

Аннотация

В работе рассматриваются различные параметризации относительного движения аппаратов на близких околокруговых орбитах под действием центрального гравитационного поля Земли и второй гармоники геопотенциала. Проведено численное исследование точности этих моделей в зависимости от таких факторов, как размер относительных орбит и наклонение орбиты главного аппарата. Представлены результаты, которые позволяют выбрать подходящую модель движения для различных сценариев миссии.

Оглавление

Введение.....	3
1. Постановка задачи, системы координат	5
1.1 Постановка задачи.....	5
1.2 Системы координат.....	5
2 Уравнения движения	6
2.1 Полные уравнения движения.....	6
2.2 Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира	7
2.3 Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира в криволинейных координатах	14
2.4 Уравнения Швайгарта-Седвика.....	16
2.5 Уравнения Швайгарта-Седвика в криволинейных координатах	18
3 Численное моделирование	19
3.1 Начальные данные	19
3.2 Методика получения результатов	20
3.3 Результаты.....	21
3.3.1 Модель ХКУ	22
3.3.2 Модифицированная модель ХКУ	24
3.3.3 Модель ШС.....	28
3.3.4 Модифицированная модель ШС.....	30
3.3.5 Сравнение моделей	32
Заключение	40
Список использованных источников.....	41

Введение

Групповой полет представляет собой движение нескольких космических аппаратов, выполняющих одну и ту же задачу и имеющих возможность взаимодействовать друг с другом. При этом, как правило, подразумевается, что аппараты находятся на достаточно малом отдалении друг от друга, до нескольких сотен километров. За последние годы использование нескольких спутников обрело большую популярность благодаря некоторым преимуществам, например возможности продолжения миссии даже при выходе одного аппарата из строя. Это повлекло за собой огромный интерес к спутниковым формациям. Возникло большое количество статей и книг, посвященных им (например [1]). Отметим одну из основных проблем применения формаций: спутники со временем разлетаются, поэтому одной из основных задач является поддержание относительных орбит, которая, в свою очередь, требует разработки моделей относительного движения. Эти модели, с одной стороны, должны достаточно точно описывать относительное движение, а с другой стороны, они должны быть достаточно простыми для аналитического исследования. К настоящему моменту было разработано достаточно много моделей. Большая часть из них получены путем линеаризации полных уравнений движения с некоторыми предположениями. Существует достаточное количество статей, содержащих обзор моделей, как линейных, так и нелинейных, например, [2], [3]. В статье [2] рассматривались модель Хилла, нелинейная модель Яна-Альфренда и другие. В статье [3] помимо модели Хилла рассматривалась также модель Цаунера-Хемпеля и Лоудена. Для исследования в данной работе были выбраны следующие модели относительного движения: уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира (ХКУ) [4], их модификация для криволинейных координат [5] и уравнения Швайгарта-Седвика (ШС) [6]. Также была рассмотрена четвертая модель, заключающаяся в замене декартовых переменных в уравнениях Швайгарта-Седвика на криволинейные координаты, как это было сделано для уравнений ХКУ. Подобный обзор моделей был выполнен и ранее [7], однако в этом

обзоре были рассмотрены только солнечно-синхронные орбиты (для высот 600-800 км такие орбиты имеют наклонение около 98°) и фиксировались сразу несколько параметров относительных орбит, оставляя свободным только один параметр. В ходе данной работы были исследованы вышеописанные модели на нескольких наклонениях орбиты главного аппарата с фиксацией только дрейфа второго аппарата.

Результаты работы были представлены на следующих конференциях:

- 1) И.А. Сулова, Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков, «Численное исследование точности моделей относительного движения космических аппаратов в групповом полете», XLV Академические чтения по космонавтике, Москва, 2021
- 2) И.А. Сулова, Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков, «Исследование точности моделей относительного движения космических аппаратов в групповом полете», 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, 2020

Работа состоит из введения, трех глав и заключения. В первой главе описывается постановка задачи: вводятся системы координат и делаются необходимые предположения. Во второй главе описываются рассматриваемые модели движения. В третьей главе приводятся результаты численного исследования.

1. Постановка задачи, системы координат

1.1 Постановка задачи

В работе рассматривается движение двух аппаратов. Один из спутников мы будем называть главным. Относительно него в дальнейшем рассматривается движения второго аппарата, который мы будем называть ведомым. Будем полагать, что движение происходит на близких низких (до 700 км) околокруговых орбитах. В качестве модели движения возьмем центральное ньютоновское поле с учетом второй гармоники гравитационного потенциала Земли J_2 [8]. Также считается известным движение центра масс двух спутников, их скорости и радиус-вектора. Рассматриваются четыре модели относительного движения:

- 1) Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира;
- 2) Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира с использованием криволинейных координат;
- 3) Уравнения Швайгарта-Седвика;
- 4) Уравнения Швайгарта-Седвика с использованием криволинейных координат;

Необходимо реализовать описанные модели относительного движения, промоделировать движение двух аппаратов на нескольких размерах относительных орбит и наклонениях орбиты главного аппарата, и, наконец, численно оценить точность каждой модели. Интересующий интервал времени моделирования – сутки.

1.2 Системы координат

В данной работе используются следующие системы координат (рис.1):

$OY_1Y_2Y_3$ – инерциальная система координат (ИСК): начало координат O расположено в центре масс Земли, ось OY_1 направлена в точку весеннего равноденствия эпохи J2000, ось OY_3 направлена вдоль оси вращения Земли, а ось OY_2 дополняет систему до правой тройки векторов;

$SX_1X_2X_3$ – орбитальная система координат (ОСК): начало координат S расположено в центре масс главного аппарата, ось SX_1 направлена по радиус-вектору аппарата от центра Земли, ось SX_3 по нормали к плоскости орбиты по орбитальному моменту аппарата, а SX_2 дополняет систему до правой тройки векторов.

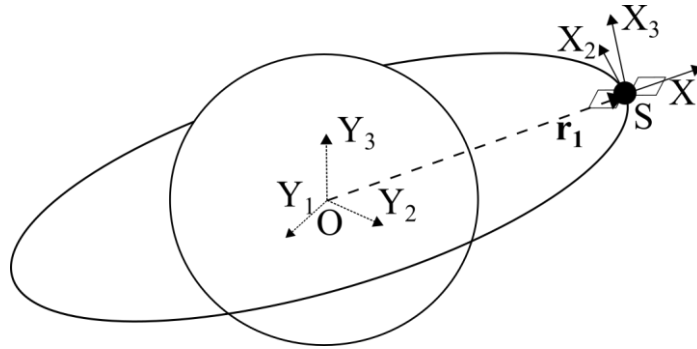


Рисунок 1 – Системы координат

Переход от ИСК к ОСК осуществляется с помощью матрицы направляющих косинусов \mathbf{A} : $\mathbf{r}^{OF} = \mathbf{A}\mathbf{r}^{IF}$, где \mathbf{r}^{OF} – вектор в ОСК, \mathbf{r}^{IF} – вектор в ИСК

2 Уравнения движения

2.1 Полные уравнения движения

Полные уравнения движения имеют следующий вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\mu \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} + \mathbf{a}_{J_2},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mu \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} + \mathbf{a}_{J_2}.$$

Где \mathbf{r}_1 – радиус-вектор главного спутника в ИСК, \mathbf{r}_2 – радиус-вектор ведомого спутника в ИСК, $|\mathbf{r}_1|$, $|\mathbf{r}_2|$ – их модули, μ – гравитационный параметр Земли. $\mathbf{a}_{J_2} = (a_x, a_y, a_z)$ – возмущающее ускорение, вызванное влиянием второй гармоники геопотенциала. Его компоненты в ИСК:

$$a_x = J_2 \frac{x}{|r|^7} \left(6z^2 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \right),$$

$$a_y = J_2 \frac{y}{|r|^7} \left(6z^2 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \right),$$

$$a_z = J_2 \frac{z}{|r|^7} \left(3z^2 - \frac{9}{2}(x^2 + y^2) \right).$$

Где коэффициент $J_2 = 1.75553 \cdot 10^{10} \text{ км}^5 \text{ с}^{-2}$, x, y, z – компоненты радиус-векторов в ИСК.

Все рассмотренные модели имеют общую идею: сначала производится переход к необходимым координатам, затем полученные уравнения раскладываются в ряды Тейлора и происходит линейризация уравнений, оставляя только линейные члены уравнений.

2.2 Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира

Данная модель описывает движение в орбитальной системе координат и выводится в предположении центральности гравитационного поля, а орбита главного аппарата предполагается круговой.

