подходящие весовые матрицы, или представить систему в таком виде, чтобы выполнялись условия глобальной или локальной асимптотической устойчивости, сформулированные в работе [15]. Данная задача требует дальнейших изысканий.

## 5. Компьютерное моделирование

Зададим условия, в которых будет проходить компьютерное моделирование движения макета по столу. В модели макета учитывается одна колебательная мода нежесткого элемента, поэтому вектор состояния (4.1), описывающий поведение макета на столе можно записать в виде:

$$\mathbf{x} = (R_{sx} \quad R_{sy} \quad V_{sx} \quad V_{sy} \quad Q_3 \quad \omega \quad q_1 \quad \dot{q}_1 \quad \varphi \quad \psi)^T. \quad (5.1)$$

Требуемое конечное положение системы задается нулевым вектором:

$$\mathbf{x}_{fin} = \mathbf{0}_{10 \times 1}. \quad (5.2)$$

Начальные условия задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{sx} &= 0.5\text{м}, R_{sy} = 0.4\text{м}, \\ V_{sx} &= 0.1\text{м/с}, V_{sy} = 0.2\text{м/с}, \\ Q_3 &= \sin 15^\circ, \omega = 5\text{град/с}, \\ q_1 &= 0.1, \dot{q}_1 = 0 \text{ 1/с}, \\ \varphi &= 5^\circ, \psi = 10\text{град/с}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Параметры макета:

- длина корпуса 0.15м;
- ширина корпуса 0.15м;
- высота корпуса 0.5 м;
- длина стержня 1.08 м;
- тензор инерции макета

$$J_s = \begin{pmatrix} 0.2646 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2646 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1125 \end{pmatrix} \text{кг/м}^2; \quad (5.4)$$

- максимальный момент, создаваемый вентиляторами 0.4 Н\*м
- максимальная сила, создаваемая вентиляторами 4Н

Шаг интегрирования для обоих методов равен 0.01, а шаг управления равен 0.1. Законы управления системой при таком выборе шагов могут быть

реализованы при помощи аппаратного обеспечения, используемого в макете на стенде КОСМОС.

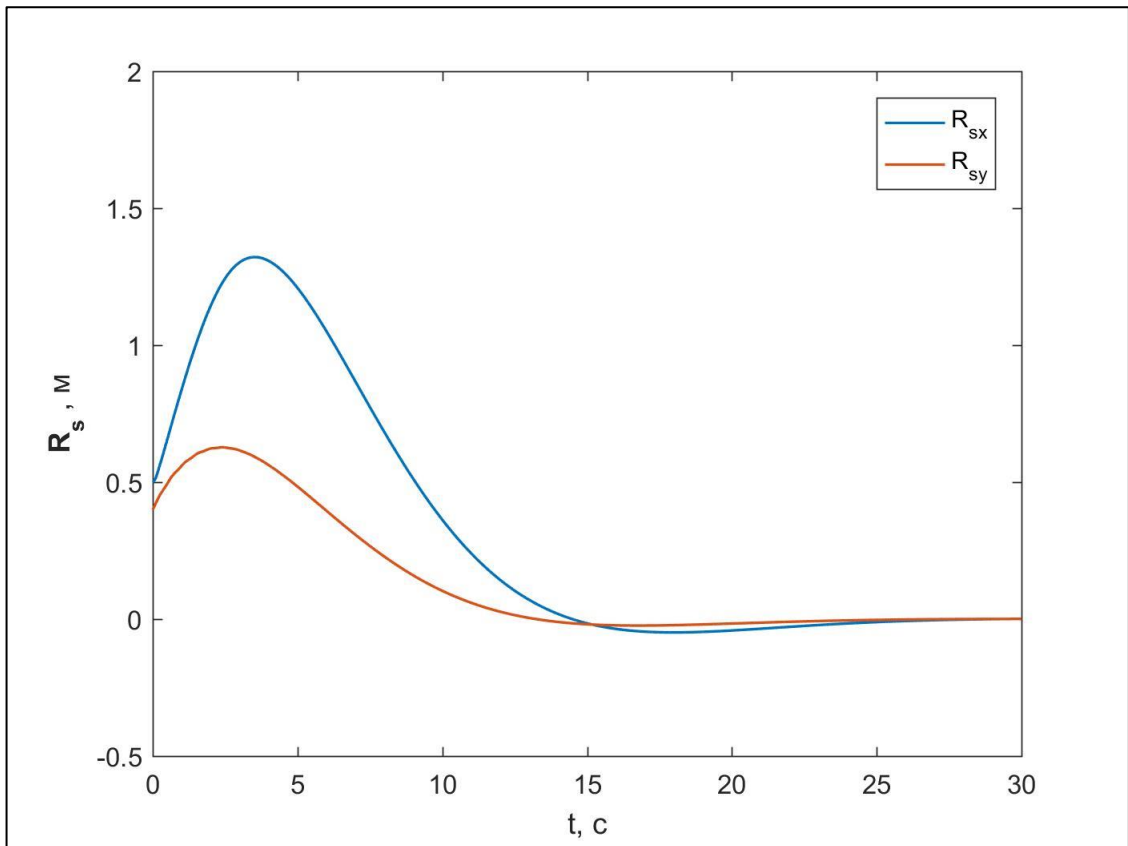
Приводим результаты компьютерного моделирования при заданных начальных условиях приведены на рисунках 6-21 и собраны в таблице 1:

Компонента $\mathbf{x}$ .	LQR	MESS
$R_{sx}, R_{sy}, \text{м}$	$10^{-3}$ , к 40с	$10^{-3}$ , к 40с
$V_{sx}, V_{sy}, \text{м/с}$	$10^{-3}$ , к 40с	$10^{-3}$ , к 40с
$\omega$ , град/с	$10^{-2}$ , к 10с	$10^{-3}$ , к 10с
	$10^{-4}$ , к 20 с	$10^{-4}$ , к 20 с
$Q_0$	$10^{-4}$ , к 10с	$10^{-4}$ , к 10с
$Q_3$	$10^{-2}$ , к 10с	$10^{-3}$ , к 10с
	$10^{-4}$ , к 20 с	$10^{-4}$ , к 20 с
$q_1$	$10^{-4}$ , к 10с	$10^{-4}$ , к 10с
$\varphi$ , град	$10^{-3}$ , к 10с	$10^{-3}$ , к 7с

