

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ

Кафедра математического моделирования и прикладной
математики

профиль подготовки «Математическое моделирование,
вычислительная математика и физика» Квалификационная работа на
соискание степени бакалавра
по направлению 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
профиль подготовки «Математическое моделирование,
вычислительная математика и физика»

Сравнение методов управления ориентацией космических аппаратов

Выполнила:

студентка группы Б05-871

Шигаева Маргарита

Игоревна

Научный

руководитель:к.ф.-

м.н., доцент

Ткачев Степан Сергеевич

Москва, 2022

Аннотация

Работа посвящена исследованию трех методов управления КА. В работе выполнено моделирование ляпуновского, скользящего и управления с прогнозирующими моделями и сравнение этих методов. Каждый из исследуемых методов имеет свои плюсы и минусы. Наиболее быстро работающим методом является скользящее управление, однако оно не показало высокой эффективности управления, с другой стороны, управление с прогнозирующими моделями является наиболее эффективным в терминах числа итераций для требуемой точности, но и время работы алгоритма оказалось самым долгим. Ляпуновское управление оказалось наиболее оптимальным для решения задач данной работы, позволяющее добиваться высокой точности при скорости работы сравнимой со скользящим управлением. Также стоит отметить, что все методы устойчивы к случайным внешним моментам, действующим на КА.

Оглавление

Обозначения и сокращения	4
Введение	5
1. Постановка задачи	6
2. Описание движения КА	7
2.1. Системы координат	7
2.2. Уравнения движения КА	7
3. Законы управления	9
3.1. Ляпуновское управление.	9
3.2. Скользящее управление	10
3.3. Управление с прогнозирующей моделью.	12
4. Моделирование и сравнение	15
4.1 Ляпуновское управление.	16
4.2. Скользящее управление	18
4.1. Управление с прогнозирующей моделью.	20
5. Анализ результатов моделирования	23
5.1 Эффективность управления.	23
5.2. Скорость генерации управляющего момента.	25
6. Влияние шумов на управление	28
6.1 Ляпуновское управление.	28
6.2. Скользящее управление	30
6.3. Управление с прогнозирующей моделью.	32
Заключение	35
Список использованных источников	36

Обозначения и сокращения

НИР	Научно-исследовательская работа
КА	Космический аппарат
$[\mathbf{a}]_x = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$	Кососимметричная матрица, такая что $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_x \mathbf{b}$
J	Тензор инерции КА
V	Функция Ляпунова
$\boldsymbol{\omega}$	Вектор угловой скорости, записанный в ССК
q_0	Скалярная часть кватерниона
\mathbf{q}	Векторная часть кватерниона
$Q = \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$	Кватернион
I_n	Единичная матрица размера $n \times n$
μ	Гравитационный параметр Земли, равен $398600 \text{ км}^3 \text{ с}^{-2}$
R	Радиус вектор из центра Земли до центра спутника в ССК
\dot{a}	Производная по времени
r	Радиус вектор из центра Земли до центра спутника в ИСК
0_n	Нулевая матрица размера $n \times n$

Введение

В последние десятилетия проблема освоения космического пространства стоит особенно остро, космические аппараты используются в картографии, разведке, сельском хозяйстве и во многих других областях нашей жизни. Кроме того, космические аппараты применяются и в научных целях, они помогают предсказывать погоду, исследовать объекты солнечной системы и далекого космоса. Именно поэтому, очень важно правильно осуществлять управление космическим аппаратом, особенно в условиях, когда управление космическим аппаратом ограничено физическими причинами, причем делать это точно, быстро и минимизируя энергетические затраты.

Существует достаточное количество статей, содержащих подробный обзор методов управления КА, например [2] и [3]. В статье [4] рассматривается адаптивное скользящее управление, реализованное с использованием дуальных кватернионов. В статье [2], помимо скользящего управления, рассматривается сглаживающее скользящее управление КА. В статье [3] имеется обзор управление с прогнозирующими моделями (УПМ) с фиксированным и оптимальным шагом по времени при аппроксимации вектора состояния. Для исследования в работе были выбраны следующие методы управления: Ляпуновское, Скользящее [2] и УПМ [3].

Целью дипломной работы является: Моделирование движения КА под действием гравитационного момента, моделирование управления, сравнение методов управления в точности, быстродействии и устойчивости к возмущениям.

1. Постановка задачи

Решаем задачу управления КА, движущегося в поле гравитирующего тела. Задачей управления является генерация управляющих моментов, под действием которых КА будем иметь целевые ориентацию и угловую скорость. В данной научно-исследовательской работе гравитирующим телом будем Земля.

Чтобы достичь поставленной цели, необходимо решить следующие задачи:

1. Моделирование полета КА, под действием различных внешних моментов
2. Реализовать методы генерации управляющих моментов (ляпуновское управление, скользящее управление, УПМ)
3. Оценить и сравнить быстродействие каждого из методов
4. Сравнить устойчивость методов к случайным шумам, на входе регулятора
5. Оценить и сравнить скорость сходимости реального движения аппарата к целевому

2. Описание движения КА

2.1. Системы координат

Для описания движения космического аппарата удобно ввести следующие системы координат:

– $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ — инерциальная система координат (ИСК), начало расположено в центре Земли, $O_a Y_2$ — орт, направленный перпендикулярно плоскости эклиптики, $O_a Y_3$ — орт, направленный в точку весеннего равноденствия, $O_a Y_1$ — орт, дополняющий систему до правой тройки.

– $Ox_1 x_2 x_3$ — Связная система координат (ССК), начало расположено в центре масс КА, оси ССК совпадают с главными осями инерции КА.

2.2. Уравнения движения КА

Ориентация спутника в инерциальном пространстве описывается с помощью динамических уравнений Эйлера и кинематических соотношений, основанных на кватернионах, которые и будут использоваться для численного моделирования в данной работе.

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{1}{2} Q \circ \omega \\ J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = M_{ext} + u \end{cases} \quad (1)$$

Динамическое уравнение записано в ССК, где тензор инерции J имеет диагональный вид, M_{ext} — момент внешних сил, а u — управляющий момент. Кватернион Q задаёт переход из ИСК в ССК.

В качестве внешнего момента могут быть гравитационный, магнитный, возмущающий и т.д. В работе в качестве внешнего момента рассматриваем гравитационный момент:

$$M_{ext} = 3 \frac{\mu}{R^5} R \times JR. \quad (2)$$

Движение центра масс определяется системой

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^3} \\ \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}. \end{cases} \quad (3)$$

В результате численного решения системы уравнений (1), (2), получим движение КА. Для этого используется метод Рунге Кутты 4-го порядка с постоянным шагом [6].

3. Законы управления

В данной главе представлено детальное описание методов управления, а также получены выражения для управляющих моментов методов ляпуновского управления, скользящего управления и управления с прогнозирующей моделью, которые будут моделированы в главе 4 и исследованы в главах 5,6.

3.1. Ляпуновское управление

Выберем функцию Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}) + 2k_q (1 - q_0), \quad (4)$$

тут k_q — некоторый положительный коэффициент.

Можем заметить, что $V > 0$ для любого положения спутника, кроме положения равновесия, где $V = 0$, так как J — положительно определенная матрица, а $|q_0| \leq 1$.

Рассмотрим производную функции Ляпунова:

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}, J\dot{\boldsymbol{\omega}}) - 2k_a \dot{q}_0, \quad (5)$$

Из уравнения (1) можем выразить $J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_{ext} + \mathbf{u}$.

Также запишем кинематическое соотношение для векторной части кватерниона:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} q_0 \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (6)$$

где $\|\mathbf{Q}\| = 1$.

Выразим q_0 и продифференцируем, тогда $\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q})$

Тогда перепишем выражение (3):

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M}_{ext} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega}) + k_q(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q})$$

$$\mathbf{M}_{ext} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + k_q(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}) = -k_\omega \boldsymbol{\omega} \quad (7)$$

По теореме Барашина — Красовского, если производная функции Ляпунова V отрицательна для любой целой траектории, кроме положения равновесия, то такое положение равновесия будет являться асимптотически устойчивым. Это выполнено при $k_\omega > 0$, так как выражение (7) перепишется

в виде:

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}, -k_{\omega}\boldsymbol{\omega}) = -k_{\omega}\boldsymbol{\omega}^2, \quad (8)$$

Тогда выражение для управляющего момента имеет вид:

$$\mathbf{u} = -k_{\omega}\boldsymbol{\omega} - k_q\mathbf{q} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_{ext} \quad (9)$$

Именно этот закон уравнение будем использовать для моделирования управления КА. В качестве внешнего момента, как было указано выше, будем использовать гравитационный момент, а коэффициенты $k_{\omega} > k_q$ будем подбирать так, чтобы модуль управления не превышал $0,01 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$.

3.2. Скользящее управление

Задачей управления в этом методе является, при целевом состоянии КА $\mathbf{Q}_d, \dot{\mathbf{Q}}_d, \ddot{\mathbf{Q}}_d$, тут $\|\mathbf{Q}_d\| = 1$, зная текущее состояние КА $\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}$, сгенерировать такой управляющий момент, под действием которого $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_d$ [2].

Целевая угловая скорость и ее изменение во времени могут быть получены из:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_d = 2(q_0 \cdot \mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}]_{\times})\dot{\mathbf{q}}_d \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_d = 2\mathbf{E}^T(\mathbf{Q}_d)\ddot{\mathbf{Q}}_d \end{cases} \quad (10)$$

тут $\mathbf{E}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} q_0\mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}]_{\times} \\ -\mathbf{q}^T \end{pmatrix}$.

Так как $\|\mathbf{Q}\| = 1$, то будет достаточно, чтобы $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$, что однозначно определит кватернионы \mathbf{Q} и \mathbf{Q}_d соответственно. Алгоритм управления КА, при помощи скользящего управления состоит из 2 шагов [2].

Шаг 1

Пусть $\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d$, а $\mathbf{Q}_e = \mathbf{Q} \circ \mathbf{Q}'_d = \begin{pmatrix} q_{0e} \\ \mathbf{q}_e \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{\omega}_d = 2\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{T}(\mathbf{Q}) = (q_0\mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}]_{\times})$ [2]. Выберем скользящую поверхность, такую, что на ней достигается цель управления, то есть $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$, а класс линейных скользящих векторов выбирается следующим образом:

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{K}\mathbf{q}_e, \quad (11)$$

здесь \mathbf{K} — это симметричная, положительно определенная, постоянная матрица размера 3×3 .

При $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ получаем поверхность скольжения в фазовом пространстве $\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{K}\mathbf{q}_e = \mathbf{0}$. Если движение спутника удовлетворяет этому соотношению, то требуемая ориентация оказывается асимптотически устойчивой [5].

Домножим слева уравнение (11) на $\frac{1}{2}\mathbf{T}(\mathbf{Q})$, тогда получим:

$$\dot{\mathbf{q}}_e + \frac{1}{2}\mathbf{T}(\mathbf{Q})\mathbf{K}\mathbf{q}_e = \mathbf{0} \quad (12)$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова будем рассматривать функцию:

$$V_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}_e^T \mathbf{K}\mathbf{q}_e \geq 0 \quad (13)$$

Тогда производная функции Ляпунова:

$$\dot{V}_e = \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}_e = -\left(\frac{q_0}{2}\right)\mathbf{q}_e^T \mathbf{K}^2 \mathbf{q}_e \leq 0 \quad (14)$$

Так как $q_0 = \sqrt{1 - \|\mathbf{q}\|^2} \geq 0$, а также \mathbf{K} - положительно определена, тогда равенство в (14) достигается только когда $\mathbf{q}_e = \mathbf{0}$.

Покажем, что V_e действительно функция Ляпунова и, поэтому, отклонение $\mathbf{q}_e \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{0}$. Кроме того, из соотношений (11) и (12) получим:

$$\dot{V}_e = \frac{\dot{V}_e}{V_e} V_e \leq -(q_0 \cdot \lambda_m) V_e \leq -\sqrt{1 - \|\mathbf{q}\|^2} \cdot \lambda_m V_e, \quad (15)$$

тут λ_m - минимальное собственное значение матрицы \mathbf{K} .

Шаг 2

Построим такой закон управления, который обеспечивает асимптотическую устойчивость движения по поверхности скольжения. Чтобы избежать обращение тензора инерции, кандидатом на функцию Ляпунова возьмем функцию:

$$V_r = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{s} \geq 0 \quad (16)$$

Используя уравнения (1) и (11), получим:

$$V_r = \mathbf{s}^T(-[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} + \mathbf{M}_{ext} - \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \mathbf{K}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d)) \quad (17)$$

Тогда получим закон управления:

$$\mathbf{u} = [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{J} \mathbf{K} \left(\frac{1}{2} \mathbf{T}(\mathbf{Q}) \boldsymbol{\omega} - \dot{\mathbf{q}}_d \right) + \boldsymbol{\tau} \quad (18)$$

где $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$, тут

$$\tau_i = -g_i(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \cdot \text{sign}(s_i), i = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Таким образом, уравнение (17) принимает вид:

$$V_r = \mathbf{s}^T[\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\tau}] = \sum_{i=1}^3 (M_{exti} + \tau_i) + \tau_i, \quad (20)$$

Если функции g_i в уравнении (19) выбраны так, чтобы выполнялось:

$$g_i(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \geq M_{exti}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \quad (21)$$

Тогда $V_r \leq -\sum_{i=1}^3 |s_i| (g_i(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - M_{exti} \cdot \text{sign}(s_i)) \leq 0$, где равенство достигается только для $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, что гарантирует достижение цели управления, а также скольжение по поверхности скольжения.

3.3. Управление с прогнозирующей моделью

УПМ оптимизирует последовательность управления на конечном промежутке времени, посредством минимизации специального функционала. Затем, первый элемент оптимальной последовательности применяется к дискретному временному интервалу, а поэтому интервал оптимизации (горизонт управления) смещается на 1 шаг, повторяя процесс.

Пусть $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{pmatrix}$ — вектор текущего состояния, а

$\mathbf{x}_d(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_d(t) \\ \boldsymbol{\omega}_d(t) \end{pmatrix}$ — целевое состояние. Функционал $F(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ будет учитывать и отклонения от целевых координат, и затраты по энергии.