Выполним переход к декартовым относительным координатам. Введем орбитальную систему координат, центр которой будет находиться в центре масс главного аппарата (рис. 2).

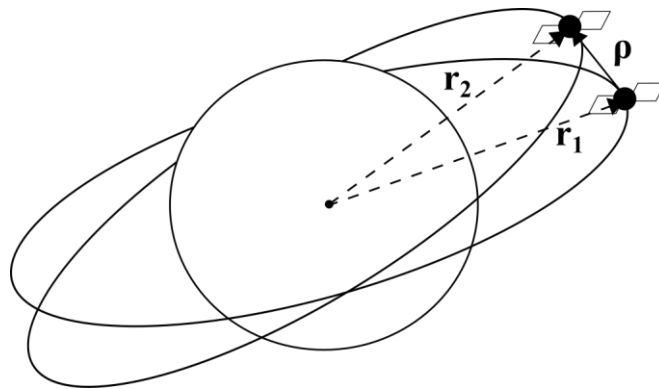


Рисунок 2 – Относительные координаты

Относительный радиус-вектор второго аппарата – это проекция вектора $\rho = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ на оси ОСК. Из теоремы о сложении скоростей: $\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - [\boldsymbol{\omega}_e^{IF} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]$, где $\boldsymbol{\omega}_e^{IF}$ – угловая скорость вращения ОСК

относительно ИСК в проекции на оси ИСК. Тогда проекция вектора $\dot{\mathbf{r}}$ на оси ОСК является вектором относительной скорости.

Угловая скорость вращения ОСК относительно ИСК находится, исходя из следующих соображений. Оси ОСК задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|}, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1]}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1|}, \\ \mathbf{e}_2 &= [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1].\end{aligned}$$

Производные базисных осей описываются соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{r}_1|} - \mathbf{e}_1 \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1)}{|\mathbf{r}_1|}, \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= [0; 0; 0], \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= [\mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{e}}_1].\end{aligned}$$

Здесь $\dot{\mathbf{e}}_3 = [0; 0; 0]$, так как рассматриваемая задача является задачей двух тел.

Тогда матрица перехода от ИСК к ОСК: $\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]^T$. И относительный радиус-вектор второго аппарата: $\mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Его компоненты обозначим через x, y, z : $\mathbf{p} = (x, y, z)$

Угловую скорость ОСК $\boldsymbol{\omega}_e$ найдем с помощью уравнений Пуассона:

$$\dot{\mathbf{A}} = -[\boldsymbol{\omega}_e^{OF}]_x \mathbf{A}, \text{ где}$$

$$[\boldsymbol{\omega}_e^{OF}]_x = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\omega}_e^{OF}$ – угловая скорость ОСК, записанная в проекции на оси ОСК.

Перевод в ИСК осуществляется с помощью матрицы \mathbf{A}^T : $\boldsymbol{\omega}_e^{IF} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}_e^{OF}$. Тогда

относительная скорость ведомого аппарата: $\mathbf{v} = \mathbf{A}(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - [\boldsymbol{\omega}_e^{IF} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)])$

С учетом сделанных предположений в начале главы, уравнения движения в ИСК имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\mu \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\mu \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3}.\end{aligned}\tag{1}$$

Вычитая первое уравнение системы (1) из второго и учитывая равенство $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, получаем:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\mu \frac{(\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\rho})}{|\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\rho}|^3} + \frac{\mu}{|\mathbf{r}_1|^3} \mathbf{r}_1\tag{2}$$

Вектор $\boldsymbol{\rho}$ разложим по базисным векторам орбитальной СК

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_k \rho_k \mathbf{e}_k\tag{3}$$

Продифференцируем выражение (3): $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \sum_k \dot{\rho}_k \mathbf{e}_k + \sum_k \rho_k \dot{\mathbf{e}}_k$.

Продифференцируя еще раз, получим:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \sum_k \ddot{\rho}_k \mathbf{e}_k + \sum_k \dot{\rho}_k \dot{\mathbf{e}}_k + \sum_k \dot{\rho}_k \dot{\mathbf{e}}_k + \sum_k \rho_k \ddot{\mathbf{e}}_k = \mathbf{w}_{\text{отн}} + 2 \sum_k \dot{\rho}_k \dot{\mathbf{e}}_k + \sum_k \rho_k \ddot{\mathbf{e}}_k$$

Учитывая соотношения Пуассона: $\dot{\mathbf{e}}_k = \boldsymbol{\omega}_e^{IF} \times \mathbf{e}_k$, получаем в итоге:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{w}_{\text{отн}} + 2(\boldsymbol{\omega}_e^{IF} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e^{IF}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_e^{IF} \times (\boldsymbol{\omega}_e^{IF} \times \boldsymbol{\rho})\tag{4}$$

Где $\boldsymbol{\omega}_e^{IF}$ – угловая скорость ОСК относительно ИСК. Она перпендикулярна плоскости орбиты главного спутника, поэтому в проекциях на оси ОСК $\boldsymbol{\omega}_e^{IF} = [0, 0, \dot{\theta}]^T$, радиус-вектор $\mathbf{r}_1 = [r_1, 0, 0]^T$, компоненты вектора $\boldsymbol{\rho} = [x, y, z]^T$. Подставляя в (4) выражение (2), получим:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x &= -\mu \frac{r_1 + x}{\left((r_1 + x)^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{|\mathbf{r}_1|^2}, \\ \ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y &= -\mu \frac{y}{\left((r_1 + x)^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{\left((r_1 + x)^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{5}$$

Для круговой орбиты $\dot{\theta} = n_0 = \text{const}$, $\ddot{\theta} = 0$, $r_1 = a_0 = \text{const}$. Подставляя в (5):

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n_0\dot{y} - n_0^2x &= -\mu \frac{a_0 + x}{\left((a_0 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{a_0^2}, \\ \ddot{y} + 2n_0\dot{x} - n_0^2y &= -\mu \frac{y}{\left((a_0 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{\left((a_0 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{6}$$

Разложим правую часть уравнений (6) в ряд Тейлора в окрестности начала координат и возьмем только линейную часть.

$$\begin{aligned}-\mu \frac{a_0 + x}{\left((a_0 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} &\approx -\mu \frac{a_0 + x}{a_0^3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(2 \frac{x}{a_0}\right)\right) \approx n^2(2x - a_0), \\ -\mu \frac{y}{\left((a_0 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} &\approx -\mu \frac{y}{a_0^3} \left(1 - 3 \frac{x}{a_0}\right) \approx -n^2y, \\ -\mu \frac{z}{\left((a_0 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} &\approx -n^2z.\end{aligned}\tag{7}$$

Где n – среднее движение. Для круговой орбиты первого аппарата: $n = \omega_1$,

$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu}{|r_1|^3}}$ – угловая скорость орбитального движения главного аппарата.

Подставляем (7) в (6) и приходим к уравнениям, которые называются уравнениями Хилла-Клохесси-Уилтшира (ХКУ):

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x &= 0, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + n^2z &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Уравнения (8) являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. Для таких уравнений мы

можем выписать простое аналитическое решение, которое представимо в виде:

$$\begin{aligned}
 x &= 2C_{drift} + C_{inplane} \sin \psi, \\
 \dot{x} &= C_{inplane} n \cos \psi, \\
 y &= C_{shift} + 2C_{inplane} \cos \psi, \\
 \dot{y} &= -2C_{inplane} n \sin \psi - 3C_{drift} n, \\
 z &= C_{outplane} \sin \xi, \\
 \dot{z} &= C_{outplane} n \cos \xi.
 \end{aligned}$$

Где C_{drift} , $C_{inplane}$, $C_{outplane}$ – константы интегрирования. Они же в дальнейшем будут называться хилловскими константами. Первые 4 уравнения отвечают за движение в плоскости орбиты, а последние 2 два – за движение вне плоскости орбиты. Константы $C_{inplane}$ и $C_{outplane}$ отвечают за амплитуды колебаний аппарата в плоскости орбиты и перпендикулярно плоскости орбиты соответственно. Константа C_{drift} отвечает за дрейф спутников (их разлет), переменная C_{shift} отвечает за сдвиг спутников вдоль направления скорости движения. Две оставшиеся переменные ψ и ξ отвечают за фазу относительного движения спутников в плоскости орбиты и вне плоскости орбиты.