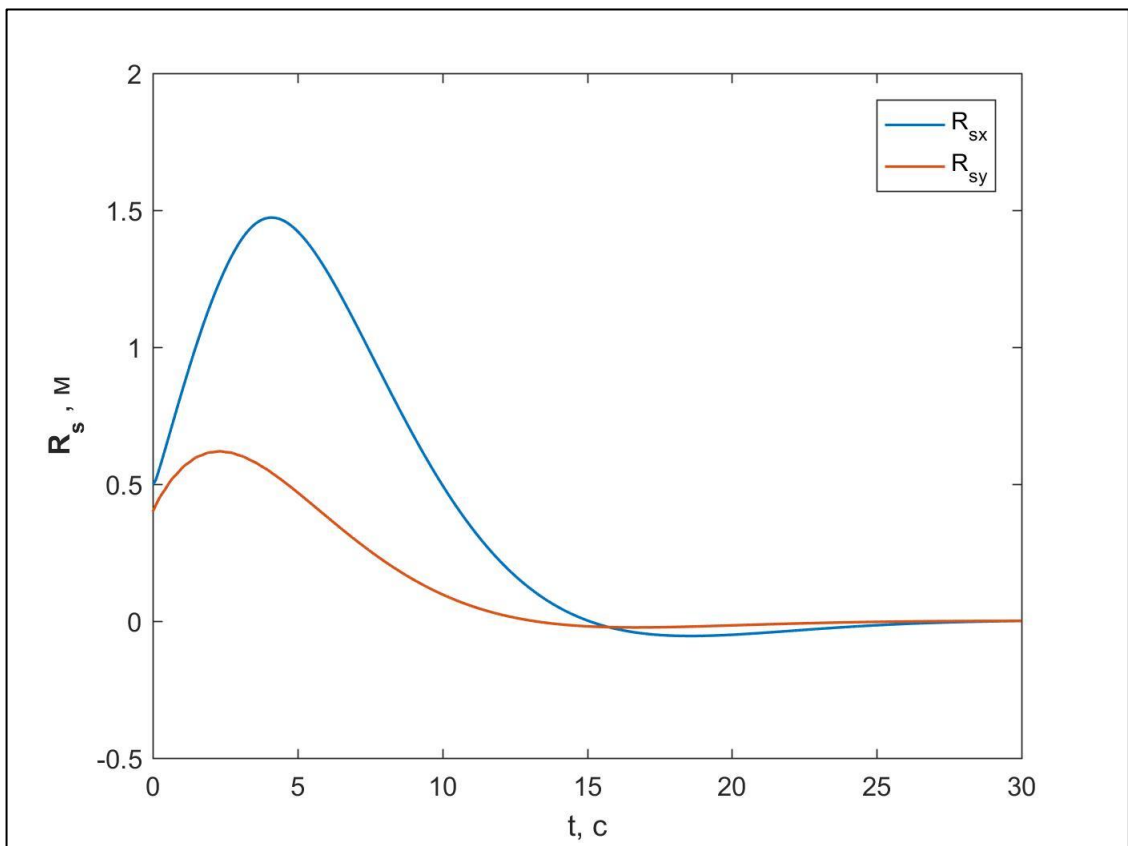
**Таблица 1.** Порядок компонент вектора состояния  $\mathbf{x}$  к заданному моменту времени для алгоритмов LQR и MESS.

Выводы:

- как LQR-алгоритм, так и MESS-алгоритм успешно стабилизируют макет на столе;
- MESS-алгоритм дает результаты не уступающие результатам LQR-алгоритма, опираясь при этом на модель меньшей размерности. Поэтому MESS-алгоритм является более предпочтительным для решения текущей задачи.
- оба алгоритма могут быть реализованы с помощью имеющихся управляющих устройств (четыре вентилятора) и имеющегося аппаратного обеспечения макета, представленного на стенде КОСМОС[4].

