МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Базовая организация:
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра
по направлению 03.04.01 «Прикладные математика и физика»

Коррекция и прогнозирование орбитального движения космических аппаратов с помощью искусственных нейронных сетей

Выполнил:
студент группы 472
Сорокин Артемий Владимирович

Научный руководитель:
к.ф.-м.н.
Широбоков Максим Геннадьевич

Москва, 2018

Оглавление

1. Введение

В последнее время активно повышается внимание к методам машинного обучения в различных областях науки, и в частности, в задачах орбитальной динамики космического полета. Методы машинного обучения включают в себя различные инструменты обработки и обобщения информации такие как: машины опорных векторов, алгоритмы бустинга, нейронные сети, каждые из которых имеют свою специфику. В настоящей работе упор делается на применении искусственных нейронных сетей (ИНС) в задачах орбитальной динамики.

С математической точки зрения, нейронная сеть − это взвешенный ориентированный граф в узлах которого находятся функции, называемые активационными. Процесс изменения весов в графе называется ее обучением. Формально, обучение нейронных сетей − это многопараметрическая задача нелинейной оптимизации. Существует несколько способов обучения ИНС такие как обучение с учителем, обучение без учителя и обучение с подкреплением. Каждый способ имеет свою типологию задач. Обучение с учителем позволяет решать задачу регрессии и классификации объектов. В этом случае для настройки параметров сеть использует массив данных состоящий из входных сигналов и соответствующих им выходных сигналов. Метод обучения нейронных сетей без учителя позволяет решать задачу кластеризации, поиска ассоциаций и сокращения размерности. Алгоритмы обучения с подкреплением пытаются найти стратегию, приписывающую состояниям окружающей среды действия, которые должна предпринять система в этих состояниях.

С одной стороны, интерес к нейронным сетям в области орбитальной динамики обусловлен повышенными требованиями к степени автономности космических аппаратов. В случае потери связи с наземной станцией или нештатной ситуации на борту, аппарат должен самостоятельно брать на себя управление и выполнять поставленные перед ним задачи. Автономность особенно важна для аппаратов, движущихся на низких орбитах, так как для них плотность атмосферы является вторым по значимости фактором после гравитации. С использованием методов обучения с учителем, нейронные сети могут помочь уточнить модель атмосферы во время движения аппарата [1,2]. С другой стороны, поиск траекторий, оптимальных с точки зрения времени полета или затрат топлива, представляет собой сложный и ресурсозатратный процесс, так как поведение сходимости традиционных методов оптимизации зависит от «адекватных» начальных приближений. Искусственные нейронные сети помогают

частично решать эти проблемы. Например, нейронные сети, оптимизация синаптических связей в которых выполняется эволюционными алгоритмами, методами обучения с подкреплением способны синтезировать регуляторы для полетов космических аппаратов с малой тягой к Луне [3,4,5]. Алгоритмы оптимизации, рассмотренные в этих работах, не требуют начального приближения. Другой пример использования искусственных нейронных сетей − управление формациями спутников в условиях неустойчивой динамики вокруг коллинеарных точек либрации [6].

В настоящей работе проводится исследование, в котором искусственные нейронные сети используются для прогноза и коррекции орбитального движения космического аппарата.

2. Постановка задачи

Рассмотрим перелет космического аппарата (КА) из начальной точки в конечную точку за заданное время в рамках возмущенной модели двух тел. Введем инерциальную систему координат $Oxyz$ с началом в притягивающем центре и запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} + \mu \dfrac{\vec{r}}{r^3} = \vec{F} \\ \vec{r}(t_0) = \vec{R}_1 \\ \vec{r}(t_1) = \vec{R}_2 \end{cases}$$

где μ − гравитационный параметр, $\vec{r}$ − радиус-вектор, соединяющий центр масс КА и притягивающий центр, $\vec{F}$ − сумма возмущающих сил, действующих на КА, t_0 и t_1 − начальное и конечное время перелета, $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ − векторы начальной и конечной точек. Необходимо найти решение, удовлетворяющее данной системе уравнений. На рисунке 1 изображен пример такого решения − траектория, с началом в $\vec{R_1} = [1, 0, 0]$ и концом в $\vec{R_2} = [0, 2, 0]$.

3. План решения

Управление будет строиться в рамках невозмущенной задачи двух тел ($\vec{F} = \vec{0}$). Возмущения же будут уводить КА от цели, поэтому, чтобы перелет состоялся, необходимо проводить коррекцию движения. Под коррекцией движения будем понимать

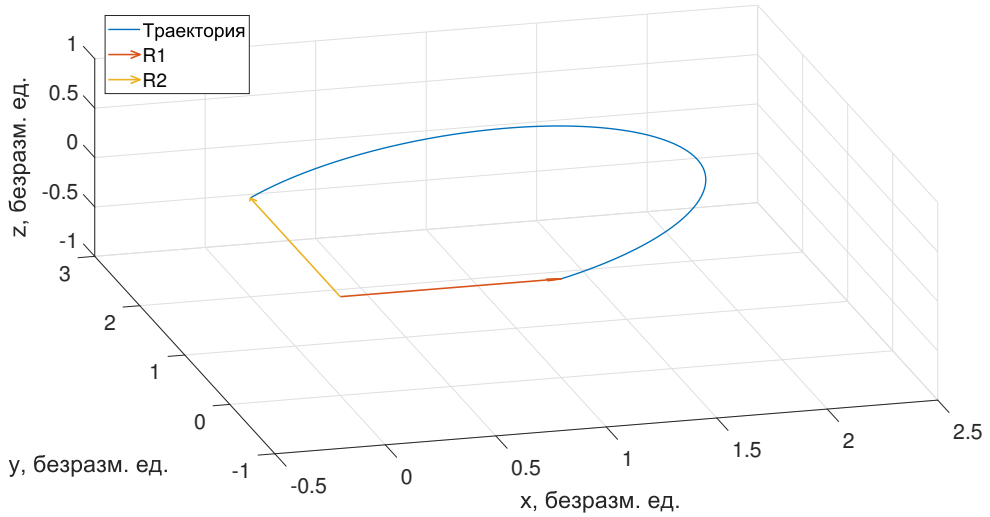


Рис. 1: Перелет из $\vec{R}_1 = [1, 0, 0]$ в $\vec{R}_2 = [0, 2, 0]$

мгновенное изменение скорости, которое в рамках невозмущенной задачи приводит аппарат к цели. В данной работе функции расчёта корректирующих импульсов будет выполнять разрабатываемая ИНС. Кроме того, будет введена нейронная сеть прогнозирующая движение КА в рамках невозмущенной модели. Таким образом, схема управления КА предполагается следующей: прогнозирующая нейронная сеть регулярно по времени оценивает фазовое состояние КА на весь промежуток времени и в случае если отклонение от цели превышает некоторое максимально допустимое значение, то корректирующая нейронная сеть будет оценивать необходимый импульс коррекции для того, чтобы аппарат попал в цель. Так как прогнозирующая и корректирующая сети обучены в рамках невозмущенной модели, то прогнозировать и корректировать движение необходимо регулярно. Цель данной работы состоит в следующем:

1. Разработать прогнозирующую нейронную сеть, подготовить для нее обучающую выборку, подобрать алгоритм обучения и обучить ее.

2. Разработать корректирующую нейронную сеть, подготовить для нее обучающую выборку, подобрать алгоритм обучения и обучить ее.

3. Оценить точность решения, полученного ИНС, оценить количество коррекций, величины среднего и суммарного импульсов при различных величинах возмущающих ускорений, проверить влияние количества нейронов в сети на точность коррекций, проверить устойчивость решения к начальному условию.

Для выполнения цели работы сначала в главе 4 приводится общая информация о ИНС и существующих алгоритмах их обучения. Далее в главе 5 описываются методы построения обучающих выборок, нейронных сетей и алгоритмов обучения. В главе 6 проводится моделирование разработанных ИНС, приводятся результаты исследования. В заключительной главе перечисляются главные выводы работы.

4. Введение в нейронные сети

Как было упомянуто во введении, нейронная сеть − это взвешенный ориентированный граф в узлах которого находятся функции. Структура графа определяется следующим образом: выделяется множество вершин, называемых входным слоем нейронной сети. Далее в граф определенным образом добавляется еще одно множество вершин, называемое скрытым слоем, после чего определяются ребра, связывающие два слоя. Процедура добавления скрытых слоев итеративна, то есть таким образом можно построить N скрытых слоев. Последний слой нейронной сети называется выходным. После построения графа произвольным образом инициализируются веса в его ребрах. На рисунке 2 приведен пример многослойной нейронной сети:

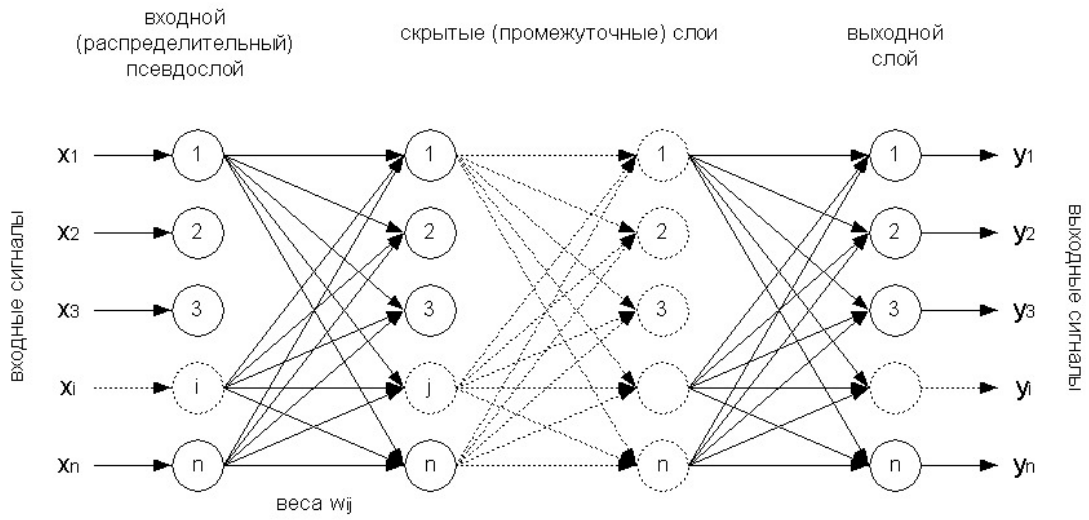


Рис. 2: Многослойная нейронная сеть

В каждом узле графа размещена некоторая функция единственного аргумента. Данная функция называется активационной и обладает следующими особенностями: монотонность и дифференцируемость. Пример активационной функции ˘ сигмоида:

$$\phi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \qquad \phi'(x) = \phi(x) \cdot (1 - \phi(x))$$