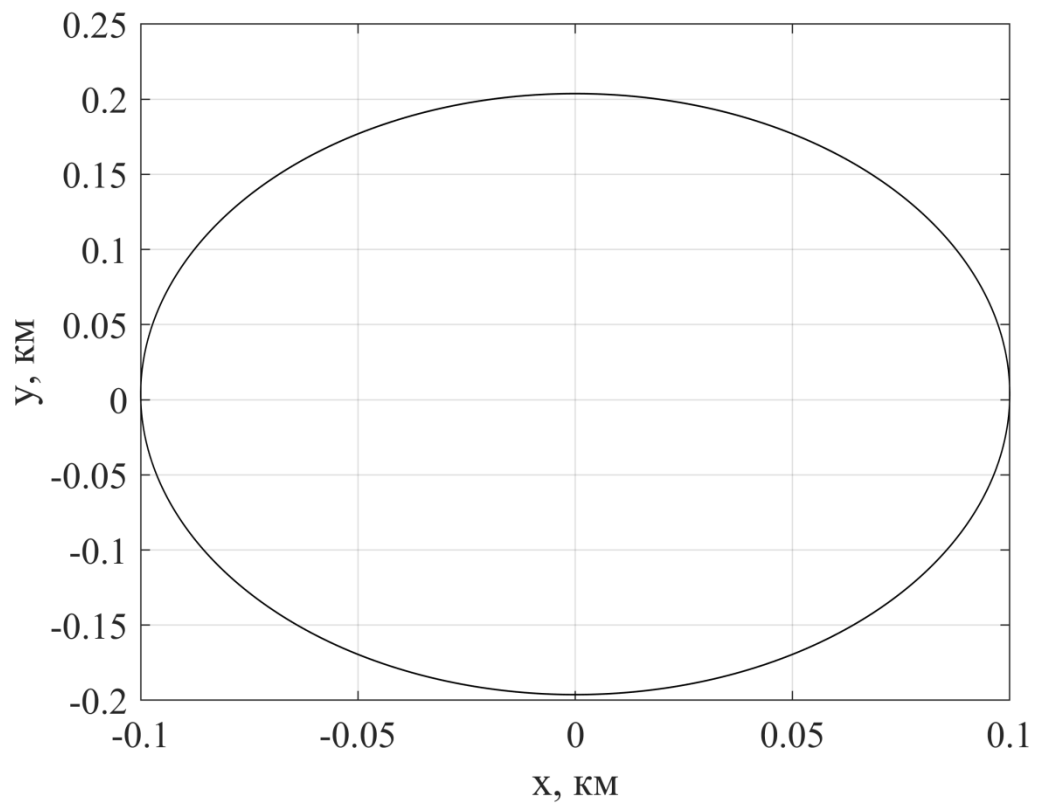


Рисунок 3 – Замкнутое движение в плоскости орбиты

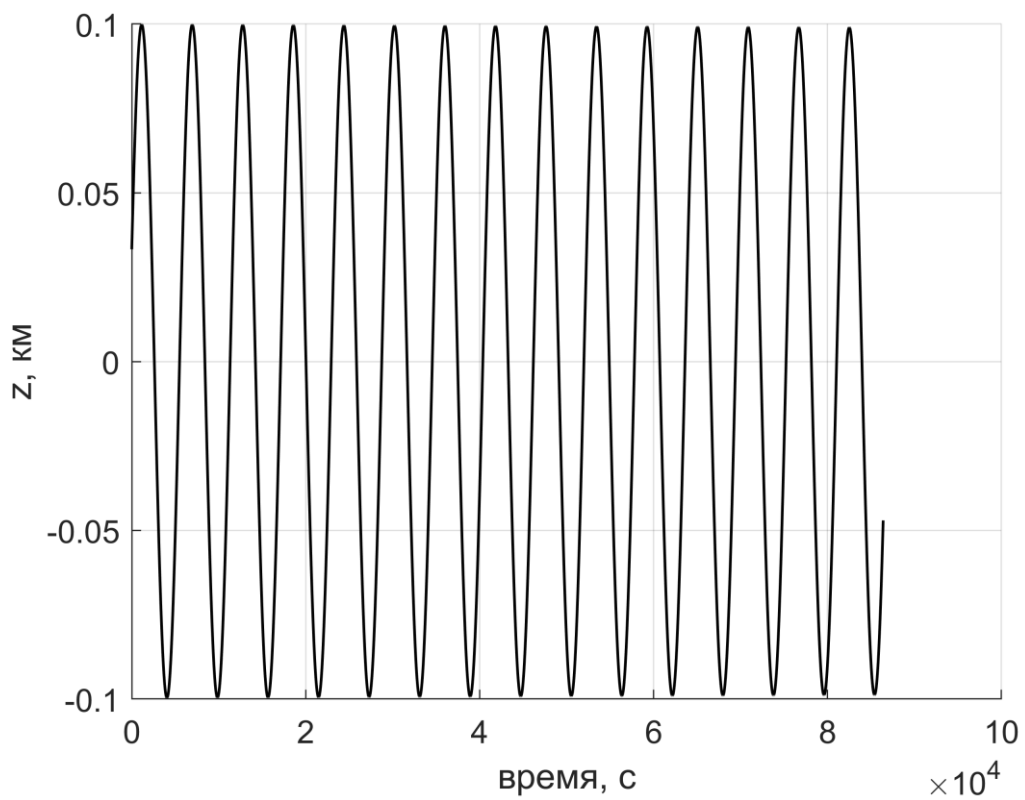


Рисунок 4 – Движение вне плоскости орбиты

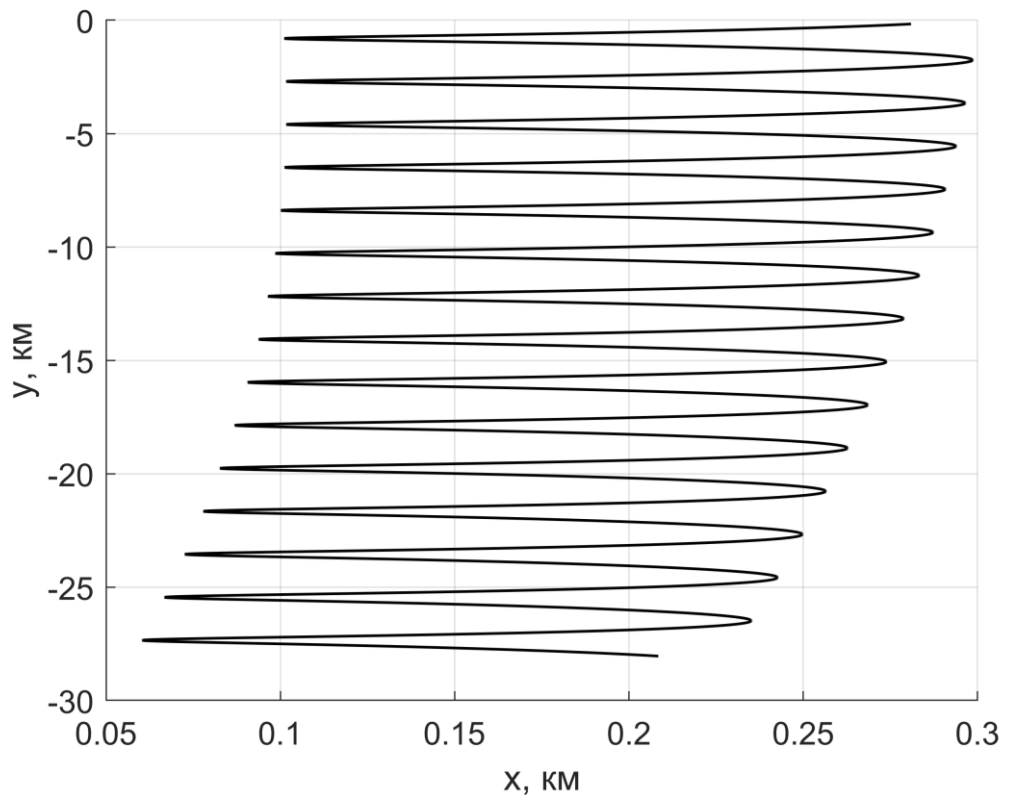


Рисунок 5 – Незамкнутое движение в плоскости орбиты

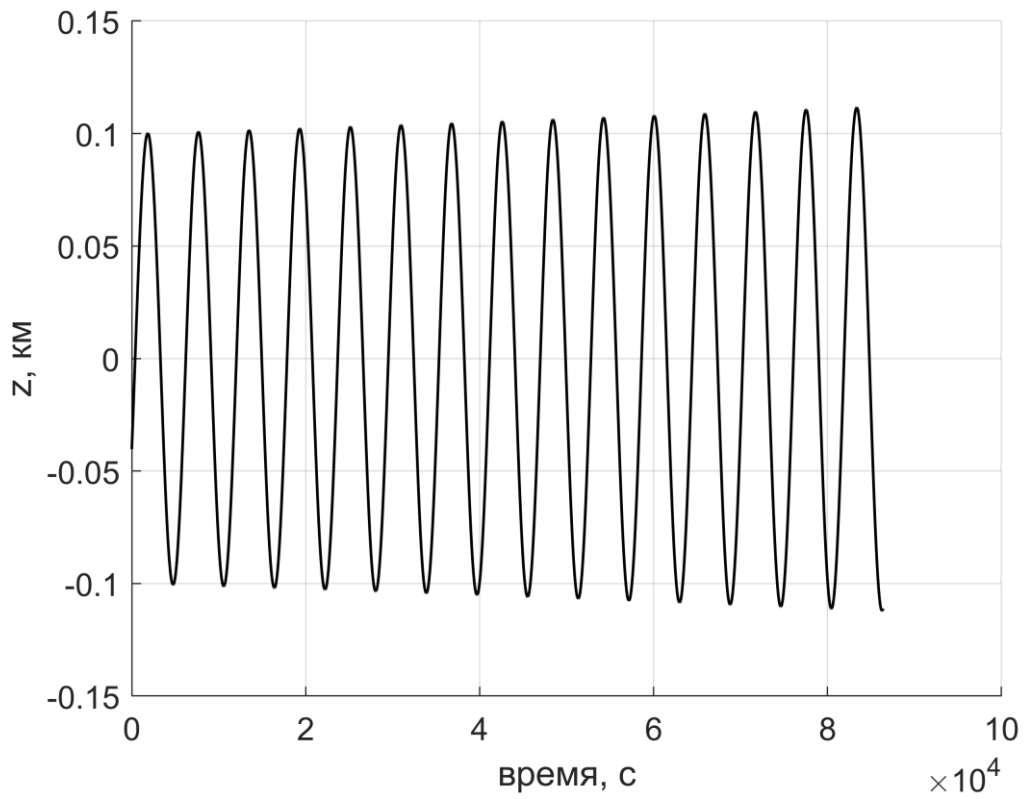


Рисунок 6 – Движение вне плоскости с учетом J2

Движение вне плоскости орбиты представляет собой колебания (рис. 4 и рис. 6). Движение в плоскости орбиты в общем случае является незамкнутым (рис. 5), однако в случае нулевого дрейфа движение в плоскости орбиты представляет собой эллипс с соотношением сторон 1:2 (рис. 3).

Колебания вне плоскости орбиты происходят с изменяющейся амплитудой только в модели движения с учетом J_2 , при рассмотрении задачи двух тел получаются колебания с постоянной амплитудой.

2.3 Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира в криволинейных координатах

Уравнения ХКУ в декартовых относительных координатах корректно описывают относительное движение лишь на малых промежутках времени. Одной из причин является то, что данные уравнения не учитывают криволинейность относительных орбит. Для повышения точности рассматриваются уравнения ХКУ в криволинейных координатах. Введем сферические координаты a, φ, θ вместо декартовых x, y, z . Здесь $a = |r_2| - |r_1|$ – разница длин радиус-векторов двух аппаратов в ИСК, φ, θ – сферические углы (рис. 7).

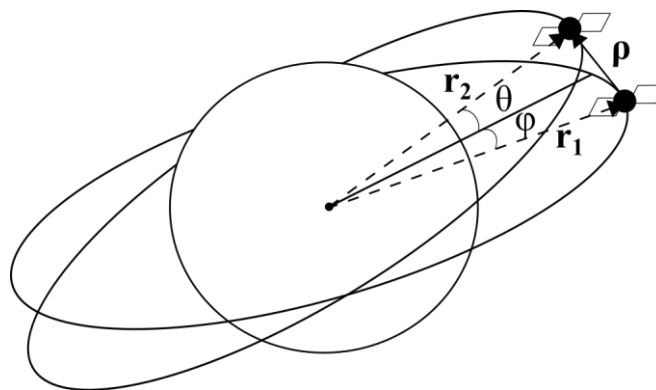


Рисунок 7 – криволинейные координаты

Получим выражение для криволинейных координат и их производных через координаты спутников в ИСК:

$$a = |r_2| - |r_1|$$

$$\dot{a} = \frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)}{|r_2|} - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)}{|r_1|}$$

Радиус-вектор ведомого аппарата и его скорость выражаются через сферические координаты, а также радиус-вектор и скорость главного аппарата:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= (r_1 + a)(\mathbf{e}_1 \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_3 \sin \theta) \\ \mathbf{v}_2 &= (\dot{r}_1 + \dot{a})(\mathbf{e}_1 \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_3 \sin \theta) + \\ &+ (r_1 + a)[(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1) \cos \theta \cos \varphi + \\ &+ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2) \cos \theta \sin \varphi \\ &+ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) \sin \theta] + \\ &+ (r_1 + a)[\mathbf{e}_1(-\sin \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \cos \theta \sin \varphi \dot{\varphi}) + \\ &+ \mathbf{e}_2(-\sin \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \cos \theta \cos \varphi \dot{\varphi}) + \\ &+ \mathbf{e}_3 \cos \theta \dot{\theta}] \end{aligned} \quad (9)$$

