



Квалификационная работа на соискание степени магистра  
по направлению 03.04.01 «Прикладные математика и физика»,  
магистерская программа «Управление динамическими системами»



# Оптимизация управления малым космическим аппаратом методом Фурье-представления в рамках полной модели

Выполнил:

студент группы М05-001Г  
*Суслов Кирилл Сергеевич*

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент  
*Широбоков Максим Геннадьевич*

# Проблематика

Актуальная проблема – **задача оптимизации управления орбитальным движением при многовитковых перелётах:**

- проектирование миссий с малой тягой,
- выход из системы Земля–Луна.

Существующие методы обладают как преимуществами, так и недостатками.

В сложном поле уравнения движения не интегрируются аналитически, что приводит к следующим проблемам:

- вычислительная сложность,
- погрешности построения,
- отсутствие явной связи управления с качественным поведением траекторий.

# Цель работы и структура доклада

Предложить метод поиска начального приближения для задачи оптимизации, который не обладает вышеописанными недостатками.

Для этого предлагается найти **модель движения, класс функций управления и схему усреднения**, которые приводят к системе уравнений движения, имеющей точное решение.

В работе представлены:

1. Уравнения движения
2. Условия на управляющее ускорение
3. Схема усреднения
4. Усреднённые уравнения движения
5. Точное решение усреднённой системы
6. Сравнение с неусреднённым движением
7. Решение модельной задачи оптимизации

# Уравнения движения

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}.$$

- Перейдём к равноденственным элементам орбиты:  $p, e_x, e_y, i_x, i_y, L$ .
- Разложим возмущение по компонентам в орбитальной СК:  $f_r, f_t, f_b$ .
- Совершим замену независимой переменной по формуле:  $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{p/\mu}$ .

$$e'_x = \varepsilon \cdot (\sigma \sin L \cdot \xi_r + (e_x + (1 + \sigma) \cos L) \cdot \xi_t - e_y \eta \cdot \xi_b),$$

$$e'_y = \varepsilon \cdot (-\sigma \cos L \cdot \xi_r + (e_y + (1 + \sigma) \sin L) \cdot \xi_t + e_x \eta \cdot \xi_b),$$

$$i'_x = \varepsilon \cdot \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2} \cos L \cdot \xi_b, \quad i'_y = \varepsilon \cdot \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2} \sin L \cdot \xi_b,$$

$$p' = \varepsilon \cdot 2p \cdot \xi_t, \quad L' = \frac{\mu \sigma^3}{p^2} + \varepsilon \cdot \eta \cdot \xi_b.$$

где  $\varepsilon = \frac{\max_{\tau \in [\tau_0, \tau_0 + T_f]} f(\mathbf{I}(\tau), L(\tau), \tau)}{(1 - e(\tau_0))^2 \mu / p^2(\tau_0)}$ ,  $f_i(\mathbf{I}(\tau), L(\tau), \tau) = \varepsilon \cdot \xi_i(\mathbf{I}(\tau), L(\tau), \tau)$ .

# Условия на возмущающее ускорение

Рассматривается множество функций возмущающего ускорения, компоненты которого в орбитальной системе координат

- являются периодическими функциями истинной долготы,
- совпадают со своими тригонометрическими рядами Фурье с постоянными коэффициентами.

$$\xi_i(L) = \alpha_0^i + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^i \cos kL + \beta_k^i \sin kL), \quad i \in \{r, t, b\},$$

$$\alpha_0^i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_i dL, \quad \alpha_k^i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_i \cos(kL) dL, \quad \beta_k^i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_i \sin(kL) dL.$$

# Метод усреднения

За основу схемы усреднения берутся результаты, полученные В.М. Волосовым.

- возмущённая система:  $\mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, y, \tau, \varepsilon)$  - уравнения на медленные переменные,  
 $y' = Y(\mathbf{x}, y, \tau, \varepsilon) \equiv Y_0(\mathbf{x}, y, \tau) + \varepsilon Y_1(\mathbf{x}, y, \tau, \varepsilon)$  - уравнение на быструю переменную,
- усреднённая система:  $\bar{\mathbf{x}}' = \varepsilon \bar{\mathbf{X}}_1(\bar{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{X}}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}, y_0, \tau_0, \tau), \tau, 0) d\tau.$

Сравниваются решения этих систем при общих начальных условиях  $\mathbf{x}_0, y_0, \tau_0$ .