Каждый слой сети независимо друг от друга обладает одной и той же активационной функцией. После того как была определена структура нейронной сети, через входной слой по сети распространяется сигнал. Под входным сигналом будем понимать некоторый вектор, длина которого совпадает с количеством нейронов входного слоя сети. Выходной сигнал – это, соответственно, вектор, длина которого равна количеству нейронов в выходном слое сети. В каждом узле графа вычисляется значение активационной функции от линейной комбинации сигнала. Поскольку веса в графе в начальный момент были определены произвольно, то значения в выходном слое также будут произвольными. Процесс изменения весов в графе называется обучением. Есть три различных вида обучения ИНС, но нас будет интересовать только обучение с учителем, поэтому рассмотрим только его принцип действия. Обучение с учителем предполагает наличие обучающей выборки типа входной-выходной сигнал. Под обучающей выборкой будем понимать конечный набор из входных и соответствующих им выходных сигналов. После того как входной сигнал распространился по сети, необходимо ввести некоторый функционал ошибки для того чтобы оценить меру совпадения результата работы сети – предсказанного сигнала, и соответствующего выходного сигнала. Существует множество подобных функционалов, к примеру, средний модуль отклонения (Mean Absolute Error):

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|y_i - \tilde{y}_i|$$

где y_i – i-я компонента выходящего сигнала, $\tilde{y}_i$ – i-я компонента предсказанного сигнала, а N – количество компонент выходного сигнала. Поскольку сигнал – это вектор, то под его компонентами будем понимать векторные компоненты. В итоге принцип работы ИНС заключается в том, чтобы минимизировать имеющийся функционал посредством изменения весов в графе. Большинство методов оптимизации являются градиентными, именно поэтому накладывалось условие дифференцируемости на активационные функции. Одним из основных методов минимизации функционалов ошибки в ИНС, также используемый в данной работе, является метод обратного распространения ошибки. Рассмотрим принцип работы этого алгоритма на примере простейшего функционала ошибки, приведенного ранее – $MAE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|d_i - t_i|$, где d_i – i-я компонента выходящего сигнала, t_i – i-я компонента предсказанного сигнала, а N – количество компонент выходного сигнала. Введем необходимые обозначения. Пусть пример обучения представлен парой $(\vec{x}, \vec{d})$, где $\vec{x}$ ˘ входной вектор,

а $\vec{d}$ – желаемый отклик. Пусть в сети L слоев, тогда для j-го нейрона l-го слоя линейная комбинация выглядит следующим образом: $v_j^l = \sum_{i=0}^{M} w_{ji}^l \cdot y_i^{l-1}$, где y_i^{l-1} – выходной сигнал нейрона i, расположенного в слое $l-1$, w_{ji}^l – вес связи нейрона j слоя l с нейроном i слоя $l-1$. В случае сигмоидальной функции активации выходной сигнал нейрона j слоя l имеет следующий вид: $y_j^l = \phi_j(v_j^l)$. Если $l = 0$, т.е. нейрон j находится во входном слое, то $y_j^0 = x_j$, где x_j ˘ j-я компонента входного вектора $\vec{x}$. Если же нейрон j находится в выходном слое, то $y_j^L = t_j$. Таким образом j-я компонента функционала ошибки равна $e_j = \frac{1}{N}|d_j - t_j|$. Для минимизации ошибки будем двигаться в направлении антиградиента. Значения локальных градиентов δ_j^l в узлах графа задаются следующей формулой [7]:

$$\delta_j^l = \begin{cases} e_j^L \cdot \phi_j'(v_j^L) & \text{для нейрона } j \text{ выходного слоя } L \\ \phi_j'(v_j^l) \cdot \sum\limits_k \delta_k^{l+1} \cdot \delta_{kj}^{l+1} & \text{для нейрона } j \text{ скрытого слоя } l \end{cases}$$

Следовательно изменение весов в l-м слое будет происходить по следующей формуле: $w_{ji}^l \leftarrow w_{ji}^l + \lambda \cdot \delta_j^l \cdot y_j^{l-1}$. Процесс итеративный и завершается в том случае, когда функционал ошибки достигает определенного значения.

Качество обучения нейронных сетей напрямую зависит от выбора функционала ошибки, метода оптимизации и архитектуры сети, однако на ряду с проблемой выбора этих характеристик сети, существует также проблема переобучения. Суть явления заключается в том, что ИНС в процессе обучения начинает оптимизировать параметры таким образом, что точность аппроксимации обучающей выборки будет значительно выше, чем точность аппроксимации отличающейся выборки из того же распределения. Существует множество способов борьбы с этой проблемой. Один из самых эффективных методов называется dropout. Принцип действия метода заключается в следующем: в начале определяется количество слоев и нейронов в ИНС, после чего строится полный ориентированный граф. После все ребра в графе пронумеровываются, и с заданной вероятностью p исключается каждое. В результате получается некоторый произвольным образом связанный граф. Далее строится ансамбль таких графов, и каждый обучается на одной и той же обучающей выборке. Итоговый результат получается усреднением весов для всех графов. Эффективность данного подхода показана экспериментально [8].

5. Решение задачи

Рассмотрим задачу перелета КА из начальной точки $\vec{R}_1$ в конечную точку $\vec{R}_2$ за заданное время, но в рамках невозмущенной модели. Необходимо найти траекторию перелета, удовлетворяющую заданным условиям:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = -\mu \dfrac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{r}(t_0) = \vec{R}_1 \\ \vec{r}(t_1) = \vec{R}_2 \end{cases}$$

Данная задача называется задачей Ламберта. Ее численное решение, реализованное в среде MATLAB – функция *lambert.m* [9] – принимает в качестве аргументов радиус-векторы заданных точек и время выделенное на перелет, а возвращает вектор-скорости в заданных точках. Скорость в начальной точке рассчитывается таким образом, чтобы попасть в конечную точку.

Задачу из постановки можно решить, используя функцию *lambert.m*. Для этого введем некоторый промежуток времени Δt, не зависящий от длительности перелета. При интегрировании возмущенной траектории спустя каждый промежуток времени Δt будем использовать значение текущего фазового вектора в качестве начального условия для интегрирования невозмущенной траектории методом Рунге-Кутта 4-го порядка с постоянным шагом. В случае, когда евклидова норма разности радиус-вектора конечной точки и радиус-вектора конечной точки, полученного путем интегрирования, будет превышать заранее заданную величину ε, будем применять импульсную коррекцию при помощи *lambert.m* таким образом, чтобы попасть в конечную точку.

Теперь перейдем к решению поставленной задачи при помощи нейронных сетей. Осуществим переход следующим образом: вместо интегрирования невозмущенной траектории методом Рунге-Кутта, построим прогнозирующую нейронную сеть, которая так же по значению текущего фазового вектора будет рассчитывать значение конечного радиус-вектора. Теперь, в случае, когда евклидова норма разности радиус-вектора конечной точки и радиус-вектора конечной точки, полученного прогнозирующей сетью, будет превышать величину ε, будем применять импульсную коррекцию, но уже при помощи корректирующей нейронной сети. Приведем пример псевдокода:

if $||\vec{R}_2 - NET_{progn}(\vec{y}_i)|| > \varepsilon$ **then**

apply correction with $NET_{corr}(\vec{R}_i)$;

else

do not apply correction;

end if

где $\vec{R}_2$ - конечный радиус вектор, $\vec{y}_i = [R_x^i, R_y^i, R_z^i, V_x^i, V_y^i, V_z^i]$ - текущий фазовый вектор, $NET_{progn}(\vec{y}_i)$ - радиус-вектор конечной точки, полученный прогнозирующей сетью, $\vec{R}_i$ - текущий радиус-вектор, $NET_{corr}(\vec{R}_i)$ - вектор скорости, полученный корректирующей сетью.

Перейдем к составлению обучающих выборок. Поскольку для задачи прогнозирования численное решение можно построить для любой точки фазового пространства, то в случае нейронной сети необходимо определить ограниченную область фазового пространства, в которой будет составлена выборка. В качестве этой области будем брать некоторую трубку траекторий. Определим два шара, первый - радиуса ε_1 с центром в точке, задаваемой начальным радиус-вектором, второй - радиуса ε_2 с центром в точке, задаваемой вектором начальной скорости. Составим в этих шарах конечный набор начальных условий следующим образом: компоненты радиус-вектора будем выбирать из равномерного распределения с нулевым математическим ожиданием на шаре радиуса ε_1. Компоненты вектора скорости выберем из того же распределения, но на шаре радиуса ε_2. Теперь для каждого начального условия проинтегрируем с постоянным шагом соответствующую траекторию в рамках невозмущенной модели. Таким образом, для нейронной сети прогнозирующей движение обучающая выборка будет состоять из радиус-векторов, принадлежащих траекториям и соответствующих им конечных радиус-векторов: $S = \{S_i\}_{i=1}^M$, где $S_i = \{[\vec{R}_n^i, \vec{R}_{end}^i]\}_{n=1}^N$, M − количество траекторий, а N − количество точек на траектории. На рисунке 3 приведен набор траекторий для обучающей выборки прогнозирования.