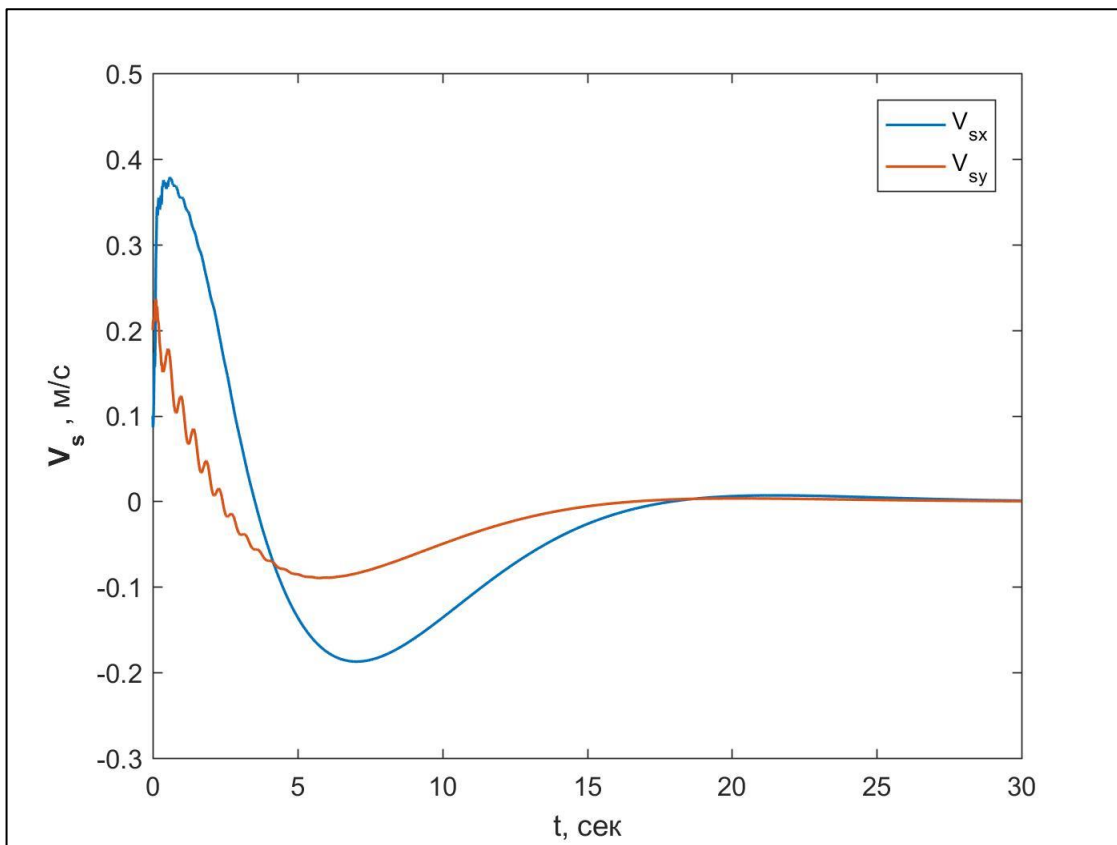


**Рис. 6.** Положение центра масс основного тела макета на столе (LQR)

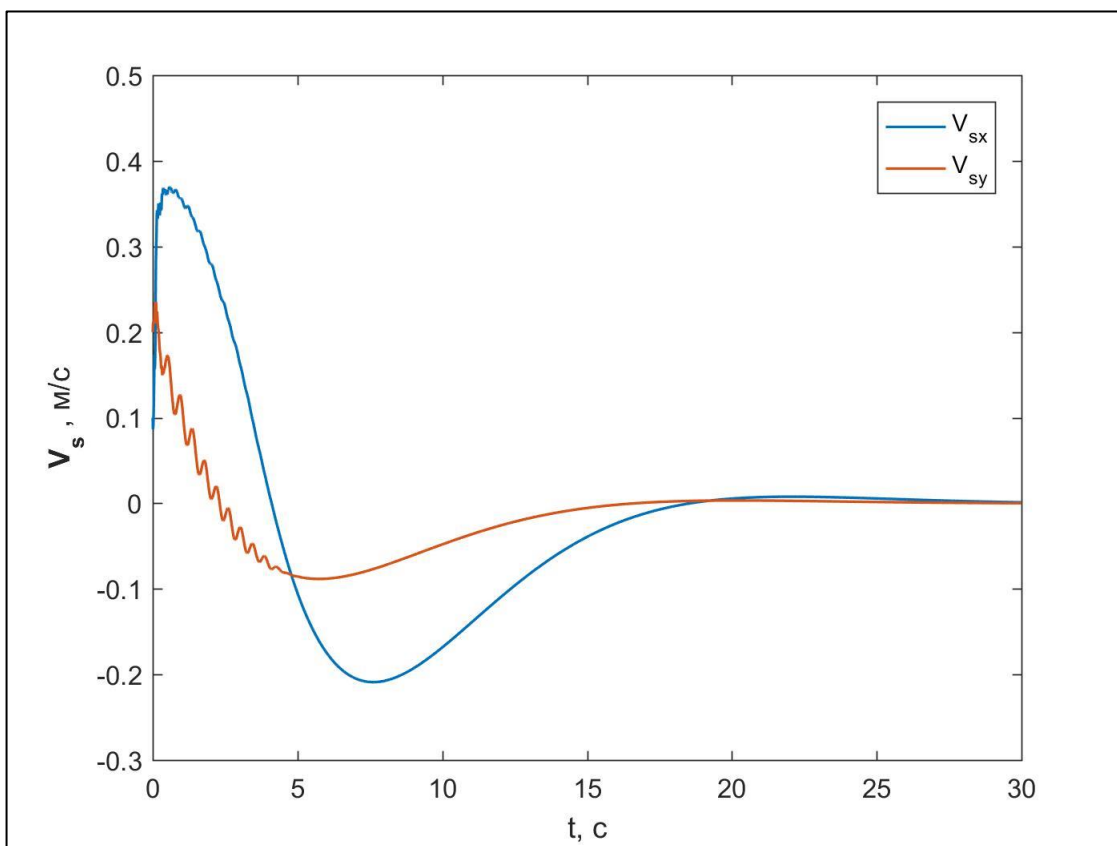


**Рис. 7.** Положение центра масс основного тела макета на столе (MESS)

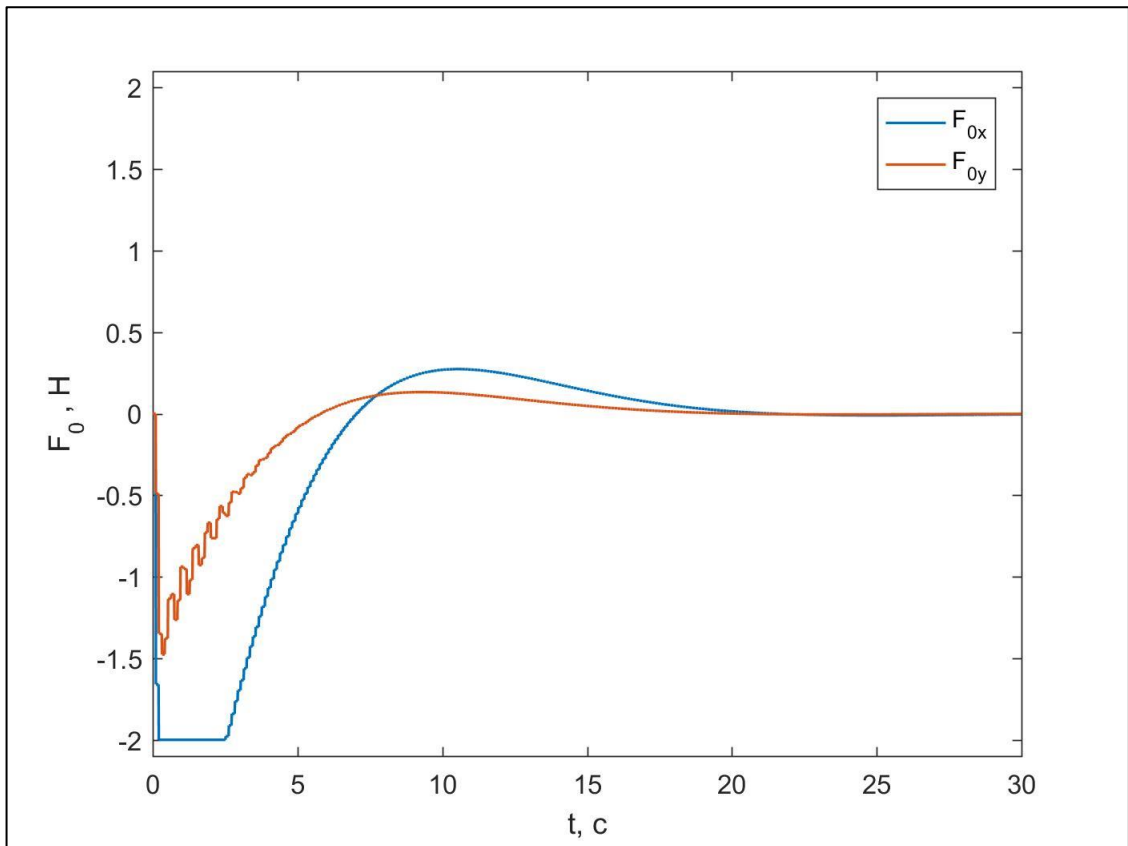




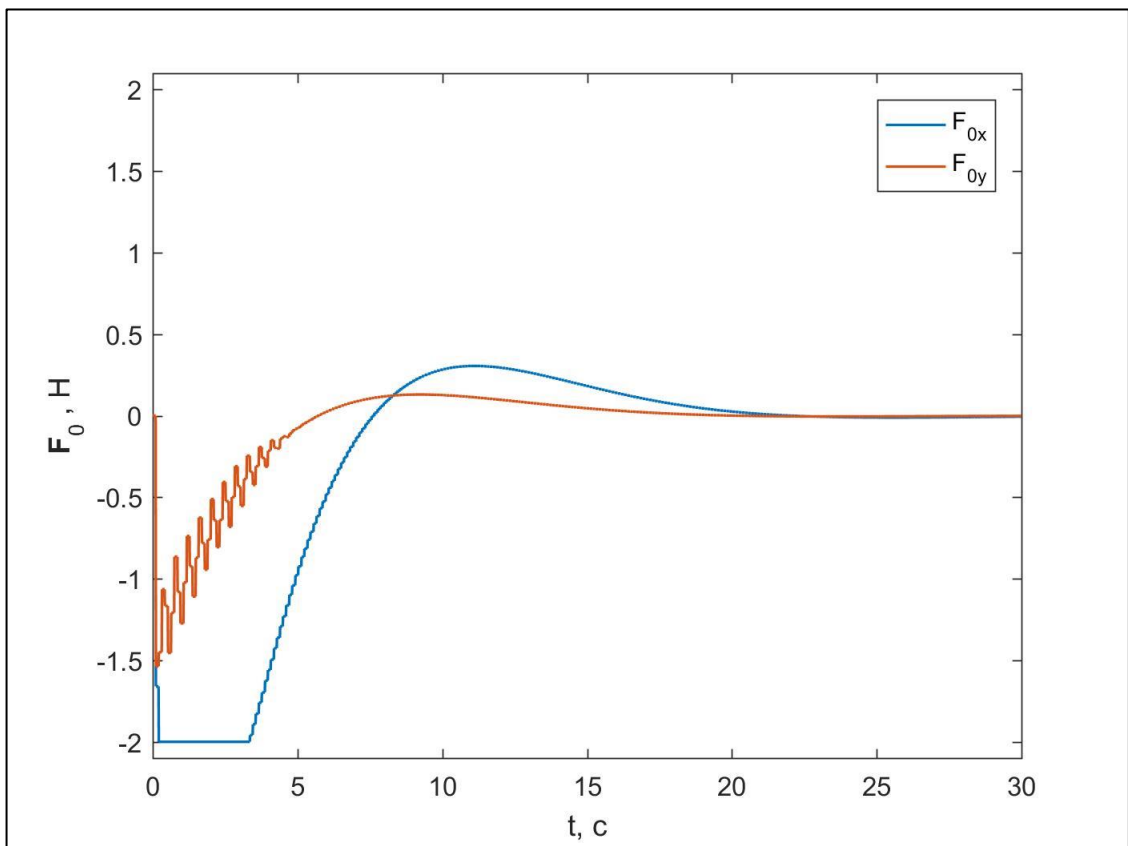
**Рис. 8.** Скорость центра масс основного тела макета (LQR)