Алгоритм метода состоит из 3 основных шагов:

Шаг 1 (Прогноз)

Пусть горизонт управления состоит из N интервалов по ΔT , на каждом

из которых управляющий момент будет $\mathbf{u}_k = const$, где $k = 1, \dots, N$, а в точках $t = t_k$, вектор состояния будет иметь вид $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k$, тогда отклонение на момент времени k будет равно: $\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_d(k)$

Тогда $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$, тут:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} & \frac{1}{2}\mathbf{I}_3 \\ \frac{\mu}{R^5}J^{-1}([\mathbf{R}]_{\times}J[\mathbf{R}]_{\times}[-J\mathbf{R}]_{\times}[\mathbf{R}]_{\times}) & J^{-1}([\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}]_{\times} - [\boldsymbol{\omega}]_{\times}J) \end{pmatrix} + \mathbf{I}_6$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{0}_3 J^{-1})^T$$

Шаг 2 (Оптимизация)

Учитывая $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$, введем функционал на N интервалах:

$$F(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k), \quad (22)$$

где \mathbf{Q} и \mathbf{R} - положительно определенные матрицы весов, для, соответственно, отклонения относительно целевых координат и для величины управляющего момента. N - число шагов управления, также показывает длину горизонта управления ($N \cdot \Delta t$).

Тогда, для достижения цели управления, нужно решить задачу оптимизации:

$$F \rightarrow \min,$$

Т.е. нужно найти:

$$\min_{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1}} F = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k, \quad (23)$$

С учетом ограничений:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \text{ где } k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$G(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) = 0 \text{ — ограничение на начальное условие,} \quad (24)$$

$$h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) < 0 \text{ — ограничение на управление.}$$

Для удобства обезразмерим выражение (23).

Шаг 3 (Применение управления)

Когда мы нашли вектор $[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}]$, подействуем управлением с моментом \mathbf{u}_0 на первом промежутке по времени длиной Δt , после

этого текущее состояние КА будет $\mathbf{x}(t + \Delta t) = \begin{pmatrix} q(t+\Delta t) \\ \omega(t+\Delta t) \end{pmatrix}$

Повторяем алгоритм, начиная с шага 2.

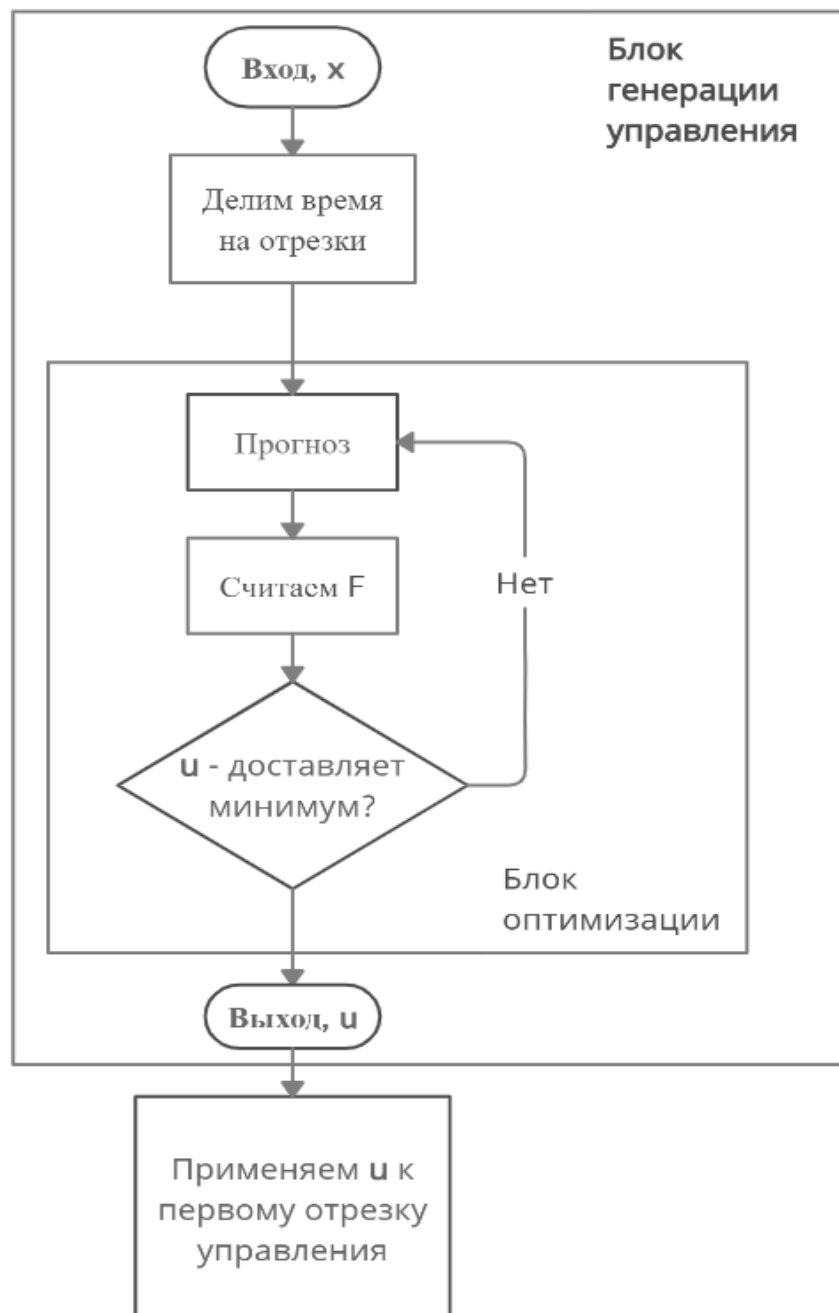


Рисунок 1: Блок-схема, описывающая алгоритм управления с прогнозирующей моделью.

4. Моделирование и сравнение

Будем использовать модель КА с характеристиками:

- Тензор инерции КА в ССК будет иметь вид $J = \text{diag}(2, 3, 4)$ кг · м²
- Начальная угловая скорость равна $\boldsymbol{\omega} = (0, 04 \ 0, 03 \ 0, 02)^T \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, начальная ориентация $\boldsymbol{Q} = (0 \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ \frac{1}{\sqrt{3}})^T$, начальный радиус вектор $\boldsymbol{R} = (7 \cdot 10^6 \ 0 \ 0)^T$ м, начальная скорость спутника по орбите $\boldsymbol{v} = (0 \ 7,55 \cdot 10^3 \ 0) \frac{\text{м}}{\text{с}}$
- Параметры управления подобраны таким образом, чтобы максимальное значение нормы управляющего момента $u_{\max} = 10^{-2}$ Н · м
- Управляющий момент может быть применен по любому направлению
- Управляющий момент будет пересчитываться и применяться на протяжении 0.1 с
- Коэффициенты управления используемые в пунктах 4.1-4.3 представлены в таблице 2.

Таблица 1: Коэффициенты управления.

Метод	Коэффициенты управления
Ляпуновское управление	$k_{\omega} = 9 \cdot 10^{-2} \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$
	$k_q = 9 \cdot 10^{-3} \text{Н} \cdot \text{м}$
Скользящее управление	$\mathbf{K} = \mathbf{I}_3 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \text{с}^{-1}$
УПМ	$\mathbf{Q} = 0,2 \cdot \mathbf{I}_6$
	$\mathbf{R} = 50 \cdot \mathbf{I}_3$

Ниже приведены примеры моделирования поведения КА, при одинаковых начальных и целевых состояниях для всех методов.