Домножая первое уравнение системы (9) поочередно скалярно на $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2$, получаем:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{e}_3)}{|r_2|}\right)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{e}_2)}{|r_2| \cos \theta}\right)$$

Умножая второе уравнение системы (9) поочередно скалярно на $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2$, получаем выражение для производных θ, φ :

$$\dot{\theta} = \frac{(v_2, e_3)}{|r_2| \cos \theta} - \frac{(r_2, v_2)}{|r_2|} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{|r_2|} + (e_2, \omega) \cos \varphi - (e_1, \omega) \sin \varphi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(v_2, e_2)}{|r_2| \cos \theta \cos \varphi} - \frac{\left(\frac{(v_1, r_1)}{|r_1|} + \dot{a}\right)}{|r_2|} \operatorname{tg} \varphi - (e_3, \omega) + \frac{(e_1, \omega) \operatorname{tg} \theta}{\cos \varphi} + \dot{\theta} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta$$

Таким образом, производится переход из декартовых координат в криволинейные.

Переписывая уравнения движения в ИСК в криволинейные координаты и линеаризуя уравнения, с учетом того, что главный аппарат движется по круговой орбите, получаем [6]:

$$\begin{aligned} \ddot{a} - 2nr_1\dot{\varphi} - 3n^2a &= 0 \\ r_1\ddot{\varphi} + 2n\dot{a} &= 0 \\ r_1\ddot{\theta} + n^2r_1\theta &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что уравнения (10) имеют аналогичный вид уравнениям ХКУ. А при замене переменных $a \rightarrow x$, $r_1\varphi \rightarrow y$, $r_1\theta \rightarrow z$ эти уравнения превращаются в уравнения ХКУ. Уравнения (10) являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, поэтому можем выписать их простое аналитическое решение:

$$\begin{aligned} \rho &= 2C'_{drift} + C'_{inplane} \sin \psi' \\ \dot{\rho} &= C'_{inplane} n \cos \psi' \\ r_1\varphi &= C'_{shift} + 2C'_{inplane} \cos \psi' \\ r_1\dot{\varphi} &= -2C'_{inplane} n \sin \psi' - 3C'_{drift} n \\ r_1\theta &= C'_{outplane} \sin \xi' \\ r_1\dot{\theta} &= C'_{outplane} n \cos \xi' \end{aligned}$$

Где константы интегрирования $C'_{drift}, C'_{inplane}, C'_{outplane}$ и переменные C'_{shift}, ψ', ξ' аналогичны константам интегрирования уравнений ХКУ и имеют схожий геометрический смысл.

