

Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)
ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
(Специализация «Управление и механика космического полета»)

ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПОЛЕТОВ
С ПАССИВНЫМИ ГРАВИТАЦИОННЫМИ МАНЕВРАМИ
С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ВИРТУАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Выпускная квалификационная работа
студента 772 группы
Широбокова Максима Геннадьевича

Научный консультант
асп. МФТИ Трофимов С.П.

Научный руководитель
д.ф.-м.н., проф. Овчинников М.Ю.

г. Москва
2013

Содержание

1	Введение	4
2	Постановка задачи	8
3	Проектирование межпланетных миссий с пассивными гравитационными маневрами	9
3.1	Расчет гелиоцентрического участка траектории	9
3.2	Расчет планетоцентрического участка траектории	12
4	Построение базы виртуальных траекторий	20
5	Поиск и уточнение виртуальных траекторий в соответствии с реальным движением планет	24
6	Время работы метода	27
7	Модельные задачи о полете к дальним планетам Солнечной системы	28
7.1	Перелеты к Юпитеру	28
7.1.1	Маршрут EVJ	29
7.1.2	Маршрут EVEJ	30
7.1.3	Маршрут EVEEJ	31
7.2	Перелеты к Урану	34
7.2.1	Маршрут EVSU	35
7.2.2	Маршрут EVESU	36
7.2.3	Маршрут EVEESU	37
8	Заключение	39
A	Приложение. Задача Ламберта в задаче двух тел	40
A.1	Постановка задачи Ламберта и обозначения	40
A.2	Решение задачи Ламберта	43

А.3 Восстановление параметров орбиты по решению уравнения Ламберта 44

В Приложение. Определение положений и скоростей планет в пространстве 45

С Приложение. Определение соответствия между положением планеты и временем 46

1 Введение

Активное исследование планет солнечной системы и космического пространства началось еще в 1961 году с запуска СССР первой автоматической межпланетной станции (далее — АМС) «Венера-1» в сторону Венеры. Следующими планетами-целями стали Марс («Маринер-9», запущен в 1964 г.), Юпитер («Пионер-10», 1972 г.), Сатурн («Пионер-11», 1973 г.), Меркурий («Маринер-10», 1973 г.). Некоторые планеты удавалось посетить только единожды, это Уран («Вояджер-2», 1977 г.) и Нептун («Вояджер-2», 1977 г.). Единственная АМС к Плутону под названием «Новые горизонты» была запущена только в 2006 г. и пройдет минимальное расстояние с планетой в июле 2015 г.

Повышение сложности выполняемых аппаратами научных задач вблизи планет, а также интерес к дальним планетам гигантам привели к необходимости увеличения массы полезной нагрузки, что в свою очередь означало значительное увеличение требуемой массы топлива. Действительно, скорость истечения рабочего тела из химических ракетных двигателей составляет около 3 км/с. При этом по формуле Циолковского каждые 3 км/с дополнительного разгона втрое увеличивают стартовую массу космической системы. Чтобы с низкой околоземной орбиты (скорость 8 км/с) отправиться к Марсу по гомановской траектории, надо набрать около 3,5 км/с, к Юпитеру — 6 км/с, к Плутону — 8-9 км/с. Получается, что полезная нагрузка при полете к дальним планетам составляет лишь несколько процентов от выведенной на орбиту массы, а та, в свою очередь, лишь несколько процентов стартовой массы ракеты. Вот почему 700-килограммовые «Вояджеры» запускались к Юпитеру 600-тонной ракетой «Титан». А если ставится цель выйти на орбиту вокруг планеты, то возникает необходимость брать с собой запас топлива для торможения, и стартовая масса возрастает еще больше.

Впервые идею использовать гравитационное поле планеты для изменения величины и направления скорости космического аппарата высказали Фридрих Артурович Цандер и Юрий Васильевич Кондратюк еще в 1920-1930-х годах. Такие маневры называют гравитационными.

На протяжении всей истории полетов значительное количество межпланетных миссий неоднократно подтверждало важность использования гравитационных маневров. «Маринер-10» был первым космическим аппаратом, использовавшим подобный маневр для достижения другой планеты. Гравитационный маневр у Венеры был совершен в феврале 1974 г. на пути следования к Меркурию.

«Пионер-11», запущенный в 1973 г., использовал гравитационное поле Юпитера для увеличения энергии, которая требовалась для доставки КА на Сатурн. Совершив гравитационный маневр у Сатурна, «Пионер-11» получил достаточное количество энергии, чтобы впоследствии выйти за пределы Солнечной системы.

Успех миссий на основе использования гравитационных маневров повлек продолжение программы по исследованию космоса и планет при помощи АМС «Вояджер-1», посетившим Юпитер и Сатурн, а также «Вояджер-2», двигавшемся вдоль планетной последовательности Земля–Юпитер–Сатурн–Уран–Нептун (EJSUN).

АМС «Галилео» был изначально спроектирован для прямого перелета на Юпитер с помощью космического шаттла. Однако, протоколы безопасности, введенные после крушения шаттла STS-51L в 1986 г., потребовали использования иных ракетных ускорителей, которые не могли обеспечить прямой перелет. Траектория «Галилео» была перепроектирована. Предлагалось использовать один маневр у Венеры и два маневра у Земли, что и было успешно реализовано.

Траектория АМС «Кассини-Гюйгенс» оказалась самой сложной траекторией к дальним планетам с множеством гравитационных маневров. Целью миссии было изучение Сатурна и его системы спутников. Космический аппарат был запущен в 1997 г. и вышел на орбиту Сатурна в 2004 г., использовав при этом два гравитационных маневра у Венеры, один у Земли и один у Юпитера (EVVEJS).

Второй аппарат на Меркурий, «Мессенджер», запущенный в 2004 г., выполнил один маневр у Земли и два дополнительных маневра у Венеры. Далее последовала серия из трех маневров около Меркурия с целью снизить относи-

тельную скорость (EЕVVMеMeMeMe).

Как показывают примеры, траектории с множеством гравитационных маневров активно используются последние 40 лет. Проектирование траекторий до создания современных высокопроизводительных вычислительных средств, содержащих гравитационные маневры, опиралось в значительной степени на интуицию баллистиков и использование некоторых простых аналитических и графических средств типа диаграммы Тиссерана. Точный расчет полученных таким путем приближенных траекторий осуществлялся с помощью методов локальной оптимизации и теории оптимального управления и представлял собой, как правило, ньютоновский или квазиньютоновский итерационный процесс. Однако даже для простых межпланетных перелетов оптимизируемый функционал — характеристическая скорость — имеет множество локальных минимумов и может быть в некоторых точках недифференцируемым или даже разрывным [1]. Как следствие, выбор начальной точки — приближенной траектории — оказывает сильное влияние на сходимость итерационного процесса и качество выполненной оптимизации (близость найденного оптимума к глобальному).

Классический метод полного перебора, использовавшийся с самого начала космической эры для проектирования межпланетных полетов, заключается в случае прямого перелета в переборе дат старта и времени полета и численном решении получающихся при этом задач Ламберта [2, 3]. Траектории же с промежуточными гравитационными маневрами разбиваются на участки «планета-планета», к которым применяется та же самая процедура. Метод полного перебора оказывается весьма ресурсозатратным при решении задачи оптимизации траекторий с большим числом гравитационных маневров.

Современный подход в технологии проектирования межпланетных траекторий заключается в автоматической генерации множества локально-оптимальных приближенных траекторий методами глобальной оптимизации. Здесь можно отметить попытки использования генетических алгоритмов [4, 5], нейронных сетей [6] и методов параллельных вычислений [7]. Также в последнее десятилетие активно разрабатывалась идея применения стохастического поиска для задачи оптимизации сложных траекторий, впервые описанная в работе [8], где

было предложено использование генетических алгоритмов в многокритериальной оптимизации (NSGA) для поиска перелетов «планета-планета» с малой тягой. Алгоритм эволюционирует популяцию индивидуумов, представленных как возможные траектории, чьи хромосомы закодированы начальными значениями множителей Лагранжа и полным временем полета. Статья представляет некоторые примеры оптимальных по Парето траекторий от Земли к Марсу.

Можно отметить также создание Vasile в 2003 г. стохастического глобального оптимизатора (EPIC), который был протестирован и успешно применяется в решении задач с межпланетными полетами [9].

В последние несколько лет отмечается сфокусированность на смешении различных техник глобальной оптимизации. Например, в [10] показано, что совместное использование в многокритериальной оптимизационной процедуре дифференциальной эволюции (DE) [11, 12] и генетических алгоритмов может быть эффективным.

В 2008 Vasile было предложено обобщение дифференциальной эволюции и метода роя частиц [13] в форме динамической системы с дискретным временем.

Среди отечественных работ по тематике проектирования сложных межпланетных траекторий можно выделить создание метода сквозной оптимизации траекторий аппаратов с малой тягой [14]. В качестве средства преодоления затруднений с выбором начального приближения хорошо зарекомендовал себя метод продолжения по параметру, применимый в задачах и с большой, и с малой тягой [15, 16].

Целью данной работы является создание эффективного с точки зрения быстродействия метода проектирования межпланетных траекторий, который был бы одновременно простым в реализации и позволял бы получать траектории в практически значимом классе задач: с пассивными гравитационными маневрами и импульсами в глубоком космосе. Для достижения поставленной цели выбираются подходящие модели и предположения, касающиеся приближений траекторий КА и орбит планет, подробно описываются расчеты всех необходимых параметров движения КА и выполняется поиск оптимальных траекторий.

Создание подобного метода позволит с успехом применять его на этапе пред-

варительного анализа миссии.

В главе 2 дана постановка задачи и определены все используемые модели и предположения. Глава А посвящена описанию и решению задачи Ламберта. Глава 3 подробно описывает содержание разработанного метода виртуальных траекторий в применении к проектированию межпланетных траекторий с пассивными гравитационными маневрами и импульсами в глубоком космосе, а в главе 4 поясняется, каким образом происходит построение базы виртуальных траекторий. Способ наложения реального движения планет на виртуальные траектории, т.е. учета связи между положением планет и временем, излагается в главе 5. В главе 6 приводится сравнение разработанного метода с классическим. В главе 7 представлены примеры использования МВТ к решению модельных задач полета к Юпитеру и Урану.

2 Постановка задачи

В работе решается задача проектирования оптимальных межпланетных траекторий с большим числом гравитационных маневров в следующей постановке:

- космический аппарат (КА) оснащен двигателем большой тяги (химическим двигателем большой мощности);
- траектория формируется из участков пассивного полета, соединяющихся между собой в точках приложения управляющих импульсов при выполнении маневров в глубоком космосе.

Орбиты планет считаются некомпланарными кеплеровыми эллипсами, элементы которых берутся на некоторую эпоху. К примеру, авторами использовались орбитальные элементы планет по отношению к средней эклиптике и среднему равноденствию на эпоху J2000.0 [17].

Как это делается в большинстве методов проектирования межпланетных траекторий, будем пользоваться моделью сопряженных конических сечений: внутри сфер действия планет (на планетоцентрических участках траектории)

учитывается только притяжение соответствующей планеты, вне сфер действия планет — на гелиоцентрических участках — только притяжение Солнца (сферы действия на этом этапе считаются точечными).

3 Проектирование межпланетных миссий с пассивными гравитационными маневрами

Метод виртуальных траекторий состоит из двух этапов. На первом этапе для построения базы виртуальных траекторий необходимо провести дискретизацию: на орбите каждой из планет, входящих в выбранный планетный маршрут, отметим, идя с небольшим по истинной аномалии шагом (постоянным или переменным), набор узловых точек (рис. 1). Виртуальной траекторией в данной работе будем называть траекторию, проходящую через планетные узлы, с активными гелиоцентрическими участками (в некоторой точке на этом участке происходит мгновенное изменение скорости) и пассивными гравитационными маневрами. Угловая дальность полета на каждом из таких участков полагается не превосходящей 2π .

3.1 Расчет гелиоцентрического участка траектории

Приступим теперь к детальному описанию расчетов на участках траекторий. Рассмотрим один из гелиоцентрических участков. Пусть \mathbf{r}_1 — радиус-вектор начальной точки участка — узла планеты 1, а \mathbf{r}_2 — радиус-вектор конечной точки участка — узла планеты 2, \mathbf{u}_1 — вектор скорости планеты 1 в точке \mathbf{r}_1 (далее, ссылаясь на точки/узлы, будем просто указывать их радиус-вектор). Местная параболическая скорость равна $v_{\text{пар}} = \sqrt{2\mu_S/r_1}$, $r_1 = |\mathbf{r}_1|$. Здесь μ_S — гравитационный параметр Солнца. Орбитальный угловой момент планеты 1 определяется вектором $\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1$.