4.1 Ляпуновское управление

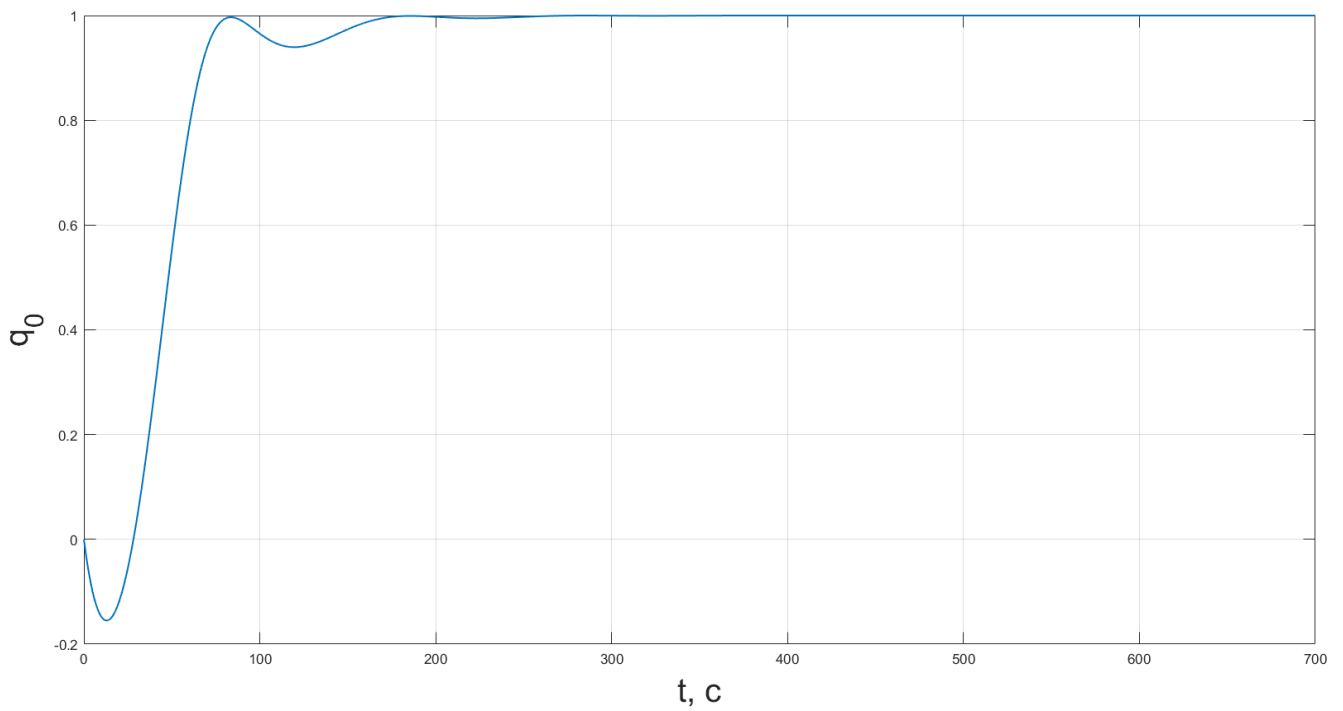


Рис. 2: Зависимость $q_0(t)$, под действием ляпуновского управления

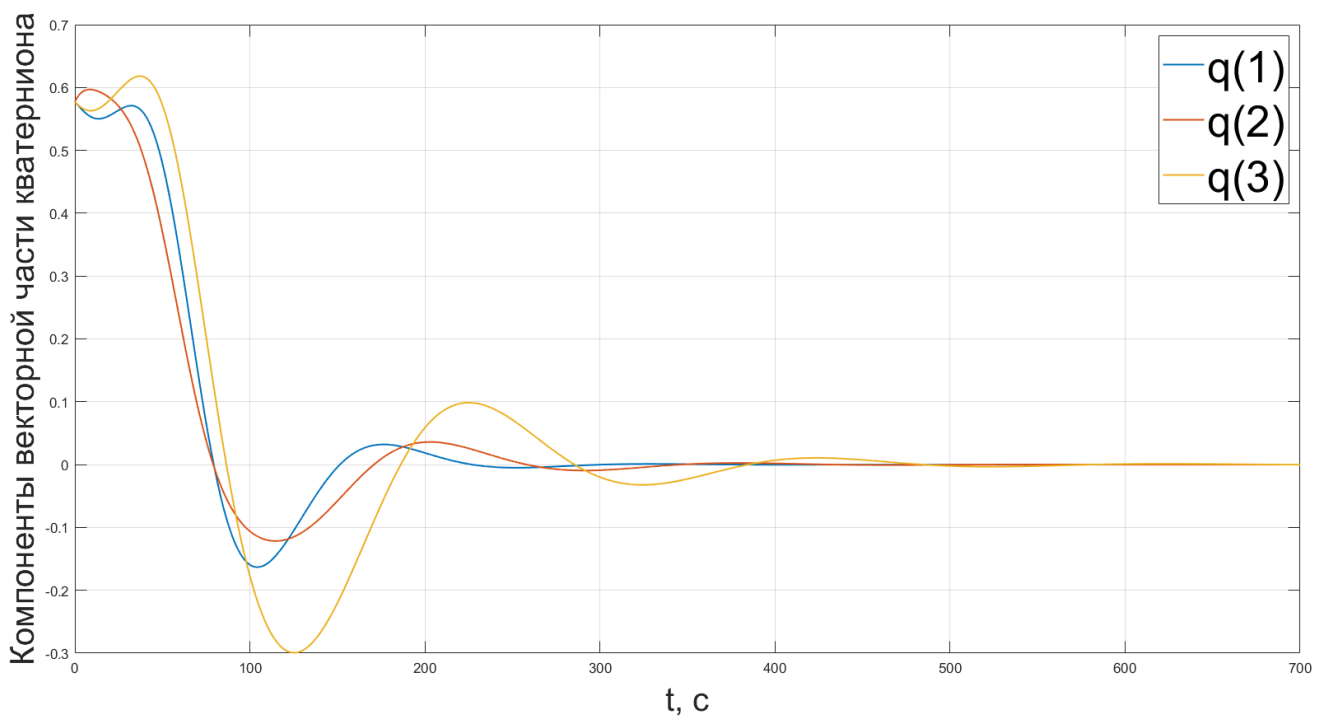


Рис. 3: Зависимость $q(t)$, под действием под действием ляпуновского управления

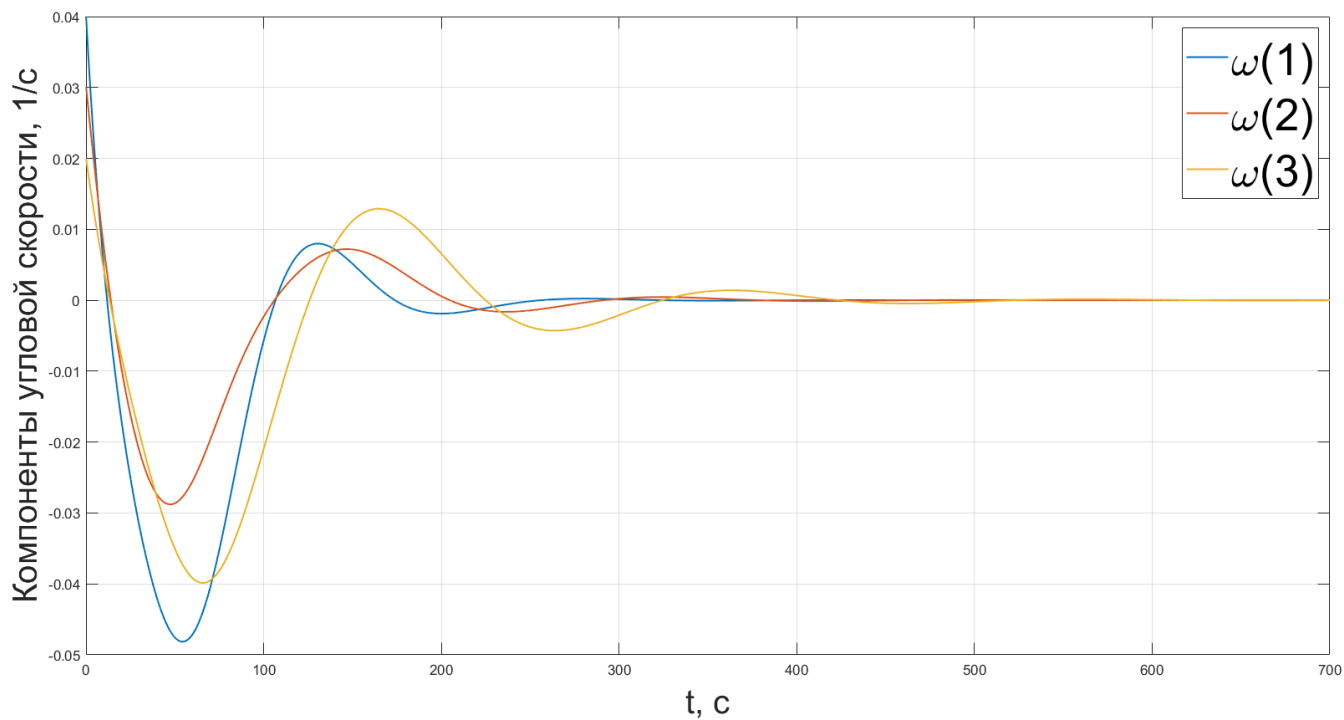


Рис. 4: Поведение угловой скорости КА, под действием ляпуновского управления

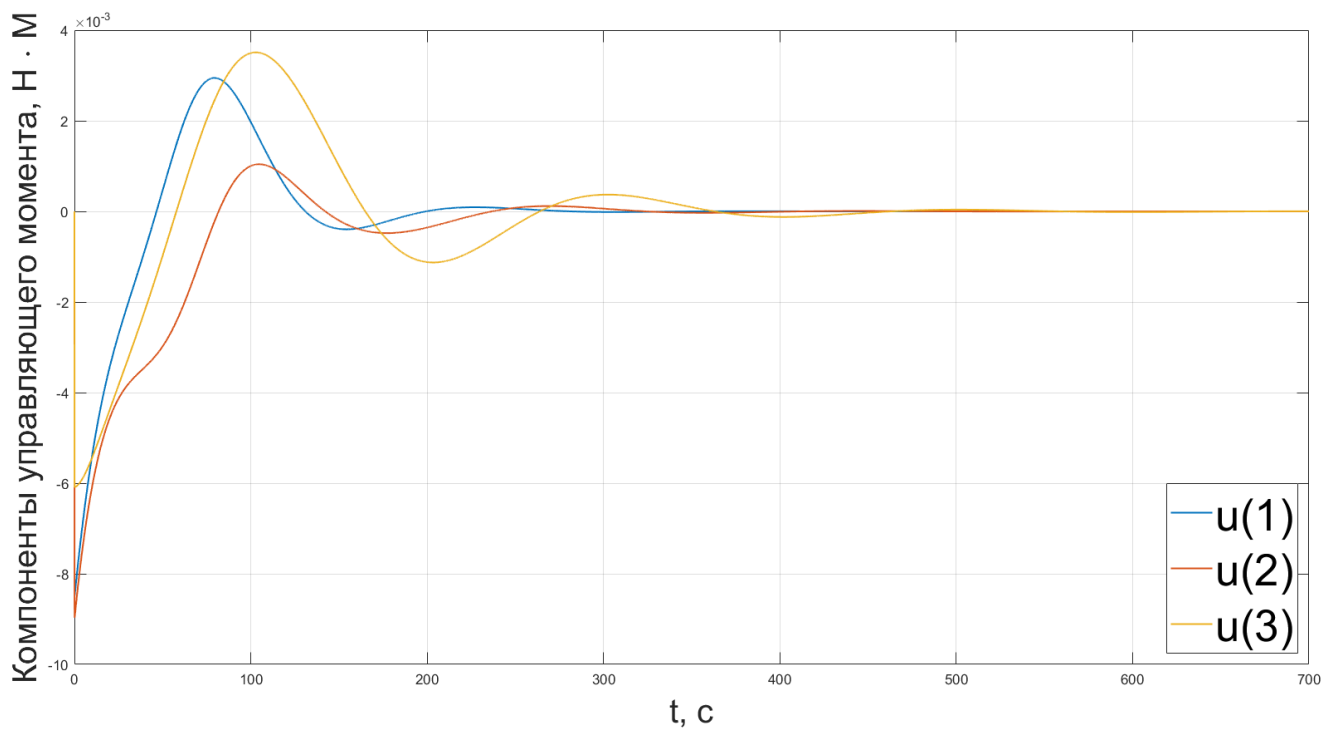


Рис. 5: Управляющий момент КА, генерируемый под действием

4.2. Скользящее управление

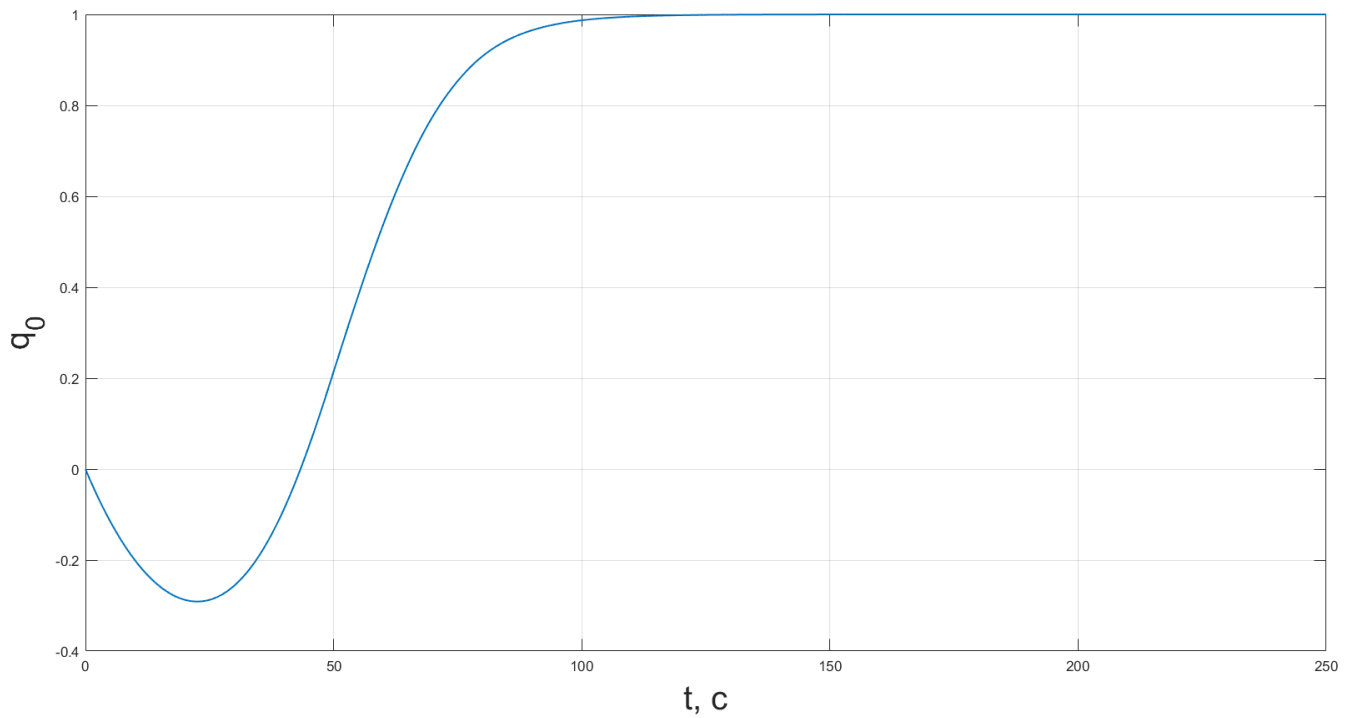


Рис. 6: Зависимость $q_0(t)$, под действием скользящего управления

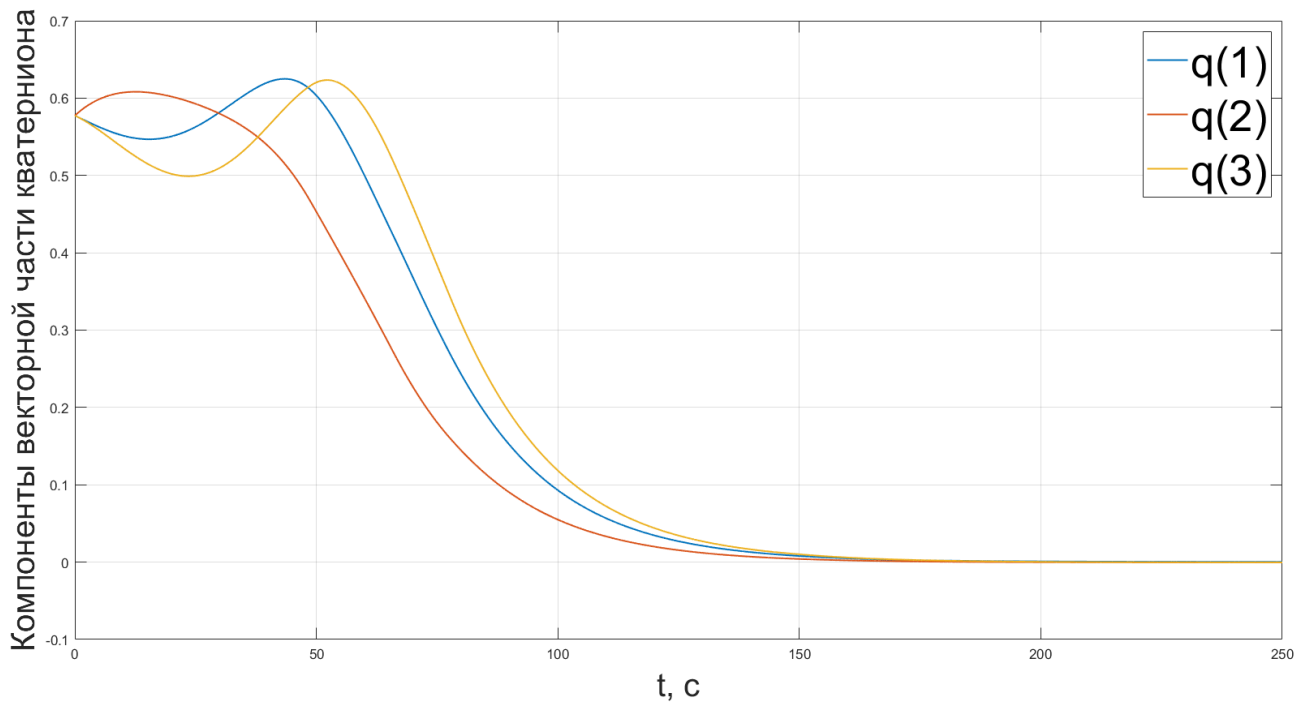


Рис. 7: Зависимость $q(t)$, под действием скользящего управления

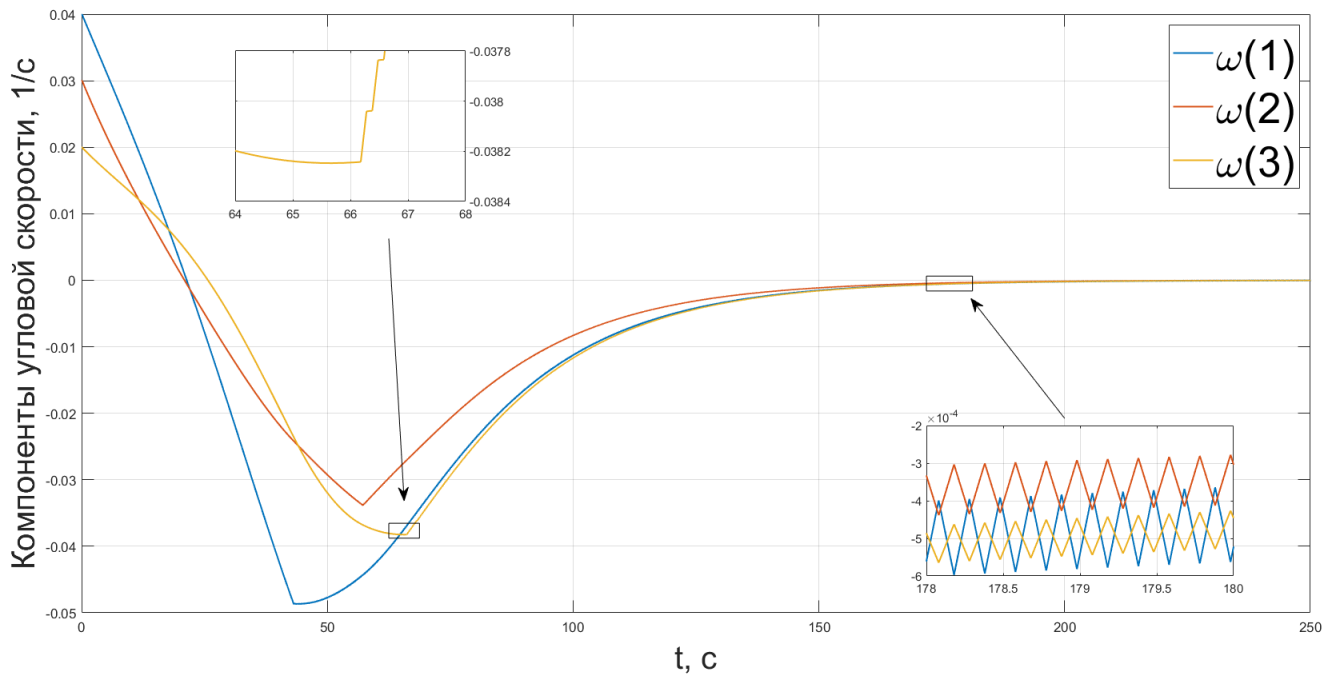


Рис. 8: Поведение угловой скорости КА, под действием скользящего управления