В задаче коррекции численное решение базируется на функции $lambert.m$, таким образом, необходимо построить нейросетевой аналог отображения, задаваемый этой функцией, в ограниченной области пространства. Для этого построим трубку фиксированного радиуса δ и равномерно распределим в ней конечное количество позиций КА. Для каждой позиции посчитаем скорость, необходимую для того, чтобы попасть в конечную точку. Таким образом для нейронной сети корректирующей движение обучающая выборка будет состоять из радиус-векторов, принадлежащих трубке, соответствующих им вектор-скоростей и времени полета: $S = \{[\vec{R}_i, t_i, \vec{V}_i^{lambt}]\}_{i=1}^N$, где

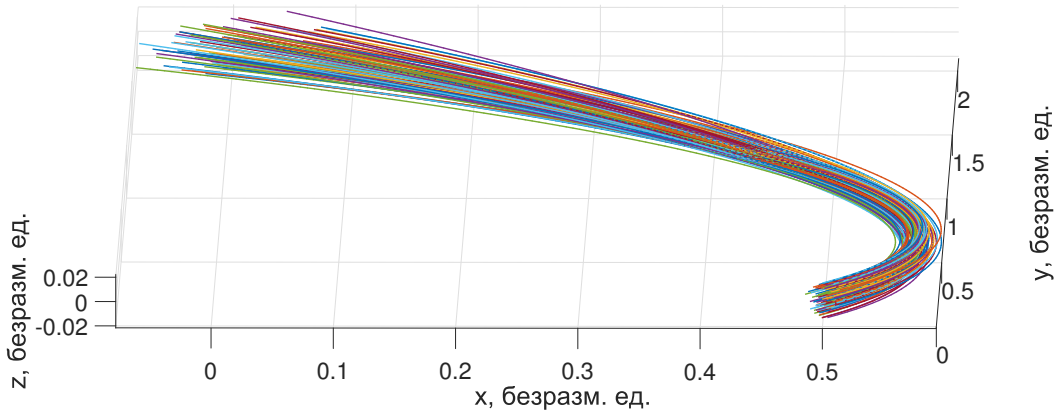


Рис. 3: Визуализация траекторий для обучающей выборки прогнозирования

N - количество заданных позиций. Включать радиус-вектор конечной точки в выборку нет смысла, поскольку информация о нем хранится в скорости рассчитанной функцией $lambert.m$. На рисунке 4 приведена визуализация обучающей выборки для задачи коррекции.

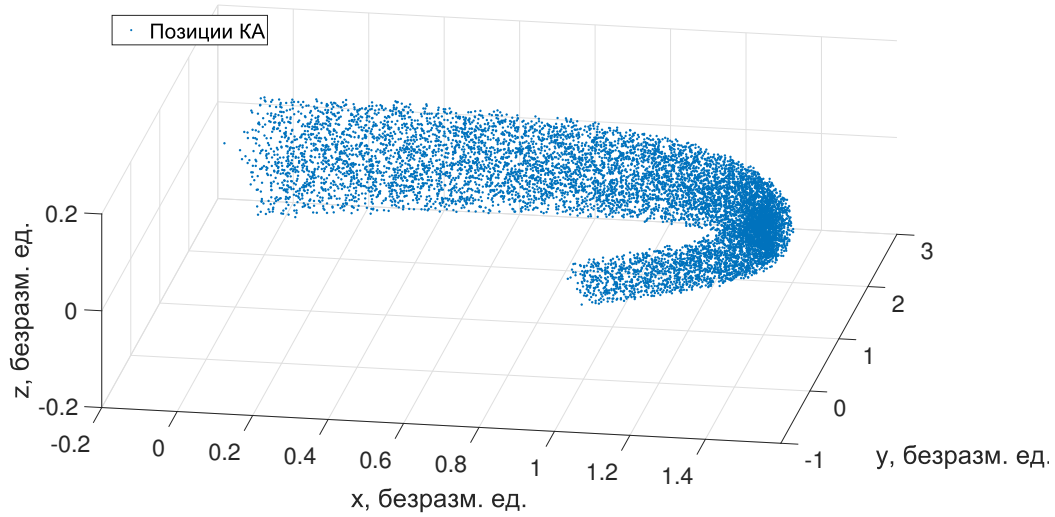


Рис. 4: Визуализация обучающей выборки для коррекции

После того как обучающие выборки составлены, необходимо построить нейронные сети, способные их аппроксимировать. Обе нейронные сети должны решать задачу многомерной нелинейной регрессии, другими словами, для каждой выборки необходимо построить аппроксимирующее отображение. Таким образом выбор архитектуры сети и функционалов ошибки значительно сужается. В 1957 году А.Н. Кол-

могоровым и В.И. Арнольдом была доказана теорема о представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозицией непрерывных функций одной переменной, которая в 1989 году была переформулирована и доказана Д. Цыбенко для нейронных сетей: любая функция нескольких переменных может быть представлена трехслойной ИНС с прямыми полными связями между входным и скрытым слоями с N нейронами входного слоя, не менее чем $2N + 1$ нейронами скрытого слоя с ограниченными функциями активации и нейронами выходного слоя с неизвестными функциями активации. Следовательно, архитектура сети будет задана следующим образом: полный граф с 3-мя слоям, входным, скрытым и выходным. Функционал ошибки выберем из физических соображений. Поскольку обе нейронные сети должны минимизировать евклидово расстояние, то в качестве функционала выберем среднеквадратичное отклонение (Mean Squared Error):

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n - \tilde{y}_n)^2$$

где N - количество примеров в обучающей выборке, y_n - выходной обучающий пример, а $\tilde{y}_n$ - желаемый отклик сети. Теперь определимся с активационными функциями. Для скрытого слоя в качестве нелинейной активационной функции выберем плотность нормального распределения. Она является дифференцируемой и монотонной, поэтому удовлетворяет определению активационной функции. Полученная нейронная сеть называется радиально-базисной нейронной сетью. Функционировать данная сеть будет в соответствии с данной формулой

$$f(\vec{x}|\vec{\theta}) = \omega_0 + \sum_{n=1}^{M}\omega_n \exp\left(-\frac{||\vec{x} - \vec{\mu}_n||^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

где вектор параметров $\vec{\theta} = [\vec{\omega}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}]$, а $\vec{\mu} = [\vec{\mu}_1, ..., \vec{\mu}_M]$. Здесь – это количество нейронов в скрытом слое. Инициализация параметров будет происходить следующим образом: коэффициенты линейной комбинации ω_n задаются из равномерного распределения с нулевым математическим ожиданием, а дисперсия полагается единичной. Вектора математического ожидания определим из физического смысла следующим образом: разобьем аппроксимируемое множество − обучающую выборку − на кластеры. Под кластером подразумевается плотное скопление объектов выборки. Количество кластеров определяется количеством нейронов в скрытом слое сети. Для каждого кластера определим его центр масс с помощью метода к-средних. Дей-

ствие алгоритма таково, что он стремится минимизировать суммарное квадратичное отклонение точек кластеров от центров этих кластеров. Таким образом вектора математического ожидания будут выбраны как центры масс своих кластеров. Физический смысл заключается в том, что каждый нейрон будет аппроксимировать свой кластер плотностью нормального распределения с заданными параметрами. В итоге гиперповерхность, задаваемая выборкой будет аппроксимирована суперпозицией плотностей нормального распределения. Подобная инициализация параметров является хорошим начальным приближением для градиентного метода оптимизирующего эти параметры. В качестве градиентного метода будет выбран алгоритм Левенберга−Марквардта [10]. Подробно рассмотрим процесс оптимизации функции потерь. Распишем более подробно вектор параметров сети: $\vec{\theta} = [\vec{\omega}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}]$. Его длина равна $M \cdot d + 2M + 1$, где d − размерность выборки, поскольку $\vec{\mu} = [\vec{\mu}_1, ..., \vec{\mu}_M]$ − это вектор составленный из векторов математических ожиданий всех кластеров, $\vec{\omega} = [\omega_0, \omega_1, ..., \omega_M]$, а $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_M]$. Запишем линейное приближение аппроксимирующей функции: $f(\vec{x}|\vec{\theta} + \Delta\vec{\theta}) - f(\vec{x}|\vec{\theta}) = J\Delta\vec{\theta}$, где J якобиан функции $f(\vec{x}|\vec{\theta})$ в точке $\vec{\theta}$ размерности $(N \times M \cdot d + 2M + 1)$, N - объем обучающей выборки.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\vec{x}_1,\vec{\theta})}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial f(\vec{x}_1,\vec{\theta})}{\partial\theta_{M\cdot d+2M+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(\vec{x}_N,\vec{\theta})}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial f(\vec{x}_N,\vec{\theta})}{\partial\theta_{M\cdot d+2M+1}} \end{pmatrix}$$

