Гашение вибраций в нежестком элементе конструкции макета

А.И.Шестопёров
Научный руководитель
к.ф.-м.н., доц. *С.С.Ткачев*

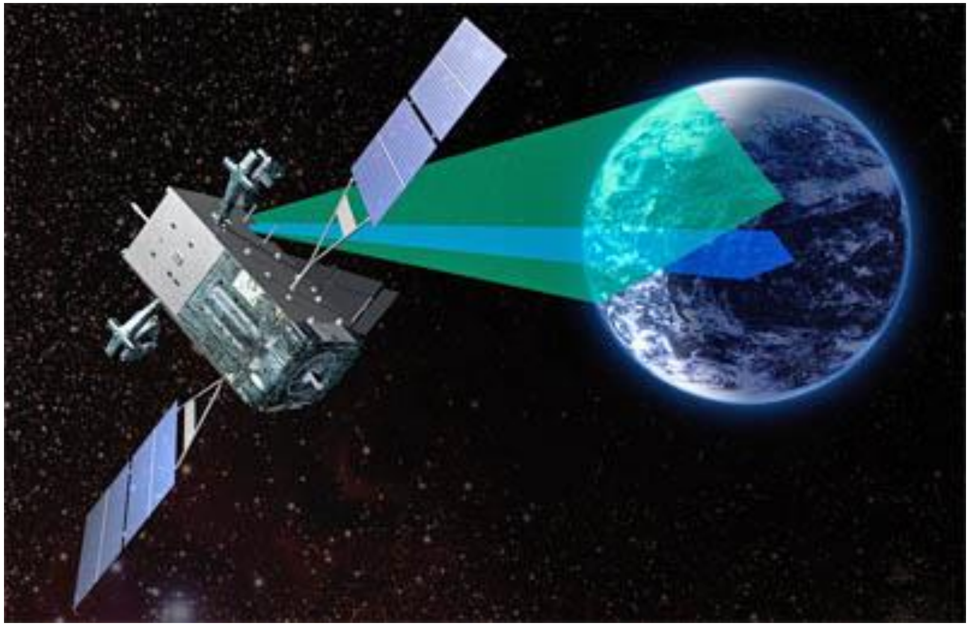
Москва
2017 г.

Содержание

- Постановка задачи и ее актуальность
- Описание вибраций произвольного нежесткого элемента
- Математическая модель макета космического аппарата с крупногабаритным нежестким элементом конструкции (КА с КНЭК)
- Линейный квадратичный регулятор (LQR).
- Редукция модели управления. Предотвращение возмущения неуправляемых учитываемых мод (MESS)
- Построение LQR и MESS алгоритмов управления
- Компьютерное моделирование
- Лабораторные испытания
- Заключение
- План дальнейшей работы

Актуальность задачи

- Крупногабаритные нежесткие элементы конструкции (КНЭК) оказывают значительное влияние на угловое движение КА.
- При описании относительного движения КА с КНЭК важнейшим аспектом является учет и гашение вибраций, возникающих в нежестком элементе во время совершения маневра.
- Чтобы судить об эффективности алгоритмов гашения вибраций в КНЭК спутника необходимо провести их лабораторное тестирование.



Цель работы и постановка задачи

Цель работы: обеспечить математическую базу для проведения лабораторных экспериментов на макете с КНЭК.

- Макет состоит из основного тела, предполагаемого твердым, и нежесткого стержня, прикрепленного к основному телу при помощи одностепенного шарнира
- Рассматривается задача гашения вибраций в нежестком элементе и стабилизации макета, движущегося по столу.
- Управление макетом осуществляется только при помощи четырех вентиляторов, расположенных на основном теле макета.

Системы координат

$OXYZ$ – инерциальная СК;

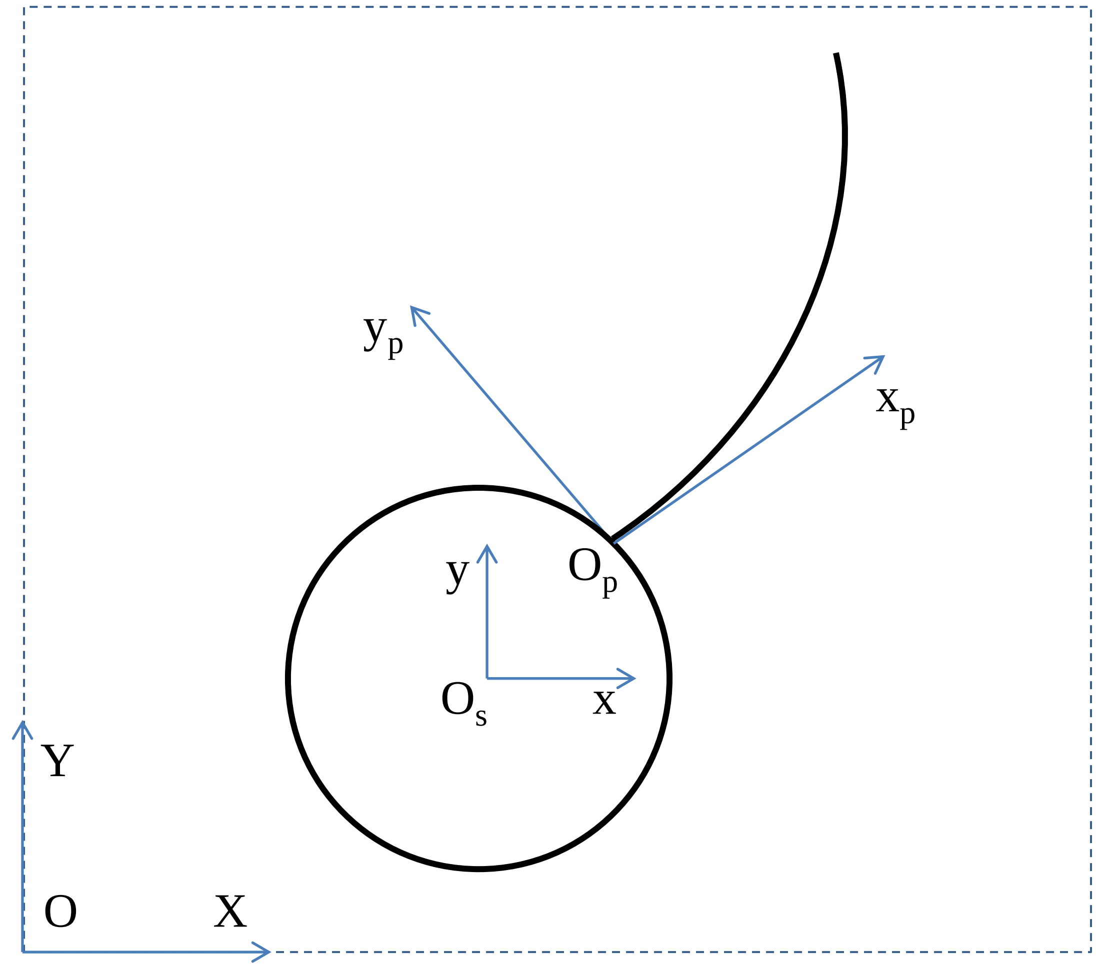
$O_s xyz$ – СК, связанная с корпусом основного тела;

$O_p x_p y_p z_p$ – СК, связанная со стержнем.