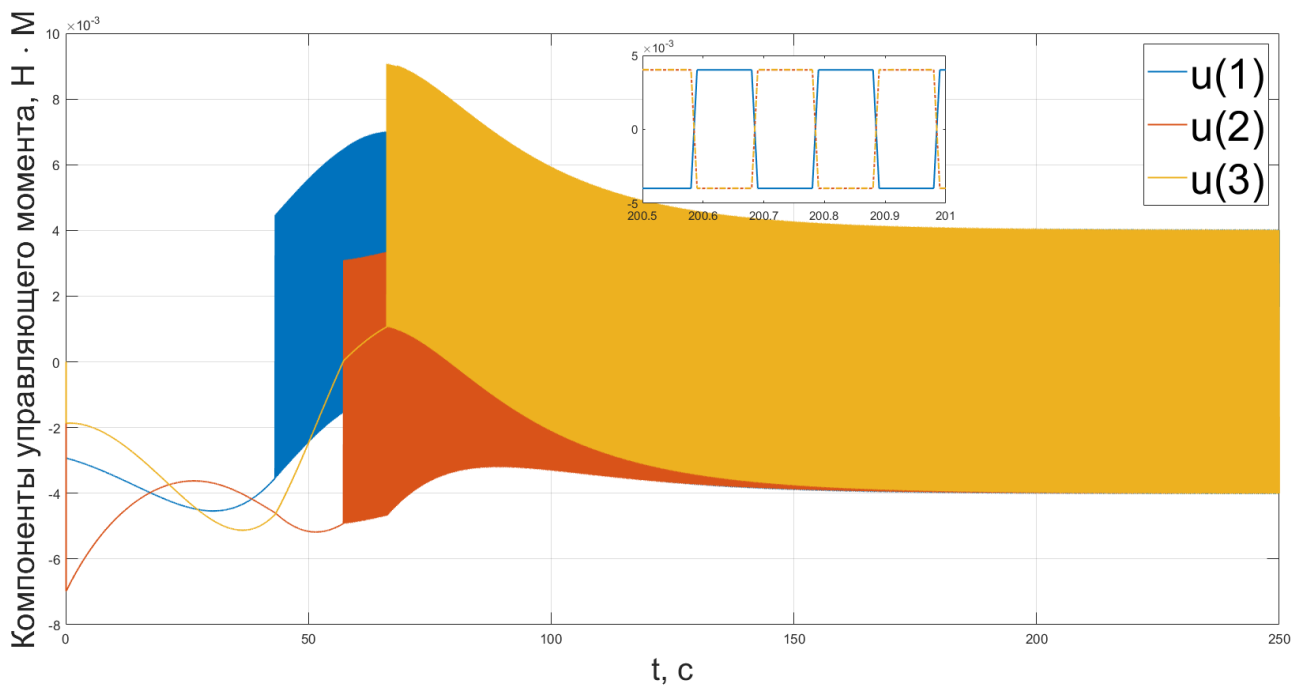


Рис. 9: Управляющий момент КА, генерируемый скользящего управления

4.3. Управление с прогнозирующей моделью

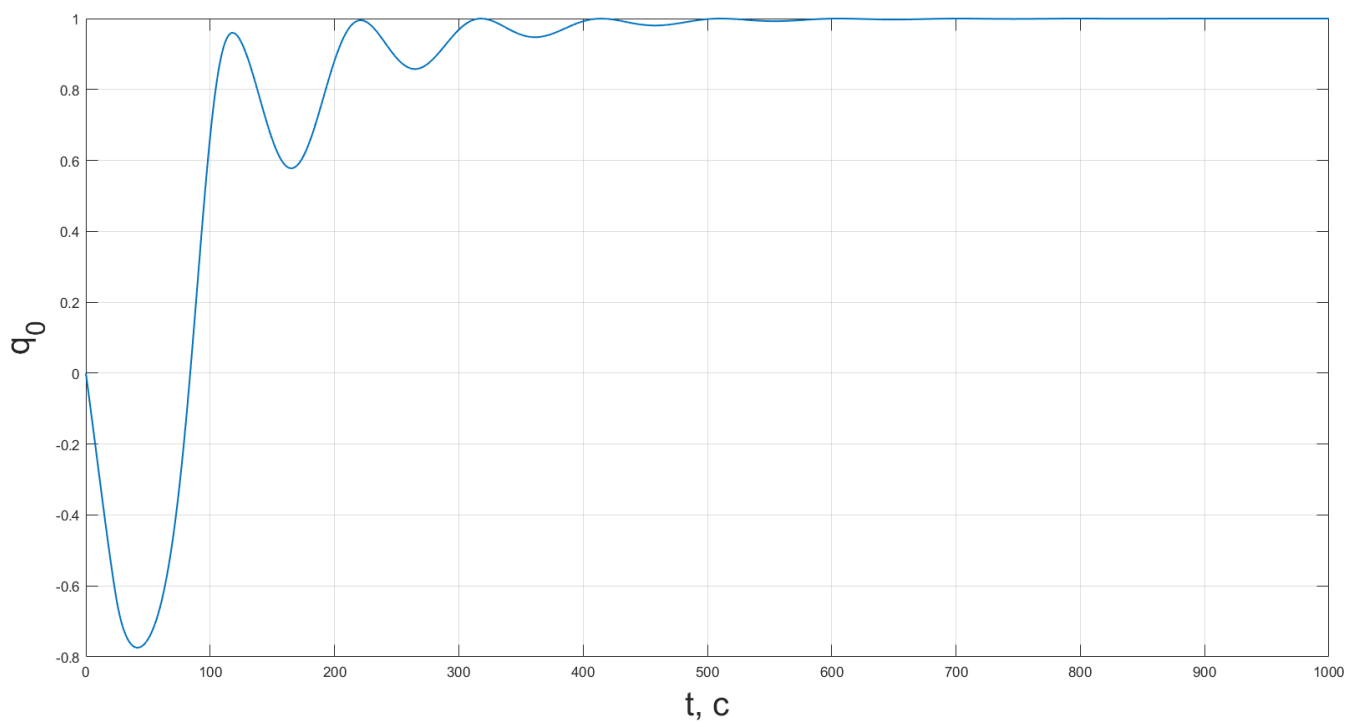


Рис. 10: Зависимость $q_0(t)$, под действием УПМ

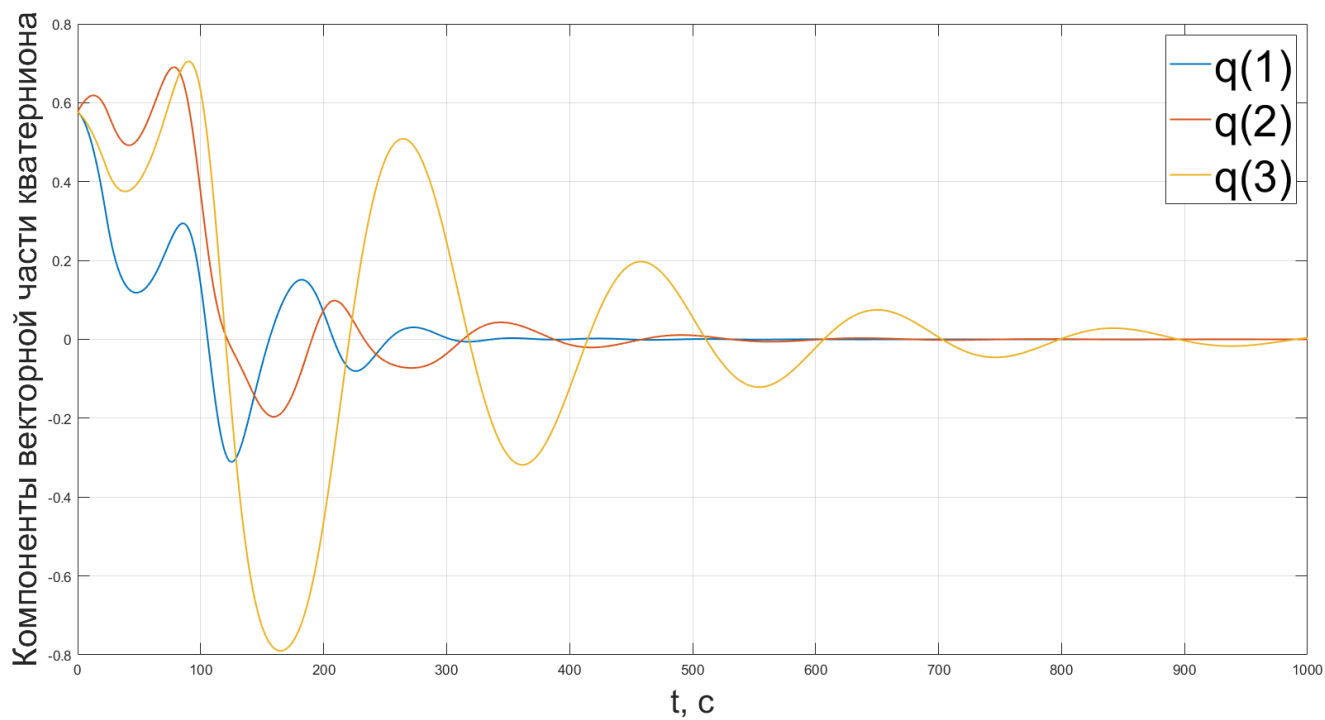


Рис. 11: Зависимость $q(t)$, под действием УПМ

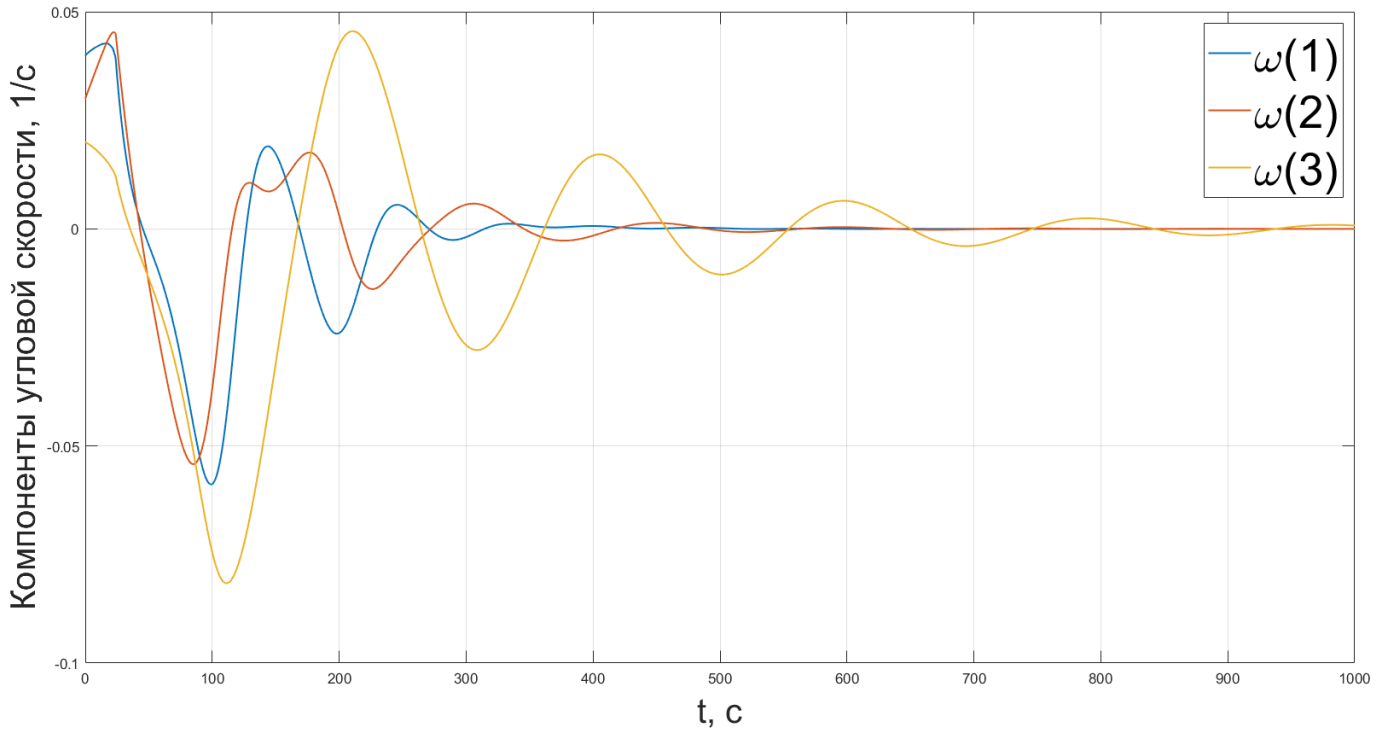


Рис. 12: Поведение угловой скорости КА, под действием УПМ

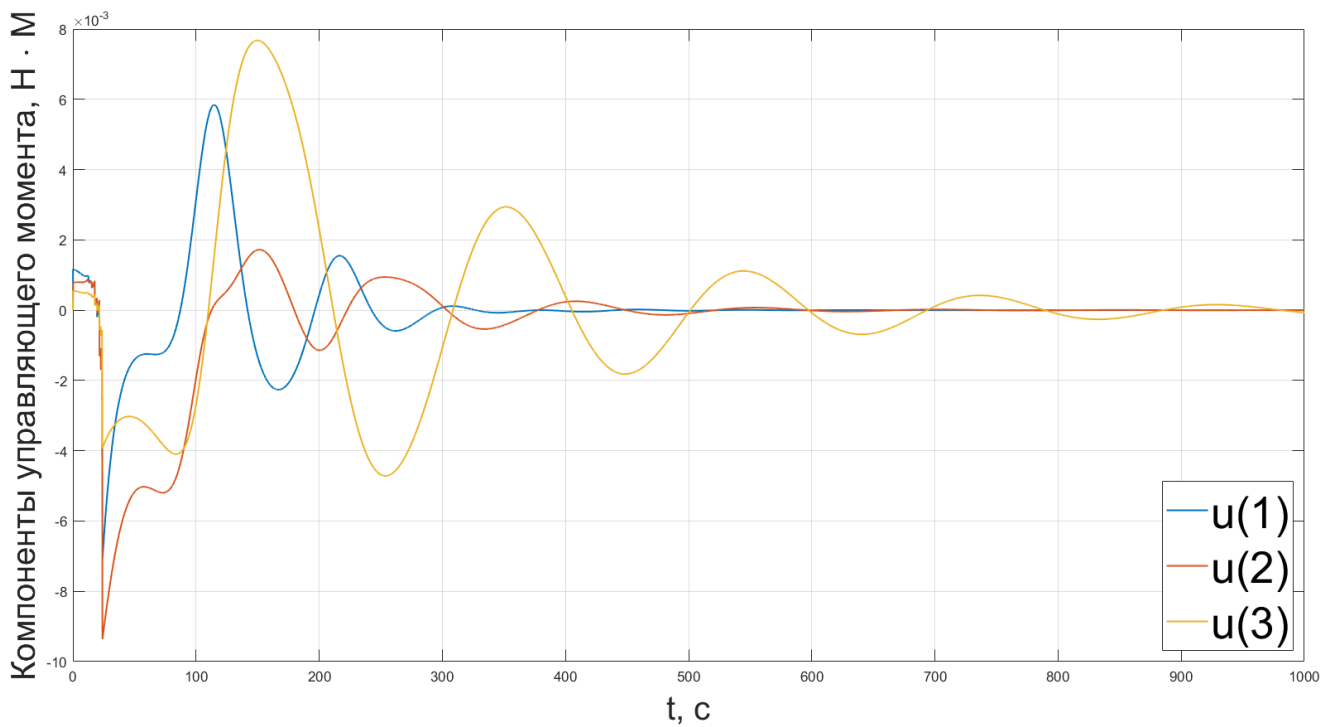


Рис. 13: Управляющий момент КА, генерируемый УПМ

По графикам видно, что методы управления обеспечивают достижения окрестности целевых координат. Однако видны особенности методов, а именно, пилообразное поведение угловой скорости, вблизи целевой точки (Рис 8.) и компоненты управляющего момента, меняющие знак при каждом вызове, гладкость Ляпуновского управления.