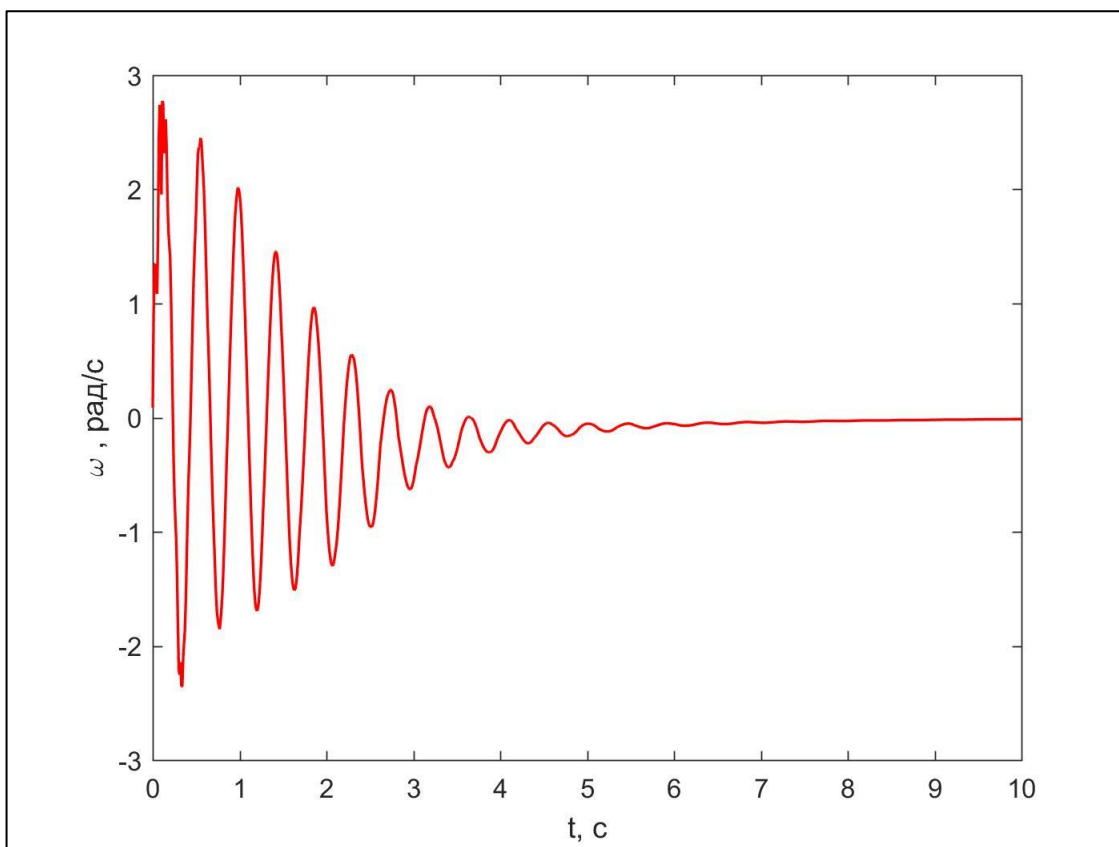
**Рис. 9.** Скорость центра масс основного тела макета (MESS)



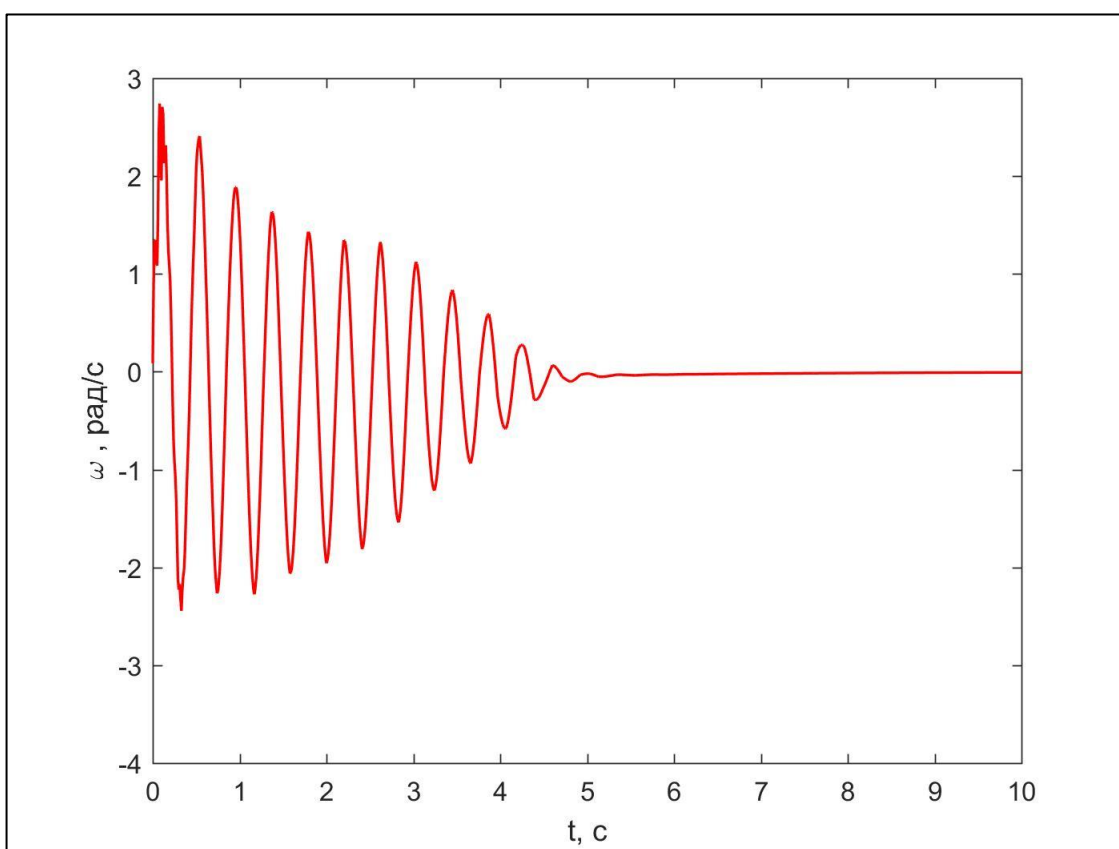
**Рис. 10.** Управление центром масс основного тела макета (LQR)