Оси $OZ, O_s z, O_p z_p$ $\perp$ плоскости рисунка.

Последовательность переходов между СК:

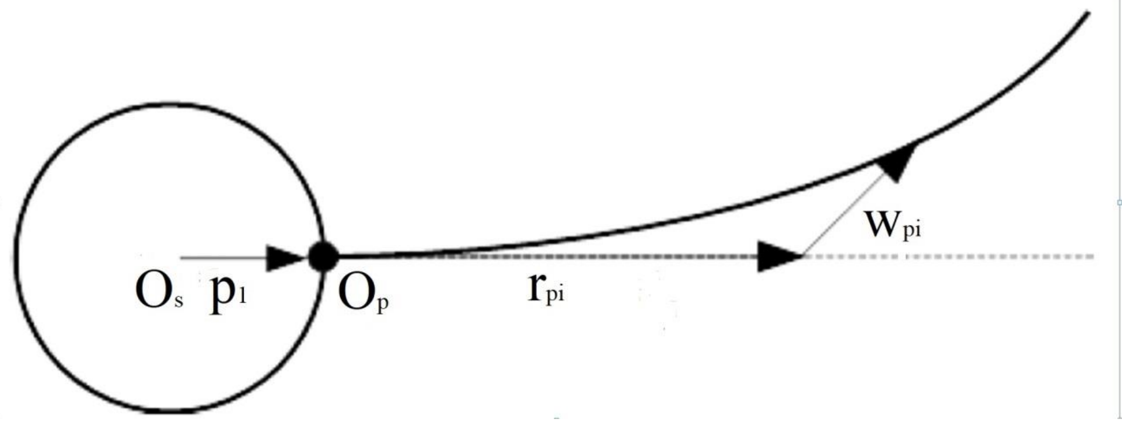
$OXYZ \to O_s xyz \to O_p x_p y_p z_p$.



Уравнения углового движения макета

$$\mathbf{S}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\omega}}\\ \dot{\psi}\\ \ddot{\mathbf{q}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{T}_s-\mathbf{N}_{\omega p}-\mathbf{f}_{\omega p}\\ -\mathbf{e}^T\left(\mathbf{N}_{\varphi p}+\mathbf{f}_{\varphi p}\right)+\mathrm{M}_{p1}\\ -\mathbf{N}_p-\mathbf{f}_p\end{pmatrix}=\mathbf{N}\left(\boldsymbol{\omega},\psi,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right),\text{где}$$

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}\mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega\varphi p}\boldsymbol{e} & \mathbf{S}_{\omega p}\\ \boldsymbol{e}^T\mathbf{S}_{\omega\varphi p}^T & \boldsymbol{e}^T\mathrm{J}_{\varphi p}\boldsymbol{e} & \boldsymbol{e}^T\mathbf{S}_{p\varphi p}\\ \mathbf{S}_{\omega p}^T & \mathbf{S}_{p\varphi p}^T\boldsymbol{e} & \mathbf{M}_p\end{pmatrix},$$



$$\dot{\mathrm{Q}}_3=\frac{1}{2}\mathrm{Q}_0\omega,\;\; \mathrm{Q}_0^2+\mathrm{Q}_3^2=1,\;\; \dot{\varphi}_p=\psi_p,$$

$\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \omega\end{pmatrix}^T$ – угловая скорость твердого тела; φ – угол поворота в шарнире;

$\mathbf{r}_{pi}$ – р.-в. i-ой точки недеформироканного стержня относительно точки крепления;

$\mathbf{w}_{pi}$ – смещение i-ой точки тела, вызванное упругими деформациями;

В случае КА с КНЭК на орбите, уравнения получены в работах Ткачева.

Описание вибраций произвольного нежесткого элемента

$M\left(P\right)\dfrac{\partial^2\mathbf{w}\left(P,t\right)}{\partial t^2}+L\left(P\right)\mathbf{w}\left(P,t\right)=\mathbf{0},\ B_i\mathbf{w}\left(P,t\right)=0\left(i=\overline{1,n}\right)$ – граничные условия

$\mathbf{w}\left(P,t\right)=\sum\limits_{r=1}^{\infty}\boldsymbol{\phi}_r\left(P\right)\mathrm{q}_{\boldsymbol{r}}\left(t\right)$ – метод разделения переменных, где

$\boldsymbol{\phi}_r\left(P\right)$ – форма r-ой собственной моды колебаний,

$\mathrm{q}_{\boldsymbol{r}}\left(t\right)$ – r-ая амплитуда собственной моды колебаний.

$L\left(P\right)\boldsymbol{\phi}_r\left(P\right)=\omega_r^2M\left(P\right)\boldsymbol{\phi}_r\left(P\right),r=\overline{1,\infty}$ – задача на собств. зн., где

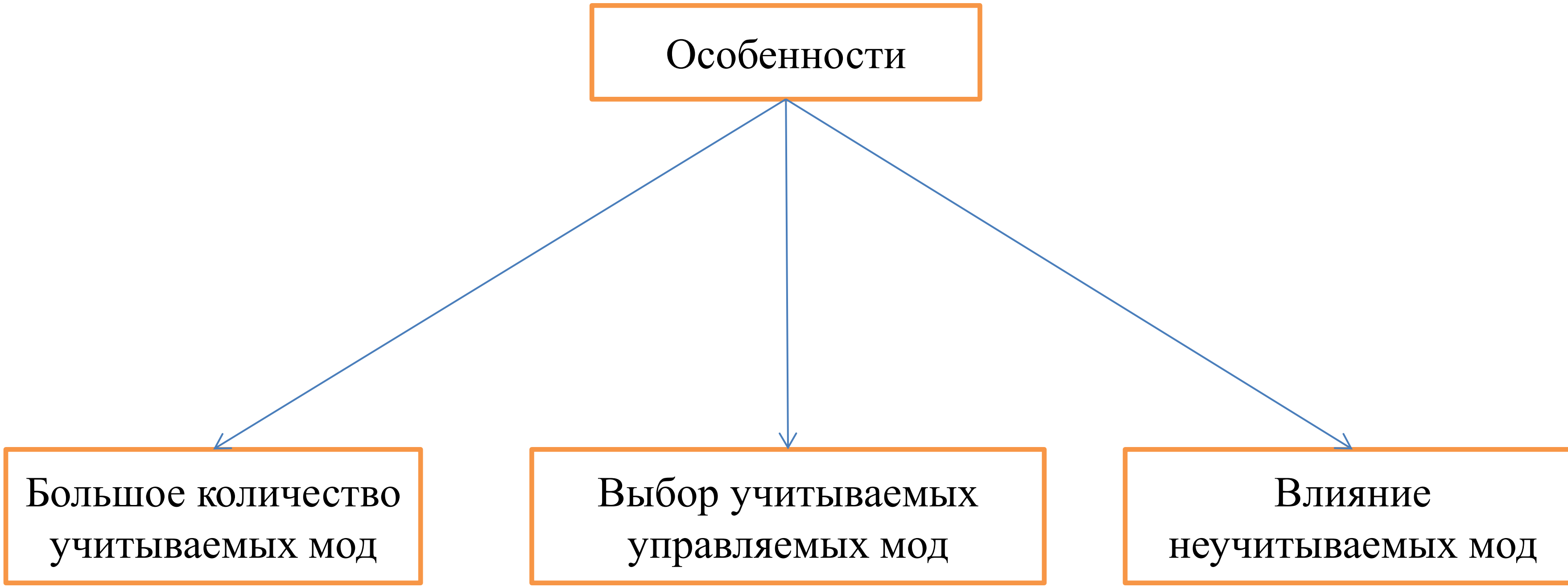
ω_r^2 – r-ая частота колебаний.