5. Анализ результатов моделирования

Для анализа результатов сгенерируем набор случайных начальных векторов состояния КА, причем $0,02 < |\omega| < 0,07 \frac{1}{c}$, а $|Q| = 1$ и проведем моделирование, этих методов для сравнения и оценки эффективности и скорости работы метода.

5.1. Эффективность управления

Для анализа эффективности построим график зависимости номера итерации, где была достигнута определенная точность от порядка отклонения от текущего положения до целевого.

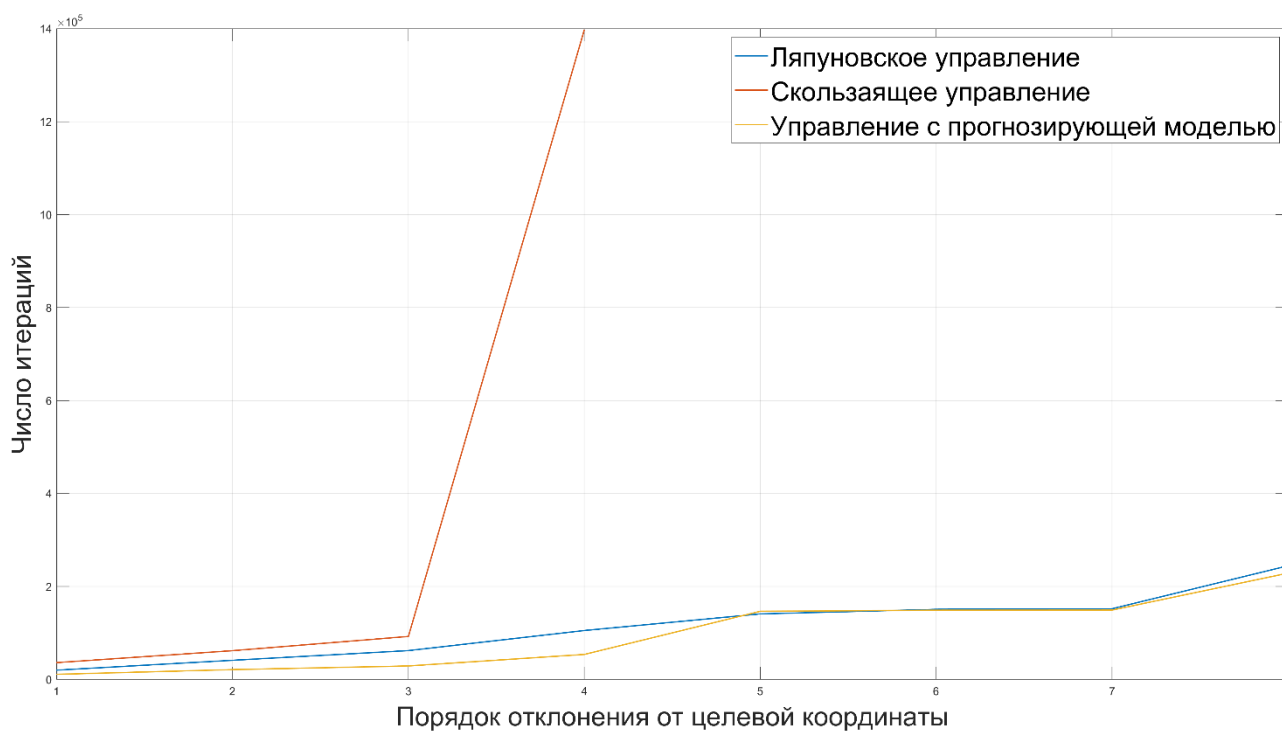


Рис. 14: Зависимость числа итераций от порядка отклонения ориентации КА от целевой ориентации КА

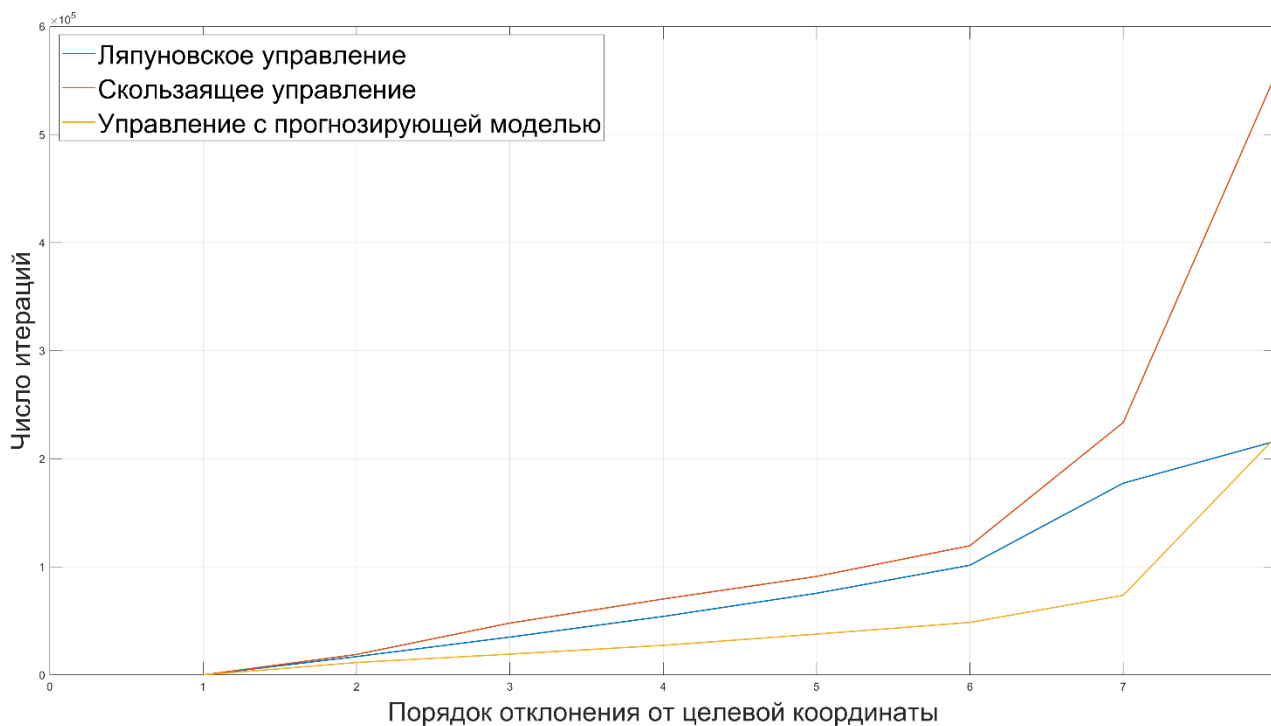


Рис. 15: Зависимость числа итераций от порядка отклонения угловой скорости КА от целевой угловой скорости КА

По графикам видно, что за наименьшее количество итераций большую точность удастся получить, используя УПМ, а для скользящего управления характерно резкое увеличение необходимого числа итераций для попадания в более узкую окрестность цели, особенно это заметно на рисунке 13. ляпуновскому управлению требуется большее число итераций, чем УПМ, для достижения аналогичной точности, особенно это заметно на рисунке 14.

5.2. Скорость генерации управляющего момента

Для анализа скорости генерации построим график длительности генерации управляющего момента, в зависимости от момента времени t в задаче.

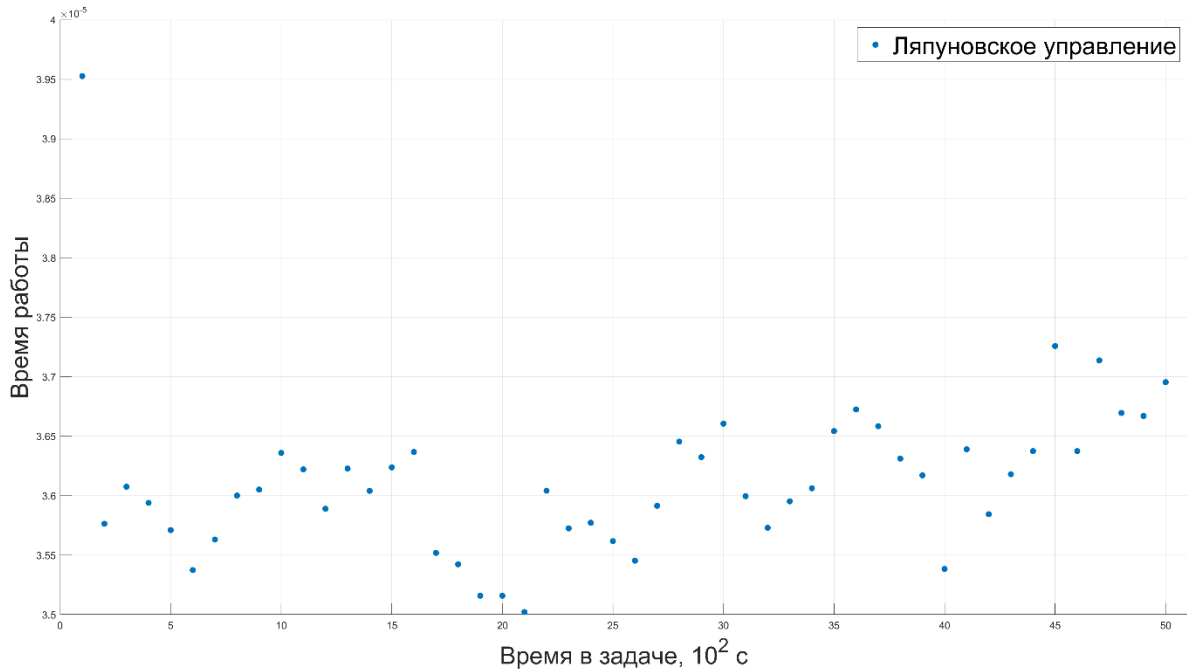


Рис. 16: Зависимость времени генерации сигнала ляпуновским управлением от времени в задаче.

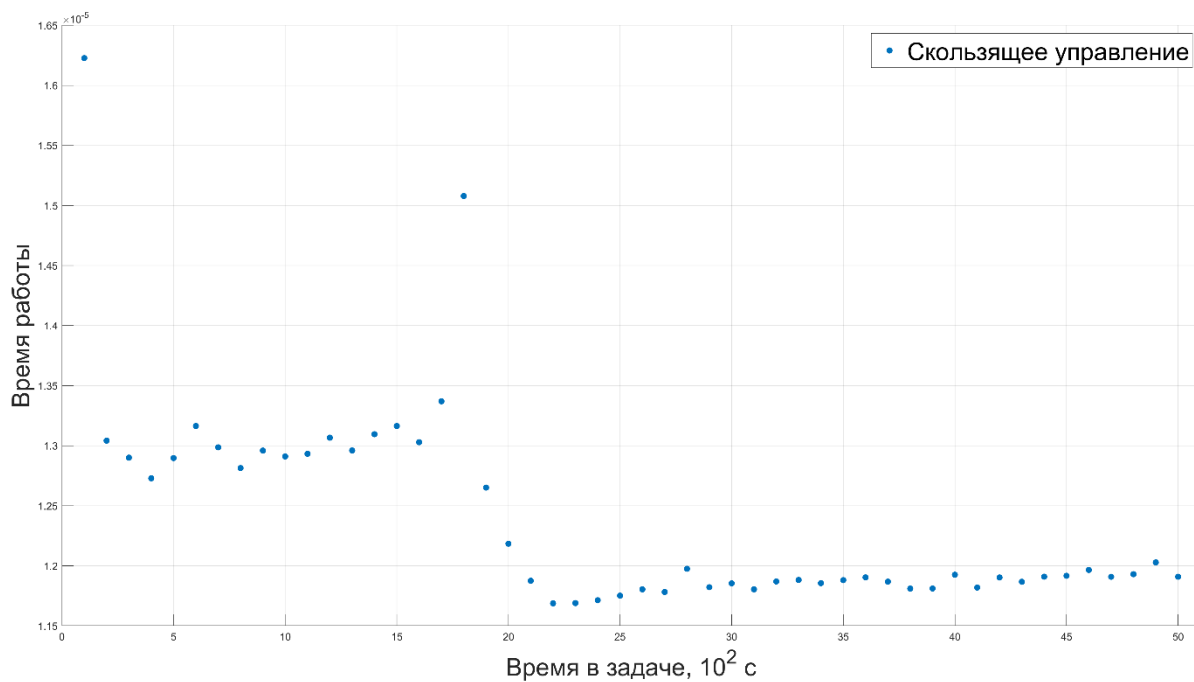


Рис. 17: Зависимость времени генерации сигнала скользящим управлением от времени в задаче.