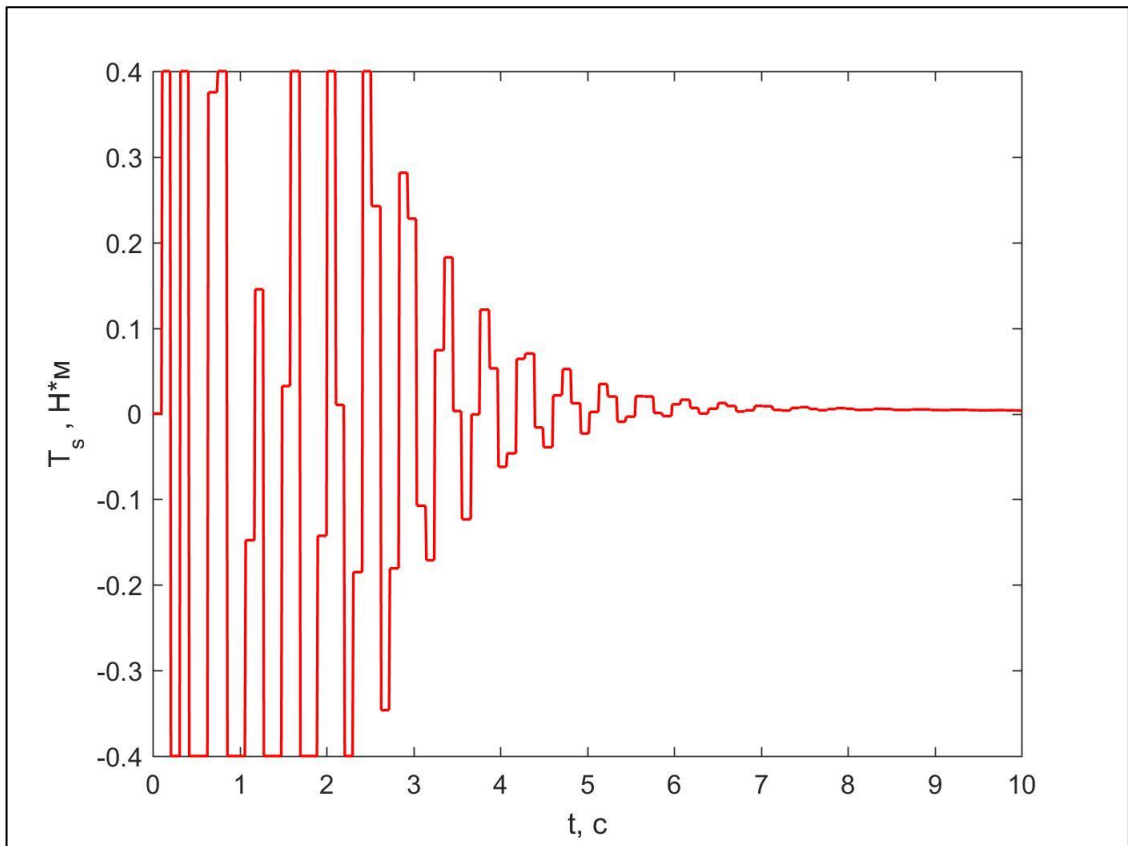
**Рис. 11.** Управление центром масс основного тела макета (MESS)



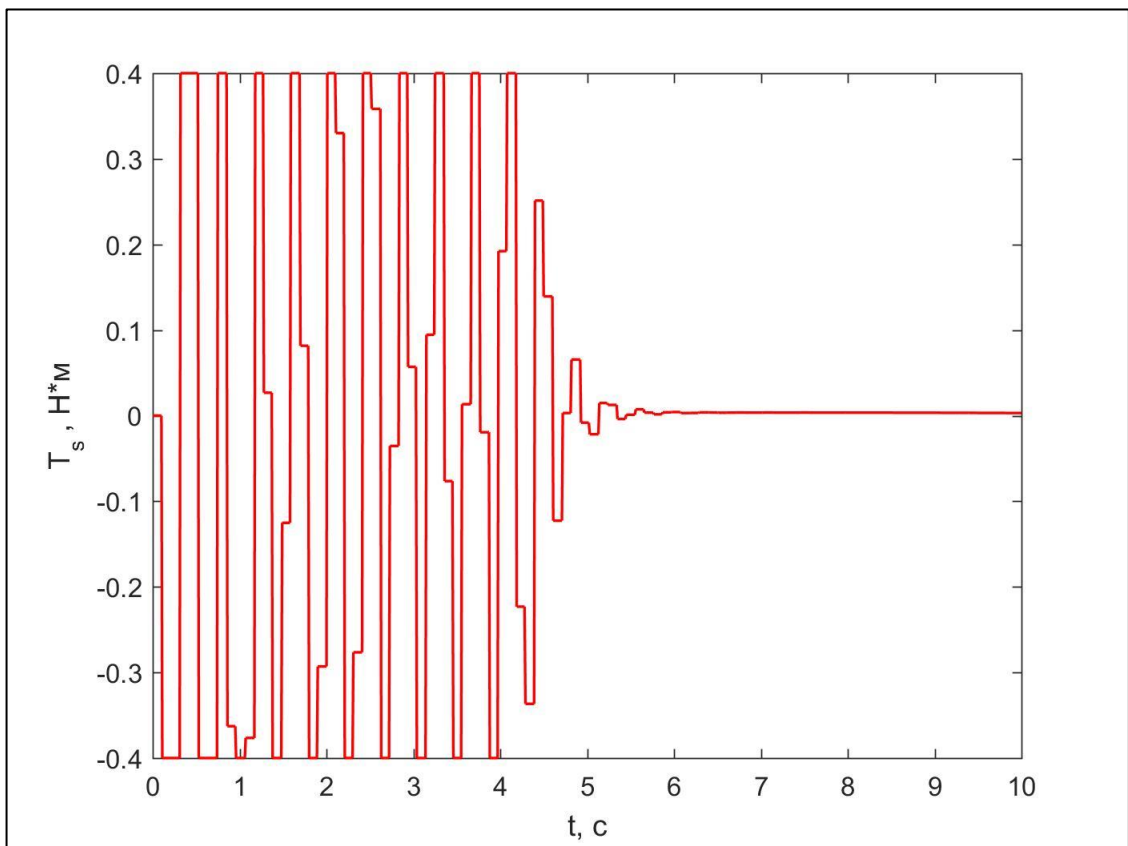
**Рис. 12.** Угловая скорость основного тела макета (LQR)