Если эти системы удовлетворяют условиям теоремы об усреднении, то

$$\forall T > 0, \forall \delta > 0 \exists \varepsilon_1 > 0 : \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_1, \forall \tau : 0 < \tau < \frac{T}{\varepsilon} \rightarrow |\mathbf{x}(\tau) - \bar{\mathbf{x}}(\tau)| < \delta \varepsilon.$$

# Усреднение уравнений движения

Медленные переменные:  $\mathbf{I} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y)^T$ , быстрая переменная:  $L$ .

Вместо  $\bar{\mathbf{I}}' = \mathbf{X}_1(\bar{\mathbf{I}}) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \mathbf{I}'(\bar{\mathbf{I}}, \varphi(\bar{\mathbf{I}}, L_0, \tau_0, \tau)) d\tau$  используется

упрощённая схема усреднения:  $\bar{\mathbf{I}}' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{I}'(\bar{\mathbf{I}}, L) dL = \varepsilon \bar{\mathbf{X}}_1(\bar{\mathbf{I}}) + \varepsilon e^2 \mathbf{F}(\bar{\mathbf{I}}(\tau), L(\tau), \tau)$ .

Полученная усреднённая система уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{p}' &= \varepsilon \cdot 2\bar{p}\alpha_0^t, \quad \bar{i}_x' = \varepsilon \cdot \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} \alpha_1^b, \quad \bar{i}_y' = \varepsilon \cdot \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} \beta_1^b \\ \bar{e}_x' &= \varepsilon \cdot \left( \bar{e}_x \frac{6\alpha_0^t + \alpha_2^t + \beta_2^r}{4} + \bar{e}_y \frac{\beta_2^t - \alpha_2^r + 2\alpha_0^r - 2(\bar{i}_x\beta_1^b - \bar{i}_y\alpha_1^b)}{4} + \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^t \right), \\ \bar{e}_y' &= \varepsilon \cdot \left( \bar{e}_x \frac{\beta_2^t - \alpha_2^r - 2\alpha_0^r + 2(\bar{i}_x\beta_1^b - \bar{i}_y\alpha_1^b)}{4} + \bar{e}_y \frac{6\alpha_0^t - \alpha_2^t - \beta_2^r}{4} - \frac{\alpha_1^r}{2} + \beta_1^t \right). \end{aligned}$$