2.4 Уравнения Швайгарта-Седвика

Вышеописанные модели выводятся в предположении центральности ньютоновского поля без учета возмущений, что является одним из главных источников ошибки в уравнениях ХКУ. Для уточненного движения рассматриваются уравнения Швайгарта-Седвика, которые учитывают вторую гармонику гравитационного поля Земли J2. Модель движения в ИСК при данных предположениях имеет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\mu \frac{\mathbf{r}_1}{|r_1|^3} + \mathbf{a}_{J_2} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\mu \frac{\mathbf{r}_2}{|r_2|^3} + \mathbf{a}_{J_2}\end{aligned}\quad (11)$$

Для вывода уравнений Швайгарта-Седвика вводится опорная орбита, в окрестности которой линейризуются уравнения (11). Существует несколько способов выбора опорной орбиты. Для простоты иногда берется круговая опорная орбита. Вычитая движение виртуальной точки по опорной орбите из полученного уравнения после линейризации, получаем движение аппарата относительно опорной орбиты. В силу линейности полученных уравнений, вычитаем движение главного аппарата относительно опорной орбиты из уравнений движения ведомого аппарата относительно опорной орбиты, и получаем уравнения Швайгарта-Седвика (подробный вывод – [3]):

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2nc\dot{y} - (5c^2 - 2)n^2x &= 0 \\ \ddot{y} + 2nc\dot{x} &= 0 \\ \ddot{z} + q^2z &= 2lq\cos(qt + \beta)\end{aligned}\quad (12)$$

Где константы c, q, l, β вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}s &= \frac{3J_2R_e^2}{8r_{ref}^2} (1 + 3\cos(2i_{ref})) \\ c &= \sqrt{1 + s} \\ n &= \sqrt{\frac{\mu}{r_{ref}^3}} \\ k &= nc + \frac{3nJ_2R_e^2}{2r_{ref}^2} \cos^2 i_{ref} \\ i_{sat1} &= \frac{\dot{z}_0}{kr_{ref}} + i_{sat2} \\ \Delta\Omega_0 &= \frac{z_0}{r_{ref} \sin i_{ref}} \\ \gamma_0 &= \cot^{-1} \left[\frac{\cot i_{sat2} \sin i_{sat1} - \cos i_{sat1} \cos \Delta\Omega_0}{\sin \Delta\Omega_0} \right] \\ \Phi_0 &= \cos^{-1} [\cos i_{sat1} \cos i_{sat2} + \sin i_{sat1} \sin i_{sat2} \cos \Delta\Omega_0]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_{sat1} &= -\frac{3nJ_2R_e^2}{2r_{ref}^2} \cos i_{sat1} \\ \dot{\Omega}_{sat2} &= -\frac{3nJ_2R_e^2}{2r_{ref}^2} \cos i_{sat2} \\ q &= nc - (\cos \gamma_0 \sin \gamma_0 \cot \Delta \Omega_0 - \sin^2 \gamma_0 \cos i_{sat1})(\dot{\Omega}_{sat1} - \dot{\Omega}_{sat2}) - \dot{\Omega}_{sat1} \cos i_{sat1} \\ l &= -r_{ref} \frac{\sin i_{sat1} \sin i_{sat2} \sin \Delta \Omega_0}{\sin \Phi_0} (\dot{\Omega}_{sat1} - \dot{\Omega}_{sat2}) \\ m \sin \beta &= z_0 \\ l \sin \beta + q m \cos \beta &= \dot{z}_0\end{aligned}$$

Здесь R_e – радиус Земли, r_{ref} , i_{ref} – параметры опорной орбиты, i_{sat1} – наклонение главного аппарата, i_{sat2} – наклонение второго аппарата, x_0, y_0, z_0, \dot{z}_0 – начальные значения относительного положения. Последние два уравнения решаются одним из методов решения систем нелинейных уравнений, например, методом Ньютона [9]

В уравнениях (12) константа c близка к единице, константа q близка к n , поэтому уравнения Швайгарта-Седвика близки к уравнения ХКУ.

2.5 Уравнения Швайгарта-Седвика в криволинейных координатах

Как было показано выше, уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира в криволинейных координатах схожи с уравнениями Хилла-Клохесси-Уилтшира в относительных декартовых координатах с точностью до замены переменных $a \rightarrow x$, $r_1 \varphi \rightarrow y$, $r_1 \theta \rightarrow z$. Проведем такую же замену для уравнений Швайгарта-Седвика. Подставим замену переменных в (12) и получим:

$$\begin{aligned}\ddot{a} - 2ncr_1\dot{\varphi} - (5c^2 - 2)n^2a &= 0 \\ r_1\ddot{\varphi} + 2nc\dot{a} &= 0 \\ r_1\ddot{\theta} + q^2r_1\theta &= 2lq \cos(qt + \beta)\end{aligned}\tag{13}$$

Обоснованного вывода этих уравнений не производилось, и замена носит исключительно формальный характер. В то же время, как показывают результаты моделирования, такая модель движения позволяет несколько точнее описывать относительное движение двух аппаратов по сравнению со стандартной моделью ШС, особенно на достаточно больших относительных орбитах.

3 Численное моделирование

Проведем численный анализ вышеописанных моделей. Численно оценим их точность и проведем сравнение.

3.1 Начальные данные

Согласно постановке задачи, моделирование проводится на нескольких размерах относительных орбит. Задание начальных данных с помощью декартовых координат в ИСК не дает нам информацию о форме и размере относительной орбиты. Удобным оказывается задавать размер относительной орбиты с помощью двух амплитуд из хилловских констант.

Таким образом, задание начальных данных для аппаратов происходит следующим образом. Задается начальный радиус-вектор и вектор скорости главного аппарата в ИСК, при этом предполагается, что стартовая точка находится на оси OY_1 (это не ограничивает общности, так как модель движения является цилиндрически симметричной относительно вращения вдоль оси OY_3). Величина скорости ведущего аппарата задается в виде:

$$\mathbf{v} = \left[0; \sqrt{\frac{\mu}{|r_1|}} \cdot \cos i; \sqrt{\frac{\mu}{|r_1|}} \cdot \sin i \right]$$

Где i – наклонение орбиты главного спутника (соответствует круговой орбите, если бы движение происходило в рамках задачи двух тел).

Оценка точности рассматриваемых моделей проводится при помощи метода Монте-Карло. Для задания положения и скорости второго аппарата фиксируется размер относительной орбиты b , на которой будет проводиться моделирование. Амплитуды из хилловских констант приравниваются к b .

Переменные ψ и ξ , отвечающие за фазы, выбираются случайно из равномерного распределения на отрезке $[0, 2\pi]$, сдвиг – случайно из равномерного распределения на отрезке $[-b; b]$, дрейф же будем полагать равным нулевым – в задачах управляемого движения, как правило, подразумевается, что аппараты не разлетаются друг от друга. Такой выбор начальных констант позволит рассмотреть большое количество возможных относительных орбит. Для имитации ошибки выведения, к начальным радиус-векторам и векторам скорости обоих аппаратов добавляются некоторые нормально распределенные случайные величины. Таким образом, получаются начальные данные для интегрирования уравнений движения в ИСК. В дальнейшем они пересчитываются в начальные данные для соответствующих моделей движения.

3.2 Методика получения результатов

С помощью хилловских констант получаем начальные радиус-вектора аппаратов и их скорости, как было описано выше. Далее применяем метод Монте-Карло и получаем набор данных для исследований. Эти данные используются в качестве начальных для интегрирования точных уравнений, а также, после пересчета, и для интегрирования уравнений движения в рамках рассмотренных моделей относительного движения. Интегрирование всех уравнений движения производится с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка с постоянным шагом 5 с [10]. Время моделирования ограничивается двадцатью четырьмя часами, так как основной целью работы является выбор подходящих моделей для построения алгоритмов управления относительным движением, а значит рассматривать длительный интервал времени нет необходимости. Точность оценивается несколькими способами. Один из способов – осреднение ошибки по компонентам радиус-вектора, по его модулю радиус-вектора, а также по хилловским константам сдвига и амплитудам в плоскости орбиты и вне плоскости орбиты. Другой же способ заключается в оценке времени, когда решение приближенных уравнений

начинает отличаться от реального движение на заданную величину. В данной работе в качестве такой величины выбирается некоторый процент от характерного размера относительной орбиты: 10%, 25% и 50%. По этим данным будем оценивать точности моделей и проводить их сравнение.

3.3 Результаты

Моделирование проводится на следующих данных. Начальный радиус-вектор главного аппарата берется равным $\mathbf{r}_1 = [7000, 0, 0]$ в километрах. Скорость главного аппарата задается через наклонение:

$$\mathbf{v} = \left[0; \sqrt{\frac{\mu}{|r_1|}} \cdot \cos i; \sqrt{\frac{\mu}{|r_1|}} \cdot \sin i \right]$$

В данной работе для моделирования рассматривается 4 значения наклонения: $5^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Радиус-вектора ведомого аппарата и его скорость задаются через хилловские константы. Метод Монте-Карло применяется следующим образом. К начальным данные добавляются некоторые случайные величины, имитирующие ошибки выведения (14), образуя набор данных.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_{10} + \xi_{r1} \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_{10} + \xi_{v1} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_{20} + \xi_{r2} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_{20} + \xi_{v2} \end{aligned} \quad (14)$$

Где $\mathbf{r}_{10}, \mathbf{v}_{10}, \mathbf{r}_{20}, \mathbf{v}_{20}$ – начальные данные, ξ_{r1}, ξ_{r2} – шумы, принадлежащие $N(0, \sigma_r)$, ξ_{v1}, ξ_{v2} – шумы, принадлежащие $N(0, \sigma_v)$, σ_r, σ_v – среднеквадратические отклонения. В данной работе σ_r принималось равным трем значения: 1 метр, 10 метров, 100 метров. σ_v – среднеквадратические отклонения скорости. Для моделирования использовалось 3 значения: $10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$.