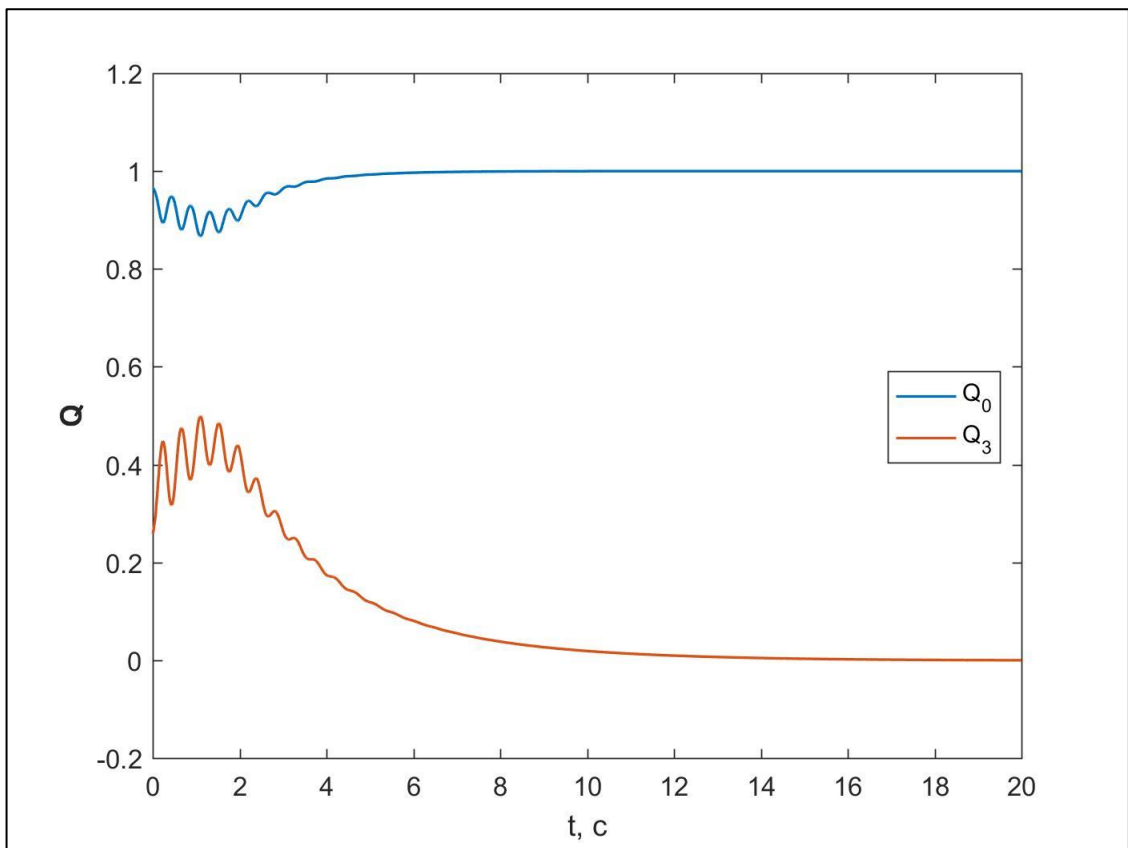
**Рис. 13.** Угловая скорость основного тела макета (MESS)



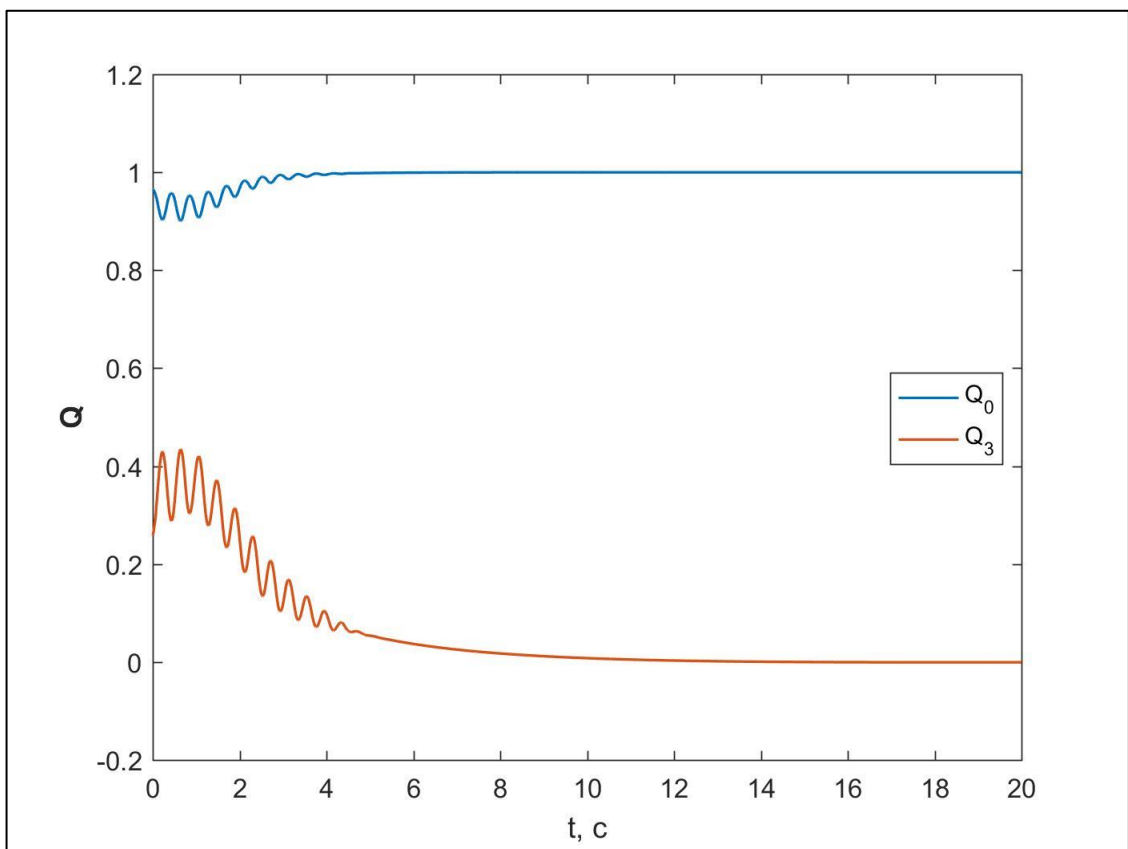
**Рис. 14.** Управление угловой скоростью основного тела макета (LQR)



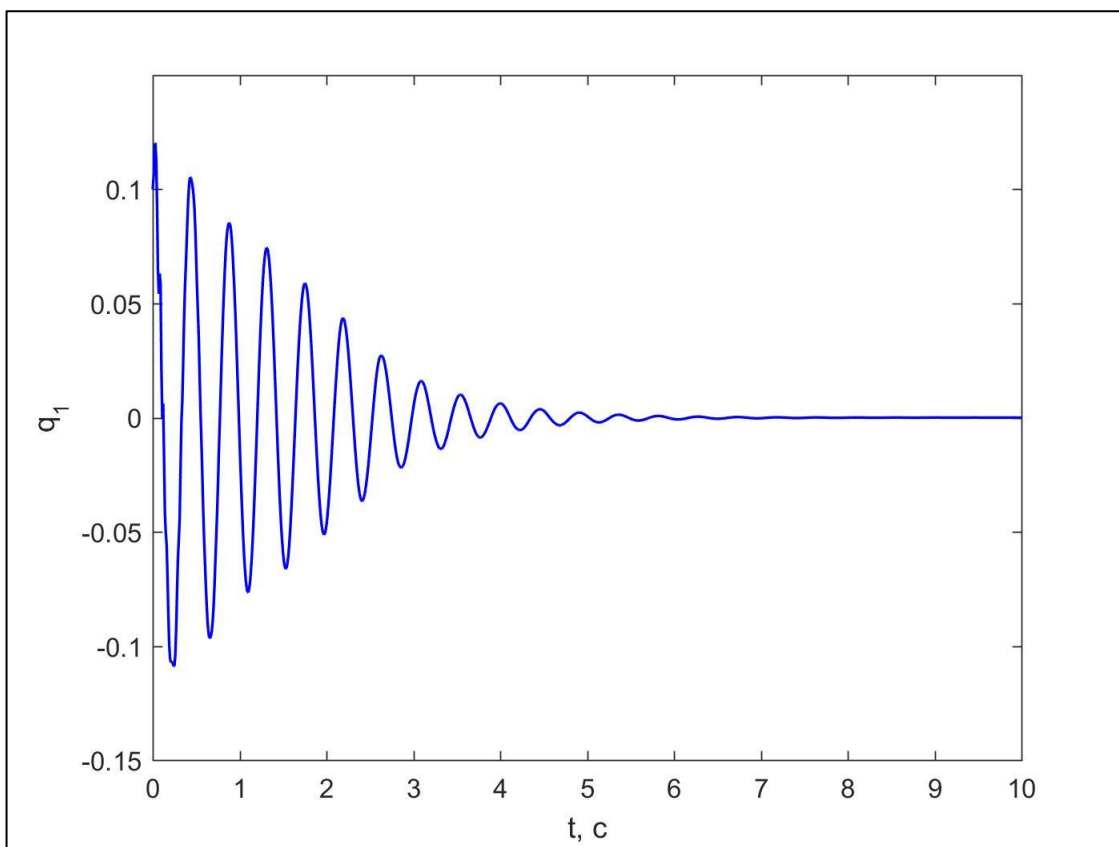
**Рис. 15.** Управление угловой скоростью основного тела макета (MESS)