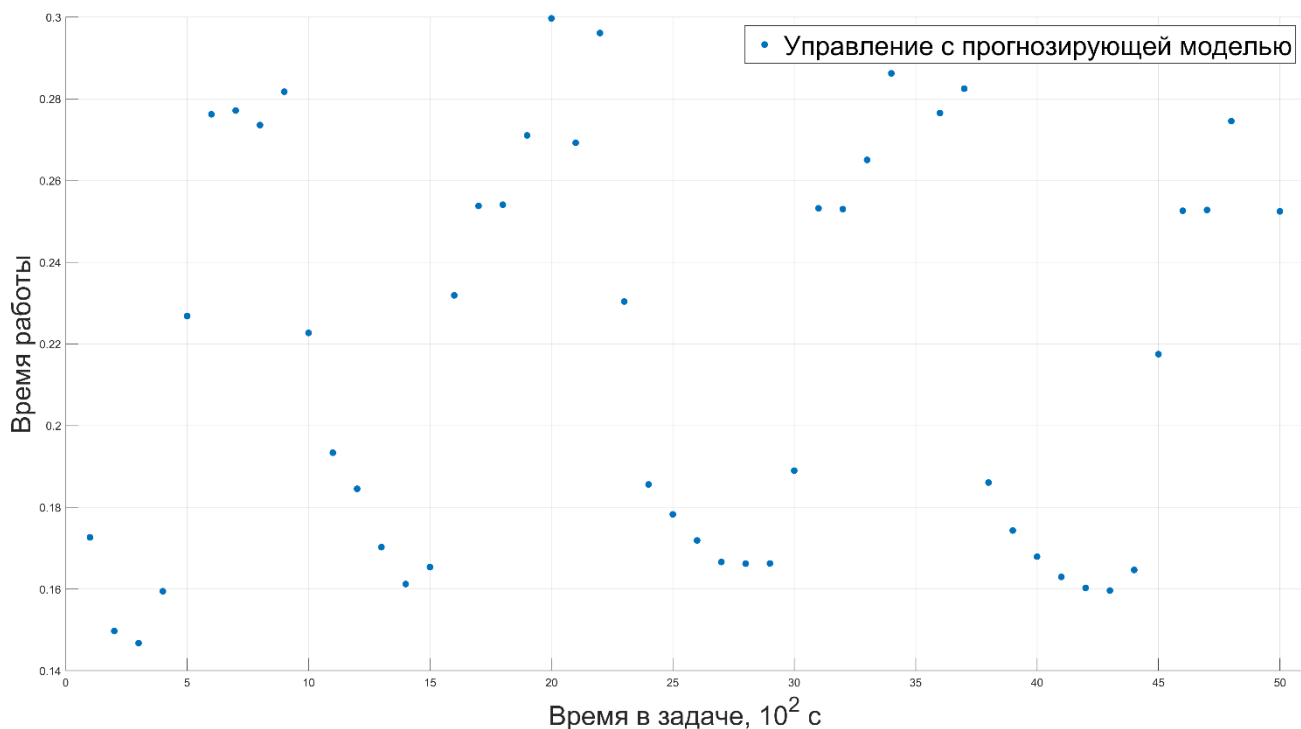


Рис. 18: Зависимость времени генерации сигнала УПМ от времени в задаче.

По графикам видно, что наиболее быстро генерирует управляющие моменты метод скользящего управления (рисунок 16), хотя Ляпуновское управление генерирует моменты за время такого-же порядка, но медленнее. Самым медленным методом оказался УПМ (рисунок 17), каждая итерация которого на 3-4 порядка медленнее в сравнении с предыдущими методами. Это связано с трудоёмкостью задачи оптимизации, которую необходимо решать при применении метода и с перемножением большого числа матрица (по сравнению с ляпуновским и скользящим управлением) на каждом шаге аппроксимации.

В таблице 2 приведено общее время работы каждого алгоритма при фиксированном количестве итераций, где также видно, что самым быстрым методом является скользящее управление.

Таблица 2: Время работы алгоритмов управления за 50000 вызовов.

Метод управления	Общее время работы, с	Среднее время работы, с
Ляпуновское	0,181	$3,61 \cdot 10^{-5}$
Скользящее	0,061	$1,24 \cdot 10^{-5}$
УПМ	1184	$2,35 \cdot 10^{-1}$

6. Влияние шумов на управление

Для оценки влияния шумов на устойчивость управления, подействуем внешним моментом, являющимся случайным гауссовым вектором, с матожиданием каждой из компонент 0.

$$\mathbf{M}_{ext} = \mathbf{M}_{grav} + \mathbf{M}_{noise}$$

Также на вход в блок управления будем подавать зашумленные данные о состоянии КА, эмулируя случайные ошибки в определении текущего состояния КА. Будем считать, что шум имеет матожидание равное 0 и дисперсию равную 10^{-3} , то есть дисперсия равна порядку внешнего момента. Ниже проиллюстрированы примеры моделирования поведения КА в задаче с шумами, аналогично тем, что были приведены в п. 4.1 - 4.3.

6.1. Ляпуновское управление

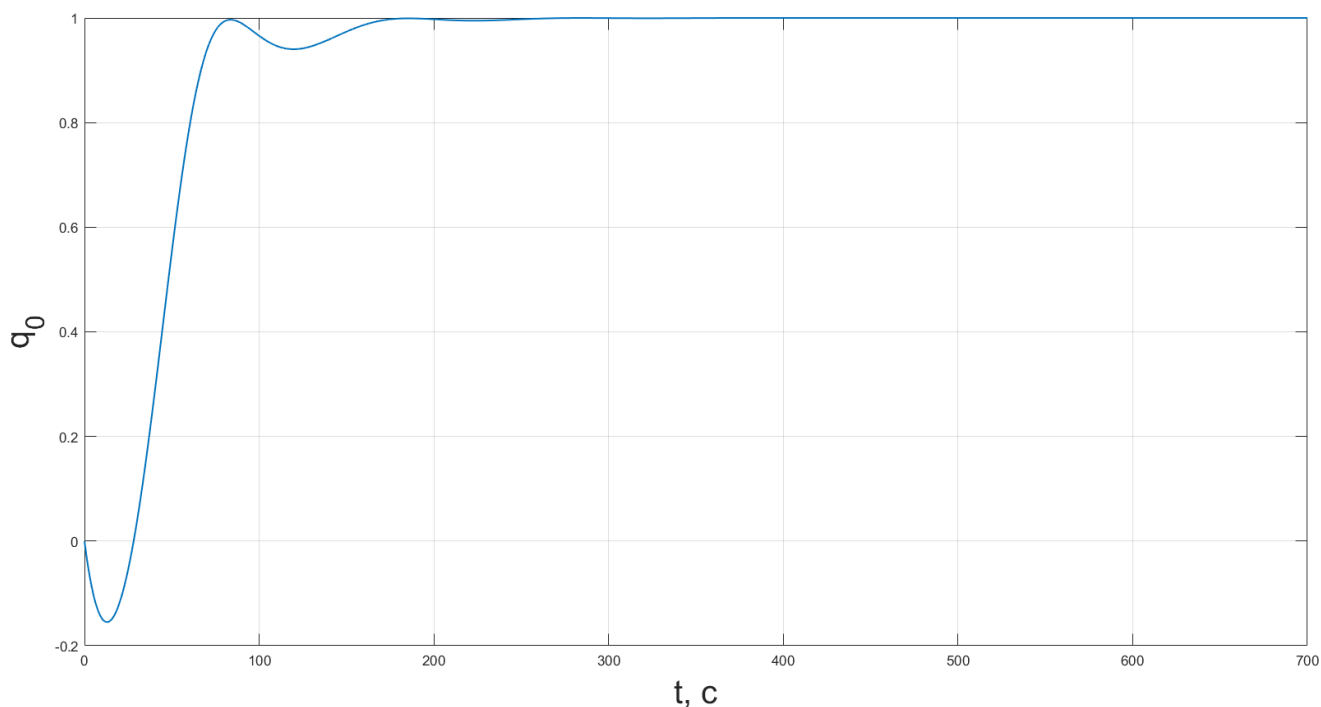


Рис. 19: Зависимость $q_0(t)$, под действием ляпуновского управления со случайными шумами

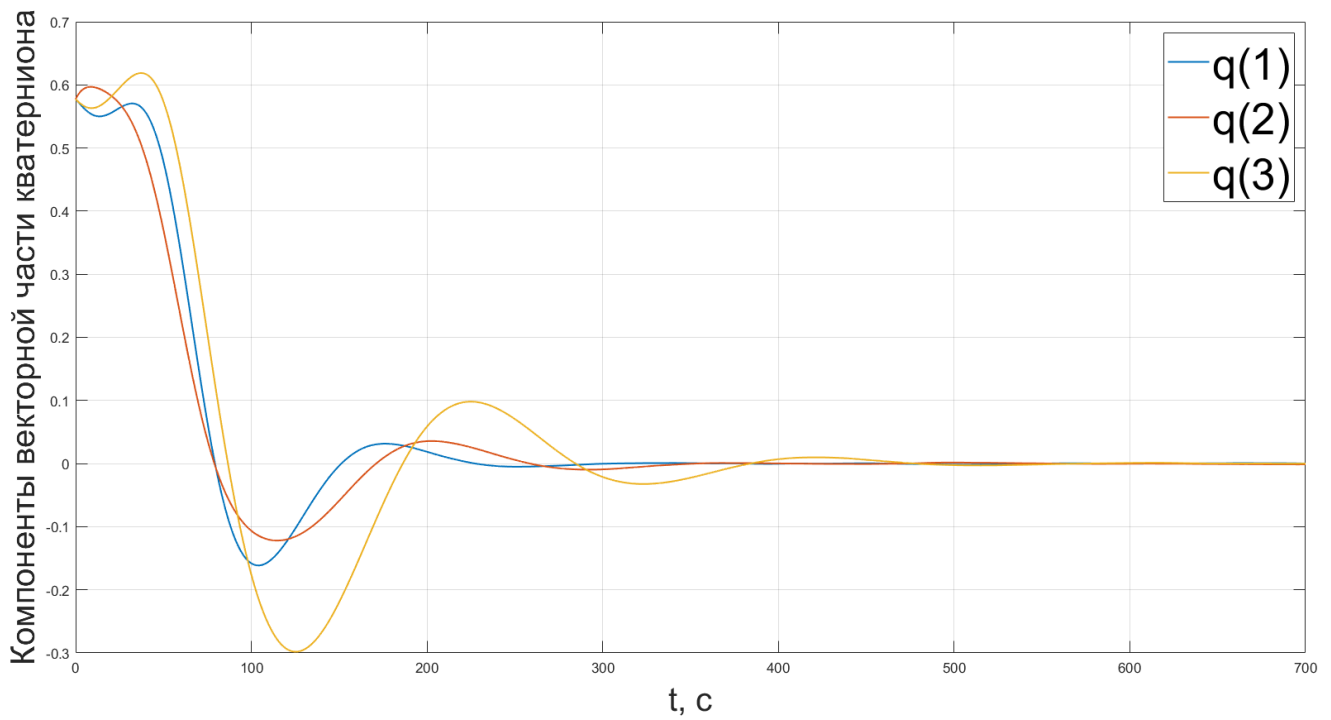


Рис. 20: Зависимость $q(t)$, под действием под действием ляпуновского управления со случайными шумами

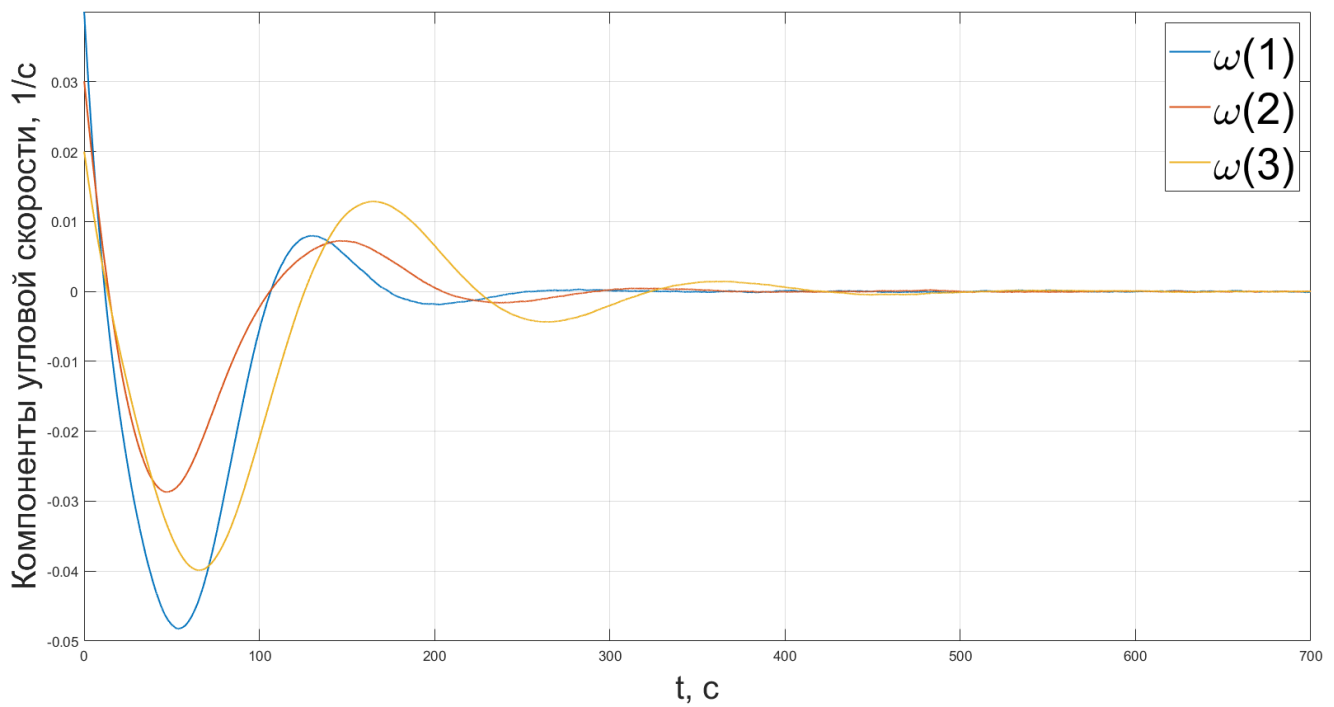


Рис. 21: Поведение угловой скорости КА, под действием ляпуновского управления с шумами