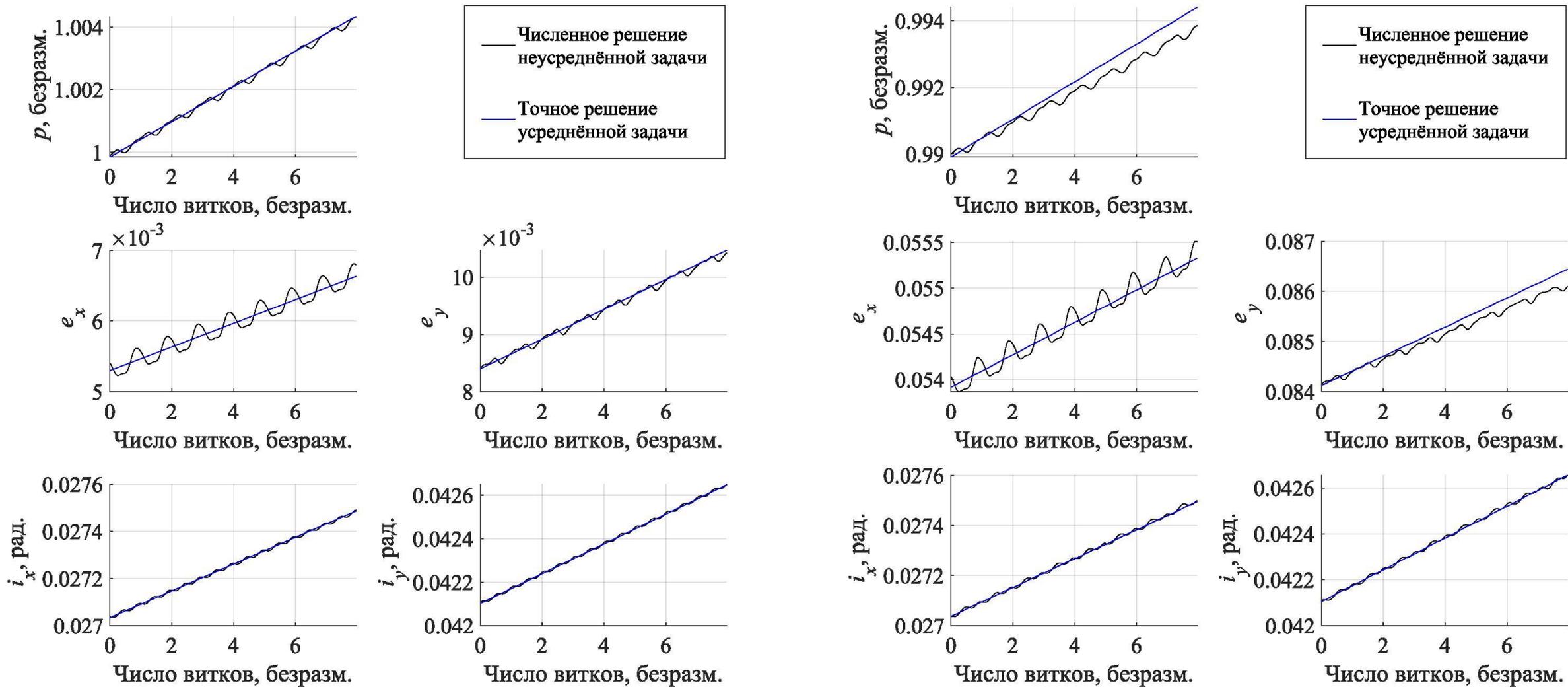
# Точное решение усреднённой системы

$$\begin{aligned}\bar{p}(\tau) &= \bar{p}(\tau_0) \exp(2\varepsilon\alpha_0^t(\tau - \tau_0)), \\ \bar{i}_x(\tau) &= \frac{1}{(\alpha_1^b)^2 + (\beta_1^b)^2} \left( \alpha_1^b \rho \operatorname{tg}\left(\gamma + \frac{\varepsilon\rho}{4}(\tau - \tau_0)\right) + \beta_1^b k \right), \\ \bar{i}_y(\tau) &= \frac{1}{(\alpha_1^b)^2 + (\beta_1^b)^2} \left( \beta_1^b \rho \operatorname{tg}\left(\gamma + \frac{\varepsilon\rho}{4}(\tau - \tau_0)\right) - \alpha_1^b k \right), \\ \begin{pmatrix} \bar{e}_x(\tau) \\ \bar{e}_y(\tau) \end{pmatrix} &= e^{\varepsilon M \tau} \left( \begin{pmatrix} \bar{e}_x(\tau) \\ \bar{e}_y(\tau) \end{pmatrix} + M^{-1} \mathbf{m} \right) - M^{-1} \mathbf{m},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}k &= \beta_1^b \bar{i}_x(\tau_0) - \alpha_1^b \bar{i}_y(\tau_0), \quad \rho = \sqrt{(\alpha_1^b)^2 + (\beta_1^b)^2 + k^2}, \quad \gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha_1^b \bar{i}_x(\tau_0) + \beta_1^b \bar{i}_y(\tau_0)}{\rho}\right), \\ \mathbf{m} &= \begin{pmatrix} \alpha_1^t + \frac{\beta_1^r}{2} \\ \beta_1^t - \frac{\alpha_1^r}{2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a + b & c + d \\ c - d & a - b \end{pmatrix}, \quad a = \frac{3\alpha_0^t}{2}, \quad b = \frac{\alpha_2^t + \beta_2^r}{4}, \quad c = \frac{\beta_2^t - \alpha_2^r}{4}, \quad d = \frac{\alpha_0^r - k}{2}.\end{aligned}$$

# Сравнение с неусреднённой моделью



$$\varepsilon = 10^{-4}, e(\tau_0) = 0.01$$

$$\varepsilon = 10^{-4}, e(\tau_0) = 0.1$$

# Модельная задача оптимизации управления

Рассматривается задача оптимального перелёта между двумя кеплеровыми орбитами за конечное время.

Оптимальное управление ищем в виде:

$$\xi_r(L) = \alpha_0^r + \alpha_1^r \cos L + \beta_1^r \sin L + \alpha_2^r \cos 2L + \beta_2^r \sin 2L,$$

$$\xi_t(L) = \alpha_0^t + \alpha_1^t \cos L + \beta_1^t \sin L + \alpha_2^t \cos 2L + \beta_2^t \sin 2L,$$

$$\xi_b(L) = \alpha_1^b \cos L + \beta_1^b \sin L,$$

Оптимизируемый функционал:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}^2(L) dL = \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi_r^2(L) + \xi_t^2(L) + \xi_b^2(L)) dL = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} (\boldsymbol{\alpha}^2 + (\alpha_0^r)^2 + (\alpha_0^t)^2), \end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_0^r, \alpha_1^r, \beta_1^r, \alpha_2^r, \beta_2^r, \alpha_0^t, \alpha_1^t, \beta_1^t, \alpha_2^t, \beta_2^t, \alpha_1^b, \beta_1^b]^T$ .