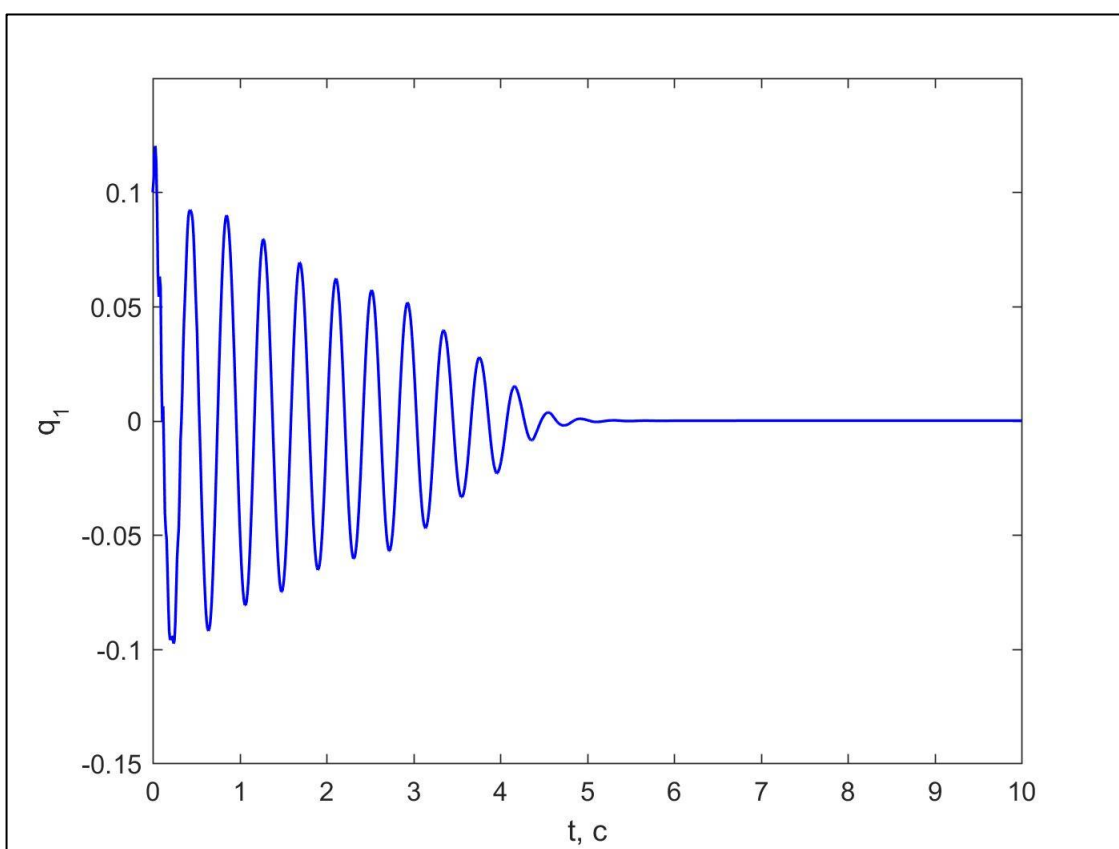
**Рис. 16.** Кватернион ориентации основного тела макета (LQR)



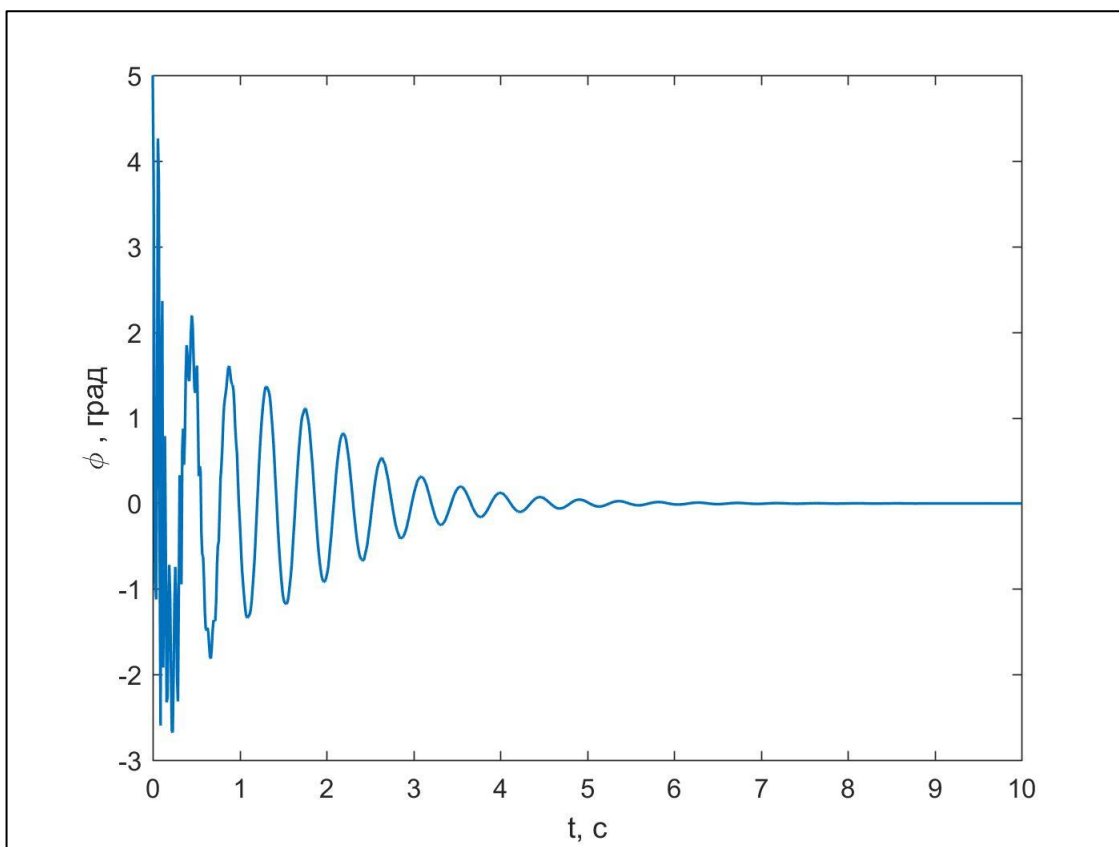
**Рис. 17.** Кватернион ориентации основного тела макета (MESS)