$\ddot{\mathrm{q}}_r\left(t\right)+\omega_r^2\mathrm{q}_r\left(t\right)=0,r=\overline{1,\infty}$ – преобразованные уравнения.

В результате моделирования в среде NASTRAN получаем:

$\mathbf{w}_i=\mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i)\mathbf{q}(t)$, где $\mathbf{q}$ – вектор амплитуд $\mathrm{q}_{\boldsymbol{r}}\left(t\right)$ собственных мод колебаний, $\mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i)$ – матрица собственных мод колебаний, задающая численно векторы $\boldsymbol{\phi}_r\left(\mathbf{r}_i\right),r=\overline{1,\mathrm{N}}$ в i – ой точке нежесткого элемента.

Особенности построения управляющих воздействий для КА с КНЭК



Классификация мод колебаний модели (Meirovitch):

- учитываемые управляемые моды
- учитываемые неуправляемые (остаточные) моды
- неучитываемые моды

Линеаризованные уравнения движения макета

Вектор состояния: $\mathbf{x} = \left(\mathrm{R}_{sx} \quad \mathrm{R}_{sy} \quad \mathrm{V}_{sx} \quad \mathrm{V}_{sy} \quad \mathrm{Q}_3 \quad \omega \quad \mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{q}} \quad \varphi \quad \psi \right)^T.$

Вектор управления: $\mathbf{u} = \left(\mathrm{F}_{0x} \quad \mathrm{F}_{0y} \quad \mathrm{T}_{sz} \right)^T$, где

T_{sz} – момент управляющих сил; $\mathrm{F}_{0x}, \mathrm{F}_{0y}$ – управляющие силы.

Заданное положение: $\mathbf{x}_f = \mathbf{0}_{(8+2n)\times 1}$.

Предположения:

1. На макет действуют только управляющие воздействия.
2. Управляющие воздействия действуют только на жесткое тело.

Уравнения движения в пространстве состояний:

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{S}}_{lin}^{-1}\hat{\mathbf{A}}_{lin}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{S}}_{lin}^{-1}\hat{\mathbf{B}}_{lin}\mathbf{u} \triangleq \mathbf{A}_{lin}^{cont}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{lin}^{cont}\mathbf{u}.$$

Линейный квадратичный регулятор (LQR). Постановка задачи и реализация

Пусть $\mathbf{Q} \geq 0, \; \mathbf{R} > 0, \; n = \dim \mathbf{x}.$

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt \to \min,$$

при условии $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{S}}_{lin}^{-1}\hat{\mathbf{A}}_{lin}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{S}}_{lin}^{-1}\hat{\mathbf{B}}_{lin}\mathbf{u} \triangleq \mathbf{A}_{lin}^{cont}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{lin}^{cont}\mathbf{u}.$

Закон управления : $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}.$

Матрица усиления LQR : $\mathbf{K} = -\mathbf{R}_{lin}^{-1}\left(\mathbf{B}_{lin}^{cont}\right)^T \mathbf{P}_{lin}.$

Уравнения Риккати: $\mathbf{0} = \left(\mathbf{A}_{lin}^{cont}\right)^T \mathbf{P}_{lin} + \mathbf{P}_{lin}\mathbf{A}_{lin}^{cont} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}_{lin}\mathbf{B}_{lin}^{cont}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{B}_{lin}^{cont}\right)^T \mathbf{P}_{lin}.$

Редукция модели управления. Предотвращение возмущения неуправляемых учитываемых мод

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \to \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{B}_r \end{bmatrix} \mathbf{u},$$

$\mathbf{x}_c = \begin{pmatrix} \mathrm{R}_{sx} & \mathrm{R}_{sy} & \mathrm{V}_{sx} & \mathrm{V}_{sy} & \mathrm{Q}_3 & \omega \end{pmatrix}^T$ – вектор управляемых состояний.

$\mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{q} & \dot{\mathbf{q}} & \varphi & \psi \end{pmatrix}^T$ – вектор остаточных состояний.

Требуется : $J_{cont} = \int_0^\infty \left[\mathbf{x}_c^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} \right] dt \to \min$ при условии $\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{u}$.

Используя управление с обратной связью $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_c \mathbf{x}_c$, получаем :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_c \mathbf{K}_c & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_r \mathbf{K}_c & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix}.$$

Если $\mathbf{B}_r \mathbf{K}_c \neq 0 \left(\mathbf{B}_r \mathbf{u} \neq 0 \right)$ – возмущаются остаточные моды.

Необходимо добиться $\mathbf{B}_r \mathbf{K}_c \to 0$.

Концепция изложена в работах *Balas M.J*.

Model Error Sensitivity suppression (MESS)

Основа концепции: прямое расширение функционала, за счет члена $\mathbf{B}_r\mathbf{u}$.

Строим управление так, что:

$$0 \equiv \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_c + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{x}_r = -\mathbf{A}_{22}^{-1}\left(\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_r\mathbf{u}\right) \triangleq -\mathbf{A}_x\mathbf{x}_c - \mathbf{A}_u\mathbf{u}.$$

$$J_{red} = \int_0^\infty \left(\mathbf{x}_c^T\left(\mathbf{Q}_c + \mathbf{A}_x^T\mathbf{Q}_r\mathbf{A}_x\right)\mathbf{x}_c + 2\mathbf{x}_c^T\mathbf{A}_x^T\mathbf{Q}_r\mathbf{A}_u\mathbf{u} + \mathbf{u}^T\left(\mathbf{R} + \mathbf{A}_u^T\mathbf{Q}_r\mathbf{A}_u\right)\mathbf{u}\right)dt \to \min,$$

при условии $\dot{\mathbf{x}}_c = \left(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\right)\mathbf{x}_c + \left(\mathbf{B}_c - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_r\right)\mathbf{u}$,

где $\mathbf{Q}_c, \mathbf{R}_c, \mathbf{Q}_s$ – задаем сами.