Также необходимо задать размеры относительных орбит. В данной работе моделирование происходило для 8 размеров: 50 метров, 100 метров, 200 метров, 500 метров, 1 километр, 5 километров, 10 километров и 30 километров.

3.3.1 Модель ХКУ

В данной главе описываются результаты моделирования уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшира (8)

Приведем на рисунке в качестве результатов моделирования осредненные ошибки по расстоянию за последний виток. Рассмотрение всех размеров относительных орбит проводится в два этапа: сначала проводится исследование для небольших относительных орбит, а потом для размеров от 1 километра до 30 километров.

На рисунке 8 представлены осредненные ошибки (усреднение проводится по последнему витку) по расстоянию для малых относительных орбит. Четыре линии на графике соответствуют четырем различным значениям наклона. Вертикальными линиями отмечены дисперсии значений относительно среднего, показанные на рисунке с помощью маркеров.

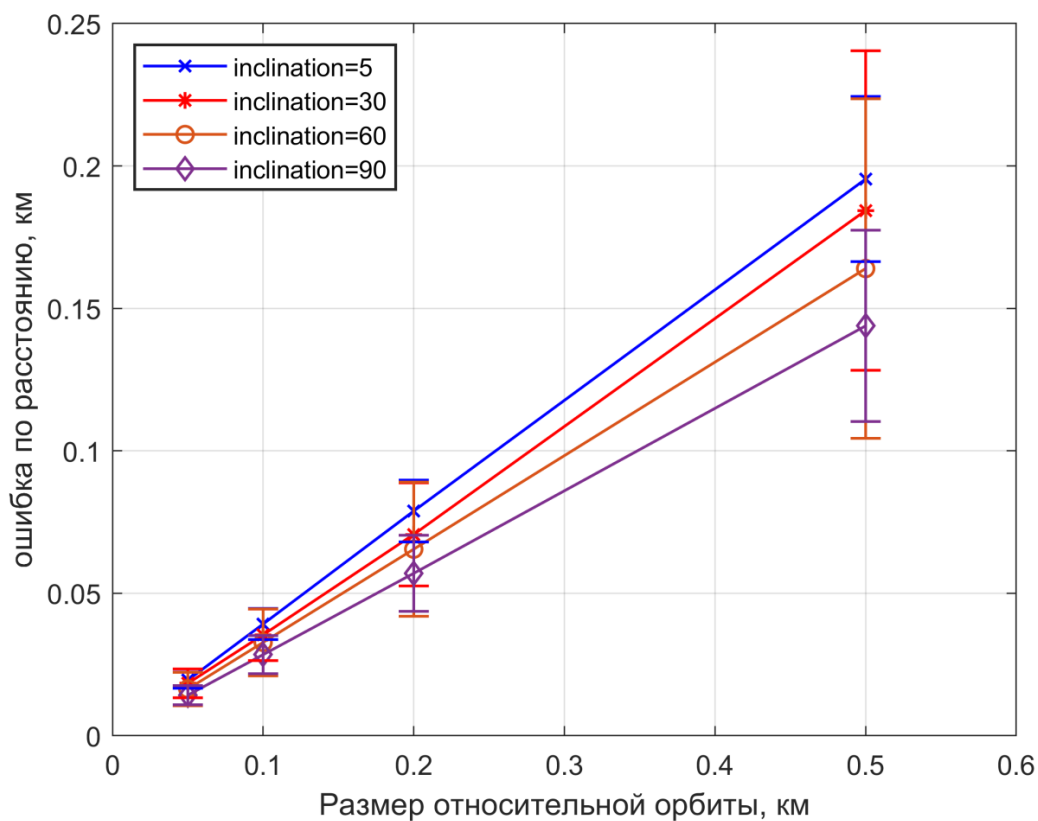


Рисунок 8 – Результаты моделирования для ХКУ на малых размерах относительных орбит

Из рисунка видно, что при малых относительных размерах ошибка не превышает 50% от размера относительной орбиты.

Ниже, на рисунке 9 представлены осредненные ошибки по расстоянию для четырех достаточно больших размеров относительных орбит.

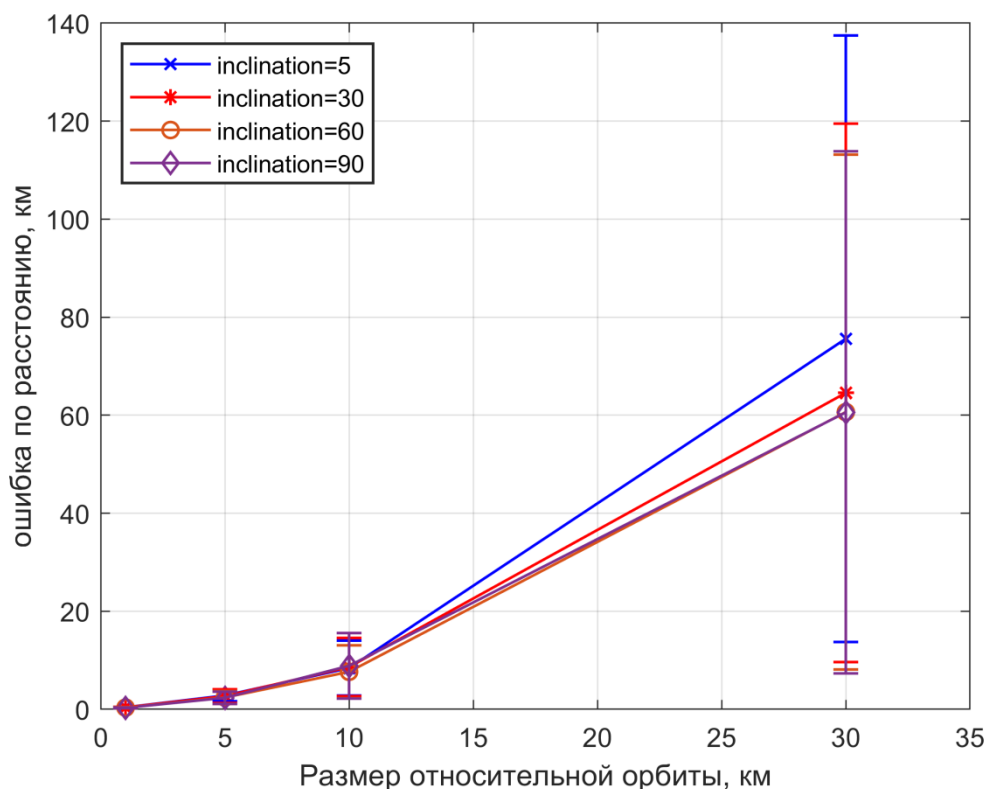


Рисунок 9 – Результаты моделирования для уравнений ХКУ для больших размеров относительных орбит

Согласно рисунку 9, при рассмотрении достаточно больших размеров относительных орбит уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира в среднем дают большую ошибку по сравнению с размером относительной орбиты.

Из построенных графиков можно сделать вывод, что с увеличением размера относительной орбиты, увеличивается средняя ошибка, а также увеличивается дисперсия. Кроме того, оказалось, что при разных наклонениях главного аппарата, мы получаем различные значения средней ошибки. Помимо этого, ошибка уменьшается с ростом наклонения: меньшая ошибка получена при наклонении в 90° , а самые большие значения ошибок получены для наклонения 5° .

Кроме полученной зависимости от значения наклона средняя ошибка зависит и от ошибки выведения. В ходе данной работы рассматривались ошибки выведения 1 метр и 10 метров для малых размеров относительных орбит, а для достаточно больших размеров относительных орбит рассматривались еще и 100 метров.