# Условия задачи

Классические элементы начальной и целевой орбит.

$\tau$ , безразм. ед.	$a$ , безразм. ед.	$e$	$i$ , рад.	$\Omega$ , рад.	$\omega$ , рад.
0	1	0.03	0.8	0	0
$20 \cdot 2\pi$	1.2	0.01	0.6	$\pi - 0.1$	0

Равноденственные элементы начальной и целевой орбит.

$\tau$ , безразм. ед.	$p$ , безразм. ед.	$e_x$	$e_y$	$i_x$ , рад.	$i_y$ , рад.
0	0.9991	0.03	0	0.423	0
$20 \cdot 2\pi$	1.1999	-0.01	0.001	-0.308	0.031

Ограничения-равенства.

$$\bar{p}(\tau) = \bar{p}(\tau_0) \exp(2\varepsilon\alpha_0^t(\tau - \tau_0)),$$

$$\bar{i}_x(\tau) = \frac{1}{(\alpha_1^b)^2 + (\beta_1^b)^2} \left( \alpha_1^b \rho \operatorname{tg}\left(\gamma + \frac{\varepsilon\rho}{4}(\tau - \tau_0)\right) + \beta_1^b k \right),$$

$$\bar{i}_y(\tau) = \frac{1}{(\alpha_1^b)^2 + (\beta_1^b)^2} \left( \beta_1^b \rho \operatorname{tg}\left(\gamma + \frac{\varepsilon\rho}{4}(\tau - \tau_0)\right) - \alpha_1^b k \right),$$

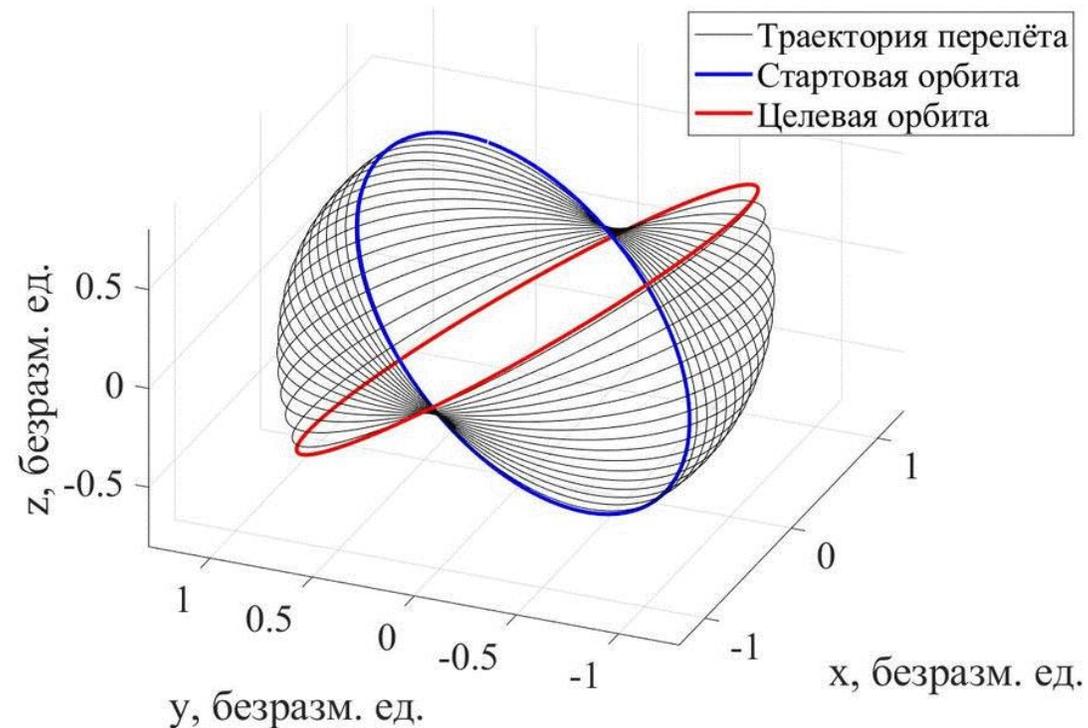
$$\begin{pmatrix} \bar{e}_x(\tau) \\ \bar{e}_y(\tau) \end{pmatrix} = e^{\varepsilon M \tau} \left( \begin{pmatrix} \bar{e}_x(\tau_0) \\ \bar{e}_y(\tau_0) \end{pmatrix} + M^{-1} \mathbf{m} \right) - M^{-1} \mathbf{m},$$

Начальное приближение:  $\alpha = 0$ .