Задаваясь углами наклона θ в точке \mathbf{r}_1 можно определить скорость КА в \mathbf{r}_1

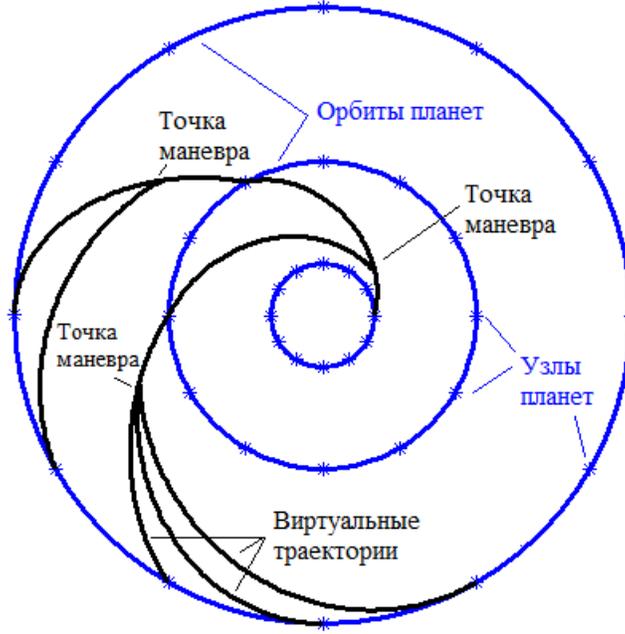


Рис. 1. Дискретизация орбит планет

по формулам

$$\left(\frac{v_1}{v_{\text{par}}}\right)^2 = \frac{1}{2 \cos \theta} \frac{1 - \cos \varphi_{12}}{r_1 \cos \theta / r_2 - \cos(\theta + \varphi_{12})},$$

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \sin \theta \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} + v_1 \cos \theta \frac{(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_1}{|(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_1|} \text{sgn}(\mathbf{c}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)),$$

где φ_{12} — угловая дальность между \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Отсюда можно получить все параметры орбиты перелета из точки \mathbf{r}_1 в точку \mathbf{r}_2 :

Опишем теперь вариант выбора точек для маневров в глубоком космосе. После того как определены все параметры движения вдоль траектории, соединяющей узлы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , вычисляются значения эксцентрических аномалий E_1 и E_2 , соответствующих узлам \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Затем выбираются значения эксцентрических аномалий из множества

$$E^{(i)} = E_1 + \frac{E_2 - E_1}{1 + N} (i - 1), \quad i = 2, \dots, N + 1,$$

которые и будут соответствовать точкам для маневров в глубоком космосе.

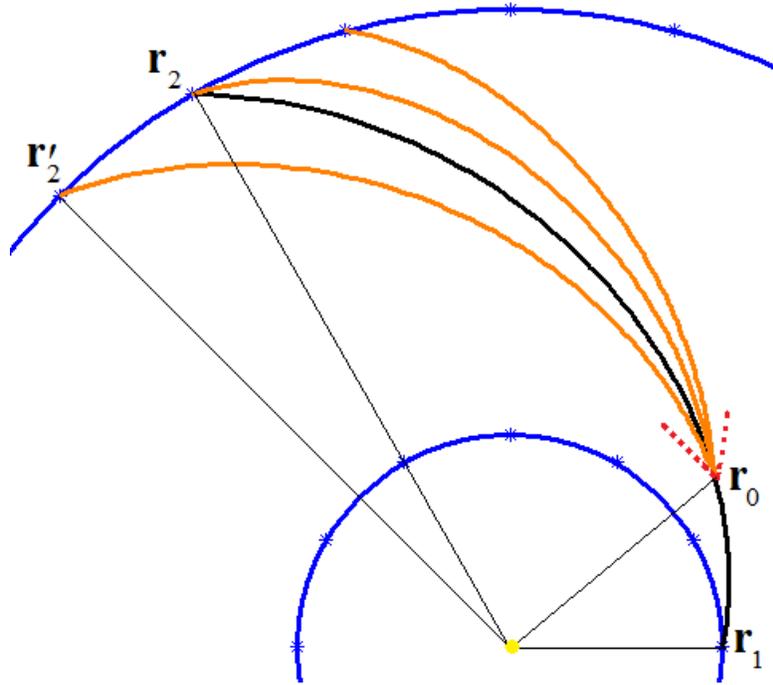


Рис. 2. Пучок траекторий из точки маневра

Далее, пусть на участке орбиты между точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 выбрана точка \mathbf{r}_0 , в которой требуется совершить маневр в глубоком космосе (см. рис. 2).

На орбите планеты 2 выбирается точка \mathbf{r}'_2 , в которую требуется построить траекторию из точки \mathbf{r}_0 . Обозначим за Δv_{lim} максимально допустимую величину приращения характеристической скорости на данном участке траектории. Здесь под приращением характеристической скорости понимается

$$\Delta v = |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}'_0|,$$

где \mathbf{v}_0 — скорость КА в \mathbf{r}_0 до маневра, \mathbf{v}'_0 — скорость после маневра. Угол наклона траектории до маневра в точке \mathbf{r}_0 определяется скоростью \mathbf{v}_0 и вычисляется по формуле

$$\theta_{\mathbf{v}_0} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}_0| \cdot |\mathbf{v}_0|}$$

Угол наклона траектории после маневра полностью определяет траекторию из \mathbf{r}_0 в \mathbf{r}'_2 и величину маневра. С практической точки зрения, удобно рассмат-

ривать углы наклона траектории после маневра из интервала

$$[\theta_{\mathbf{v}_0} - \Delta\theta, \theta_{\mathbf{v}_0} + \Delta\theta],$$

где $\Delta\theta = \Delta v_{\text{lim}}/|\mathbf{v}_0|$. Отметим, что здесь нас интересуют только те углы наклона траектории $\theta_{\mathbf{v}'_0}$, при которых возможно движение из \mathbf{r}_0 в \mathbf{r}'_2 , т.е. для которых выполнено

$$\left(\frac{v'_0}{v_{0,\text{par}}}\right)^2 \equiv \frac{1}{2 \cos \theta_{\mathbf{v}'_0} r_0 \cos \theta_{\mathbf{v}'_0}/r'_2 - \cos(\theta_{\mathbf{v}'_0} + \varphi)} > 0$$

где $v'_0 = |\mathbf{v}'_0|$ — модуль скорости после маневра, $v_{0,\text{par}}$ — параболическая скорость в точке \mathbf{r}_0 , φ — угловая дальность между \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}'_2 .

После того как угол наклона траектории после маневра выбран, можно найти вектор скорости \mathbf{v}'_0 в точке \mathbf{r}_0 после маневра. Тогда величину приращения характеристической скорости $\Delta v = |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}'_0|$ следует сравнить с предельно допустимым значением Δv_{lim} и случае $\Delta v \leq \Delta v_{\text{lim}}$ сохранить данные о полученной траектории, проходящей через точки \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}'_2 . В противном случае такая траектория отклоняется и в базу данных не попадает. По известным параметрам двух соответствующих кеплеровых дуг можно найти времена полета из \mathbf{r}_1 в \mathbf{r}_0 и из \mathbf{r}_0 в \mathbf{r}'_2 , а также скорость прибытия \mathbf{v}'_2 в точку \mathbf{r}'_2 . Так рассчитываются все параметры траектории между узлами планеты 1 и планеты 2. Аналогичные вычисления можно выполнить для любых двух узлов на орбитах планет, «соседствующих» в выбранном планетном маршруте. Для резонансных виртуальных траекторий перелет может совершаться между двумя узлами на орбите одной и той же планеты.

3.2 Расчет планетоцентрического участка траектории

Перейдем теперь к рассмотрению движения КА на планетоцентрических участках траектории. Пусть рассматривается узел некоторой планеты с радиус-вектором \mathbf{r} . Планетоцентрическую скорость на входе в сферу действия будем считать известной, обозначим ее $v_{\text{in}}^{\text{rel}}$. Если это первая планета маршрута, то величина $v_{\text{in}}^{\text{rel}}$ просто равна требуемому гиперболическому избытку на выходе из

сферы действия планеты; в остальных случаях она вычисляется по формуле

$$v_{\text{in}}^{\text{rel}} = \left| \mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{gelio}} - \mathbf{u} \right|,$$

где $\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{gelio}}$ — гелиоцентрическая скорость на входе в сферу действия в точке \mathbf{r} , найденная из рассмотрения соответствующего гелиоцентрического участка, \mathbf{u} — скорость планеты в точке \mathbf{r} . Элементарные формулы для определения положений и скоростей планет по заданным значениям орбитальных элементов приведены в приложении В.

Пусть выбран \mathbf{r}' — радиус-вектор узла следующей планеты в маршруте. Вычислим гелиоцентрическую скорость на выходе из сферы действия планеты $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$, которая бы определяла траекторию из узла \mathbf{r} в узел \mathbf{r}' , при условии, что вход в сферу действия планеты осуществляется со скоростью $v_{\text{in}}^{\text{rel}}$, гравитационный маневр пассивный, а минимальное расстояние до планеты будет отвечать некоторым требованиям-ограничениям. Именно, будем считать, что для каждой планеты определены радиус сферы действия $r_{\pi, \text{max}}$ (ограничение «сверху») и некоторое безопасное расстояние $r_{\pi, \text{min}}$ (ограничение «снизу»). Величина $r_{\pi, \text{max}}$ может быть выбрана равной радиусу сферы действия, а $r_{\pi, \text{min}}$ может определяться радиусом планеты и толщиной ее атмосферы. Обозначим $v_p = \sqrt{2\mu_S/r}$ за параболическую скорость в точке \mathbf{r} .

Искомый вектор гелиоцентрической скорости КА на выходе из сферы действия планеты можно представить как направленный отрезок с центром в точке \mathbf{r} и концом на сфере S радиуса $R = v_{\text{out}}^{\text{rel}} = v_{\text{in}}^{\text{rel}}$ с центром на конце направленного отрезка \mathbf{u} , исходящего из точки \mathbf{r} , $v_{\text{out}}^{\text{rel}} = |\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}}|$ (см. рис. 3). Так как траектория должна лежать в плоскости, образованной векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' (для краткости, будем обозначать эту плоскость буквой Π), то и вектор искомой скорости $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$ необходимо лежит в этой плоскости, которая отсекает от сферы S окружность O радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$, где d — расстояние от центра сферы S до плоскости Π .

Пусть $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$ — орбитальный угловой момент планеты. Вектор нормали

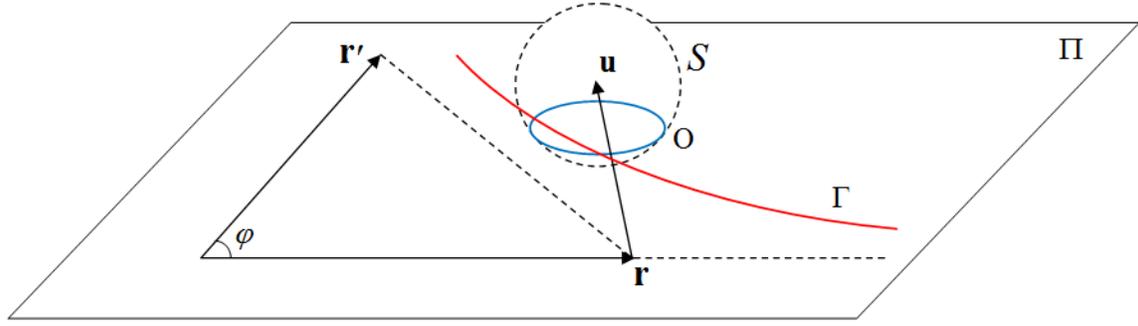


Рис. 3. К определению параметров пассивного гравитационного маневра

к плоскости Π определим равенством

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'|} \operatorname{sgn} \left(\mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'|} \right)$$

(здесь рассматривается случай неколлинеарных векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Случай, равенства этих векторов рассматривается ниже). Пусть φ — угловая дальность между \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Введем следующий базис:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}/r, \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1.$$

Матрица перехода из эклиптической системы координат в систему координат, образованную векторами этого базиса, представляется в виде

$$M = \left[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \right]^T.$$

Отсюда следует, что компоненты центра окружности O в базисе векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 есть первые две компоненты вектора $M\mathbf{u}$, а величина d равна третьей компоненте этого вектора.

Известно, что множеству векторов скорости, которые определяют траектории между двумя неколлинеарными точками (в нашем случае \mathbf{r} и \mathbf{r}'), можно однозначно сопоставить некоторую гиперболу Γ с асимптотами, направленными вдоль векторов \mathbf{r} и $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Таким образом, конец вектора $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$ лежит в точках пересечения гиперболы Γ и окружности O , которых в общем случае может быть не более четырех, так как гипербола и окружность представляют собой кривые

второго порядка. С практической точки зрения нас интересуют решения, отвечающие орбитальным угловым моментам КА, которые составляют острые углы с направлением на северный полюс эклиптики. Таким образом, остаются не более двух точек пересечения гиперболы и окружности.