Рассмотрение нескольких ошибок выведения, которые учитываются в шумах при зашумлении данных, приводит к построению следующих графиков:

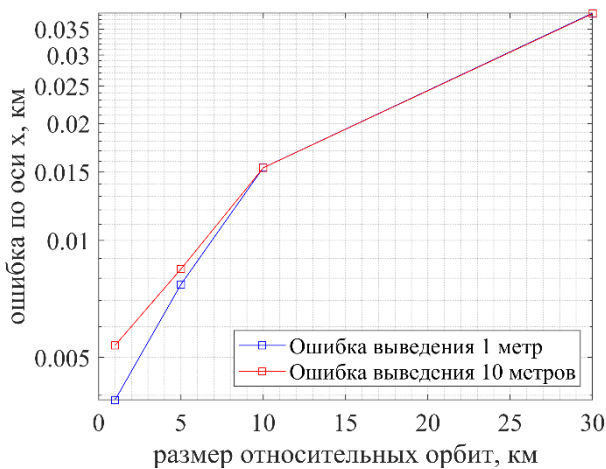


Рисунок 10 – зависимость от ошибки выведения для малых орбит

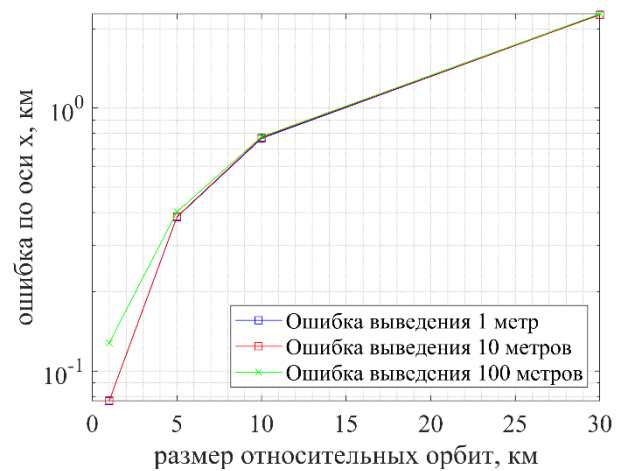


Рисунок 11 – зависимость от ошибки выведения для больших размеров орбит

Из рисунков 10 и 11 видно, что при достаточно больших значениях размеров относительных орбит ошибка выведения не влияет, но при рассмотрении малых относительных орбит нужно учитывать ее влияние.

3.3.2 Модифицированная модель ХКУ

В данном разделе описываются результаты моделирования уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшира в криволинейных координатах (10).

Как и для уравнений ХКУ, моделирование для 8 размеров относительных уравнений было разбито на блоки по 4 размера: малые относительные орбиты и достаточно большие.

Построим графики зависимости ошибки по расстоянию от размера орбиты для различных значений наклона орбиты главного аппарата:

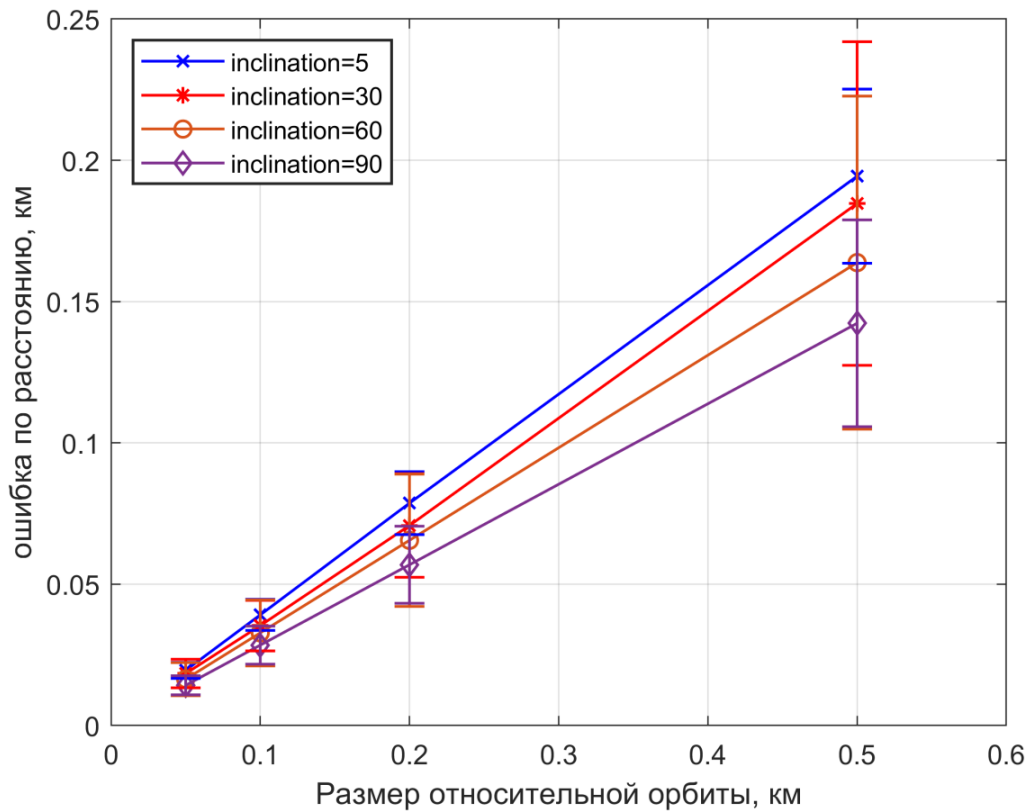


Рисунок 12 – Результаты моделирования для уравнений ХКУ в криволинейных координатах для малых размеров относительных орбит

Из графика следует, что в среднем ошибка не превышает половину значения размера относительной орбиты в течение всего моделирования. Более того, при бóльших размерах мы получаем бóльшие средние значения для ошибки и бóльший разброс значений ошибки.

Результаты моделирования для больших относительных орбит приведено на рисунке 13.

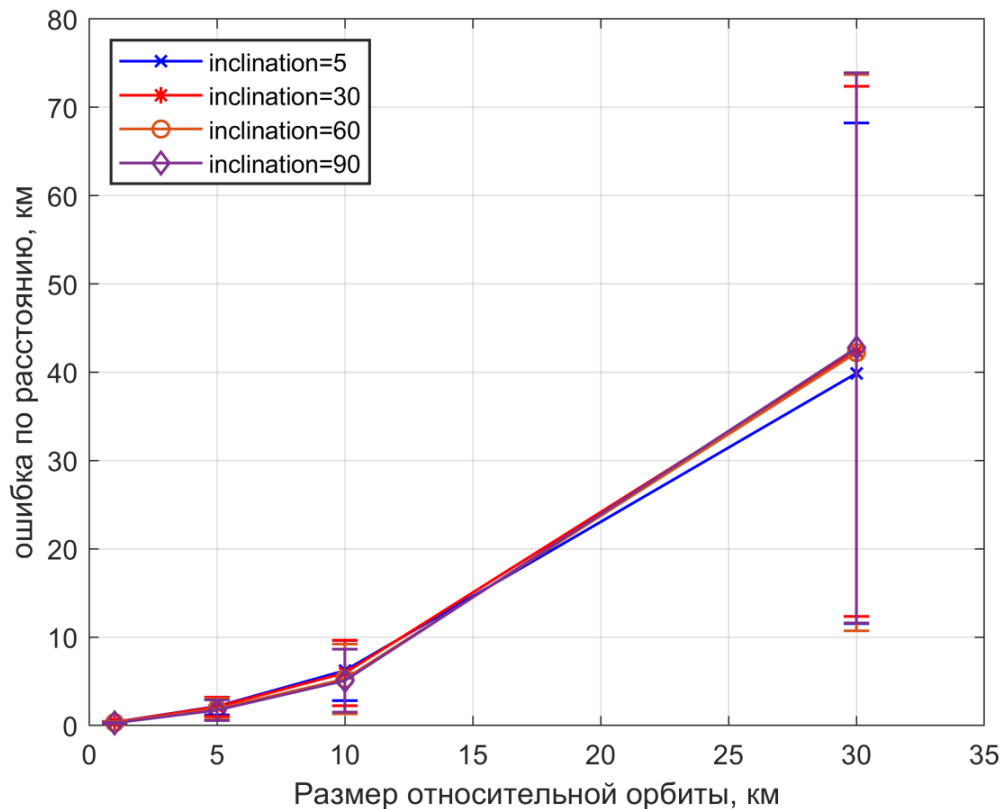


Рисунок 13 – Результаты моделирования для уравнений ХКУ в криволинейных координатах для больших размеров относительных орбит

Из рисунка следует, что, в отличие от ХКУ, модифицированные ХКУ точнее описывают движение на достаточно больших размерах орбит. Связано это в основном с неучетом криволинейности. Для наглядности, на рисунке 14 приведен пример относительного движения, полученного из уравнений ХКУ в относительных декартовых координатах и из модифицированных уравнений ХКУ в криволинейных координатах.