# Оптимальное управление

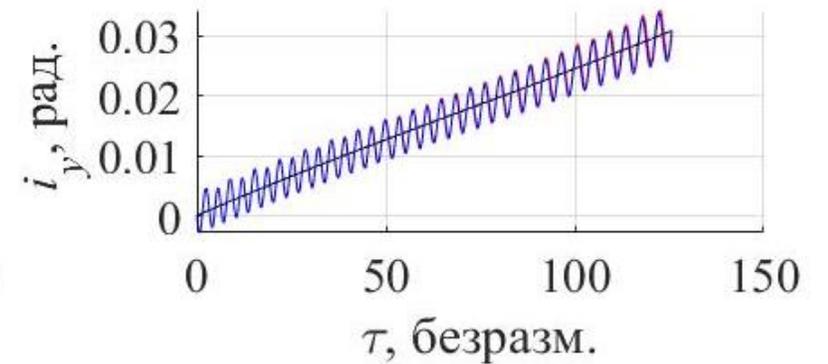
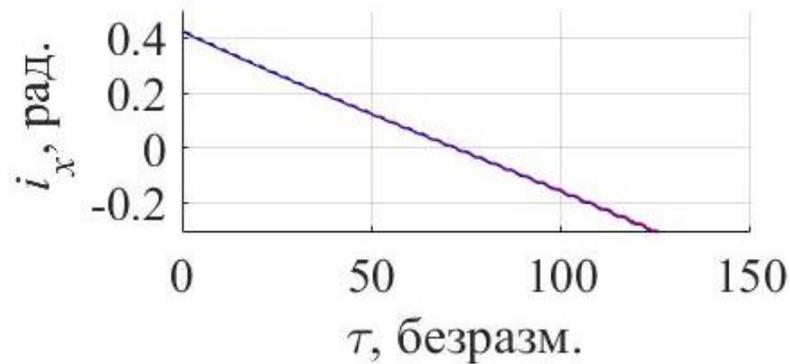
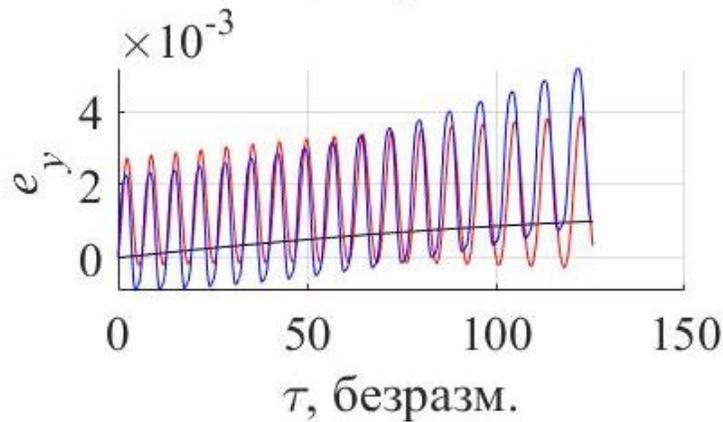
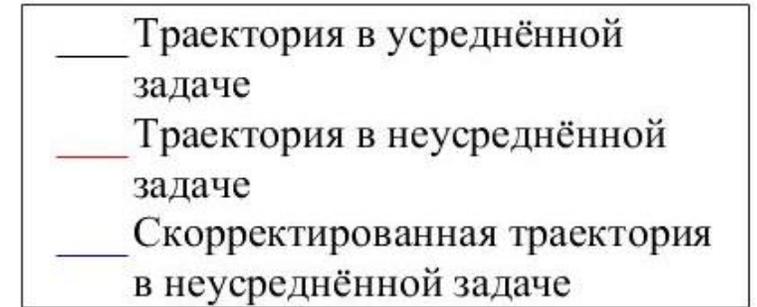
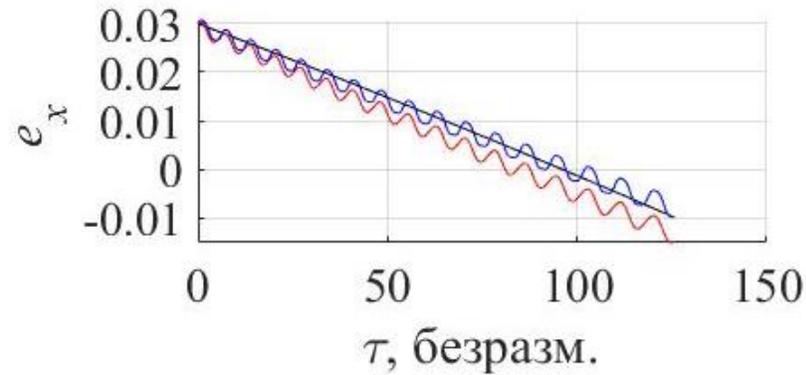
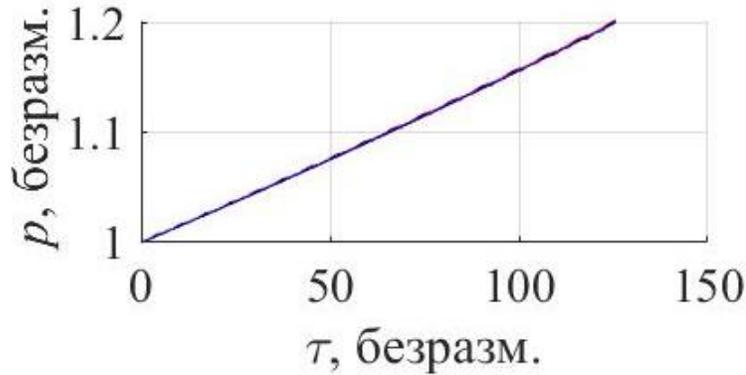
Коэффициенты рядов Фурье оптимального управляющего ускорения в усреднённой задаче.