Получим уравнение гиперболы. Для этого обратимся к равенству

$$\left(v_{\text{out}}^{\text{gelio}}\right)^2 = \frac{v_p^2}{2 \cos \theta} \frac{1 - \cos \varphi}{a \cos \theta - \cos(\theta + \varphi)},$$

где $a = r/r'$, θ — угол наклона траектории в точке \mathbf{r} на выходе из сферы действия, φ — угловая дальность. Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} u = \pi/2 - \theta, \\ x = v_{\text{out}}^{\text{gelio}} \cos u, \\ y = v_{\text{out}}^{\text{gelio}} \sin u \end{cases}$$

Здесь (x, y) — декартовы координаты в плоскости Π в базисе векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , u — полярный угол, измеряемый от направления \mathbf{e}_1 . Таким образом, уравнение гиперболы Γ запишется в виде

$$y = \frac{A}{By + Cx},$$

где постоянные $A = v_p^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, $B = a - \cos \varphi$, $C = \sin \varphi$.

Уравнение же окружности записывается в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2,$$

где $M\mathbf{u} \equiv (x_0, y_0, d)^T$.

Задача о поиске пересечений гиперболы Γ и окружности O сводится к решению алгебраического уравнения 4-ой степени и отбору таких решений, которые определяют движение КА с орбитальным угловым моментом, составляющим острый угол с орбитальным угловым моментом планеты \mathbf{c} . Рассмотрим два случая.

В случае $\text{sgn}(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')) > 0$ имеем $C > 0$. Тогда удобно выполнить преобразование координат $x = X - BY$, $y = CY$ и искать решения с $y > 0$. В этом

случае система

$$\begin{cases} x = X - BY \\ y = CY \\ By^2 + Cxy = A \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \end{cases}$$

приводит к алгебраическому уравнению 4ой степени

$$p_1 X^4 + p_2 X^3 + p_3 X^2 + p_4 X + p_5 = 0$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, \\ p_2 &= -2x_0, \\ p_3 &= x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 - 2BD, \\ p_4 &= 2D(Bx_0 - Cy_0), \\ p_5 &= D^2(B^2 + C^2). \end{aligned}$$

Было введено обозначение $D = A/C^2$.

Если же $\text{sgn}(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')) < 0$, то $C < 0$. В этом случае удобно рассматривать преобразование $x = BX - Y$, $y = -CX$ и искать решения с $y > 0$. Аналогично, получаем уравнение

$$p_1 X^4 + p_2 X^3 + p_3 X^2 + p_4 X + p_5 = 0$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} p_1 &= B^2 + C^2, \\ p_2 &= 2(Cy_0 - Bx_0), \\ p_3 &= x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 - 2BD, \\ p_4 &= 2Dx_0, \\ p_5 &= D^2. \end{aligned}$$

Заметим, что в обоих случаях $Y = D/X$ и, более того, выражение $y > 0$ равносильно $X > 0$. По значениям найденных пар (не более двух) (X, Y) с помощью линейного преобразования легко восстанавливаются соответствующие

пары (x, y) , а, следовательно, величины $v_{\text{out}}^{\text{gelio}} = \left| \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}} \right|$ и углы наклона траектории θ . Этих данных достаточно для определения векторов скорости $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$, определяющих траектории из \mathbf{r} в \mathbf{r}' .

Пусть теперь даны гелиоцентрические векторы входа и выхода из сферы действия планеты $\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{gelio}}$ и $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$ соответственно, а также скорость планеты \mathbf{u} . Тогда легко определить перицентральное расстояние до планеты. Относительные скорости КА равны соответственно $\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} = \mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{gelio}} - \mathbf{u}$ и $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}} = \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}} - \mathbf{u}$. Угол поворота вычисляется по формуле

$$\alpha = \arccos \frac{\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}}}{\left| \mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \right| \cdot \left| \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}} \right|}$$

Эксцентриситет гиперболической орбиты

$$e = \frac{1}{\sin(\alpha/2)},$$

перицентральное расстояние

$$r_{\pi} = \mu_P \frac{e - 1}{(v_{\text{out}}^{\text{rel}})^2},$$

где μ_P — гравитационный параметр планеты. Если перицентральное расстояние удовлетворяет условию $r_{\pi, \min} \leq r_{\pi} \leq r_{\pi, \max}$, то данные о полученной траектории сохраняются, иначе траектория отклоняется и в базу данных не попадает.

Теперь рассмотрим случай, когда КА движется в тот же планетный узел, т.е. когда $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Любая точка на сфере S определит выходную гелиоцентрическую скорость $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$, двигаясь с которой КА вновь через некоторое время вернется в положение \mathbf{r} . Но ограничимся лишь такими траекториями, периоды орбит T которых составляют кратное число периодов орбит планеты T_{planet} , в поле которой совершается данный гравитационный маневр, а именно

$$T = k \cdot T_{\text{planet}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как большая полуось орбиты на гелиоцентрическом участке на выходе из

сферы действия планеты связана с периодом орбиты выражением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_S}},$$

то значения больших полуосей a_k , отвечающие разным $k = 1, 2, \dots$, а также значения выходной гелиоцентрической скорости в точке \mathbf{r} , будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} a_k &= \sqrt[3]{\left(\frac{kT_{\text{planet}}}{2\pi}\right)^2 \mu_S}, \\ v_{\text{out}}^{\text{gelio}} &= \sqrt{\frac{2\mu_S}{r} - \frac{\mu_S}{a_k}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Абсолютные значения выходной гелиоцентрической скорости, задаваемые формулами (1), для каждого $k = 1, 2, \dots$ определяют сферы S_k с центром на конце вектора \mathbf{r} и радиусом $v_{\text{out}}^{\text{gelio}}$. Если для некоторого k сфера S_k не пересекает сферу S , то не существует пассивного гравитационного маневра, который переводил бы КА на орбиту с периодом $T = kT_{\text{planet}}$.

Пусть пересечение сфер S_k и S существует. Кривой пересечения двух сфер в таком случае является окружность O_k (случай точки не рассматривается), содержащее бесконечное количество точек, которое можно сузить, учитывая ограничения на значения перицентрального расстояния r_π :

$$r_{\pi,\min} \leq r_\pi = \mu_P \frac{e-1}{(v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2} \leq r_{\pi,\max}.$$

Отсюда вытекает ограничение на синус половины угла поворота орбиты

$$\frac{1}{1 + (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \frac{r_{\pi,\max}}{\mu_P}} \leq \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{1 + (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \frac{r_{\pi,\min}}{\mu_P}},$$

и, окончательно, ограничения на косинус угла поворота орбиты

$$1 - 2 \left(\frac{1}{1 + (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \frac{r_{\pi,\min}}{\mu_P}} \right)^2 \leq \cos \alpha \leq 1 - 2 \left(\frac{1}{1 + (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \frac{r_{\pi,\max}}{\mu_P}} \right)^2.$$

Центр O окружности O_k лежит на прямой, соединяющей центры сфер S_k и S , т.е. на прямой, проходящей вдоль вектора \mathbf{u} , на расстоянии

$$u_0 = \frac{\left(v_{\text{out}}^{\text{gelio}}\right)^2 - \left(v_{\text{in}}^{\text{rel}}\right)^2}{2u} + \frac{u}{2}$$

от начала вектора \mathbf{u} . Окружность O_k лежит в плоскости, которая проходит через точку O и ортогональна вектору \mathbf{u} , причем ее радиус равен

$$R = \sqrt{\left(v_{\text{out}}^{\text{gelio}}\right)^2 - u_0^2}.$$

Введем два ортогональных вектора \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 :

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{u})}{|\mathbf{u} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{u})|}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{u}|}.$$

Будем параметризовать окружность O_k углом φ , который составляет отрезок, соединяющий точку на окружности и ее центр, с направлением \mathbf{E}_1 , причем отсчет в положительном направлении будем вести против часовой стрелки, если смотреть из начала вектора \mathbf{u} .

Тогда положение некоторой точки A на окружности O_k с параметром φ будет задаваться формулой

$$\mathbf{OA} = R (\mathbf{E}_1 \cos \varphi + \mathbf{E}_2 \sin \varphi),$$

а соответствующие значения гелиоцентрической и планетноцентрической скоростей запишутся в виде

$$\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}} = \mathbf{OA} + \mathbf{u} \frac{u_0}{u}, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}} = \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}} - \mathbf{u}. \quad (3)$$

Получим выражение для $\cos \alpha$ как функции угла φ . Вспоминая, что

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}}}{|\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}}| \cdot |\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}}|},$$

получим условия на параметр φ

$$g_{\min} \leq A \cos \varphi + B \sin \varphi + C \leq g_{\max}, \quad (4)$$

где были введены обозначения

$$\begin{aligned} A &= R (\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \cdot \mathbf{E}_1), \\ B &= R (\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \cdot \mathbf{E}_2), \\ C &= (\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \cdot \mathbf{u}) \frac{u_0 - u}{u}, \\ g_{\min} &= (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \left(1 - 2 \left(\frac{1}{1 + (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \frac{r_{\pi, \min}}{\mu_P}} \right)^2 \right), \\ g_{\max} &= (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \left(1 - 2 \left(\frac{1}{1 + (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \frac{r_{\pi, \max}}{\mu_P}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Неравенства (4) можно переписать следующим образом:

$$\frac{g_{\min} - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \leq \sin(\varphi + \theta) \leq \frac{g_{\max} - C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (5)$$

где $\theta = (-1)^{\frac{\text{sgn} A - 1}{2}} \arccos \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Неравенства (5) и формула (2) могут быть использованы для расчета гелиоцентрических скоростей $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$ на выходе из сферы действия планеты. Двигаясь с такой скоростью, КА сделает виток вокруг Солнца за время, кратное сидерическому периоду движения планеты. Более того, его траектория на припланетном участке полета будет удовлетворять требованиям безопасности с точки зрения максимального приближения к планете.

4 Построение базы виртуальных траекторий

Теперь, задав формулы для расчета параметров произвольных гелиоцентрического и планетоцентрического участков полета, можно перейти к описанию процесса построения базы виртуальных траекторий.

Будем считать, что изначально имеется база данных **PLANETS**, в которой для всех узлов на орбите каждой из планет Солнечной системы хранятся сведения о координатах узла в гелиоцентрической эклиптической системе координат, скорости планеты в узле и временах прохождения узла планетой. Элементарные формулы, используемые при создании базы **PLANETS**, приведены в приложениях В и С.

На первом гелиоцентрическом участке любой виртуальной траектории начальная точка является одним из узлов на орбите Земли. Формируется таблица, столбцы которой содержат данные в следующем порядке:

1. n_1 — порядковый номер начального узла первого участка;
2. \mathbf{r}_1 — радиус-вектор этого узла;
3. $\mathbf{v}_1^{\text{rel}}$ — вектор планетоцентрической скорости КА на выходе из сферы действия планеты старта;
4. $\mathbf{v}_1^{\text{gelio}}$ — вектор гелиоцентрической скорости КА на выходе из сферы действия планеты старта;
5. \mathbf{r}_{12} — радиус-вектор точки маневра в глубоком космосе на первом гелиоцентрическом участке;
6. $\mathbf{v}_{12}^{\text{in}}$ — вектор скорости КА в точке \mathbf{r}_{12} до маневра;
7. $T_{1,1}$ — время полета от \mathbf{r}_1 до \mathbf{r}_{12} ;
8. n_2 — порядковый номер узла второй планеты в маршруте;
9. \mathbf{r}_2 — радиус-вектор этого узла;
10. φ — угловая дальность между \mathbf{r}_{12} и \mathbf{r}_2 ;
11. θ — угол наклона траектории в точке \mathbf{r}_{12} после маневра;
12. $\mathbf{v}_{12}^{\text{out}}$ — вектор скорости КА в точке \mathbf{r}_{12} после маневра;

13. Δv_1 — величина характеристической скорости в точке \mathbf{r}_{12} ;
14. $T_{1,2}$ — время полета от \mathbf{r}_{12} до \mathbf{r}_2 ;
15. T_1 — время полета от \mathbf{r}_1 до \mathbf{r}_2 ;
16. \mathbf{v}_2^{in} — гелиоцентрическая скорость входа в сферу действия второй планеты маршрута;
17. r_π — перицентральное расстояние до планеты во время гравитационного маневра;
18. $\mathbf{v}_2^{\text{out}}$ — гелиоцентрическая скорость выхода из сферы действия планеты.

Особенностью первого гелиоцентрического участка является выбор гиперболического избытка скорости из некоторого допустимого множества скоростей, которое определяется характеристиками маршевых двигателей ракеты-носителя и разгонного блока, а также массой M_p полезной нагрузки и массой M_{ef} дополнительной двигательной установки вместе с запасом топлива для нее. Так, при $M_p + M_{\text{ef}} \approx 1000$ кг для ракеты-носителя «Союз-ФГ» и разгонного блока «Фрегат» максимальное значение гиперболического избытка скорости при старте не превышает 4 км/с.