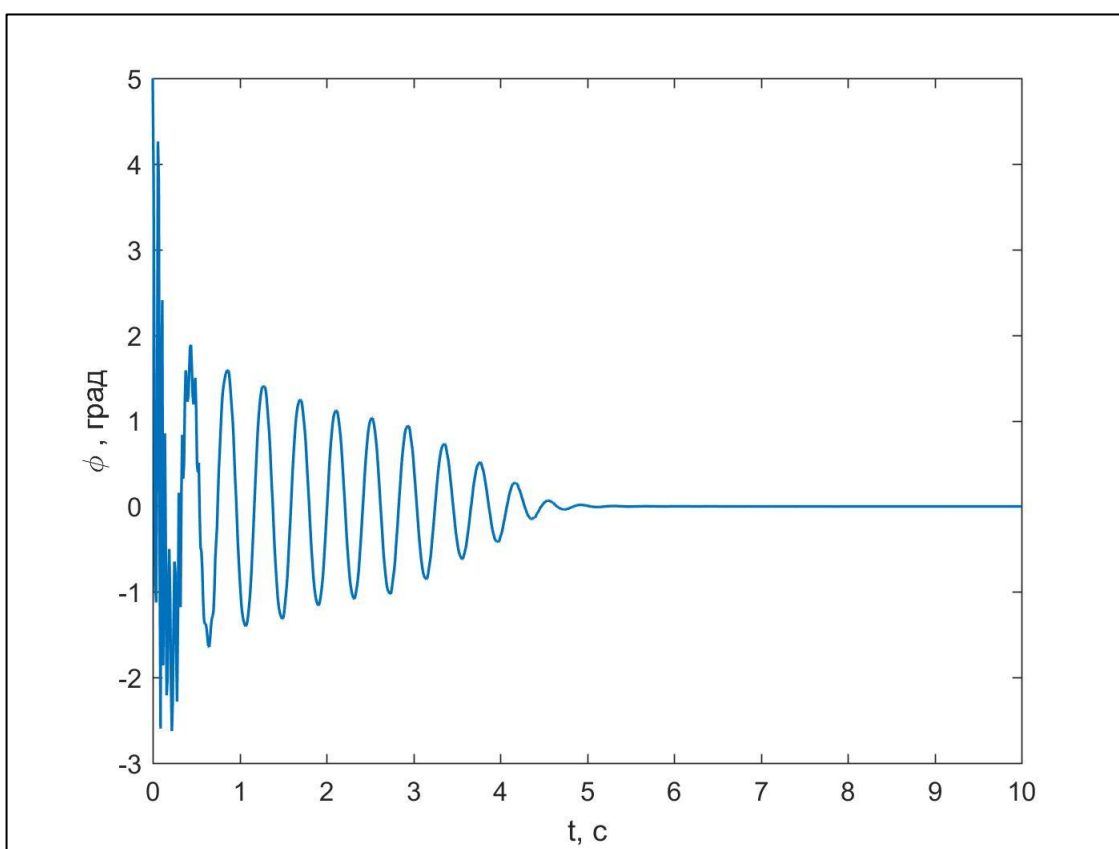
**Рис. 18.** Первая колебательная мода нежесткого элемента (LQR)



**Рис. 19.** Первая колебательная мода нежесткого элемента (MESS)



**Рис. 20.** Угол поворота в шарнире (LQR)



**Рис. 21.** Угол поворота в шарнире (MESS)

## Заключение

В работе описаны некоторые методы гашения вибраций в нежестком элементе. Было построено линейное квадратичное управление, стабилизирующее макет в заданном положении и гасящее вибрации в нежестком элементе его конструкции. Особенностью исследуемой системы являлось наличие в ней шарнира, пагубно влияющего на стабилизируемость системы. Также в процессе стабилизации аппарата не использовались управляющие устройства, расположенные на нежестком элементе макета, а использовались лишь четыре вентилятора, расположенные на его корпусе. В процессе компьютерного моделирования использовались параметры макета со стенда КОСМОС [1], поэтому оба вышеуказанных алгоритма могут быть на нем реализованы. Построен алгоритм, подавляющий возмущения в остаточных модах редуцированной модели системы. Показана его эффективность для исследуемой задачи, и предпочтительность по сравнению со стандартным линейным квадратичным регулированием.

Была проведена SCD параметризация уравнений движения макета, что сделало возможным использование в задаче SDRE подхода. Однако, строго обосновать уместность применения данного подхода пока не удалось.

В дальнейшем планируется:

- исследовать влияние различных способов SCD параметризации и выбора весовых матриц на устойчивость системы в процессе SDRE управления;
- исследовать реакцию системы на предложенные алгоритмы в отсутствие или при наличии малого трения в шарнире;
- исследовать влияние неучитываемых мод на поведение модели. Изучить робастные алгоритмы гашения вибраций в нежестком элементе. Реализовать HA/LA управление макетом;
- исследовать влияние управления колебательными модами с помощью устройств (например, пьезоактюаторов), расположенных на нежестком



эlemente. Для этого необходимо добавить в уравнения движения макета силы и моменты сил, возникающие при воздействии управляющих устройств на нежесткий элемент. Определить оптимальные положения управляющих устройств на стержне;

- верифицировать исследованные методы управления на стенде КОСМОС.

## Список литературы

1. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Стенд КОСМОС для моделирования движения макетов системы управления микроспутников и обзор мировых аналогов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. - 2016. - №138. - 32 с.
2. Joshi S.M. Control techniques of large flexible space structures, Lecture notes in control and information sciences. Springer, Berlin, Vol. 131.1989. P.192
3. Junkins J.L. , Kim Y. Introduction to dynamics and control of flexible structures // Washington DC: AIAA Education Series, AIAA, 1993. P. 452
4. Ткачев С.С., Ролдугин Д.С., Овчинников М.Ю. Уравнения движения спутника с нежесткими элементами конструкции // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. - 2015. - №58. - 20 с.
5. Hyland D.C., Junkins J.L., Longman R.V. Active control technology for large space structures // J. Guid. Control. Dyn. 1993. Vol. 16, № 5. P. 801–821.
6. Nurre G.S., Ryan R.S., Scofield H.N., Sims J.L. Dynamics and control of large space structures // J. Guid. Control. Dyn. 1984. Vol. 7, № 5. P. 514–526.
7. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 616 с.
8. Meirovitch L., Baruh H., Oz H. A comparison of control techniques for large flexible structures // J. Guid. Control. Dyn. 1983. Vol. 6, № 4. P. 302–310
9. Coradetti T. Orthogonal subspace reduction of optimal regulator order // Proceedings of the AIAA Guidance and Control. 1979

10. Balas M.J. Active control of flexible systems // Journal of Optimization Theory and Applications. 1978. Vol. 25, №3. P. 415–436
11. Sesak J.R., Likins P. Modal Error Sensitivity Suppression: Quasi-Static Optimal Control for Flexible Structures // IEEE Conference on Decision and Control. 1979
12. Sesak J.R., Coradetti T. Decentralized control of large space structures via forced singular perturbation // AIAA 17<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting. 1979
13. Auburn J.N., Theory of the Control of Structures by Low Authority Controllers // J. Guid. Control. Dyn. 1980. Vol. 3, № 5. P. 444–451
14. Lyons M.G., Auburn J.N., Margulies G., Gupta N.K., aCOSS Three Phase 1 // Rome Air Development Center, RADC-TR-80-131, Griffits AFB, NY, May 1980.
15. Cimen T. State-Dependent Riccati Equation (SDRE) control: A survey // Proceedings of the 17<sup>th</sup> World Congress. The International Federation of Automatic Control, Seoul, Korea, July 6-11, 2008.
16. Gasbarri P., Monti R., Sabatini M. Very large space structures: Non-linear control and robustness to structural uncertainties // Acta Astronautica, Vol. 93, p. 252-265.