Закон управления: $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{B}_{red}^T\mathbf{P}_{red} + \mathbf{N}_{red}^T\right)\mathbf{x}$,

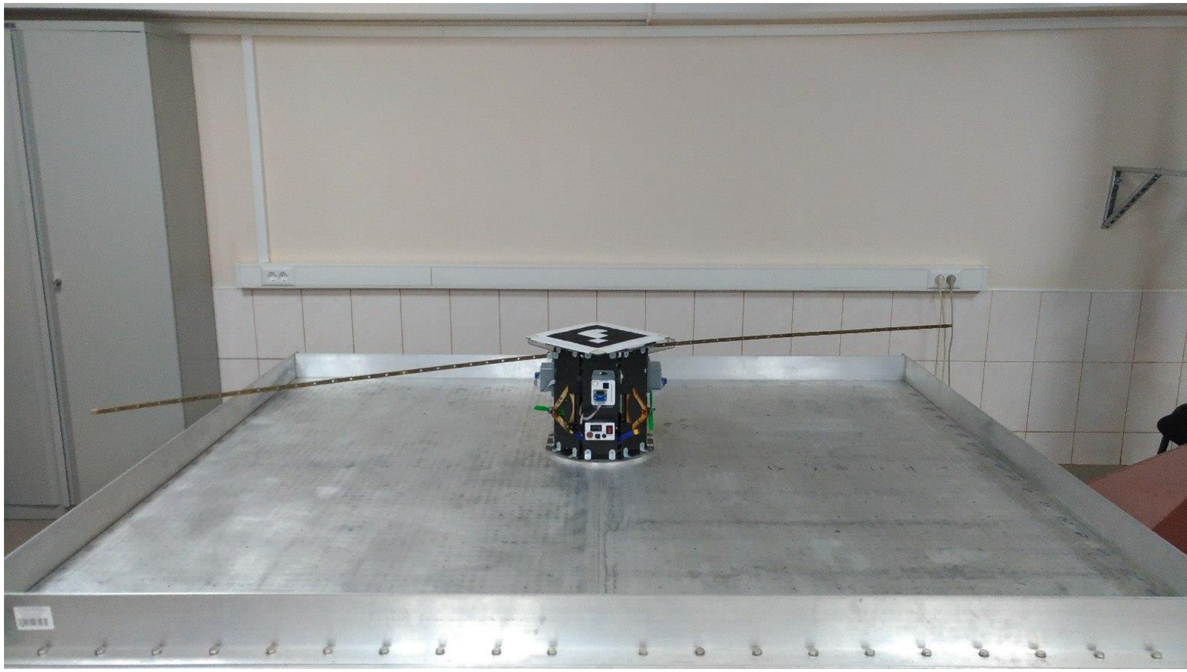
где $\mathbf{P}_{red}$ находится из обобщ. уравнения Риккати:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_{red}^T\mathbf{P}_{red} + \mathbf{P}_{red}\mathbf{A}_{red} + \mathbf{Q} - \left(\mathbf{P}_{red}\mathbf{B}_{red} + \mathbf{N}_{red}\right)\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{B}_{red}^T\mathbf{P}_{red} + \mathbf{N}_{red}^T\right).$$

Метод изложен в работах *Sesak J.R.*

Компьютерное моделирование. Параметры макета

- длина корпуса 0.15м;
- ширина корпуса 0.15м;
- высота корпуса 0.5 м;
- длина стержня 1.08 м;
- $J_{sz} = 0.1125 \text{кг}/\text{м}^2$;
- максимальный момент, $0.4\ \text{Н} \cdot \text{м}$;
- максимальная сила, 4 Н.



Компьютерное моделирование. Начальные условия

Положение центра масс основного тела макета на столе: $\mathrm{R}_{sx} = 0.5\text{м}$, $\mathrm{R}_{sy} = 0.4\text{м}$.

Скорости центра масс основного тела макета : $\mathrm{V}_{sx} = 0.1\,{}^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$, $\mathrm{V}_{sy} = 0.2\,{}^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$.

Начальная ориентация основного тела макета : $\alpha = 30\text{град}$.

Угловая скорость центра масс основного тела макета : $\omega = 5\,{}^{\text{град}}\!/_{\text{с}}$.

Угол и угловая скорость поворота в шарнире: $\varphi = 5\text{град}$, $\psi = 10\,{}^{\text{град}}\!/_{\text{с}}$.

Амплитуда и скорость первой колебательной моды стержня: $\mathrm{q}_1 = 0.1$, $\dot{\mathrm{q}}_1 = 0\ {}^{1}\!/_{\text{с}}$.

Шаг интегрирования $= 0.01$ с.

Шаг управления $= 0.1$ с.

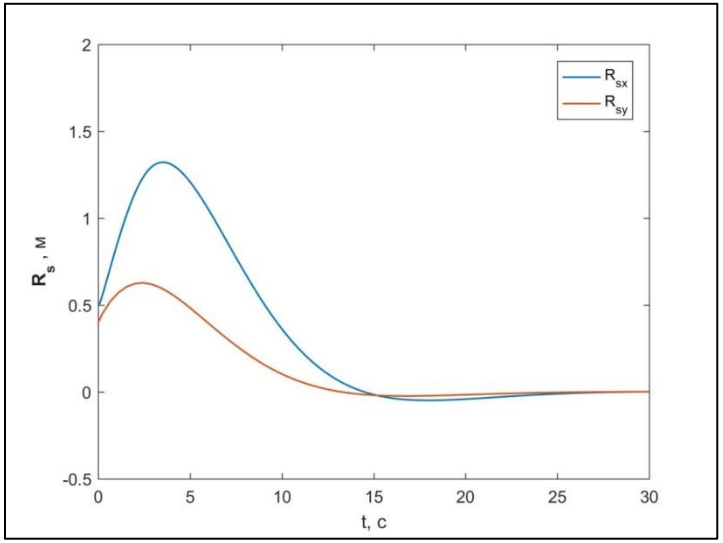
Количество мод $= 1$.

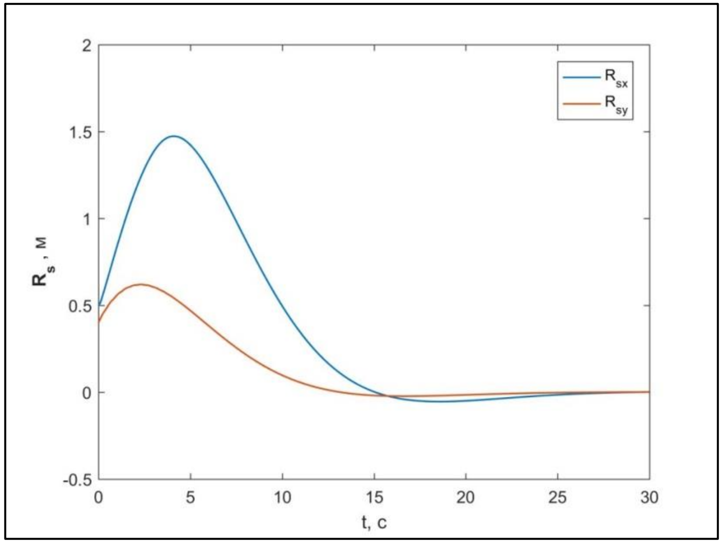
Требуемое конечное положение : $\mathbf{x}_{eq} = \mathbf{0}_{10\times 1}$.