Перебираются все допустимые значения \mathbf{r}_1 , $|\mathbf{v}_1^{\text{rel}}|$, \mathbf{r}_2 и θ , в результате чего формируется массив **VTB** виртуальных траекторий от Земли до второй планеты в выбранном планетном маршруте. Размерность этого массива равна $32 \times N$, где N — число таких траекторий. Первые 10 строк соответствуют данным с 1 по 4 пункты — данным о старте, оставшиеся 22 строки соответствуют данным с 5 по 16 пункты о первом гелиоцентрическом участке. Далее следует расчет планетоцентрического участка траектории около второй по счету планеты маршрута, в результате чего к этому массиву добавляется еще 4 строки, которые соответствуют пунктам 17-18. Далее начинается расчет гелиоцентрического участка траектории между второй и третьей планетами маршрута, это дает 22 строки аналогичных данных пунктов 5-16. Затем следует расчет планетоцентрического участка около третьей планеты маршрута и так далее. Число строк массива

VTB в общем случае равно

$$\underbrace{10}_{\text{данные о старте}} + 4 \cdot \underbrace{(N_p - 2)}_{\text{кол-во грав. маневров}} + 22 \cdot \underbrace{(N_p - 1)}_{\text{кол-во гелиоц. участков}} = 26 \cdot N_p - 20$$

где N_p — число планет в маршруте. В результате перебора параметров, а также проверок отдельных величин на принадлежность допустимым значениям, число виртуальных траекторий массива **VTB** может как расти, так и уменьшаться.

В итоге, после расчета параметров всех $N_p - 1$ гелиоцентрических участков и $N_p - 2$ гравитационных маневров, получаем базу **VTB** виртуальных траекторий. Для каждой виртуальной траектории можно определить общее время полета

$$T = \sum_{n=1}^{N_p-1} T_n$$

и суммарные затраты характеристической скорости

$$\Delta V = \sum_{n=1}^{N_p-1} \Delta v_n.$$

Отметим, что для сложных планетных маршрутов целесообразно задать изначально некоторые разумные ограничения на максимальные значения T и ΔV . В случае их превышения по ходу процедуры построения базы виртуальных траекторий необходимо такие траектории сразу отсеивать. Это позволяет сгладить экспоненциальный рост числа виртуальных траекторий с увеличением числа промежуточных планет в маршруте.

Тот факт, что орбиты планет могут считаться с хорошей точностью неизменными в течение достаточно длительного срока времени, позволяет табулировать базу виртуальных траекторий для каждого планетного маршрута. Таким образом, при проектировании конкретной миссии расчет начинается со второго этапа метода виртуальных траекторий — наложения реального движения планет.

5 Поиск и уточнение виртуальных траекторий в соответствии с реальным движением планет

Процесс наложения реального движения планет в свою очередь также можно разбить на два этапа. Вначале из базы **VTB** виртуальных траекторий отбираются траектории, близкие в некотором смысле к реально реализуемым. Пусть некоторая виртуальная траектория проходит последовательно через N_p узлов на орбитах планет, входящих в выбранный планетный маршрут. Времена перелета на каждом гелиоцентрическом участке обозначим, как и прежде, через $T_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, N_p - 1$. Если существуют такие времена t_i , $i = 1, \dots, N_p$ прохождения планетами соответствующих узлов, что

$$|t_{i+1} - t_i - T_{i,i+1}| < \Delta t_i, \quad i = 1, \dots, N_p - 1, \quad t \in W$$

где Δt_i — заранее заданная допустимая величина «временного промаха», W — допустимый интервал дат старта, то данную виртуальную траекторию будем называть приближенной (рис. 4). При движении по двум нижним (зачеркнутым) дугам планета успевает выйти за границы, определяемыми временным промахом Δt_i для данной планеты, и поэтому все виртуальные траектории, содержащие эти дуги, отсеиваются.

Взяв любую виртуальную траекторию из базы **VTB**, можно проверить выполнение указанного выше критерия последовательно для каждой пары смежных узлов, лежащих на этой траектории. При этом используются векторы времен прохождения узлов планетами, содержащиеся в базе данных **PLANETS**. Если хотя бы для одной пары смежных узлов критерий не может быть выполнен, то такая виртуальная траектория отсеивается. В результате имеем массив приближенных виртуальных траекторий.

Второй этап наложения реального движения планет состоит в уточнении полученных приближенных виртуальных траекторий. Рассмотрим пучок приближенных траекторий, проходящих через один и тот же набор узлов. Проведем более подробную дискретизацию орбит планет вблизи узлов из данного набора (рис. 5).

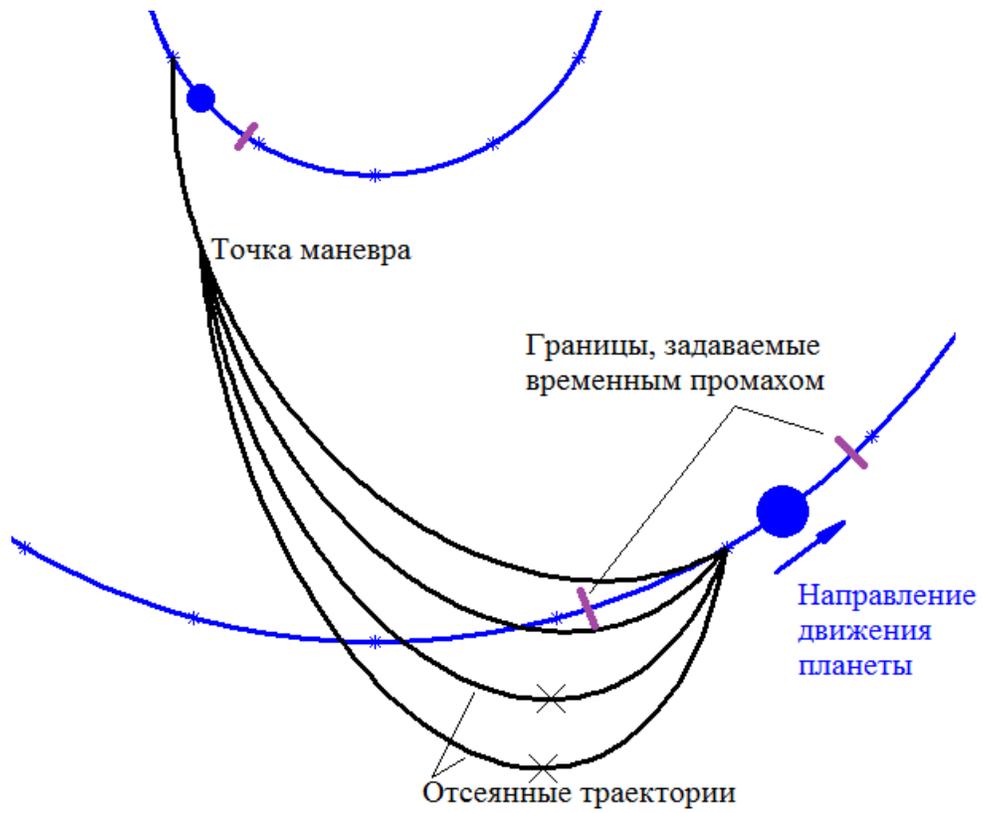


Рис. 4. Отбор приближенных траекторий

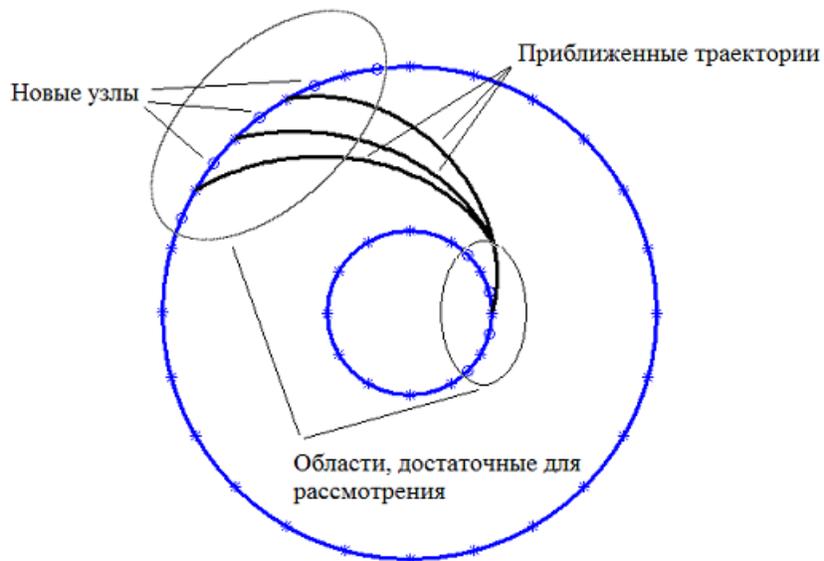


Рис. 5. Дискретизация орбит планет вблизи узлов приближенных траекторий

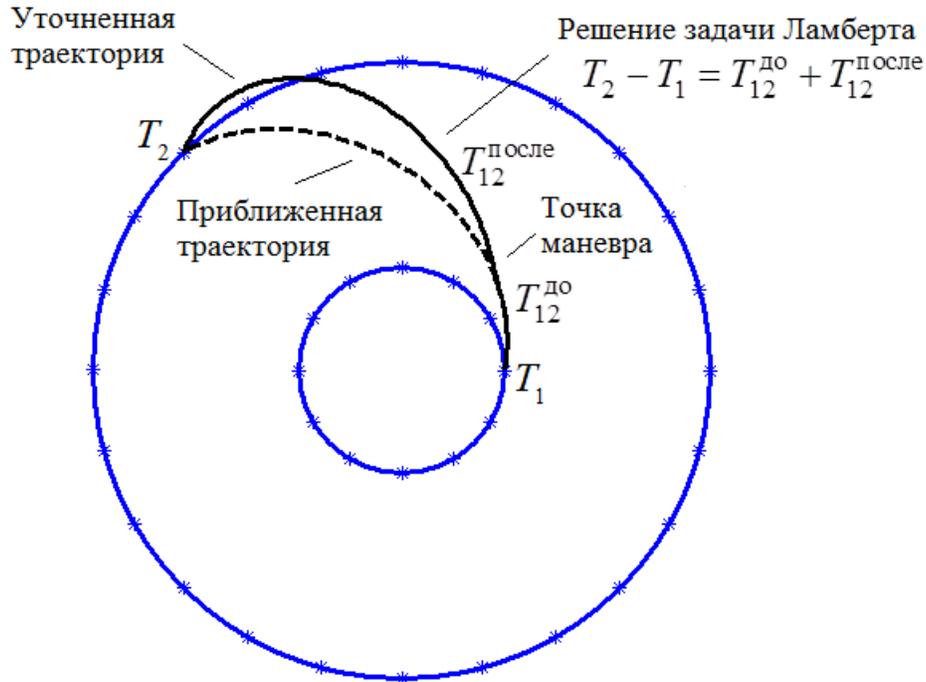


Рис. 6. Уточнение траекторий с помощью решения задачи Ламберта

Добавим возникшие таким образом новые узлы к уже имеющимся узлам, через которые проходит пучок приближенных траекторий. Для любого узла полученного набора узлов известно его положение, а также время, когда соответствующая планета его пройдет. Далее, между каждыми парами найденных узлов на каждом участке «планета-планета» осуществляется построение массива виртуальных траекторий, как это описано выше. Далее полученные траектории корректируются при помощи решения задачи Ламберта на дуге «точка маневра-планета» на каждом межпланетном участке (рис. 6) согласно методу, описанному в приложении А.

Наиболее перспективные в смысле оптимизируемого функционала реальные траектории уточняются итерационно до нужной степени точности: проводится более мелкая дискретизация орбит планет вблизи соответствующих узлов, на каждом из участков «точка маневра-планета» каждого гелиоцентрического участка между всеми парами из новой совокупности узлов находится решение задачи Ламберта и т.д.

Число гравитационных маневров	Время на второй этап МВТ, минут
1	0.5–2
2	10–15
3	25–50
4	100–200

Таблица 1. Характерное время работы второго этапа алгоритма (уточнение и отсев)^{1,2}

6 Время работы метода

Поскольку первый этап предлагаемого алгоритма проектирования траекторий — построение базы виртуальных траекторий — табулируется, логично сделать так, чтобы время, затрачиваемое на вычисления на этом этапе, составляло большую часть от общего времени расчета. Тогда, имея набор баз виртуальных траекторий для основных 10-15 планетных маршрутов полета к планете-цели миссии, можно за сравнительно небольшое время провести приближенное баллистическое проектирование траектории или, другими словами, анализ принципиальной осуществимости этой миссии (*mission feasibility study*).

Как показали численные эксперименты, достаточно мелкая дискретизация орбит планет и выбор подходящего шага по углу наклона траектории на гелиоцентрических участках гарантируют, что доля времени на первоначальное построение базы виртуальных траекторий будет не меньше 80–90%. На наложение реального движения планет — отсев и уточнение базы виртуальных траекторий — уходит 10–20% от общего времени расчета (в абсолютных величинах — см. табл. 1). Именно это время нужно брать в качестве оценки быстродействия алгоритма.