Для нахождения приращения $\Delta\vec{\theta}$ приравняем нулю вектор частных производных функционала ошибки по параметрам, для этого представим его следующим образом: $MSE(\vec{\theta}) = ||\vec{y} - f(\vec{\theta}+\Delta\vec{\theta})||^2$, где $\vec{y} = [y_1, ..., y_N]^T$, а $f(\vec{\theta}+\Delta\vec{\theta}) = [f(x_1|\vec{\theta}+\Delta\vec{\theta}), ..., f(x_N|\vec{\theta}+\Delta\vec{\theta})]^T$. Преобразуем функционал: $||\vec{y} - f(\vec{\theta}+\Delta\vec{\theta})||^2 = (\vec{y} - f(\vec{\theta}+\Delta\vec{\theta}))^T(\vec{y} - f(\vec{\theta}+\Delta\vec{\theta})) = \vec{y}^T\vec{y} - 2\vec{y}^T f(\vec{\theta} + \Delta\vec{\theta}) + f^T(\vec{\theta} + \Delta\vec{\theta})f(\vec{\theta} + \Delta\vec{\theta})$. Дифференцируя полученное выражение по параметрам получим $\dfrac{\partial MSE(\vec{\theta})}{\partial\vec{\theta}} = (J^T J)\Delta\vec{\theta} - J^T(\vec{y} - f(\vec{\theta})) = 0$. Таким образом, $\Delta\vec{\theta} = (J^T J)^{-1}J^T(\vec{y} - f(\vec{\theta}))$. Матрица $J^T J$ может оказаться вырожденной, поэтому вводят параметр регуляризации $\lambda \geq 0$

$$\Delta\vec{\theta} = (J^T J + \lambda E)^{-1}J^T(\vec{y} - f(\vec{\theta}))$$

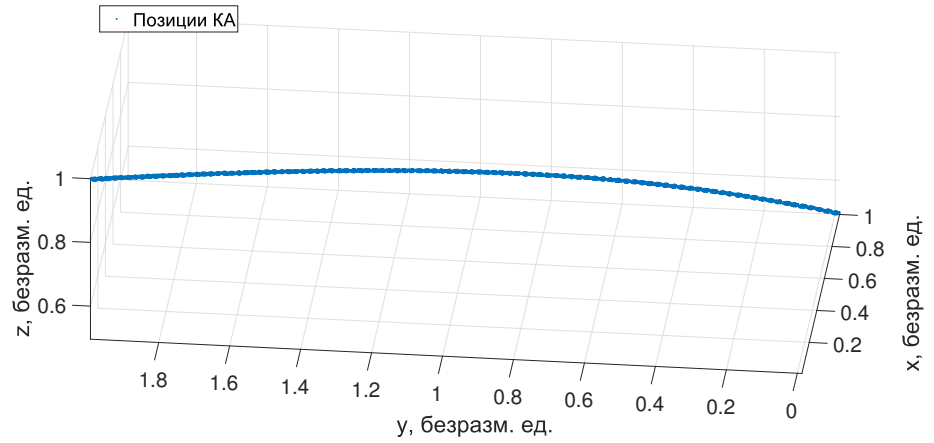
где E - единичная матрица. Полученное приращение параметра $\vec{\theta}$ есть приращение для всех весов в нейронной сети.

6. Моделирование

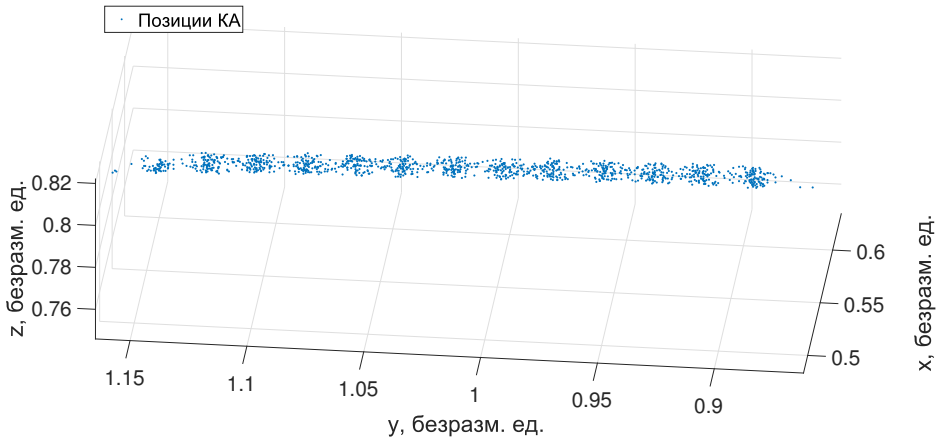
Перед тем как приступить к моделированию решения, сделаем несколько замечаний, касающихся обучающей выборки для задачи коррекции. Во-первых, траектория, используемая для составления выборки, не является непрерывной, а состоит из дискретного набора точек. Нужно учитывать данный факт при инициализации позиций КА, иначе могут получиться незаполненные области в трубке. Поскольку рассматриваются эллиптические траектории, а интегрирование происходит с постоянным шагом, то точки проинтегрированной траектории будут находится на различных расстояниях друг от друга. При составлении выборки невозмущенная траектория помещалась в трубку постоянного радиуса δ, после чего в ней равномерно распределялись позиции КА, но в реальных условиях распределение позиций КА происходит в сферах радиуса δ с центрами в точках, образующих траекторию, поэтому в случае отстояния каких-то точек траектории на расстояние большее 2δ, область между ними останется незаполненной. На рисунке 5 приведен пример заполнения трубки позициями КА, при котором внутри нее остаются пустые области.

Следущее замечание затрагивает типы траекторий, поскольку не все траектории являются одинаковыми с точки зрения аппроксимации нейронными сетями. Есть два таких типа - плоская траектория, у которой не происходит изменения значений по одной из координатных осей, и обычная траектория, где все компоненты меняются со временем. Принципиальное различие заключается в том, что в случае плоской траектории нейронная сеть будет аппроксимировать нулевой координатный столбец, однако сделать этого не удается поскольку аппроксимация будет напрямую зависеть от силы и вида возмущения. Решение данной проблемы кроется в несколько измененном подходе к заполнению трубки, другими словами, распределение координат позиций КА должно быть индивидуальным для каждой оси. Например, в случае плоской траектории, лежащей в плоскости z, значения компоненты z позиций КА должны быть равномерно распределены на отрезке $[-10^{-4}, 10^{-4}]$ безразмерных единиц, иначе слабые возмущения не будут аппроксимироваться. Учитывая данные замечания, удается получить аппроксимацию для любых типов траекторий. На рисунке 6 приведен пример заполнения трубки позициями КА для плоской траектории в проекции на ось z.

Будем называть совокупность двух обученных нейронных сетей моделью. После того как были составлены выборки и обучены нейронные сети, осталось валидиро-



(a) Трубка заполненная позициями КА

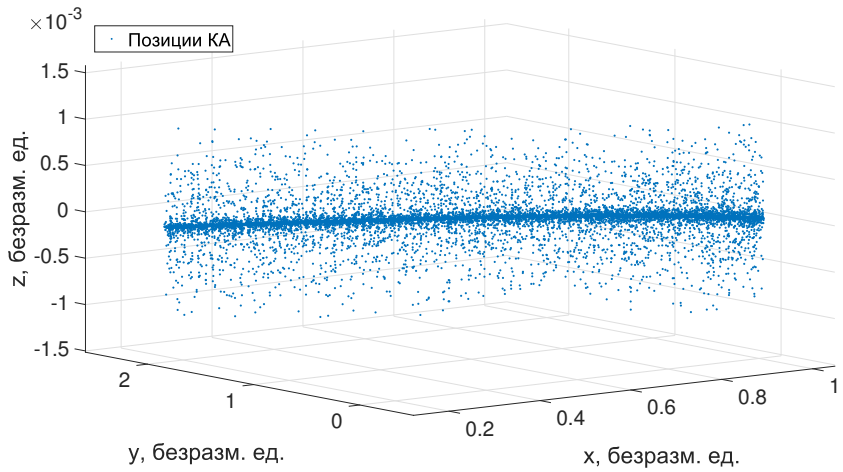


(b) Трубка заполненная позициями КА в приближении

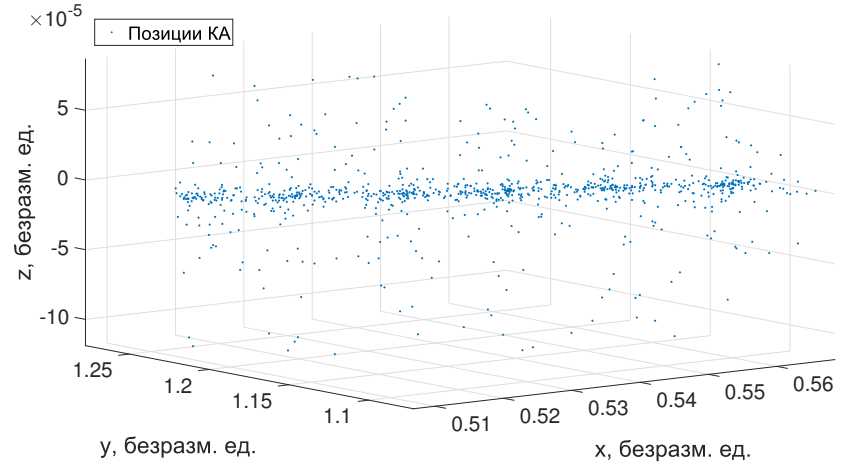
Рис. 5: Обучающая выборка для задачи коррекции

вать полученные результаты. Для этого необходимо проверить корректность работы модели для различных траекторий при различных возмущениях, оценить количество коррекций в зависимости от силы возмущения, оценить величины норм суммарного и среднего импульсов, затраченных на коррекцию, а также проверить устойчивость полученного решения к начальному приближению.

Для каждой траектории задаваемой своими начальными условиями необходимо обучать свою модель. Начнем с тестирования работы набора моделей для различных траекторий и возмущений. Для этого произвольным образом составим набор из пяти начальных и конечных точек и обучим, соответственно, пять моделей. Количество нейронов и минимальный порог функционала ошибки определим для всех



(a) Масштаб по оси z равен 10^{-3}



(b) Масштаб по оси z равен 10^{-5}

Рис. 6: Обучающая выборка для коррекции в случае плоской траектории

моделей одинаковыми. Положим $M = 64$ нейронов, а $MSE_{treshold} = 10^{-5}$. В качестве возмущений будем брать возмущения, не меняющиеся во времени и переменные возмущения одного и того же порядка малости. Оценка работы модели будет заключаться в проверке точности совпадения концов невозмущенной траектории и траектории, полученной нейронной сетью, а также совпадении двух траекторий. Точность прогнозирования положим равной 100 метрам. Приведем таблицу 1, описывающую зависимость норм разностей концевых точек траекторий от постоянных возмущений. Все модели из таблицы тестировались на возмущениях одинаковых порядков, но константы при возмущениях для каждой модели полагались разными. Константы выбирались из равномерного распределения с нулевым математическим ожиданием