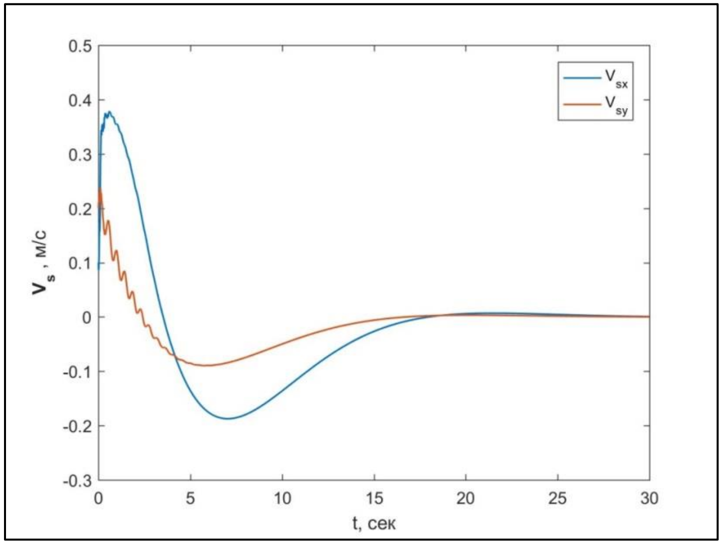
Компьютерное моделирование
Положение и скорость центра масс основного тела макета

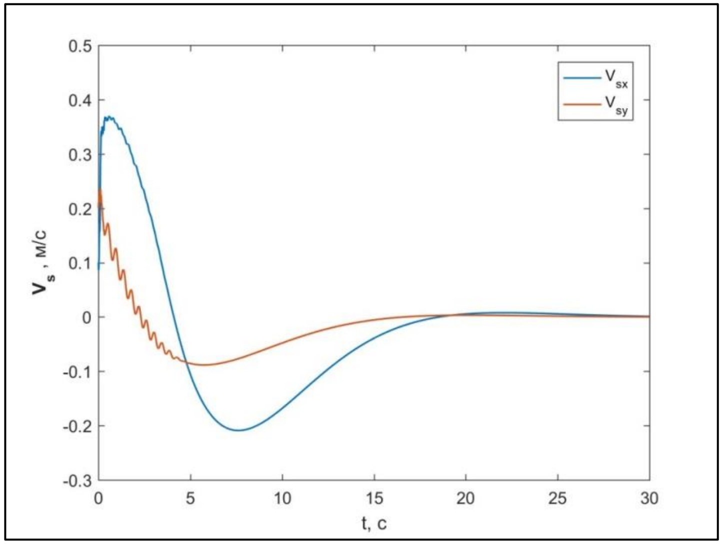
LQR

MESS





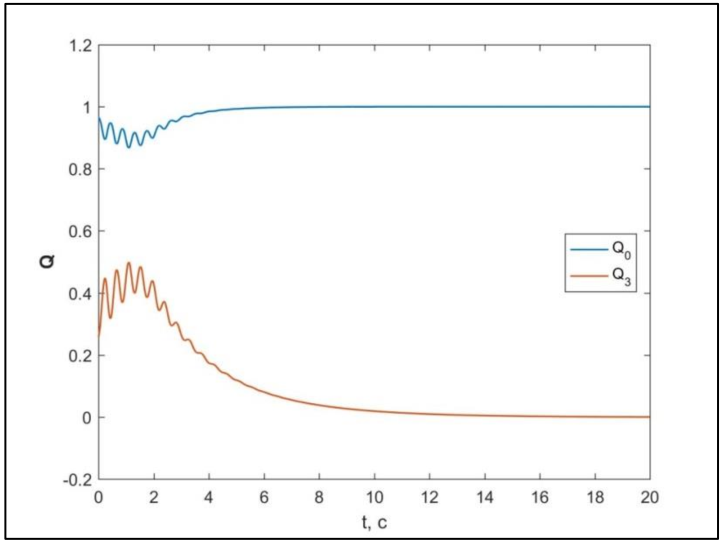


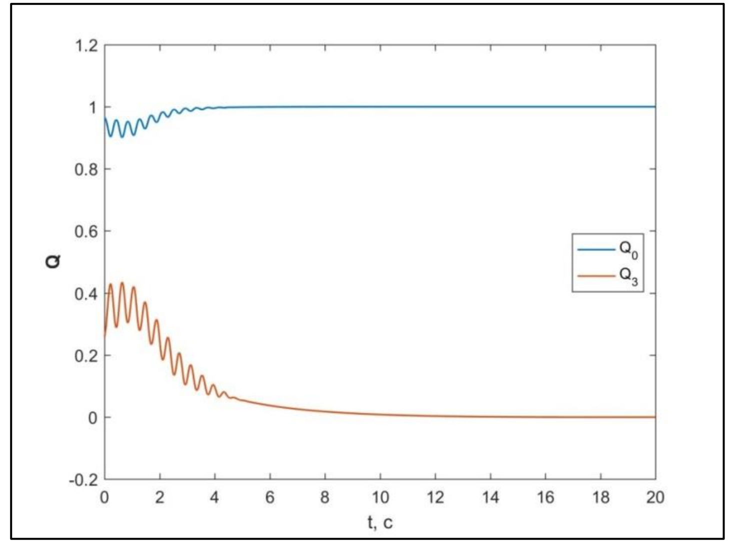


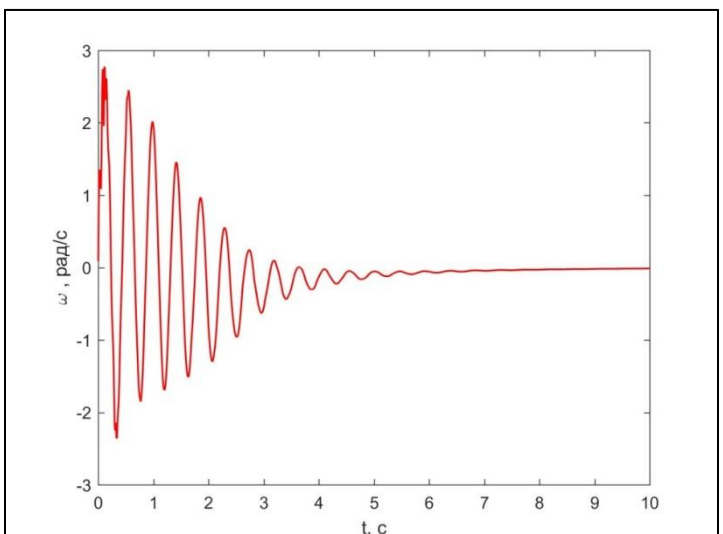
Компьютерное моделирование
Кватернион ориентации и угловая скорость основного тела макета