¹Абсолютные значения потраченного на расчеты времени получены для процессора Intel®Core™ i3-330M с тактовой частотой 2.13 ГГц. Все вычисления проводились последовательно на одном ядре. Объем оперативной памяти 2 Гб (в процессе расчетов загрузка, как правило, не превышала 500 Мб).

²Время, затрачиваемое на отсев и уточнение базы виртуальных траекторий, может быть различным для одного и того же планетного маршрута в зависимости от требуемой точности финальной траектории и значений

7 Модельные задачи о полете к дальним планетам Солнечной системы

7.1 Перелеты к Юпитеру

Для демонстрации работы метода рассмотрим задачу проектирования полета к Юпитеру. В качестве целевого функционала, подлежащего минимизации, возьмем величину характеристической скорости, необходимую для выполнения импульсов в глубоком космосе. При этом потребуем, чтобы время полета не превосходило 10 лет, а дата старта лежала в промежутке от 2020 до 2025 года. Ограничений на скорость подлета КА к Юпитеру не налагается. Для примера рассмотрим следующие маршруты:

1. Земля–Венера–Юпитер (EVJ);
2. Земля–Венера–Земля–Юпитер (EVEJ);
3. Земля–Венера–Земля–Земля–Юпитер (EVEEJ).

В качестве минимально допустимого с точки зрения безопасности расстояния до поверхности планеты при выполнении гравитационного маневра были для определенности взяты следующие значения: Венера — 250 км (верхняя граница атмосферы); Земля — 600 км.

При построении базы виртуальных траекторий расстояние между соседними узлами Венеры и соседними узлами Земли варьировалось для разных планетных маршрутов от 44.8 млн км (0.3 а.е.) до 89.7 млн км (0.6 а.е.). Расстояние между узлами Юпитера в маршруте EVJ было выбрано 89.7 млн км (0.6 а.е.), в маршруте EVEJ — 179.3 млн км (1.19 а.е.), в маршруте EVEEJ — 714.5 млн км (4.8 а.е.).

Уточнение траекторий продолжалось до тех пор, пока расстояние между соседними узлами планет не становилось меньше 100 000 км.

параметров дискретизации, используемых при первоначальном построении базы виртуальных траекторий.

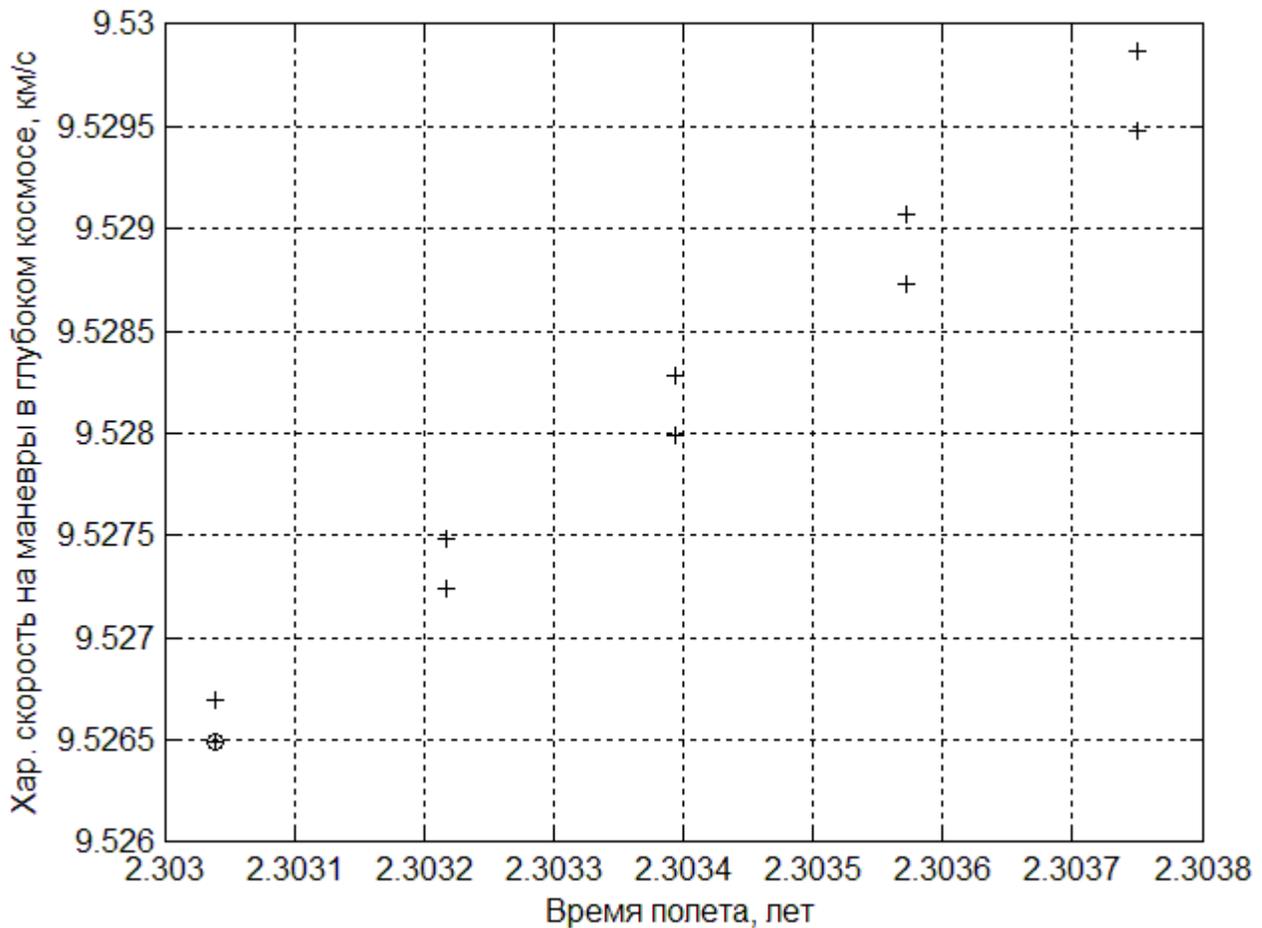


Рис. 7. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVJ

7.1.1 Маршрут EVJ

Для маршрута Земля–Венера–Юпитер наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 9.53$ км/с получаются для траектории с датой старта 11 октября 2021 года и временем перелета $T = 2.30$ лет (рис. 7). При этом маневр у Венеры выполняется 13 апреля 2022 года. Затраты на маневры в глубоком космосе на участке Земля–Венера порядка 8.97 км/с, а на участке Венера–Юпитер — 557 м/с. Космический аппарат достигает Юпитера 29 января 2024 года.

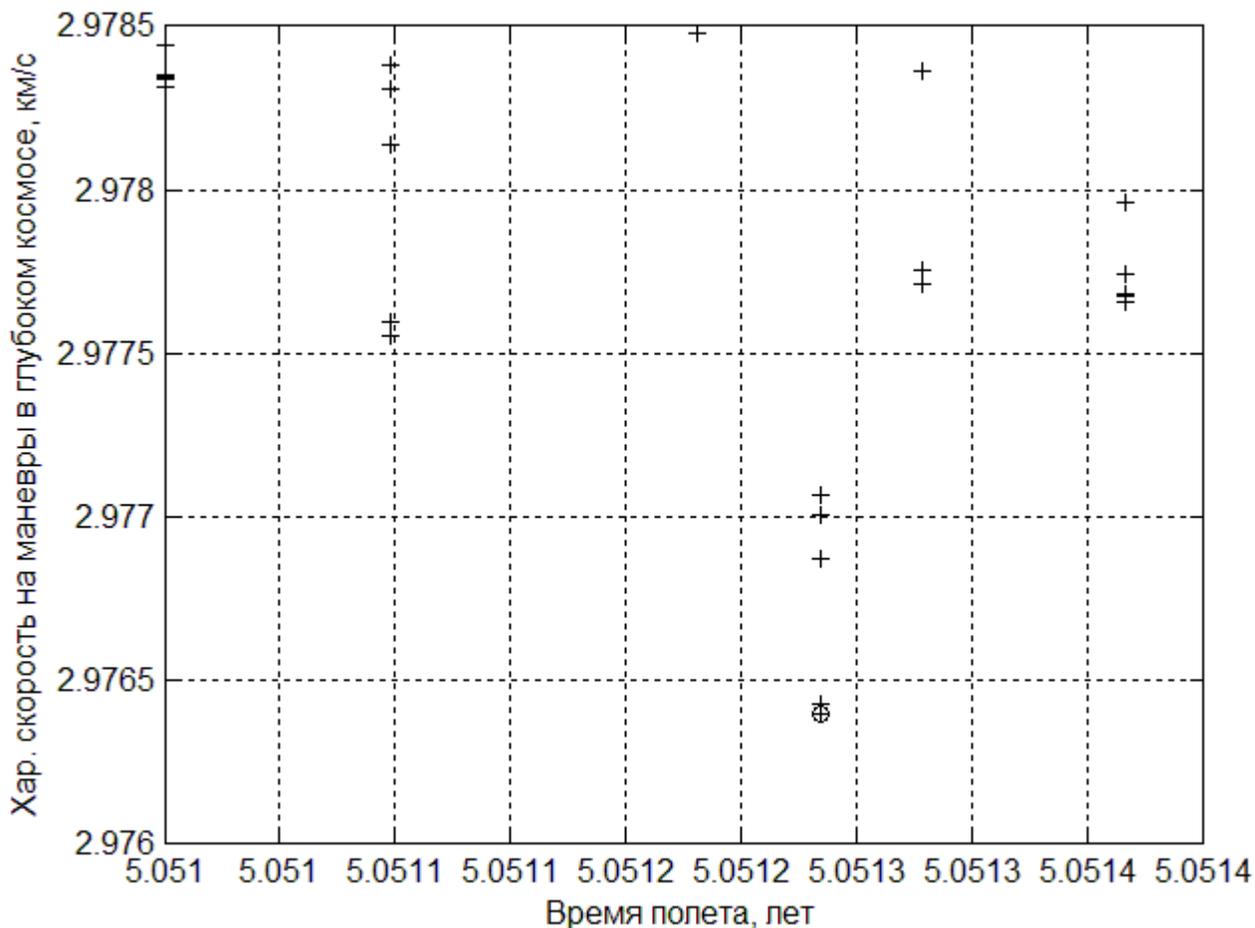


Рис. 8. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVEJ

7.1.2 Маршрут EVEJ

Для маршрута Земля–Венера–Земля–Юпитер наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 2.25$ км/с получаются для траектории с датой старта 22 февраля 2020 года и временем перелета $T = 5.05$ лет (рис. 8). При этом маневр у Венеры 20 июня 2020 года, далее у Земли — 16 апреля 2022 года. Затраты на маневры в глубоком космосе на участке Земля–Венера порядка 265 м/с, а на участке Венера–Земля — 2.71 км/с, Земля–Юпитер — 5 м/с. Космический аппарат достигает Юпитера 13 марта 2025 года.

	Laplace	МВТ
Дата старта	11.03.2020	13.03.2020
Пролет Венеры	01.07.2020	30.06.2020
Первый пролет Земли	27.04.2021	27.04.2021
Второй пролет Земли	28.07.2023	28.07.2023
Подлет к Юпитеру	04.02.2026	25.03.2026
Δv на участке EV, м/с	0	0.01
Δv на участке VE, м/с	0	0.07
Δv на участке EE, м/с	39	88
Δv на участке EJ, м/с	0	0.4
Гип. избыток скорости при старте, км/с	3.39	3.41
Гип. избыток скорости около Юпитера, км/с	5.50	5.58
Длительность полета, лет	5.9	6.0

Таблица 2. Сравнение основных параметров найденной МВТ и запланированной миссией Laplace траекторий к Юпитеру вдоль маршрута EVEEJ

7.1.3 Маршрут EVEEJ

Для маршрута Земля–Венера–Земля–Земля–Юпитер наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 89$ м/с получаются для траектории с датой старта 13 марта 2020 года и временем перелета $T = 6.03$ лет (рис. 9). При этом маневр у Венеры выполняется 30 июня 2020 года, далее у Земли — 27 апреля 2021 года, затем 28 июля 2023 года. Затраты на маневры в глубоком космосе приходятся только на участок Земля–Земля. Космический аппарат достигает Юпитера 25 марта 2026 года. Траектория изображена на рис. 10 и рис. 11.

Стоит отметить, что полученная траектория схожа с запланированной в космической программе Europa Jupiter System Mission (EJSM, Laplace) космических агентств NASA, ESA, Роскосмос и JAXA для исследования лун Юпитера – Европы и Ганимеда и магнитосферы Юпитера, см. табл. 2.