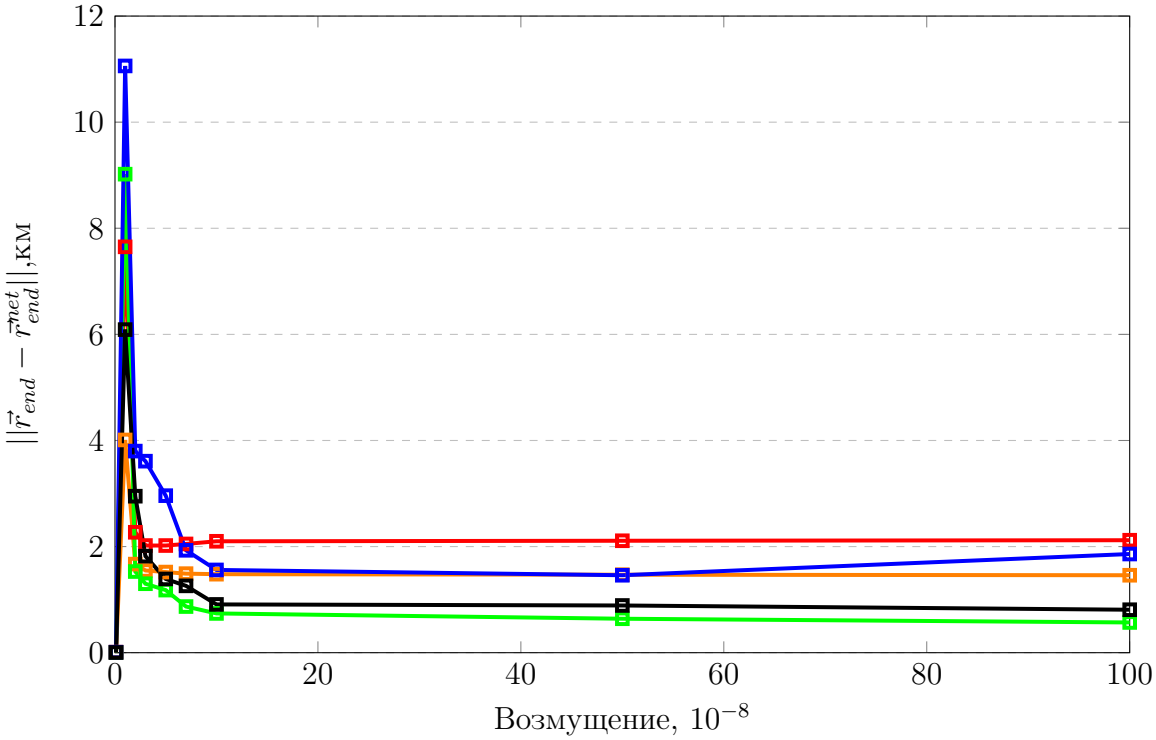
с помощью фиксирования потока (seed) в генераторе случайных чисел.

Таблица 1: Таблица норм разностей концов траекторий

		Постоянное возмущение								
		10^{-8}	10^{-7}	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}
Модель	1	0.01	4,01	1.67	1.55	1.52	1.49	1.48	1.47	1.46
	2	0.008	7.65	2.27	2.02	2.02	2.05	2.10	2.11	2.12
	3	0.006	9.02	1.53	1.30	1.18	0.87	0.74	0.64	0.57
	4	0.01	11.06	3.80	3.61	2.96	1.93	1.56	1.46	1.86
	5	0.004	6.09	2.95	1.82	1.39	1.26	0.91	0.89	0.81

Первая модель аппроксимировала задачу попадания из $R_1 = [1, 0, 0]$ в $R_2 = [0, 2, 0]$, вторая из $R_1 = [1, 0, 1]$ в $R_2 = [0, 2, 0]$, третья из $R_1 = [0, 1, 0]$ в $R_2 = [2, 0, 1]$, четвертая из $R_1 = [0.77, 0.02, 0.63]$ в $R_2 = [1.49, 0.99, 0.44]$ и пятая из $R_1 = [0.84, 0.17, 0.05]$ в $R_2 = [0.72, 0.55, 1.06]$. Данный набор векторов, задающий свои траектории покрывает все их типы − плоские и обычные. По значениям из таблицы 1 построим график 1 зависимости точности попадания КА в заданную цель от силы возмущения для всех моделей.

График 1: Зависимость точности попадания КА в цель от силы возмущения



Данный пик можно объяснить тем, что при возмущениях порядка 10^{-7} количество коррекций не превышает пяти, это видно в таблице 2, следовательно можно сделать вывод, что нескольких коррекций не хватает для того, чтобы добиться такой

же точности как и в случае многих коррекций. Возникает вопрос, что нужно сделать чтобы нескольких коррекций хватало для того, чтобы обеспечить такую же точность попадания в цель, как и в случае многих коррекций? Можно сделать предположение, что при увеличении числа нейронов в нейронной сети точность попадания для нескольких коррекций увеличится. Проверим данное предположение после анализа моделей на различных возмущениях.

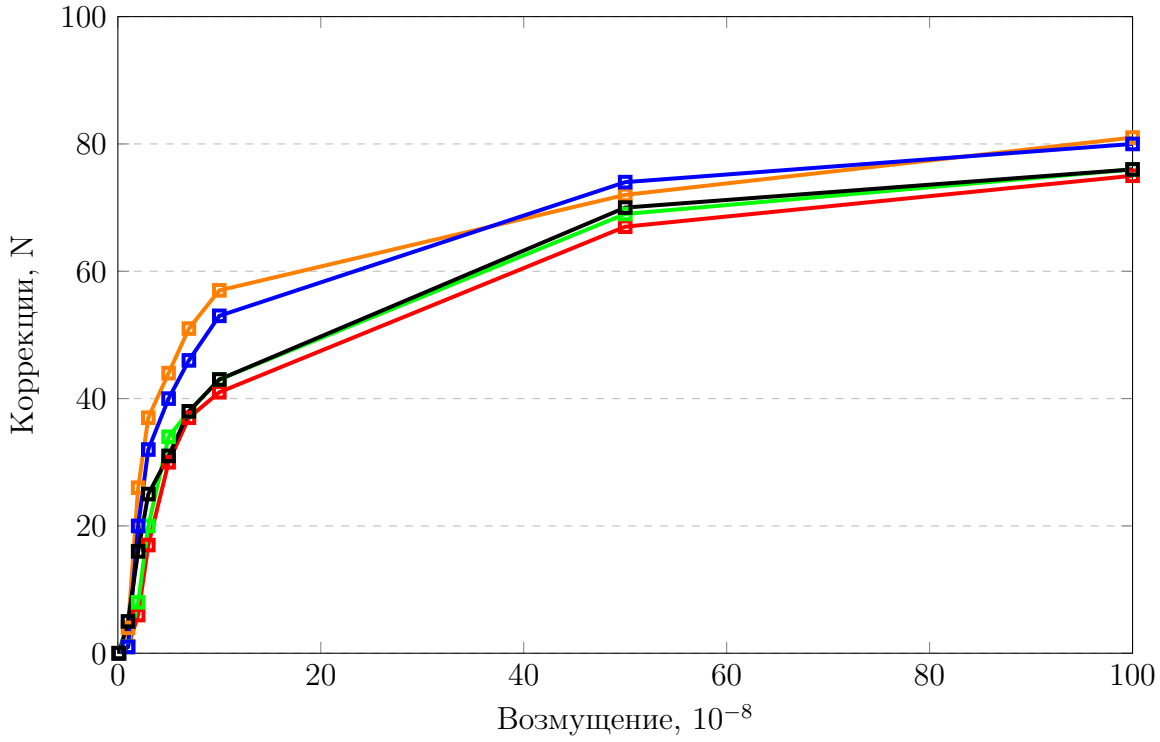
Построим таблицу 2, описывающую количество коррекций для приведенных моделей и возмущений.

Таблица 2: Таблица количества коррекций

		Постоянное возмущение								
		10^{-8}	10^{-7}	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}
Модель	1	0	4	26	37	44	51	57	72	81
	2	0	1	6	17	30	37	41	67	75
	3	0	1	8	20	34	38	43	69	76
	4	0	1	20	32	40	46	53	74	80
	5	0	5	16	25	31	38	43	70	76

По таблице 2 построим график 2, на котором отложим зависимости количества коррекций от силы возмущения.

График 2: Зависимость количества коррекций от силы возмущения



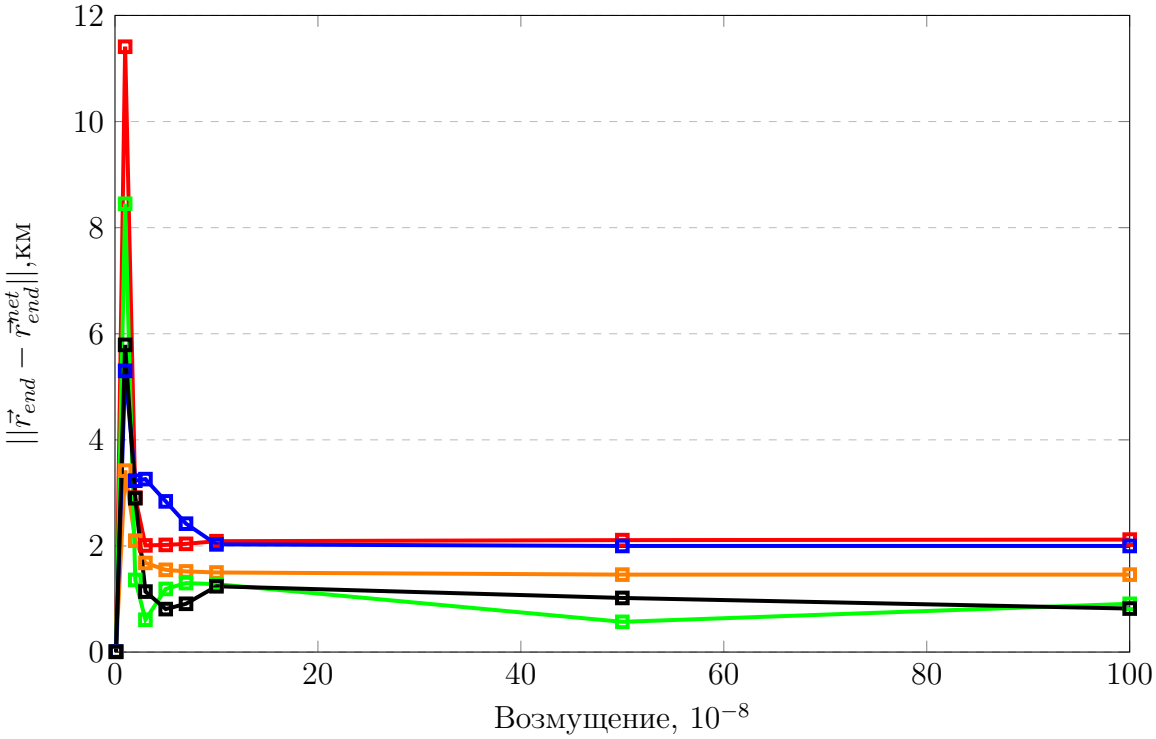
Количество коррекций растет при увеличении силы возмущения. Теперь проверим работу тех же моделей, но уже для переменных возмущений. Для этого построим таблицу 3, описывающую зависимость норм разностей концов траекторий от силы возмущения. В этот раз константы при возмущениях также будем выбирать из равномерного распределения с нулевым математическим ожиданием, но без фиксирования потока (seed) в генераторе случайных чисел.