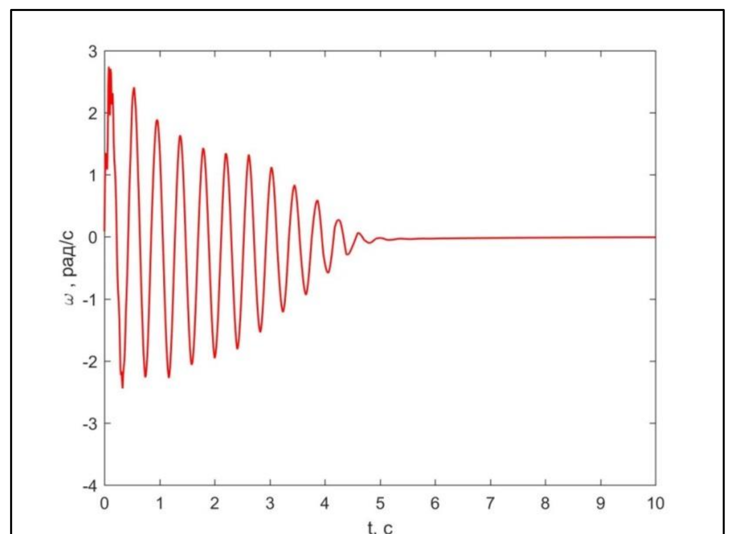
LQR

MESS





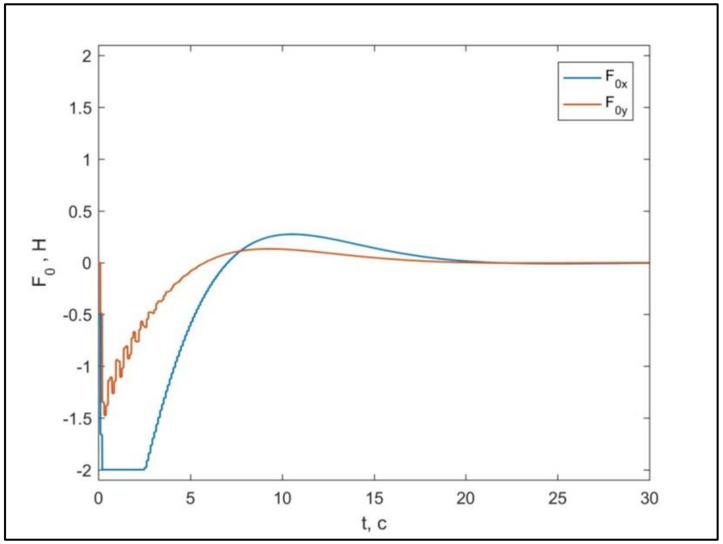


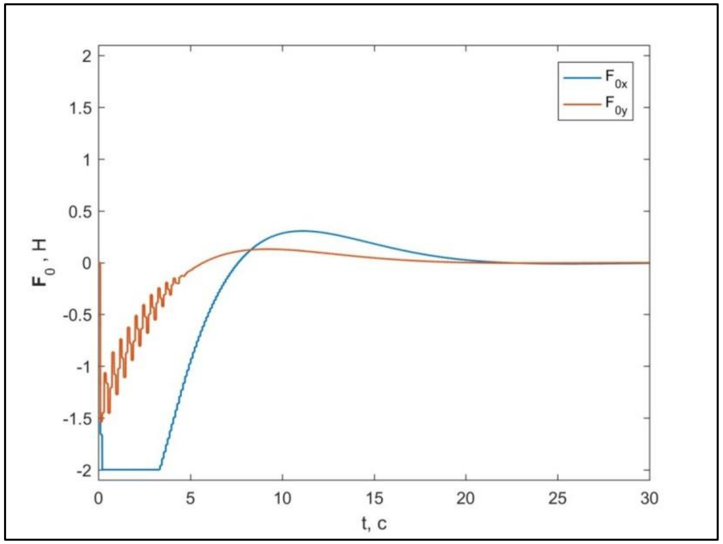


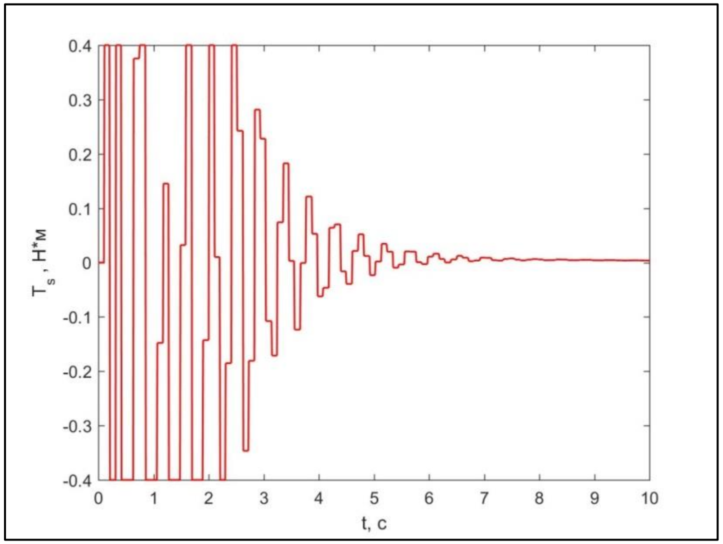
Компьютерное моделирование
Управление центром масс и угловой скоростью основного тела макета