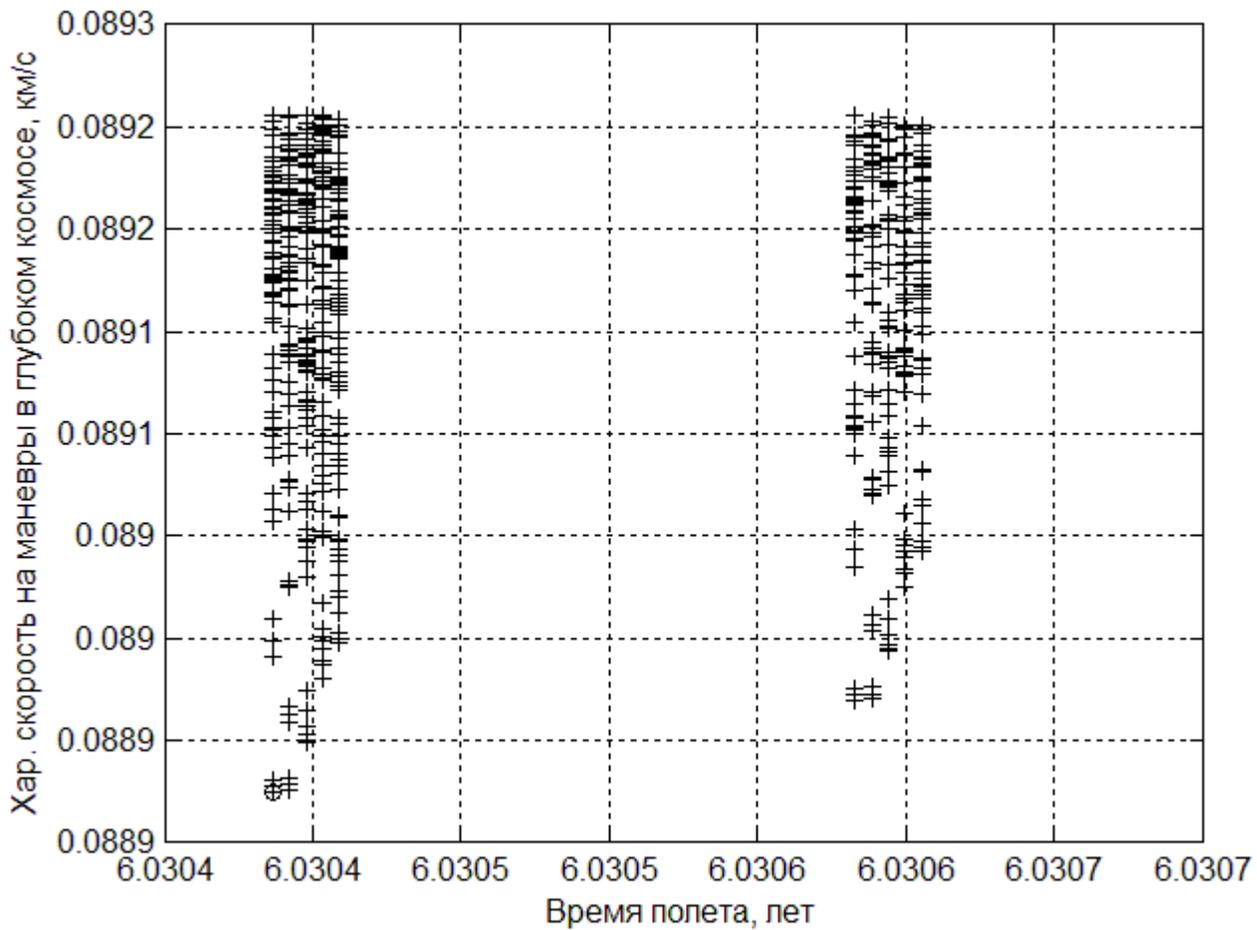


Рис. 9. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVEEJ

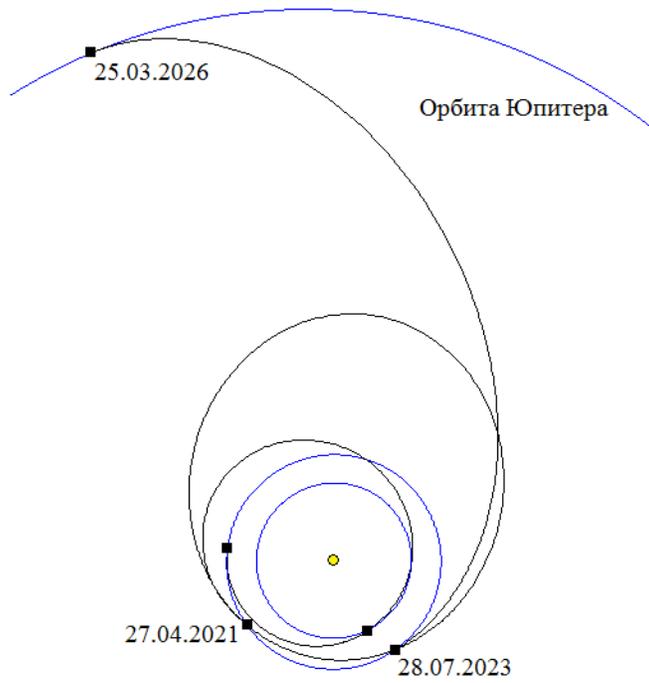


Рис. 10. Оптимальная траектория на маршруте EVEEJ

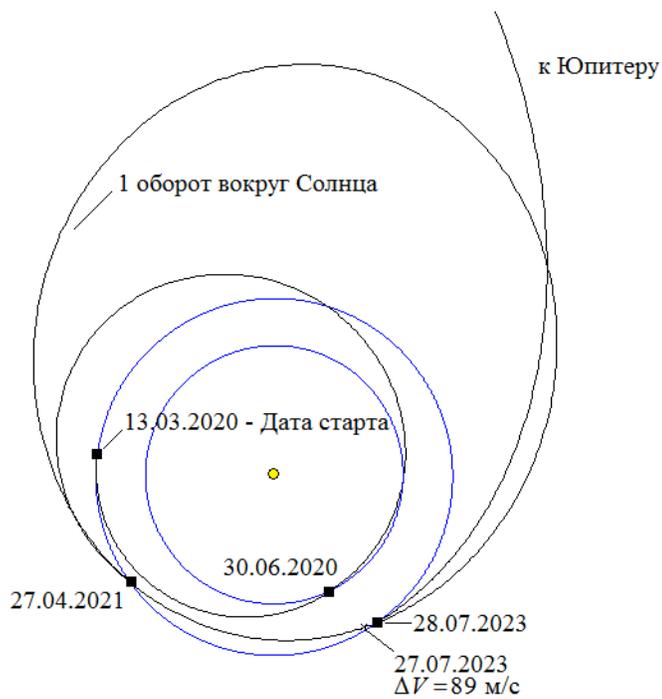


Рис. 11. Участок EVEE оптимальной траектории маршрута EVEEJ

7.2 Перелеты к Урану

Перейдем теперь к постановке задачи о полете к Урану и результатам расчетов.

Максимальное значение гиперболического избытка скорости при выходе из сферы действия Земли после отделения от ракеты-носителя и работы разгонного блока, как и раньше, примем равным 4 км/с. В качестве целевого функционала, подлежащего минимизации, возьмем величину характеристической скорости, необходимую для выполнения импульсов в глубоком космосе. При этом потребуем, чтобы время полета не превосходило 20 лет, а дата старта лежала в промежутке от 2020 до 2030 года. Ограничений на скорость подлета КА к Урану не налагается.

Что касается набора планетных маршрутов-кандидатов, то, забегаая вперед, скажем, что для указанного окна старта взаимное расположение Урана и Юпитера не благоприятствует выполнению гравитационного маневра у последнего. Поэтому для примера рассмотрим следующие маршруты:

- Земля–Венера–Сатурн–Уран (EVSU);
- Земля–Венера–Земля–Сатурн–Уран (EVESU);
- Земля–Венера–Земля–Земля–Сатурн–Уран (EVEESU).

В качестве минимально допустимого с точки зрения безопасности расстояния до поверхности планеты при выполнении гравитационного маневра были для определенности взяты следующие значения: Венера — 250 км (верхняя граница атмосферы); Земля — 600 км; Сатурн — 57000 км (средний радиус планеты).

При построении базы виртуальных траекторий расстояние между соседними узлами Венеры варьировалось для разных планетных маршрутов от 22.4 млн. км. (0.15 а.е.) до 60 млн. км (0.4 а.е.), для Земли — от 22.4 млн. км. (0.15 а.е.) до 90 млн. км (0.6 а.е.). Расстояние между узлами Сатурна во всех маршрутах составляло 224 млн. км (1.5 а.е.), Урана — 360 млн. км (2.4 а.е.).

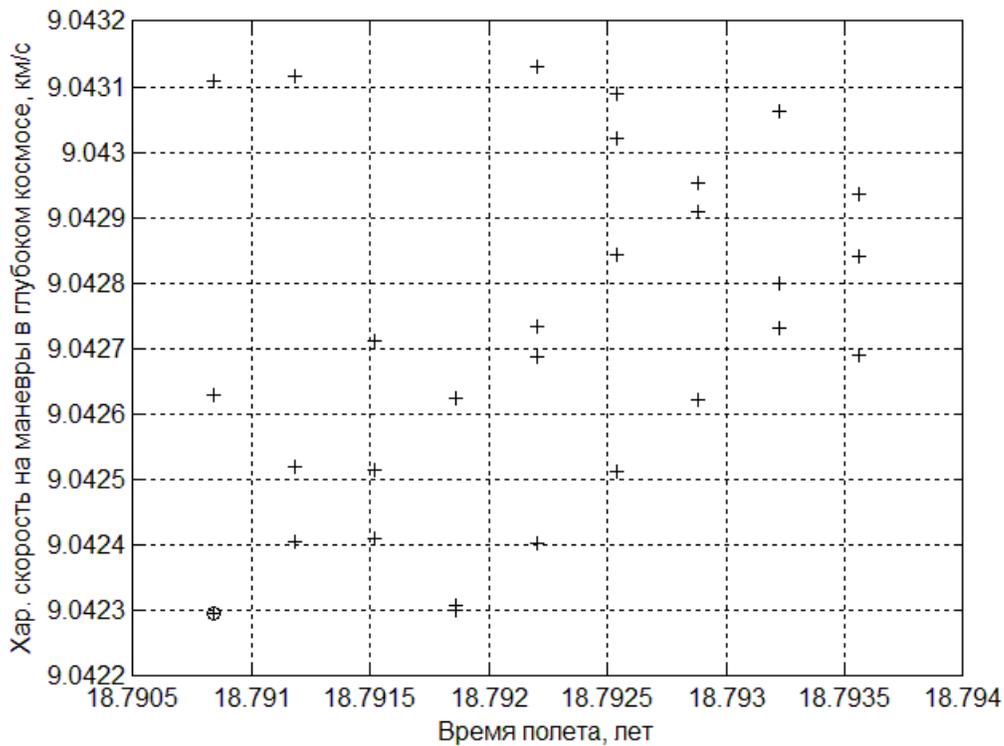


Рис. 12. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVSU

Как и в случае полета к Юпитеру, уточнение траекторий продолжалось до тех пор, пока расстояние между соседними узлами планет не становилось меньше 100 000 км.

7.2.1 Маршрут EVSU

Для маршрута Земля–Венера–Сатурн–Уран наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 9.042$ км/с получаются для траектории с датой старта 15 декабря 2029 года и временем перелета $T = 18.79$ лет (рис. 12). При этом маневр у Венеры выполняется 20 мая 2030 года, у Сатурна — 2 января 2034 года. Затраты на маневры в глубоком космосе на участке Венера–Сатурн порядка 33 м/с, а на участке Сатурн–Уран — менее 1 м/с. Космический аппарат достигает Урана 30 сентября 2048 года.