Таблица 3: Таблица норм разностей концов траекторий

		Переменное возмущение								
		10^{-8}	10^{-7}	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}
Модель	1	0.008	3.42	2.10	1.68	1.55	1.52	1.50	1.46	1.46
	2	0.009	11.41	2.91	2.01	2.02	2.04	2.09	2.11	2.12
	3	0.009	8.45	1.36	0.61	1.19	1.30	1.28	0.57	0.91
	4	0.009	5.30	3.23	3.26	2.84	2.42	2.03	2.00	2.00
	5	0.005	5.79	2.90	1.14	0.81	0.91	1.24	1.02	0.82

Аналогичным образом изобразим на графике 3 результат работы моделей в зависимости от силы возмущения. Модели в таблице представлены в том же порядке, что и в таблице для постоянных возмущений.

График 3: Зависимость точности попадания КА в цель от силы возмущения



Сравнение результатов работы моделей при переменных и постоянных возмуще-

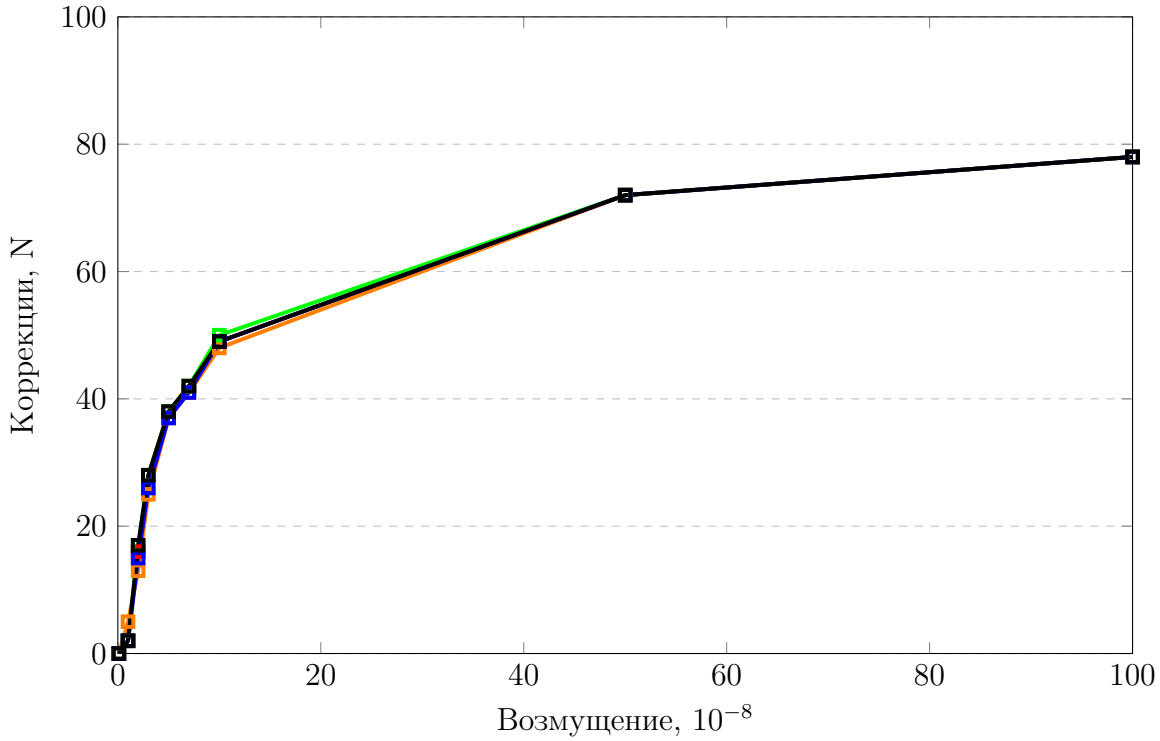
ниях показывает незначительное изменение соответствующих значений точностей, а значит, модели способны с некоторой точностью парировать любой из рассмотренных типов возмущения. Теперь построим таблицу 4, описывающую количество коррекций для переменных возмущений.

Таблица 4: Таблица количества коррекций

		Переменное возмущение								
		10^{-8}	10^{-7}	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}
Модель	1	0	5	13	25	37	41	48	72	78
	2	0	2	16	28	38	42	49	72	78
	3	0	2	17	28	38	42	50	72	78
	4	0	2	15	26	37	41	49	72	78
	5	0	2	17	28	38	42	49	72	78

В таблице примечательно то, что для всех моделей количество коррекций для одних и тех порядков возмущений стало примерно одинаковым. Построим график 4 зависимости количества коррекций от силы возмущения.

График 4: Зависимость количества коррекций от силы возмущения



Действительно, кривые коррекций для всех моделей совпадают. Это объясняется тем, что случайные возмущения не имеют постоянного направления, поэтому возмущенная траектория будет колебаться относительно невозмущенной, таким образом количество раз, когда прогнозирующая сеть предскажет выход конечной точки тра-

ектории из допустимого шара будет примерно одинаковым. Теперь оценим нормы суммарного $||\Delta\vec{v}|| = \sum_{i=1}^{N} ||\vec{v_i}||$ и среднего $||\Delta\vec{v}_{avg}|| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} ||\vec{v_i}||$ импульсов, затраченные на коррекции. Предыдущий эксперимент показал схожие результаты для постоянных и переменных возмущений, поэтому для оценки норм импульсов выберем любые из перечисленных возмущений, к примеру, переменные. Составим таблицу 5, описывающую зависимость нормы суммарных импульсов для всех моделей и таблицу 6, описывающую зависимость нормы суммарных импульсов для всех моделей. По таблице 5 и 6 построим соответствующие графики 5 и 6. Приведенные скорости даны в размерных величинах м/с.

Таблица 5: Таблица норм суммарных импульсов

		Возмущение							
		10^{-8}	10^{-7}	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-6}$
Модель	1	0	102.82	58.09	86.38	101.48	102.03	120.98	179.27
	2	0	174.16	195.79	203.94	220.15	231.62	252.31	291.24
	3	0	128.02	105.95	107.47	135.44	166.09	183.72	229.08
	4	0	221.08	188.54	184.36	191.74	193.17	206.13	235.42
	5	0	239.05	189.47	208.15	238.68	257.19	275.67	322.45