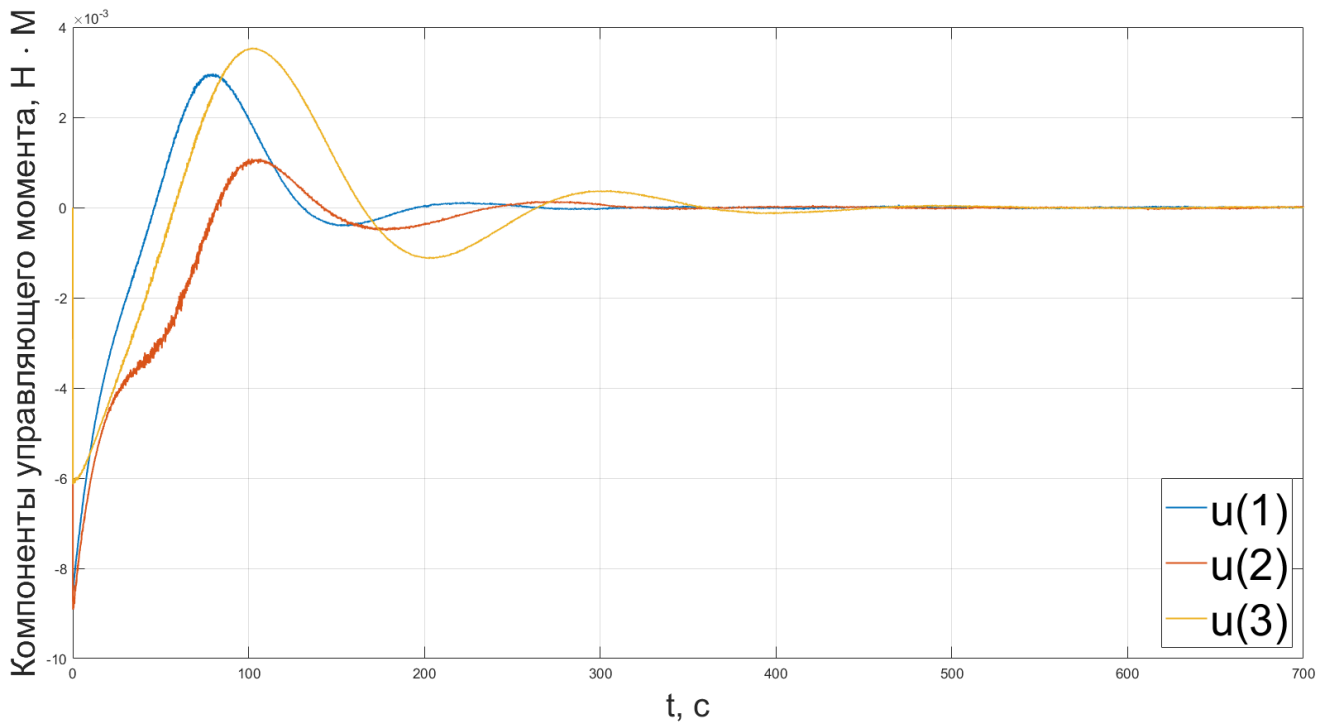


Рис. 22: Управляющий момент КА, генерируемый под действием ляпуновского управления

6.2. Скользящее управление

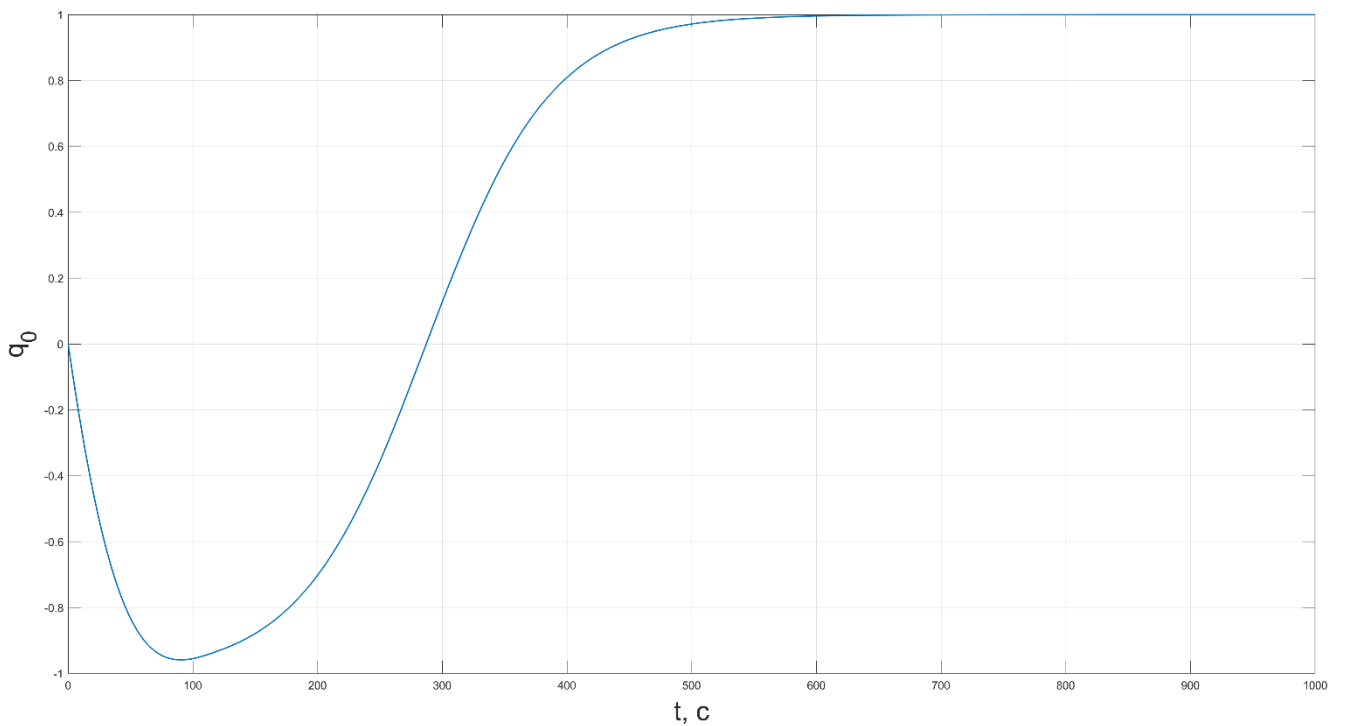


Рис. 23: Зависимость $q_0(t)$, под действием скользящего управления со случайными шумами

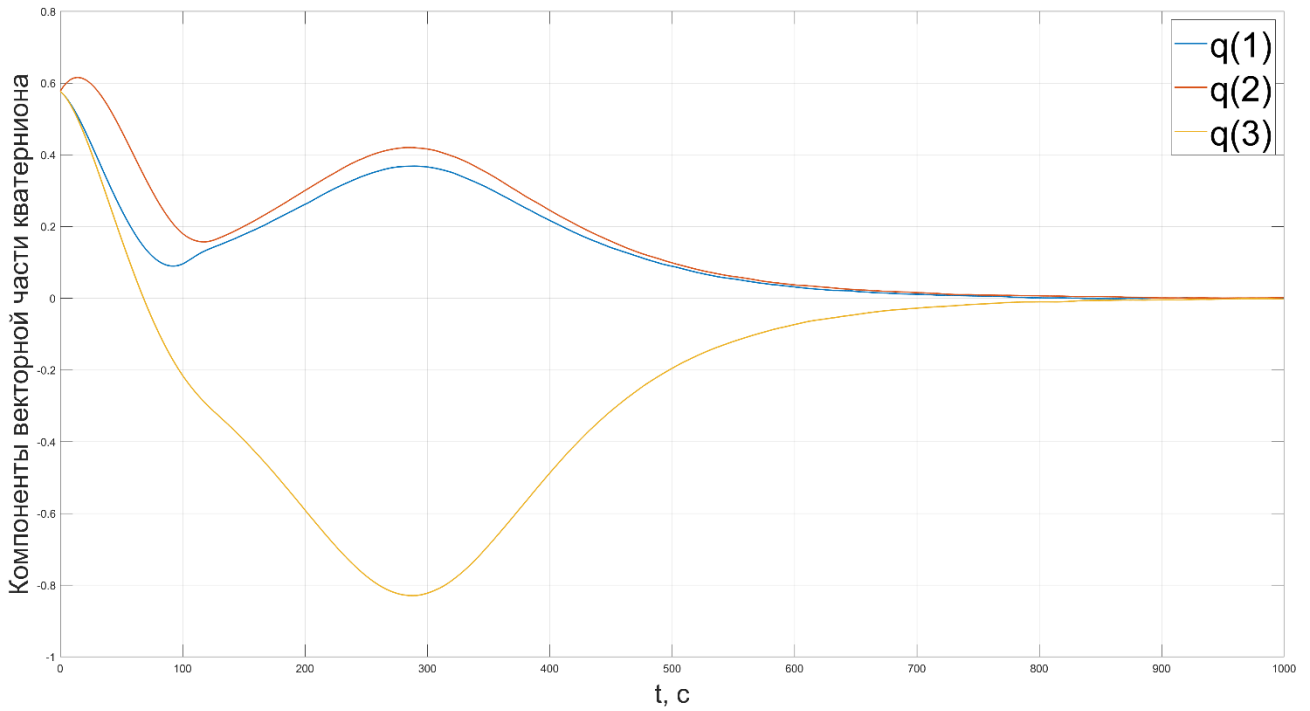


Рис. 24: Зависимость $q(t)$, под действием под действием скользящего управления со случайными шумами

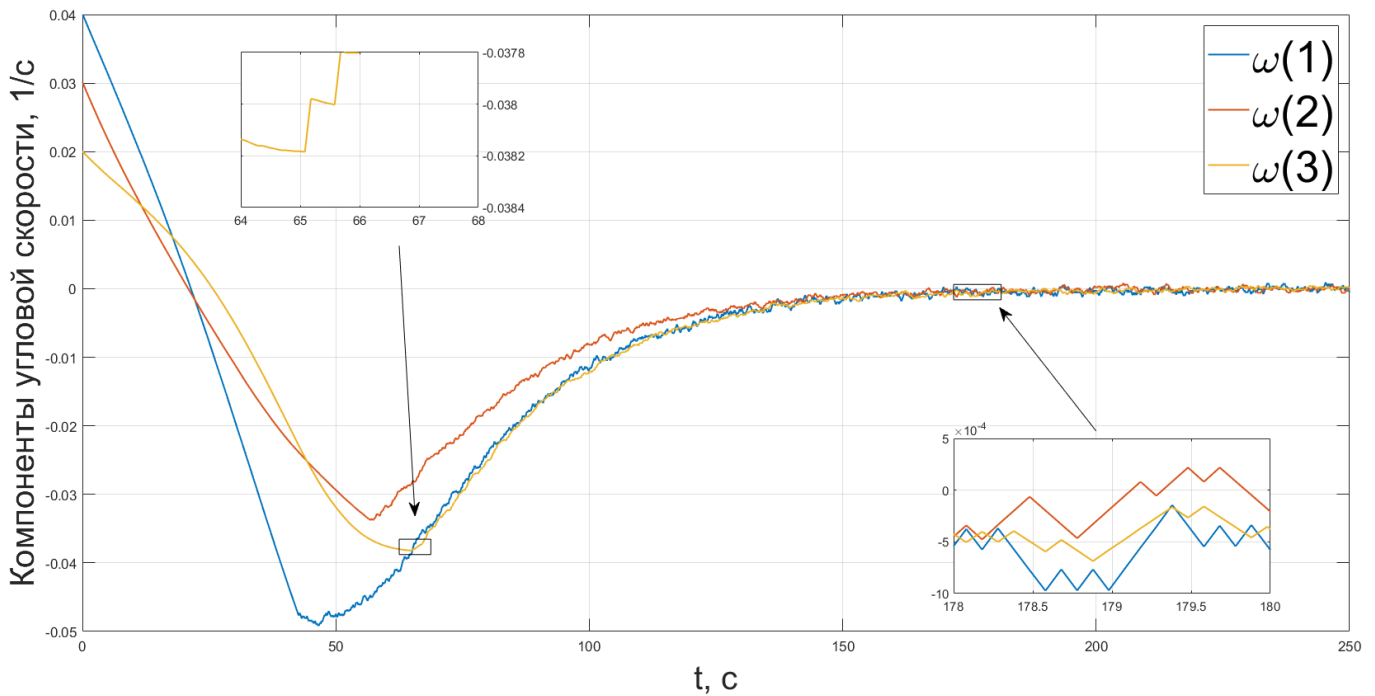


Рис. 25: Поведение угловой скорости КА, под действием скользящего управления с шумами

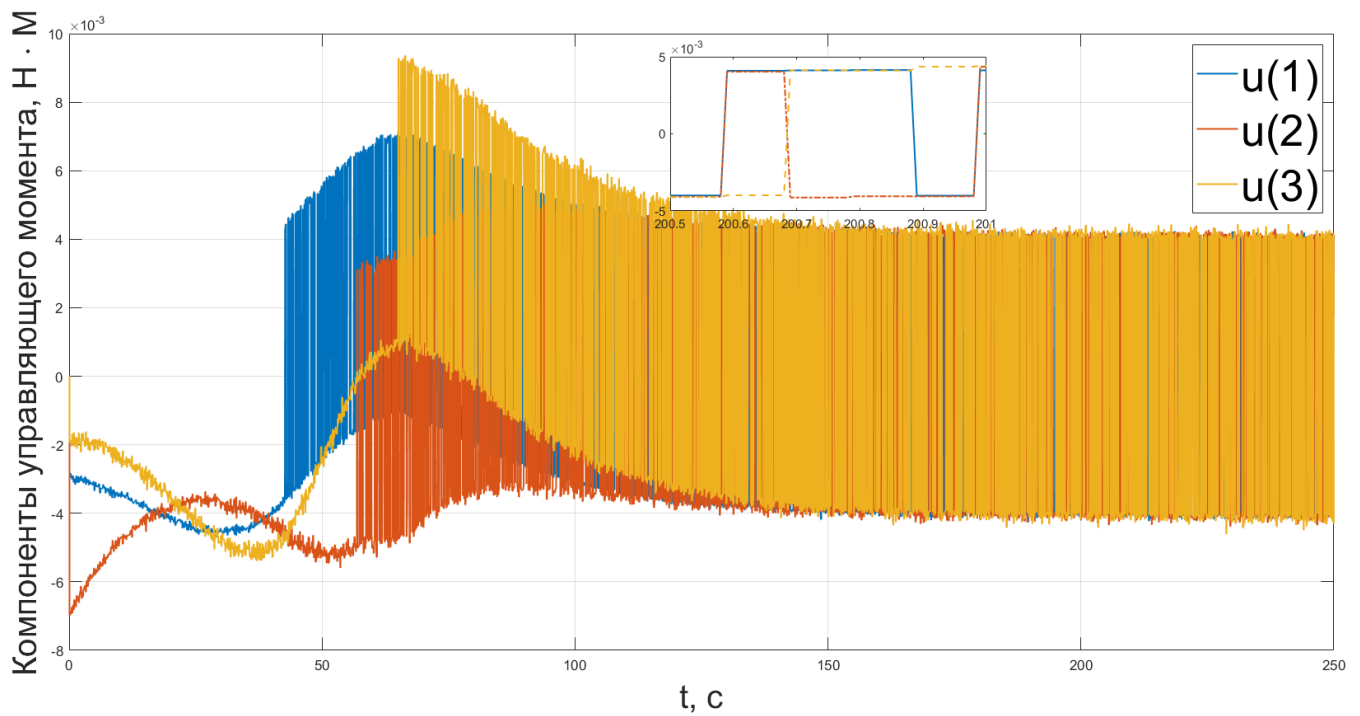


Рис. 26: Управляющий момент КА, генерируемый под действием скользящего управления