$\alpha_0^r$	$-1.3 \cdot 10^{-8}$	$\alpha_0^t$	$7.3 \cdot 10^{-4}$		
$\alpha_1^r$	$-2.1 \cdot 10^{-6}$	$\alpha_1^t$	$-2.6 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_1^b$	$-2.2 \cdot 10^{-2}$
$\beta_1^r$	$-1.3 \cdot 10^{-4}$	$\beta_1^t$	$4.2 \cdot 10^{-6}$	$\beta_1^b$	$9.4 \cdot 10^{-4}$
$\alpha_2^r$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$\alpha_2^t$	$-7.1 \cdot 10^{-7}$		
$\beta_2^r$	$-7.1 \cdot 10^{-7}$	$\beta_2^t$	$-1.2 \cdot 10^{-8}$		



# Коррекция начального приближения

Результат коррекции оптимального управления.



Сравнение начального приближения и скорректированного управления.

$\alpha_0^r$	$\alpha_1^r$	$\beta_1^r$	$\alpha_2^r$	$\beta_2^r$	$\alpha_0^t$	$\alpha_1^t$	$\beta_1^t$	$\alpha_2^t$	$\beta_2^t$	$\alpha_1^b$	$\beta_1^b$
$-1.3 \cdot 10^{-8}$	$-2.1 \cdot 10^{-6}$	$-1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$-7.1 \cdot 10^{-7}$	$7.3 \cdot 10^{-4}$	$-2.6 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-6}$	$-7.1 \cdot 10^{-7}$	$-1.2 \cdot 10^{-8}$	$-2.2 \cdot 10^{-2}$	$9.4 \cdot 10^{-4}$
$-8.1 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$-1.1 \cdot 10^{-4}$	$-3.1 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$7.2 \cdot 10^{-4}$	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$-2.2 \cdot 10^{-2}$	$9.2 \cdot 10^{-4}$

# Заключение

Основные результаты проделанной работы:

- Обнаружен класс функций возмущения и способ усреднения уравнений движения ограниченной задачи двух тел с возмущением, приводящий к интегрируемой аналитически системой уравнений.
- Получено точное решение усреднённой ограниченной задачи двух тел с возмущением в случае, когда возмущение равно своему ряду Фурье по истинной долготе с постоянными коэффициентами.
- На основе этого решения предложен алгоритм получения начального приближения для решения задачи оптимизации траектории в рамках ограниченной задачи двух тел с управлением.

Планы дальнейшей работы:

- Тестирование алгоритма на всём пространстве условий задачи оптимизации.
- Исследование полученной усреднённой системы и её решения и их связи с возмущённой моделью.
- Рассмотрение случая, когда возмущение зависит от орбитальных элементов.

Спасибо за внимание!