График 5: Зависимость нормы суммарного импульса от силы возмущения

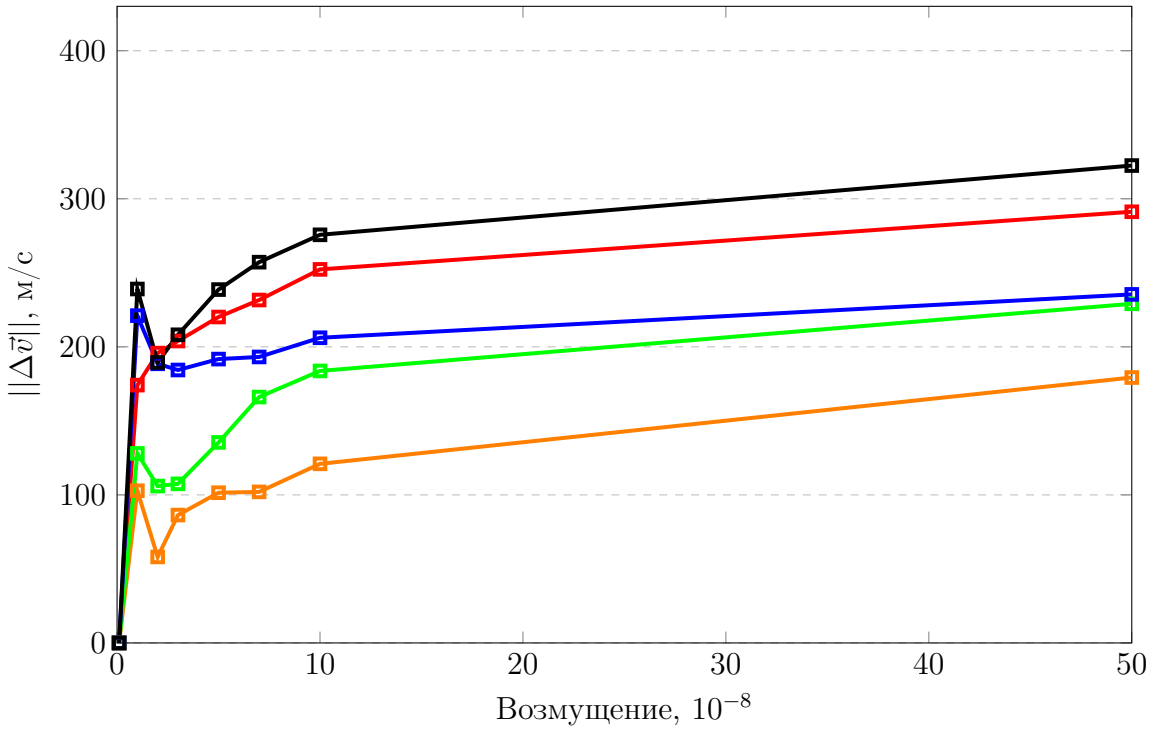
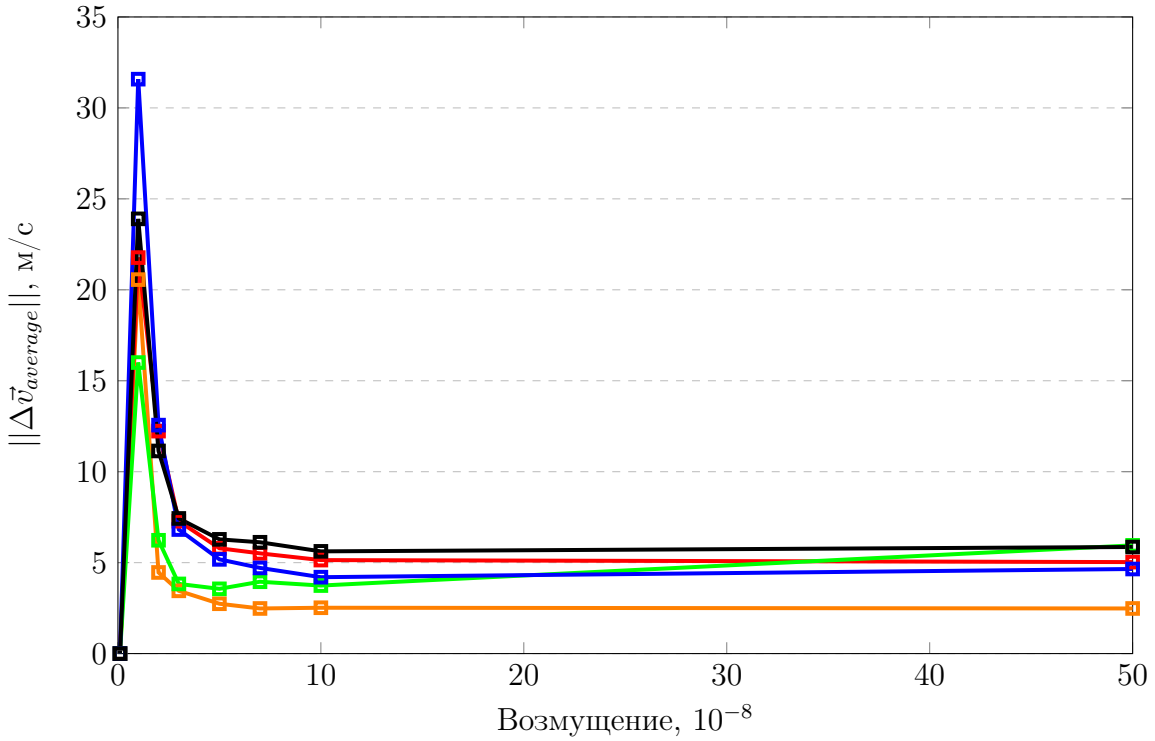


Таблица 6: Таблица норм средних импульсов

		Возмущение							
		10^{-8}	10^{-7}	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-6}$
Модель	1	0	20.56	4.46	3.45	2.74	2.48	2.52	2.48
	2	0	21.77	12.23	7.28	5.79	5.51	5.14	5.03
	3	0	16.00	6.23	3.83	3.56	3.95	3.74	5.95
	4	0	31.58	12.56	6.82	5.18	4.71	4.20	4.65
	5	0	23.90	11.14	7.43	6.28	6.12	5.62	5.86

С ростом возмущающей силы растет и затраченный импульс. Данная зависимость схожа с зависимостью количества коррекций от силы возмущения. Это естественный результат, поскольку суммарный импульс будет пропорционален количеству импульсных коррекций.

График 6: Зависимость нормы среднего импульса от силы возмущения



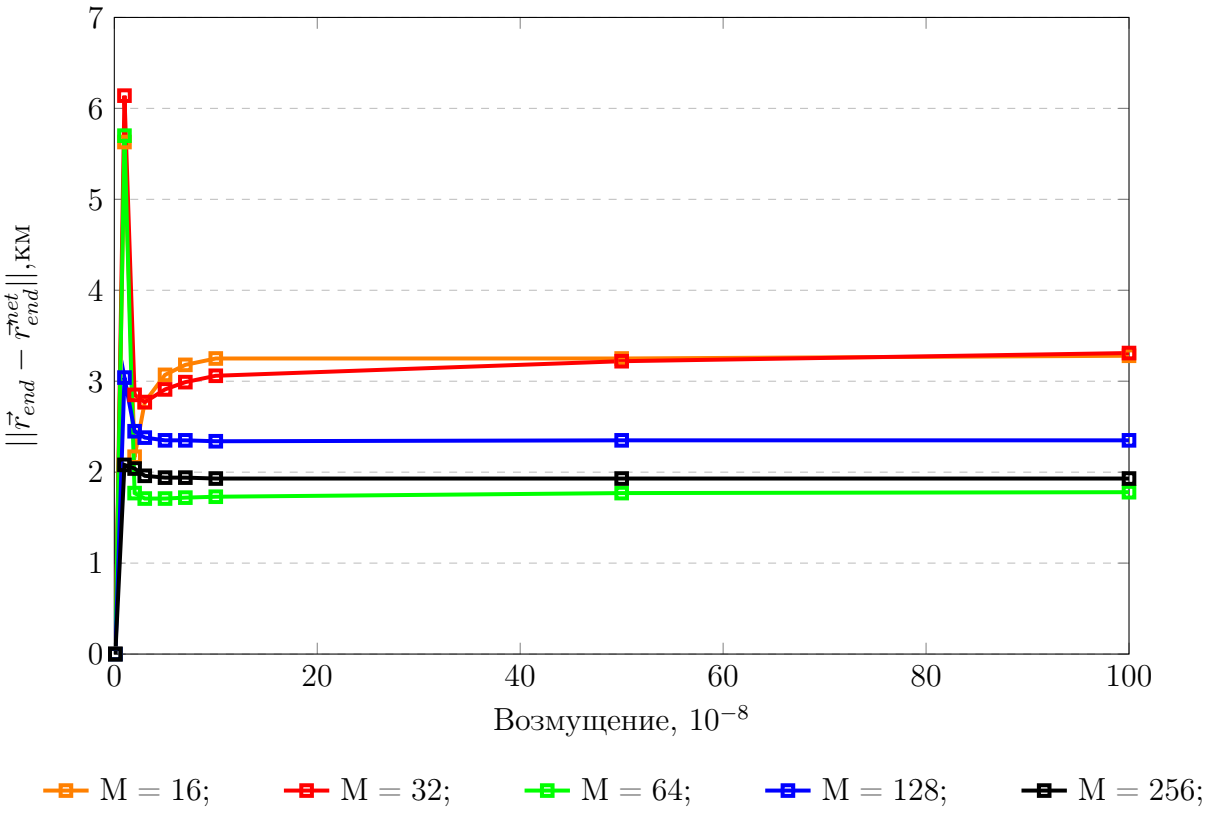
В области малых возмущений порядка 10^{-7} безразмерных единиц для нормы суммарного и среднего импульсов регистрируются скачки, однако их природа принципиально разная. Скачок для нормы среднего импульса объясняется тем, что для возмущений этого порядка нейронная сеть делает всего несколько, но больших по величине импульсов. Однако особенность скачка нормы суммарного импульса может объясняться предположением, сделанным ранее о количестве нейронов в сети. При большом количестве коррекций точность отдельной коррекции не определяет

итоговый результат, но в случае малого их числа ситуация обратная. Таким образом необходимо проверить влияние количества нейронов на точность отдельных коррекций. Для этого построим пять моделей для одной и той же обучающей выборки, задаваемой, к примеру, векторами $R_1 = [1, 0, 1]$ и $R_2 = [0, 2, 0]$. Число нейронов для моделей будет следующим: $M = 16, 32, 64, 128, 256$. Если скачок зависимости точности попадания КА в цель, а также скачок зависимости нормы суммарного импульса от возмущений будет сглаживаться при увеличении количества нейронов, то предположение окажется верным. Составим таблицу 7, для зависимости $||\vec{r}_{end} - \vec{r}^{net}_{end}||$ от силы возмущения и M. Построим график 7 соответствующей зависимости.

Таблица 7: Таблица норм разностей концов траекторий

		Возмущение								
		10^{-8}	10^{-7}	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}
Нейроны	16	0	5.63	2.17	2.77	3.07	3.18	3.25	3.25	3.28
	32	0	6.14	2.85	2.77	2.91	2.99	3.06	3.22	3.31
	64	0	5.70	1.77	1.71	1.71	1.72	1.73	1.77	1.78
	128	0	3.04	2.45	2.38	2.35	2.35	2.34	2.35	2.35
	256	0	2.08	2.04	1.96	1.94	1.94	1.93	1.93	1.93