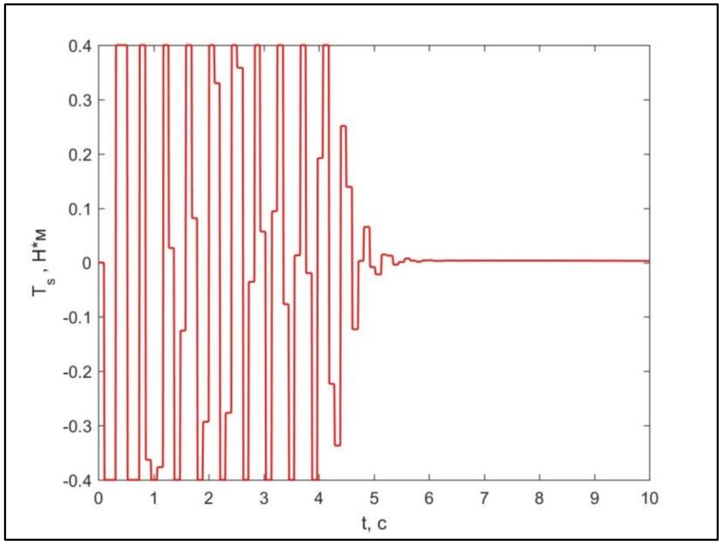
LQR

MESS



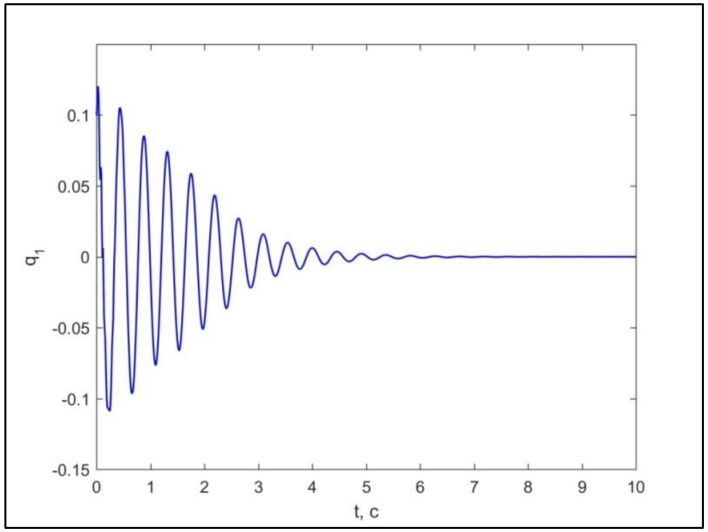




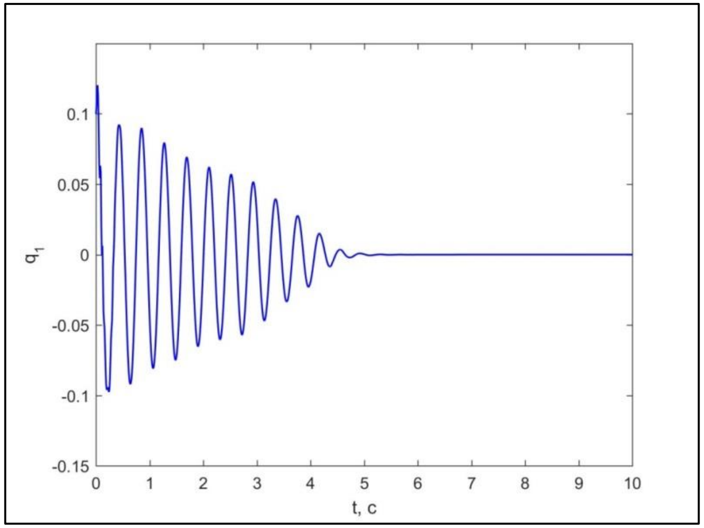


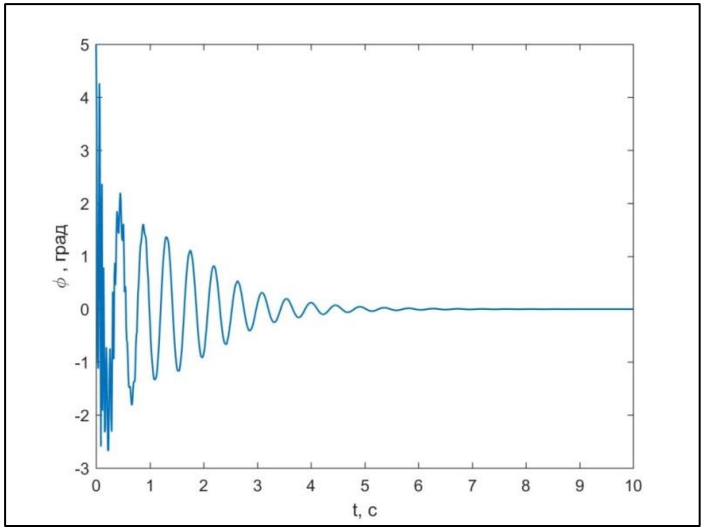
Компьютерное моделирование
Первая колебательная мода нежесткого элемента

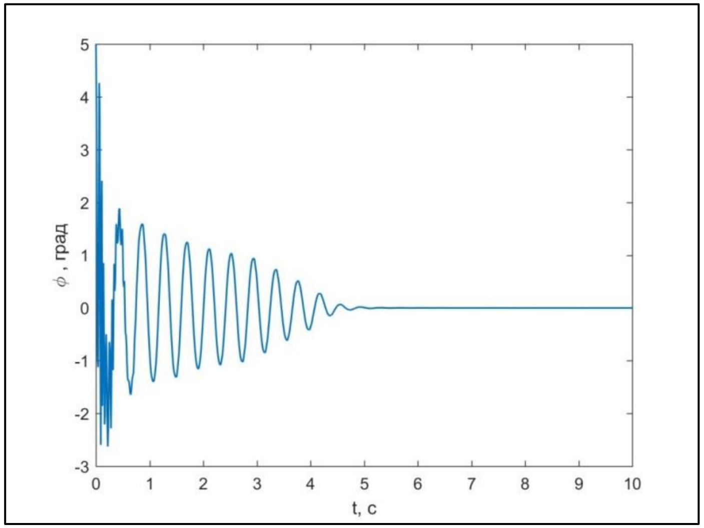
LQR



MESS







Заключение

- Построено линейное квадратичное управление (LQR), стабилизирующее макет в заданном положении и гасящее вибрации в нежестком элементе его конструкции, при помощи четырех вентиляторов.
- Реализован алгоритм (MESS), подавляющий возмущения в остаточных модах редуцированной модели системы, и продемонстрирована его эффективность для данной задачи, и препочтительность по сравнению с LQR-алгоритмом.
- Проведено компьютерное моделирование с параметрами макета со стенда КОСМОС.
- Проведен анализ возможности реализации алгоритмов LQR и MESS на стенде КОСМОС.

План дальнейшей работы

- Исследовать влияние управления колебательными модами с помощью устройств (например, пьезоактюаторов), расположенных на нежестком элементе. Определить их оптимальные положения на нежестком элементе.
- Исследовать влияние различных способов SCD параметризации и выбора весовых матриц на устойчивость системы в процессе SDRE управления.
- Исследовать влияние неучитываемых мод на поведение модели.
- Изучить робастные алгоритмы гашения вибраций в нежестком элементе. Реализовать HA/LA управление макетом.
- Верифицировать исследованные методы управления на стенде КОСМОС.

Достижения

Участие в грантах:

- 17-01-00449 А – Исследование орбитального и углового движения многоэлементных спутниковых систем
- 16-01-00634 А – Моделирование и управление движением упругих протяженных космических конструкций

Готовящиеся препринты:

- Управление тремя спутниками в групповом полете при помощи электростатических сил
- Стабилизация макета с нежестким элементом конструкции

Работы:

- Д.С. Иванов, Р.В. Досаев, С.А. Шестаков, А.И. Шестоперов, М.С. Кушнирук Управление групповым полетом спутников без затрат топлива. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20 – 24 августа 2015 года. С. 1555-1558.

Участие в конференциях:

- Научная конференция МФТИ 56,57,58

Спасибо за внимание!