6.3. Управление с прогнозирующей моделью

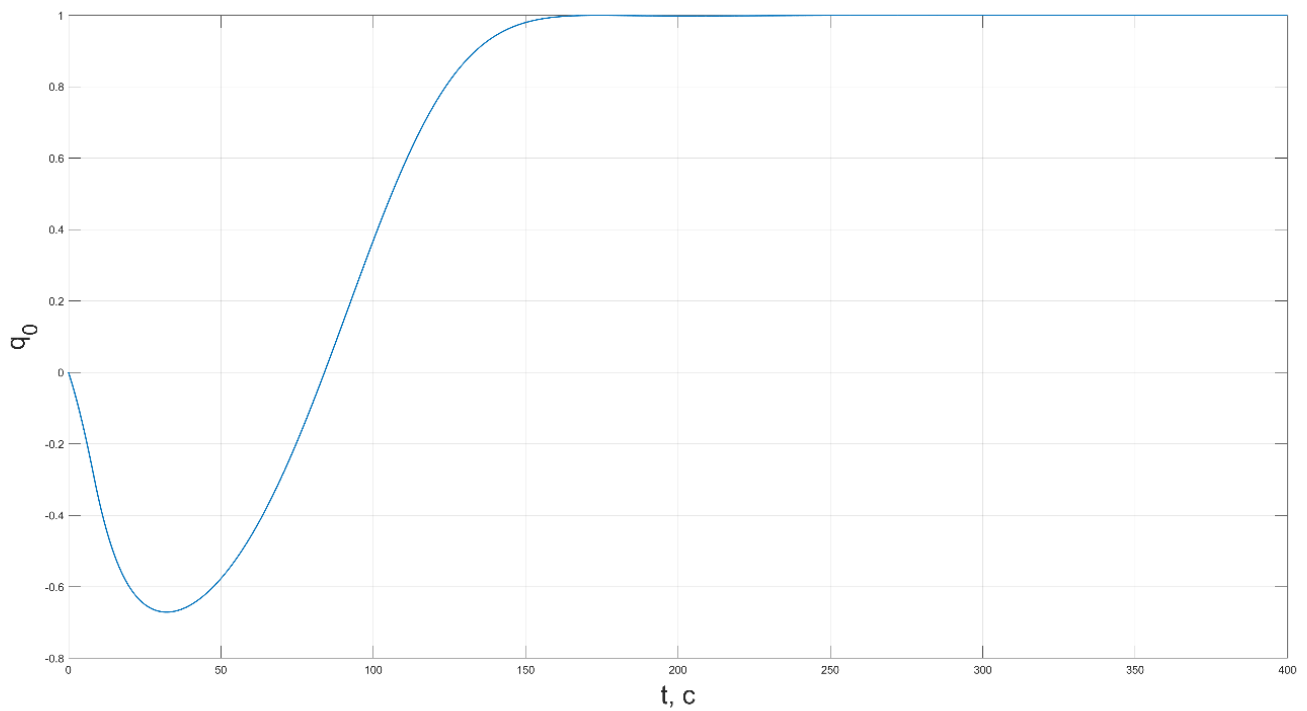


Рис. 27: Зависимость $q_0(t)$, под действием УПМ со случайными шумами

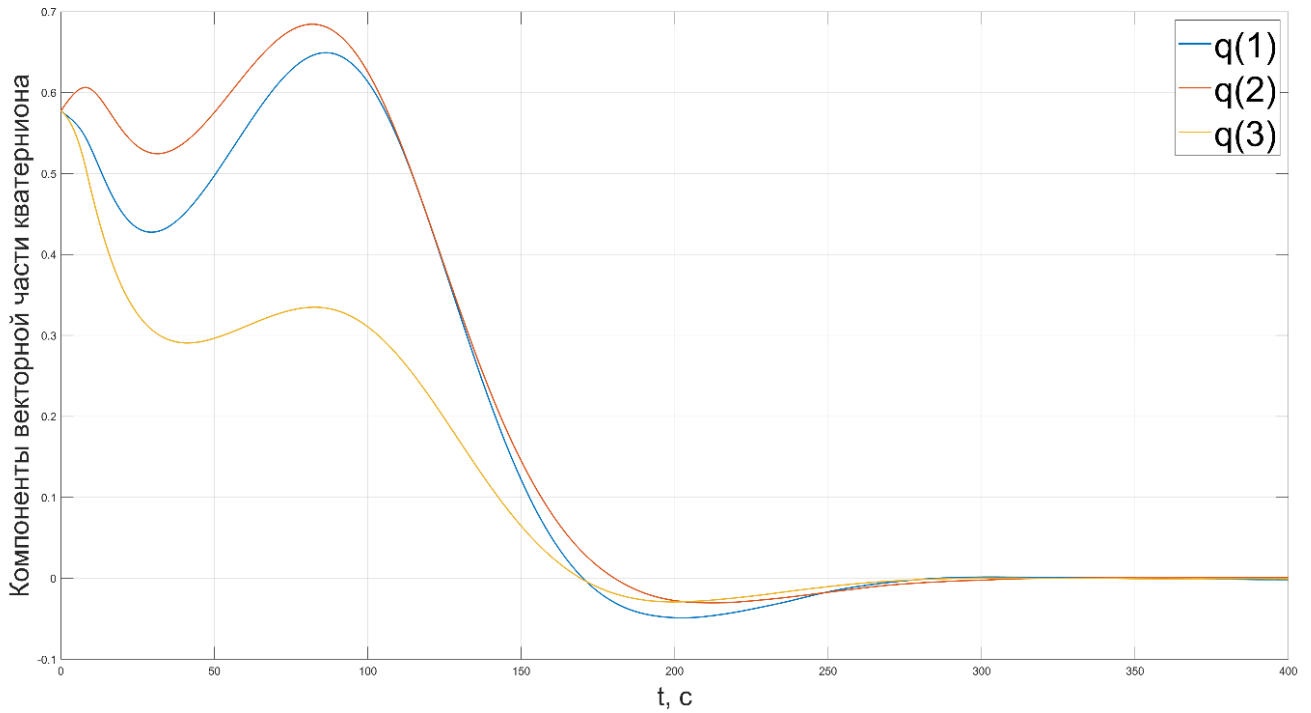


Рис. 28: Зависимость $q(t)$, под действием под действием УПМ со случайными шумами

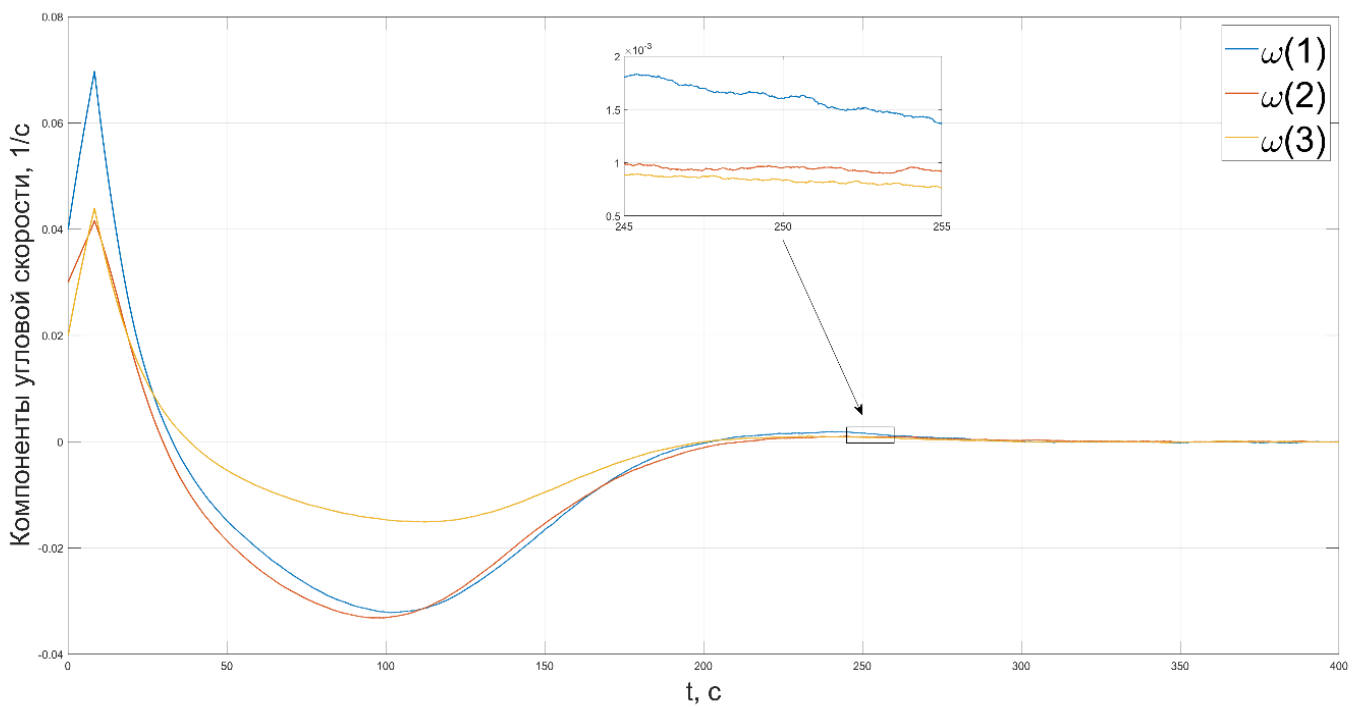


Рис. 29: Поведение угловой скорости КА, под действием УПМ с шумами

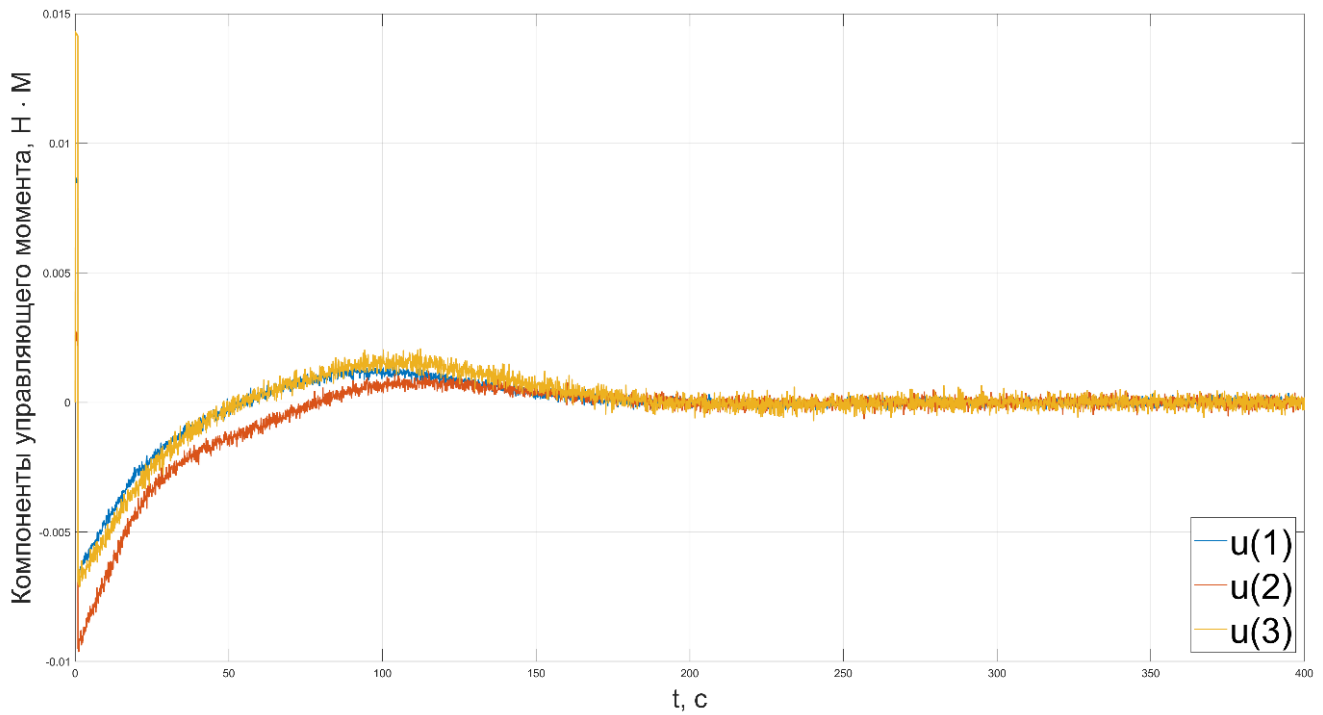


Рис. 30: Управляющий момент КА, генерируемый под действием

УПМ

По графикам видно, что методы обеспечивают устойчивость управления к шумам, причем сохраняя паттерны зависимости управляющего момента от времени. Однако точность явно стала хуже.

Заключение

В работе проведено моделирование движения КА с тремя методами управления: Ляпуновское управление, Скользящее управление и УПМ. Так же было проведено сравнение этих методов по времени работы, скорости сходимости и устойчивости к случайным внешним моментам. В результате было выяснено, что быстрее всех работает скользящее управления, а медленнее всех УПМ. Так же было установлено, что лучшую точность, при меньшем числе итераций показывает УПМ, а худшую скользящее управление. Так же было получено, что все три метода устойчивы к случайным внешним моментам. Оптимальным выбором для решения задач, поставленных в данной работе, будет использование Ляпуновского управления, обеспечивающее, хоть и не лучшую точность за схожее число итераций, что и УПМ, но сравнимую, имея притом скорость работы сравнимую со Скользящим управлением.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Маштаков Я.В., Ткачѳв С. С. *Построение углового движения космического аппарата при межпланетном перелете*, Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 24. 16 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-24>

[2] Shih-Che Lo, Yon-Ping Chen. *Smooth Sliding-Mode Control for Spacecraft Attitude Tracking Maneuvers*, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* Vol. 18, No. 6, November-December 1995.

[3] Song C., Genaro I., Klaus S. *Inverse Dynamics based Model Predictive Control for Spacecraft Rapid Attitude Maneuver*, *IFAC PapersOnLine* 52-12 (2019) 111–116

[4] Stoll E., Yang J., Klaus S. *Adaptive Sliding Mode Control for Spacecraft Proximity Operations Based on Dual Quaternions*, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, July 2019

[5] Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С., Пеньков В. И., Ткачев С. С., Маштаков Я. В. *Скользящее управление для трехосной магнитной ориентации спутника*, Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша 2014 № 56. 7с.

URL: https://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_56_rus.pdf

[6] Аристова Е. Н., Лобанов А. И., *Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ*, МФТИ 2015 с. 25-28.