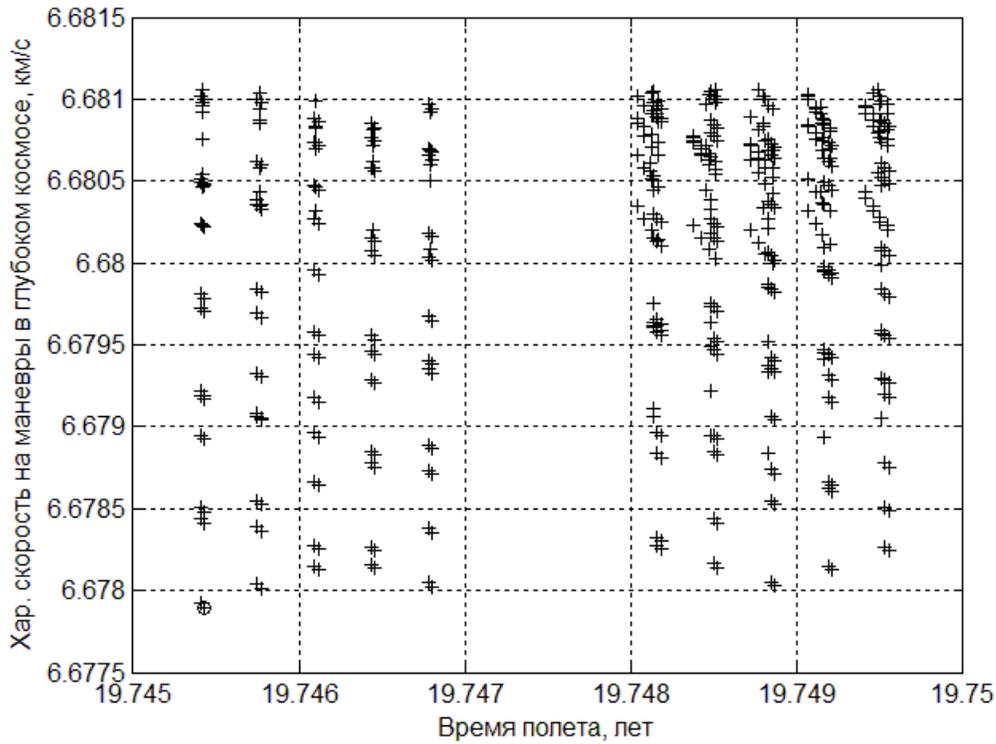


Рис. 13. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVESU

7.2.2 Маршрут EVESU

Для маршрута Земля–Венера–Земля–Сатурн–Уран наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 6.678$ км/с получаются для траектории с датой старта 2 декабря 2024 года и временем перелета $T = 19.74$ лет (рис. 13). При этом маневр у Венеры выполняется 8 июня 2025 года, затем у Земли — 4 мая 2028, у Сатурна — 25 июня 2032 года. Затраты на маневры в глубоком космосе на участке Венера–Земля порядка 1 м/с, а на участках Земля–Сатурн и Сатурн–Уран — в сумме менее 1 м/с. Космический аппарат достигает Урана 31 августа 2044 года.

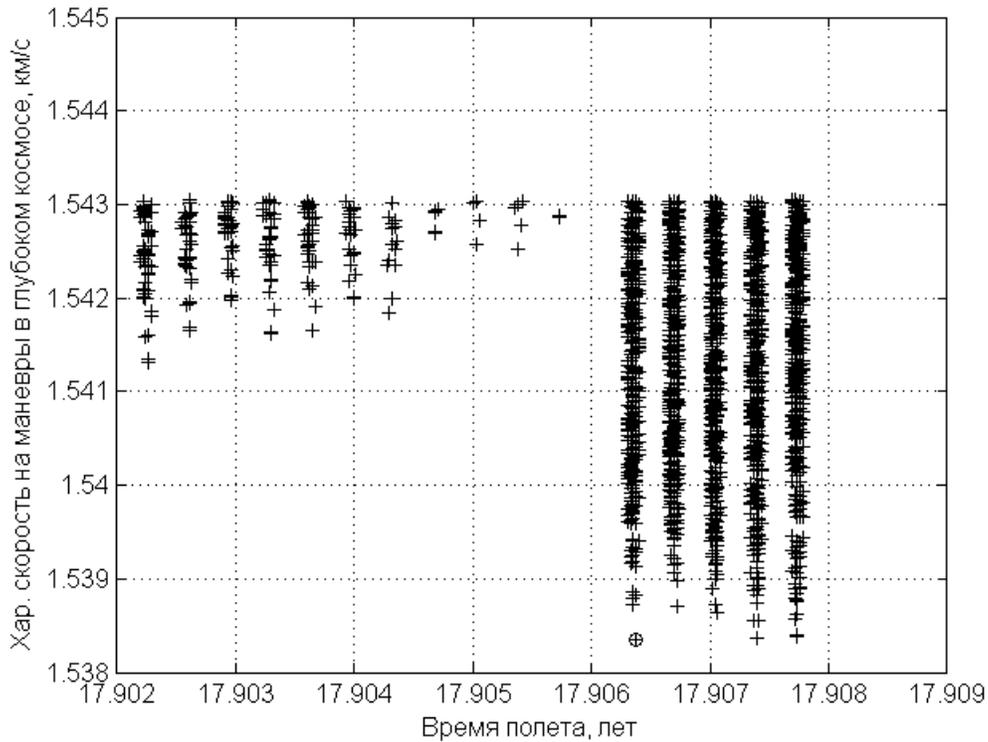


Рис. 14. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVEESU

7.2.3 Маршрут EVEESU

Для маршрута Земля–Венера–Земля–Земля–Сатурн–Уран наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 1.538$ км/с получаются для траектории с датой старта 1 февраля 2025 года и временем перелета $T = 17.91$ лет (рис. 14). При этом маневр у Венеры выполняется 17 июля 2025 года, у Земли — 25 мая 2026 года и после облета Солнца 11 августа 2030 года, у Сатурна — 22 сентября 2033 года. Затраты на маневры в глубоком космосе на каждом из участков, кроме Земля–Земля, не превышают 1 м/с. На участке Земля–Земля $\Delta V = 1.536$ км/с. КА достигает Урана 29 декабря 2042 года. Траектория полета изображена на рис. 15 и рис. 16.

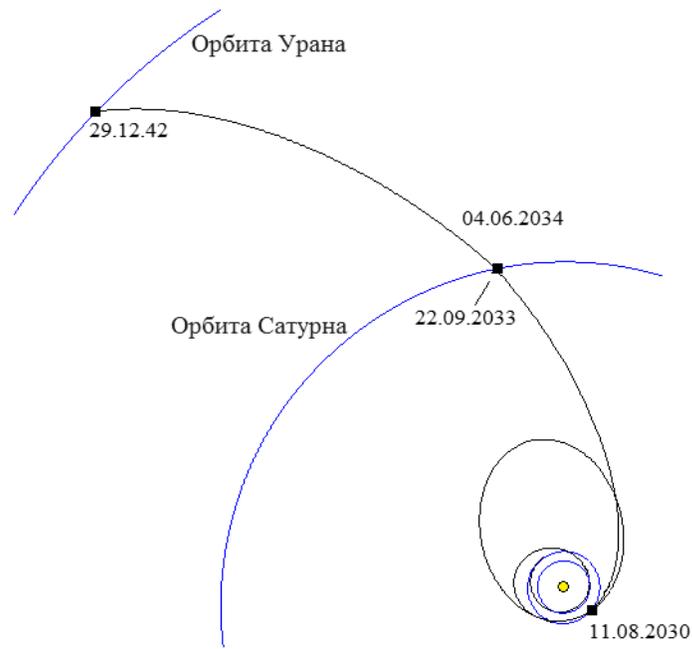


Рис. 15. Оптимальная траектория на маршруте EVEESU

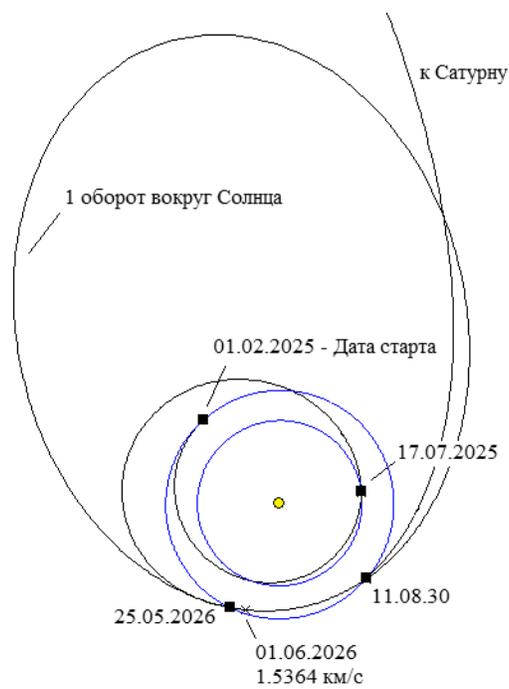


Рис. 16. Участок EVEE оптимальной траектории маршрута EVEESU

8 Заключение

Разработан метод виртуальных траекторий, который может быть с успехом использован при проектировании сложных межпланетных траекторий, включающих несколько пассивных гравитационных маневров и импульсов в глубоком космосе. Являясь, по сути, разновидностью классического метода полного перебора, метод виртуальных траекторий отличается от него пространственной, а не временной привязкой к движению планет. Тот факт, что орбиты планет могут считаться с хорошей точностью неизменными в течение достаточно длительного срока времени (для целей проектирования траекторий — десятки лет), позволяет табулировать для каждого планетного маршрута наиболее ресурсоемкую часть расчетов — построение базы виртуальных траекторий — и тем самым существенно сократить время работы алгоритма оптимизации. Имея набор баз виртуальных траекторий для основных 10-15 планетных маршрутов полета к планете-цели миссии, можно за сравнительно небольшое время провести анализ принципиальной осуществимости этой миссии.

Применение предлагаемой адаптации метода виртуальных траекторий продемонстрировано на примере задач полета к Юпитеру и Урану. Как результат, были обнаружены резонансные траектории, позволяющие существенно сократить затраты топлива на гравитационные маневры.

А Приложение. Задача Ламберта в задаче двух тел

А.1 Постановка задачи Ламберта и обозначения

Предположим, что КА движется в центральном ньютоновом гравитационном поле между точками пространства \mathbf{r}_1 в момент времени t_1 и \mathbf{r}_2 в момент $t_2 = t_1 + t_{12}$. Ставится задача определения орбиты, проходящей через точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 с заданной угловой дальностью φ , между которыми осуществлялся бы перелет КА за время t_{12} .

На настоящее время существует целое множество эффективных методов решения поставленной задачи. Мы рассмотрим подход, предложенный в [18, 19]. Его основным преимуществом перед остальными методами заключается в его чрезвычайной скорости работы и робастности; однако, возможны неудачи в его использовании при достаточно больших значениях количества витков вокруг Солнца. В таком случае рекомендуется применять метод, изложенный в [20].

Вначале вычислим квадрат расстояния между точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2

$$c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi.$$

Далее, обозначим E_1 и E_2 за эксцентрические аномалии, соответствующие положениям \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Вспомним, что

$$\begin{aligned} r_1 &= a(1 - e \cos E_1), \\ r_2 &= a(1 - e \cos E_2), \end{aligned}$$

а также равенства

$$\begin{aligned} n(t_1 - t_p) &= E_1 - e \sin E_1, \\ n(t_2 - t_p) &= E_2 - e \sin E_2, \end{aligned}$$

где a — большая полуось орбиты перелета, e — эксцентриситет, μ — гравитационный параметр центрального тела, $n = \sqrt{\mu/a^3}$, t_p — момент времени прохождения КА перицентра. Отсюда легко получить три уравнения относительно a ,

$E_2 - E_1$ и $\cos \frac{E_1 + E_2}{2} \cos \frac{E_2 - E_1}{2}$:

$$c^2 = 4a^2 \left(1 - e^2 \cos^2 \frac{E_1 + E_2}{2} \right) \sin^2 \frac{E_2 - E_1}{2}, \quad (6)$$

$$r_1 + r_2 = 2a \left(1 - e \cos \frac{E_1 + E_2}{2} \cos \frac{E_2 - E_1}{2} \right), \quad (7)$$

$$n(t_2 - t_1) = E_2 - E_1 - 2e \cos \frac{E_1 + E_2}{2} \cos \frac{E_2 - E_1}{2}. \quad (8)$$

Введем обозначения

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = e \cos \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad 0 \leq \alpha + \beta \leq 2\pi,$$

$$\alpha - \beta = E_2 - E_1 - 2\pi m, \quad 0 \leq \alpha - \beta \leq 2\pi,$$

где m — число полных витков КА во время движения между моментами времени t_1 и t_2 вокруг центра притяжения. Уравнения (6–8) перепишутся следующим образом:

$$\frac{c}{2a} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (9)$$

$$\frac{r_1 + r_2}{2a} = 1 - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (10)$$

$$n(t_2 - t_1) = 2\pi m + \alpha - \beta - 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (11)$$

Уравнения (9) и (10) приводятся к виду

$$\cos \beta - \cos \alpha = c/a,$$

$$\cos \beta + \cos \alpha = 2 - \frac{r_1 + r_2}{a},$$

откуда легко получаются выражения

$$\cos \alpha = 1 + 2E,$$

$$\cos \beta = 1 + 2KE,$$

с дополнительными обозначениями

$$s = \frac{r_1 + r_2 + c}{2}, \quad (12)$$

$$E = -\frac{s}{2a}, \quad (13)$$

$$K = 1 - \frac{c}{s}. \quad (14)$$

Можно получить, что

$$\sin \frac{\beta}{2} = q \sin \frac{\alpha}{2}, \quad -\pi \leq \beta \leq \pi,$$

где

$$q = \pm \sqrt{K}.$$

Заметим, что знак q выбирается исходя из величины угловой дальности φ :

$$\begin{aligned} 0 \leq q \leq 1, & \text{ если } 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ -1 \leq q \leq 0, & \text{ если } \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Введем обозначение для безразмерного времени перелета T

$$T = (t_2 - t_1) \sqrt{\frac{\mu}{(s/2)^3}}.$$

Окончательно, из уравнения (11) легко получить выражения для безразмерного времени перелета

$$T \sin^3 \frac{\alpha}{2} = 2\pi m + \alpha - \beta - \sin \alpha + \sin \beta, \quad \sin \frac{\beta}{2} = q \sin \frac{\alpha}{2}, \quad -\pi \leq \beta \leq \pi \quad (15)$$

Итак, уравнения (15) при $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ являются уравнениями Ламберта для эллиптического движения. При данных T и q они разрешаются относительно α и β , после чего рассчитываются остальные параметры, определяющую искомую орбиту перелета.