Примечание. Получение собственных мод колебаний для нежесткого стержня с незакрепленными концами

$$EI\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 - \text{уравнение смещения точек стержня длины } L.$$

$E, I, \rho, A -$ константы

$y(x,t)=w(x)u(t) -$ метод разделения переменных

$$EI\,\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4}u(t)+\rho A\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}w(x)=0$$

$$\frac{EI}{\rho A}\frac{1}{w(x)}\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4}=\frac{1}{u(t)}\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}=-\omega^2$$

$$\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4}+\omega^2\frac{\rho A}{EI}w(x)\triangleq\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4}+k^4 w(x)=0 - \text{характеристическое уравнение}$$

Пространственная часть смещения (собственные моды колебаний)

ищется в виде:

$$w(x)=C_1\sin kx+C_2\cos kx+C_1\sinh kx+C_2\cosh kx$$

Примечание. Получение собственных мод колебаний для нежесткого стержня с незакрепленными концами

Граничные условия:

$$\begin{cases} w''(0)=0 \\ w'''(0)=0 \\ w''(L)=0 \\ w'''(L)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_2+C_4=0 \\ -C_1+C_3=0 \\ -C_1\sin kL - C_2\cos kL + C_1\sinh kL + C_2\cosh kL = 0 \\ -C_1\sin kL + C_2\cos kL + C_1\sinh kL + C_2\cosh kL = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sinh kL - \sin kL & \cosh kL - \cos kL \\ \cosh kL - \cos kL & \sinh kL + \sin kL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \sinh kL - \sin kL & \cosh kL - \cos kL \\ \cosh kL - \cos kL & \sinh kL + \sin kL \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (*) \cosh kL \cos kL = 1$$

Трансцендентное уравнение $(*)$ имеет бесконечное число решений.

Формы собственных мод колебаний имеют вид:

$$w_n(x) = (\sinh k_n x + \sin k_n x) + \frac{\sin k_n L - \sinh k_n L}{\cosh k_n L - \cos k_n L}(\cosh k_n x + \cos k_n x),\ n = \overline{1,\infty}.$$

Примечание. Линеаризованные уравнения движения макета

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{S}}_{lin}^{-1}\hat{\mathbf{A}}_{lin}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{S}}_{lin}^{-1}\hat{\mathbf{B}}_{lin}\mathbf{u} \triangleq \mathbf{A}_{lin}^{cont}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{lin}^{cont}\mathbf{u}.$$

$$\mathbf{f}_{0\omega p} = \mathbf{p} \times \frac{m_p}{m}\mathbf{F}_O,\ \ \mathbf{f}_{0\varphi p} = \mathbf{p}_2 \times \frac{m_p}{m}\mathbf{F}_O,\ \mathbf{f}_{0p} = \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^T\left(\frac{\mathbf{F}_O}{m} - \frac{\mathbf{L}_{pi}}{m_{pi}}\right).$$

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_p + m_p\mathbf{K}\left(\mathbf{p},\mathbf{p}_1\right) + m_p\mathbf{K}\left(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\right) - \frac{m_p^2}{m}K\left(\mathbf{p},\mathbf{p}\right), \text{ где } \mathbf{J}_p = \sum_i m_{pi}\mathbf{K}(\mathbf{r}_{pi},\mathbf{r}_{pi}),$$

$$\mathbf{J}_{0\varphi p} = \mathbf{J}_p - \frac{m_p^2}{m}\mathbf{K}\left(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2\right), \mathbf{M}_p = \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^T\mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m}\mathbf{A}_p^T\mathbf{A}_p, \text{ где } \mathbf{A}_p = \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi},$$

$$\mathbf{S}_{0\omega\varphi p} = \mathbf{J}_p + m_p\mathbf{K}\left(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\right) - \frac{m_p^2}{m}\mathbf{K}\left(\mathbf{p},\mathbf{p}_2\right), \mathbf{S}_{0\omega p} = \sum_i m_{pi}\left(\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi}\right)\times\mathbf{A}_{pi} - \frac{m_p}{m}\mathbf{p}\times\mathbf{A}_p,$$

$$\mathbf{S}_{0p\varphi p} = \sum_i m_{pi}\mathbf{r}_{pi}\times\mathbf{A}_{pi} - \frac{m_p}{m}\mathbf{p}_2\times\mathbf{A}_p.$$

Примечание. Линеаризованные уравнения движения. Матрица при старших производных

$$\hat{\mathbf{S}}_{lin} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{E}_{2\times2} & \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{0}_{2\times(4+2n)} \\ \hline \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{E}_{2\times2} & \mathbf{D}_{lin} \\ \hline \mathbf{0}_{(4+2n)\times2} & \mathbf{0}_{(4+2n)\times2} & \mathbf{S}_{lin} \end{array}\right),$$

$$\mathbf{D}_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{m_p}{m}\mathrm{p}_y & \mathbf{0}_{1\times n} & \dfrac{1}{m}\sum\limits_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^x & 0 & -\dfrac{m_p}{m}\mathrm{p}_{2y} \\ 0 & \dfrac{m_p}{m}\mathrm{p}_x & \mathbf{0}_{1\times n} & \dfrac{1}{m}\sum\limits_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^y & 0 & \dfrac{m_p}{m}\mathrm{p}_{2x} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{lin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}_{1\times n} & \mathbf{0}_{1\times n} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_{p1}^T\mathbf{J}_0\mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{1\times n} & \mathbf{e}_{p1}^T\mathbf{S}_{0\omega p} & 0 & \mathbf{e}_{p1}^T\mathbf{S}_{0\omega\varphi p}\mathbf{e}_{p1} \\ \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{E}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{0}_{n\times1} \\ \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{S}_{0\omega p}^T\mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{M}_p & \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{S}_{0p\varphi p}^T\mathbf{e}_{p1} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times n} & \mathbf{0}_{1\times n} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_{p1}^T\mathbf{S}_{0\omega\varphi p}\mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{1\times n} & \mathbf{e}_{p1}^T\mathbf{S}_{0p\varphi p} & 0 & \mathbf{e}_{p1}^T\mathbf{J}_{0\varphi p}\mathbf{e}_{p1} \end{pmatrix},$$

Примечание. Линеаризованные уравнения движения. Матрицы состояния и управления

$$\hat{\mathbf{A}}_{lin} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{E}_{2\times2} & \mathbf{0}_{2\times(4+2n)} \\ \hline \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{0}_{2\times(4+2n)} \\ \hline \mathbf{0}_{(4+2n)\times2} & \mathbf{0}_{(4+2n)\times2} & \mathbf{A}_{lin} \end{array}\right), \quad \mathbf{A}_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \mathbf{0}_{1\times n} & \mathbf{0}_{1\times n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times n} & \mathbf{0}_{1\times n} & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{E}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{0}_{n\times1} \\ \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{0}_{n\times1} & -\mathbf{\Omega} & \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{0}_{n\times1} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times n} & \mathbf{0}_{1\times n} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times n} & \mathbf{0}_{1\times n} & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{lin} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{0}_{2\times(1+n)} \\ \hline \dfrac{1}{m}\mathbf{E}_{2\times2} & \mathbf{0}_{2\times(1+n)} \\ \hline -\mathbf{D}_{lin}^{T} & \mathbf{B} \end{array}\right), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1\times n} \\ 1 & \mathbf{0}_{1\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{0}_{n\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times1} & \mathbf{E}_{n\times n} \\ 0 & \mathbf{0}_{1\times n} \\ 0 & \mathbf{0}_{1\times n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = diag(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \ldots)$$