График 7: Зависимость точности попадания КА в цель от силы возмущения и M

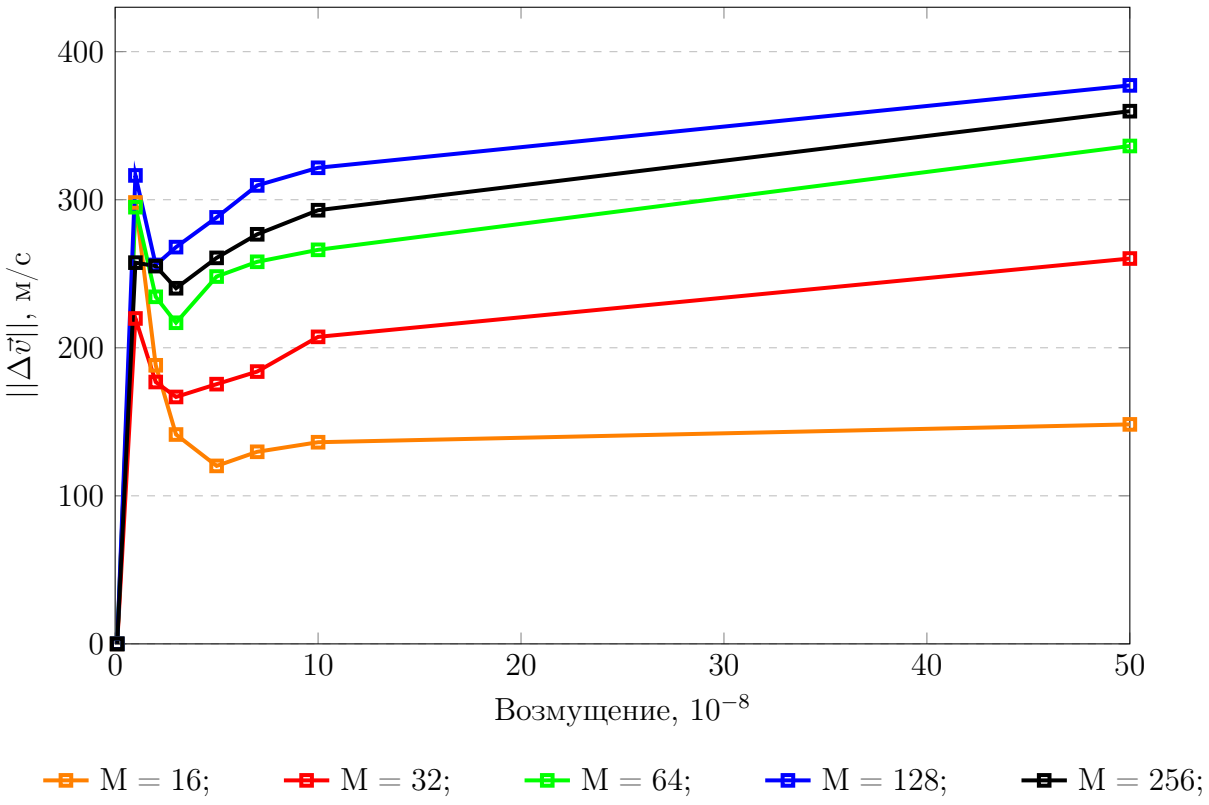


По графику 7 можно понять две следующие вещи: во-первых, предположение было верным, поскольку величина скачка уменьшается при увеличении количества нейронов. Черная линия, отвечающая $M = 256$ нейронам практически его не имеет. Во-вторых, точность попадания КА в цель не зависит от количества нейронов. Составим таблицу 8, описывающую зависимость норм суммарных импульсов от силы возмущения и количества нейронов в модели. По таблице 8 построим график 8 соответствующей зависимости.

Таблица 8: Таблица норм суммарных импульсов

		Возмущение							
		10^{-8}	10^{-7}	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-6}$
Нейроны	16	0	298.14	188.17	141.41	120.21	129.74	136.20	148.25
	32	0	219.79	176.87	166.78	175.43	183.92	207.37	260.28
	64	0	294.96	234.42	216.90	248.11	258.07	266.16	336.29
	128	0	316.45	255.95	267.98	288.06	309.67	321.58	377.22
	256	0	257.50	255.16	240.21	260.72	276.65	292.91	359.79

График 8: Зависимость нормы суммарного импульса от силы возмущения и M



В случае суммарного импульса ситуация аналогичная: кривые выравниваются при увеличении количества нейронов. Таким образом экспериментально был показан факт влияния количества нейронов на точность отдельных коррекций.

Осталось проверить устойчивость решения: способность нейронных сетей аппроксимировать траектории начальные точки которых не совпадает с точкой из постановки. Для этого инициализируем набор начальных условий для радиус-векторов в шаре радиуса ε_1 с центром в точке, задаваемой начальным радиус-вектором. Начальные значения для векторов скоростей инициализируем в шаре радиуса ε_2 с центром в точке, задаваемой начальным вектором скорости. За ε_1 возьмем значение в 10 раз превышающее значение, используемое при составлении обучающей выборки. За ε_2 тоже возьмем значение, используемое при составлении обучающей выборки, но увеличивать его не будем. В качестве проверочного функционала выберем опять норму разности конечных радиус-векторов. Проверять устойчивость будем на примере траектории с началом в $R_1 = [1, 0, 0]$ и концом в $R_2 = [0, 2, 0]$. Такой выбор обусловлен показательностью результата аппроксимации траектории нейронной сетью, поскольку данная траектория является плоской. Приведем таблицу 9, состоящую из норм разностей начальных и конечных векторов. Для каждого примера будем произвольно выбирать возмущение из диапазона значений $10^{-5} - 10^{-7}$ безразмерных единиц. В таблице 9 приведено десять значений норм разностей начальных и конечных векторов, но на практике было проделано порядка сотни экспериментов. Во всех случаях КА попадал в 10-ти километровую окрестность конечной точки. Учитывая этот результат можно утверждать, что решение является устойчивым. На рисунке 7 изображена совокупность из невозмущенной траектории, аппроксимации нейронной сетью и возмущенной траектории.

Таблица 9: Зависимость норм разностей конечных векторов от начальных.

$\|\|\vec{R}_1 - \vec{R}'_1\|\|$	60.03	77.59	80.72	23.03	58.12	51.02	16.53	95.35	87.34	97.07
$\|\|\vec{R}_2 - \vec{R}'_2\|\|$	2.20	1.87	2.55	1.66	2.52	6.72	1.68	3.82	3.18	5.74

Моделирование проводилось на персональном компьютере со следующими характеристиками: процессор Intel Core I5-2520M с тактовой частотой 2.5 GHz, объем оперативной памяти 4Gb. Вычисления проводились в среде MATLAB, версия R2017a.

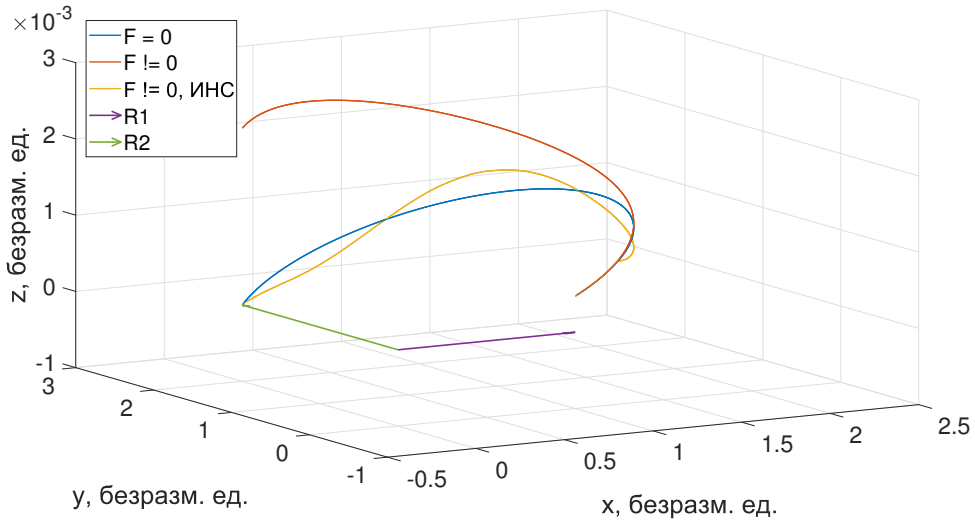


Рис. 7: Проверка устойчивости на примере плоской траектории

7. Заключение

Для задачи перелета между двумя точками разработаны две нейронные сети, отвечающие за коррекцию и прогноз орбитального движения аппарата в рамках возмущенной задачи двух тел. Исследования показали, что увеличение возмущающей силы приводит к возрастанию количества необходимых коррекций. В случаях, когда возмущающая сила достигает порядка 10^{-6} безразмерных единиц, рассматриваемая схема оказывается неэффективной с точки зрения количества коррекций, поэтому в таких случаях рекомендуется традиционные способы коррекции траектории. Тем не менее, сети оказались способными решать задачу в случаях, когда начальное условие КА находится в некоторой окрестности исходной точки. Точность производимых коррекций увеличивается при увеличении нейронов в нейронных сетях. Затраты на коррекцию возрастают с ростом возмущающей силы и находятся в пределах от 50 до 400 м/с.

Список использованных источников

[1] *Pérez, D., Bevilacqua R.* Neural Network based calibration of atmospheric density models // Acta Astronautica 2015, V.110 (Supplement C), P. 58-76.

[2] *Pérez Chaparro, David Andrés* Adaptive Lyapunov control and artificial neural networks for spacecraft relative maneuvering using atmospheric differential drag // Ph.D. Thesis. Rensselaer Polytechnic Institute. 2013.

[3] *Dachwald B.* Low-thrust trajectory optimization and interplanetary mission analysis using evolutionary neurocontrol // Ph.D. Thesis. Bundeswehr University Munich, Munich, Germany. 2004.

[4] *Dachwald B.* Optimization of very-low-thrust trajectories using evolutionary neurocontrol // Acta Astronautica. 2005. V. 57(2), P.175-185.

[5] *Ohndorf A.* Optimization of low-thrust earth-moon transfers using evolutionary neurocontrol // IEEE Congress on Evolutionary Computation. 2009.

[6] *Gurfil P.* Adaptive neural control of deep-space formation flying // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2002, V. 26(3), P. 491–501.

[7] *Haykin S.* Neural Networks: A Comprehensive Foundation (2nd Edition) // McMaster University. Hamilton, Ontario, Canada, 2006.

[8] *Srivastava N., Hinton G., Krizhevsky A., Sutskever I., Salakhutdinov R.* Dropout: A Simple Way to Prevent Neural Networks from Overfitting // Journal of Machine Learning Research. 2014, Toronto, Ontario, Canada

[9] *Dario Izzo* Revisiting Lambert's Problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. Vol. 29, No. 5 (2006), pp. 1242-1245.

[10] *Levenberg K.* A Method for the Solution of Certain Problems in Last Squares // Quart. Appl. Math. 1944. Vol. 2. P. 164—168.