Аналогичные выкладки можно провести и для гиперболического случая. Тогда

$$T \operatorname{sh}^3 \frac{\gamma}{2} = \delta - \gamma - \operatorname{sh} \delta + \operatorname{sh} \gamma, \quad \operatorname{sh} \frac{\delta}{2} = q \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2}. \quad (16)$$

Итак, задача свелась к разрешению уравнения вида $T = T(\alpha)$. Замена

$$x = \begin{cases} \cos \alpha/2, & -1 \leq x \leq 1, \\ \operatorname{ch} \gamma/2, & 1 < x, \end{cases}$$

позволяет получить более пригодную для работы функцию $T = T(x)$. Тогда для эллиптического и гиперболического случаев имеем

$$E = x^2 - 1. \quad (17)$$

Использование новых обозначений позволяет не формулировать процедуру решения соответствующих уравнений $T = T(x)$ для каждого случая отдельно.

А.2 Решение задачи Ламберта

Опишем процедуру решения задачи Ламберта согласно [18]. Предположим, что имеется уравнение

$$f(x) = f_0.$$

Заметим, что оно равносильно уравнению

$$F(x) = \ln \frac{f(x)}{f_0} = 0.$$

Далее, заметим, что в окрестности решения x_0 уравнения $F(x) = 0$ для произвольных двух точек x_1 и x_2 выполнены

$$x_1 - x_0 \approx -\frac{F(x_1)}{F'(x_0)}, \quad x_2 - x_0 \approx -\frac{F(x_2)}{F'(x_0)}.$$

Подставляя $F'(x_0)$ из второго равенства в первое, получаем

$$x_1 - x_0 \approx -\frac{F(x_1)}{F(x_2)}(x_2 - x_0),$$

откуда окончательно

$$x_0 \approx \frac{x_1 F(x_2) - x_2 F(x_1)}{F(x_2) - F(x_1)}.$$

Это приводит к численному методу решению уравнения $F(x) = 0$, реализованному в [18]:

$$x_2^{(n+1)} = \frac{x_1^{(n)} F(x_2^{(n)}) - x_2^{(n)} F(x_1^{(n)})}{F(x_2^{(n)}) - F(x_1^{(n)})}, \quad x_1^{(n+1)} = x_2^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (18)$$

$$x_1^{(0)} = x_1, \quad x_2^{(0)} = x_2.$$

Здесь x_1 и x_2 — некоторые начальные значения x в окрестности решения уравнения $F(x) = 0$. Расчеты значений $x_1^{(n)}$ и $x_2^{(n)}$ по формулам (18) продолжаются до тех пор, пока для некоторого n не будет выполнено

$$\left| x_2^{(n+1)} - x_2^{(n)} \right| < \epsilon,$$

где ϵ — наперед заданное значение допустимой абсолютной ошибки определения x , например, 10^{-12} . Как только это неравенство имеет место, то в качестве решения уравнения $F(x) = 0$ принимается $x = x_2^{(n+1)}$.

Изложенный метод решения уравнения применяется к (15) или (16), где в качестве функции $f = f(x)$ выступает функция $T = T(x)$, а в качестве начальных значений x_1 и x_2 рекомендуется для случая $m = 0$ выбирать $x_1 = -0.5233$ и $x_2 = 0.5233$. Если же $m > 0$, то $x_1 = -0.5234$, $x_2 = -0.2234$ в случае выбора левой ветви решения и $x_1 = 0.7234$, $x_2 = 0.5234$ в случае правой.

А.3 Восстановление параметров орбиты по решению уравнения Ламберта

Подставляя найденное решение x уравнения (15) или (16) в (17), находим из (13) большую полуось орбиты

$$a = -\frac{s}{2E}.$$

Таким образом, для эксцентриситета имеем формулу

$$e^2 = (1 - r_1/a)^2 + \frac{(r_1 \dot{r}_1)^2}{\mu a}.$$

Параметр орбиты вычисляется по формуле

$$p = a(1 - e^2)$$

Согласно [19] радиальные скорости в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 равны соответственно

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= \frac{\sqrt{2\mu s}}{cr_1} (qz(s - r_1) - x(s - r_2)), \\ \dot{r}_2 &= \frac{\sqrt{2\mu s}}{cr_2} (x(s - r_1) - qz(s - r_2)).\end{aligned}$$

Вектор скорости КА в точке \mathbf{r}_1 вычисляется по формуле

$$\mathbf{v}_1 = \dot{r}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} + c_1 \cdot \mathbf{r}_1 + c_2 \cdot \mathbf{r}_2,$$

где постоянные c_1 и c_2 находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \cos \varphi \\ r_1 \cos \varphi & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{n1} \sin \varphi \end{bmatrix}$$

Разрешение этих уравнений дает, окончательно, скорость в точке \mathbf{r}_1

$$\mathbf{v}_1 = (\dot{r}_1 - v_{n1} \operatorname{ctg} \varphi) \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} + (v_{n1} \operatorname{ctg} \varphi) \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2}.$$

Аналогично может быть найдена скорость в точке \mathbf{r}_2

$$\mathbf{v}_2 = -(v_{n2} \operatorname{ctg} \varphi) \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} + (\dot{r}_1 + v_{n2} \operatorname{ctg} \varphi) \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2}.$$

Эти формулы имеют место для любого типа движения.

В Приложение. Определение положений и скоростей планет в пространстве

Пусть для некоторой планеты даны следующие элементы ее неизменной во времени кеплеровой орбиты: a — большая полуось, e — эксцентриситет, ω — аргумент перицентра, Ω — аргумент восходящего узла, i — наклонение. Возьмем

гелиоцентрическую эклиптическую систему координат, где орт \mathbf{e}_x направлен в точку весеннего равноденствия, орт \mathbf{e}_z направлен по нормали к плоскости эклиптики в сторону ее северного полюса и орт \mathbf{e}_y дополняет систему до правой тройки. Тогда линия узлов орбиты планеты проходит вдоль вектора

$$\mathbf{n}_1 = \cos \Omega \cdot \mathbf{e}_x + \sin \Omega \cdot \mathbf{e}_y.$$

Движение планеты происходит в плоскости векторов \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 , где

$$\mathbf{n}_2 = \sin i \cdot \mathbf{e}_z + \cos i \cdot (\cos \Omega \cdot \mathbf{e}_y - \sin \Omega \cdot \mathbf{e}_x).$$

Радиус–вектор планеты может быть выражен через истинную аномалию θ следующим образом:

$$\mathbf{r} = r \cdot (\cos(\omega + \theta) \cdot \mathbf{n}_1 + \sin(\omega + \theta) \cdot \mathbf{n}_2), \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}.$$

Обозначим $\mu_S = 1.3276 \cdot 10^{11} \text{ км}^3/\text{с}^2$ — гравитационный параметр Солнца. Тогда радиальная v_r и трансверсальная v_n составляющие скорости планеты

$$v_r = \sqrt{\frac{\mu_S}{a(1 - e^2)}} e \sin \theta, \quad v_n = \sqrt{\frac{\mu_S}{a(1 - e^2)}} (1 + e \cos \theta)$$

Таким образом, для гелиоцентрической скорости планеты имеем:

$$\mathbf{v} = v_r \cdot \mathbf{r}/|\mathbf{r}| + v_n \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{r}/|\mathbf{r}|.$$

С Приложение. Определение соответствия между положением планеты и временем

Пусть для некоторой планеты даны следующие элементы ее неизменной во времени кеплеровой орбиты: a — большая полуось, e — эксцентриситет, ω — аргумент перицентра, Ω — аргумент восходящего узла. Если λ_0 — средняя долгота на некоторую начальную эпоху, то средняя аномалия на начальную эпоху равна

$$M_0 = \lambda_0 - \omega - \Omega.$$

Методом Ньютона-Рафсона

$$E_0^{(n+1)} = E_0^{(n)} - \frac{E_0^{(n)} - e \sin E_0^{(n)} - M_0}{1 - e \cos E_0^{(n)}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$E_0^{(0)} = 0$$

решается уравнение Кеплера

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0,$$

относительно E_0 — эксцентрической аномалии, которая соответствует начальному положению планеты. Вычисления продолжаются до тех пор, пока для некоторого n не будет выполнено

$$\left| E_0^{(n+1)} - E_0^{(n)} \right| < \epsilon.$$

Здесь ϵ — требуемая точность определения решения E_0 , например, 10^{-15} . По окончании итераций принимается $E_0 = E_0^{(n+1)}$.

Пусть $\theta \in [0; 2\pi)$ — истинная аномалия планеты в некоторый момент времени. Тогда соответствующее значение эксцентрической аномалии вычисляется по следующим формулам:

$$E = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right), \quad \text{если } \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \geq 0,$$

$$E = 2\pi + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right), \quad \text{если } \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} < 0,$$

Времена t_k прохождения планетой положения, которому соответствует истинная аномалия θ , определяются из соотношения

$$t_k = \frac{a^{3/2}}{\mu_S^{1/2}} (2\pi k + E - E_0 - e (\sin E - \sin E_0)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Список литературы

- [1] P. Di Lizia, G. Radice, D. Izzo, M. Vasile. On the solution of interplanetary trajectory design problems by global optimisation methods // Proceedings of Global Optimisation Workshop, Almeria, Spain, 2005, pp. 159-164.
- [2] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 448 с.
- [3] Левантовский В.И. Механика космического полета в элементарном изложении, 3-е изд., дополненное и переработанное. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 512 с.
- [4] G. Hughes, C. R. McInnes. Solar Sail Hybrid Trajectory Optimisation // Advances in the Astronautical Sciences, 2001, V. 109, pp. 2369-2380.
- [5] P. Rogata, E. Di Sotto, M. Graziano, F. Graziani. Guess value for interplanetary transfer design through genetic algorithms // Proceedings of 13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, AAS 03-140, Ponce, Puerto Rico, 2003.
- [6] B. Dachwald. Optimization of solar sail interplanetary trajectories using evolutionary neurocontrol // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2004, V. 27, No. 1, pp. 66-72.
- [7] D.J. Wirthman, S.Y. Park, S.R. Vadali. Trajectory optimization using parallel shooting method on parallel computer // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1995, V. 18, No. 2, pp. 377-379.
- [8] J. W. Hartmann, V. L. Coverstone-Carroll, S. N. Williams, “Optimal interplanetary spacecraft trajectories via a Pareto genetic algorithm”, Journal of the Astronautical Sciences, vol. 46, n. 3, p. 267-282, 1998.
- [9] M. Vasile. A global approach to optimal space trajectory design // Advances in the Astronautical Sciences, 2003, V. 114, pp. 621-640.

- [10] M. Rosa Sentinella, "Comparison and integrated use of differential evolution and genetic algorithms for space trajectory optimisation", in Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation, Singapore, 2007. DOI: 10.1109/CEC.2007.4424575
- [11] R. Storn, K. Price, "Differential evolution - A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces", Journal of Global Optimization, vol. 11p. 341-359, 1997.
- [12] K. V. Price, R. M. Storn, J. A. Lampinen, "Differential evolution: a practical approach to global optimization", Natural computing series, ed. G. Rozenberg, Springer, Berlin, 2005. ISBN: 978-3540209508
- [13] J. Kennedy, R. Eberhart, "Particle swarm optimization", in Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, Perth, Australia, 1995. DOI: 10.1109/ICNN.1995.488968
- [14] Г.Г. Федотов. Оптимизация траекторий полета КА с ЭРД при использовании гравитационного маневра // Космические исследования, 2004, Т. 42, №4, с. 404-413.
- [15] И.С. Григорьев, К.Г. Григорьев. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. I // Космические исследования, 2007, Т. 45, №4, с. 358-366.
- [16] В.Г. Петухов. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования, 2008, Т. 46, №3, с. 224-237.
- [17] Сайт Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга (ГАИШ): <http://www.sai.msu.ru/neb/rw/natsat/plaorbw.htm>. Дата получения информации 24 марта 2011 года

- [18] Izzo, D. ESA Advanced Concepts team. Code used available in MGA.M, on <http://www.esa.int/gsp/ACT/inf/op/globopt.htm>. Last retrieved Nov, 2009
- [19] Lancaster, E.R. and Blanchard, R.C. "A unified form of Lambert's theorem." NASA technical note TN D-5368, 1969.
- [20] Gooding, R.H. "A procedure for the solution of Lambert's orbital boundary-value problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 48:145-165, 1990.