Согласно рисункам, модифицированные уравнения также имеют различные значения ошибок при различных значениях наклонения. Также было проведено исследование уравнений ХКУ в криволинейных координатах в зависимости от ошибки выведения для наклонения 5° (рис. 15 и 16)

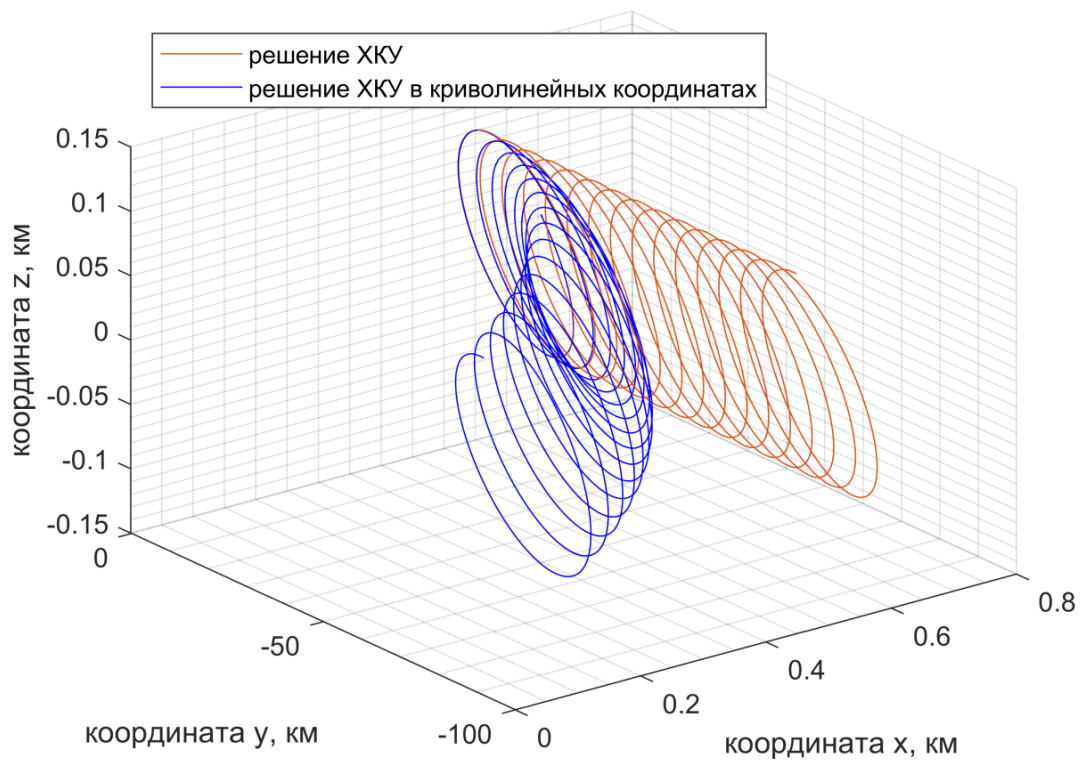


Рисунок 14 – отличие ХКУ и модифицированных ХКУ

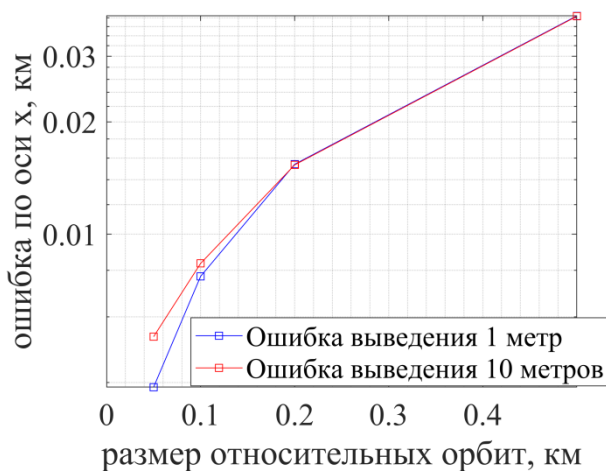


Рисунок 15 – зависимость от ошибки выведения для малых орбит

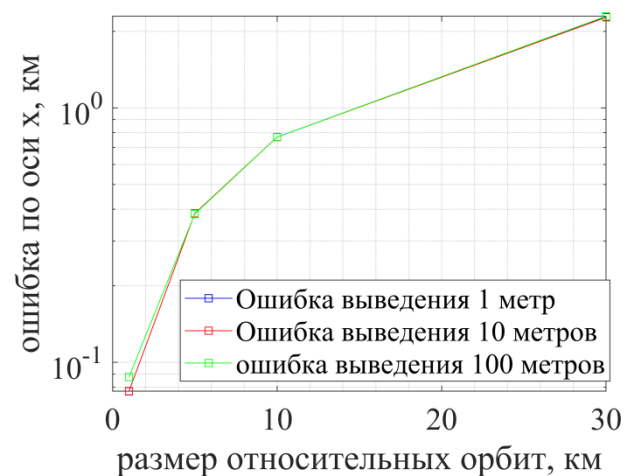


Рисунок 16 – зависимость от ошибки выведения для больших размеров

Исходя из результатов, полученных на рисунках 15 и 16, ошибка выведения играет роль только при малых относительных орбитах. При рассмотрении достаточно больших размеров ошибка вывода в метр, 10 и 100 метров не играет важную роль в моделировании.

Таким образом, модель ХКУ в криволинейных координатах ведет себя аналогично модели ХКУ, однако благодаря учету криволинейности орбит,

точнее описывает движение в случае больших относительных расстояний между спутниками.

3.3.3 Модель ШС

В данном разделе описываются результаты моделирования уравнений Швайгарта-Седвика (12).

Аналогично уравнениям ХКУ, будем исследовать уравнения ШС на восьми размерах орбит, результаты приведем на двух графиках – для малых относительных орбит и достаточно больших.

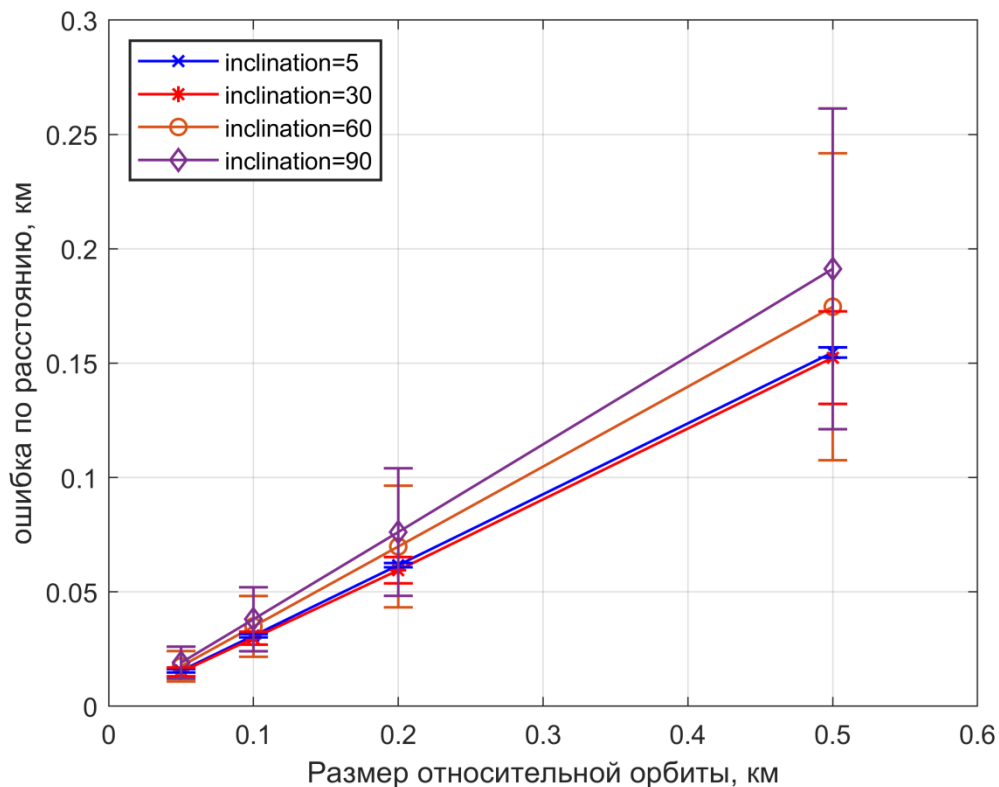


Рисунок 17 – Результаты моделирования для уравнений Швайгарта-Седвика для малых относительных орбит

В отличие от прошлых моделей модель Швайгарта-Седвика уже имеет значения, превышающие половины размера относительных орбит.

Ниже приводятся результаты для достаточно больших относительных орбит (рис. 18)

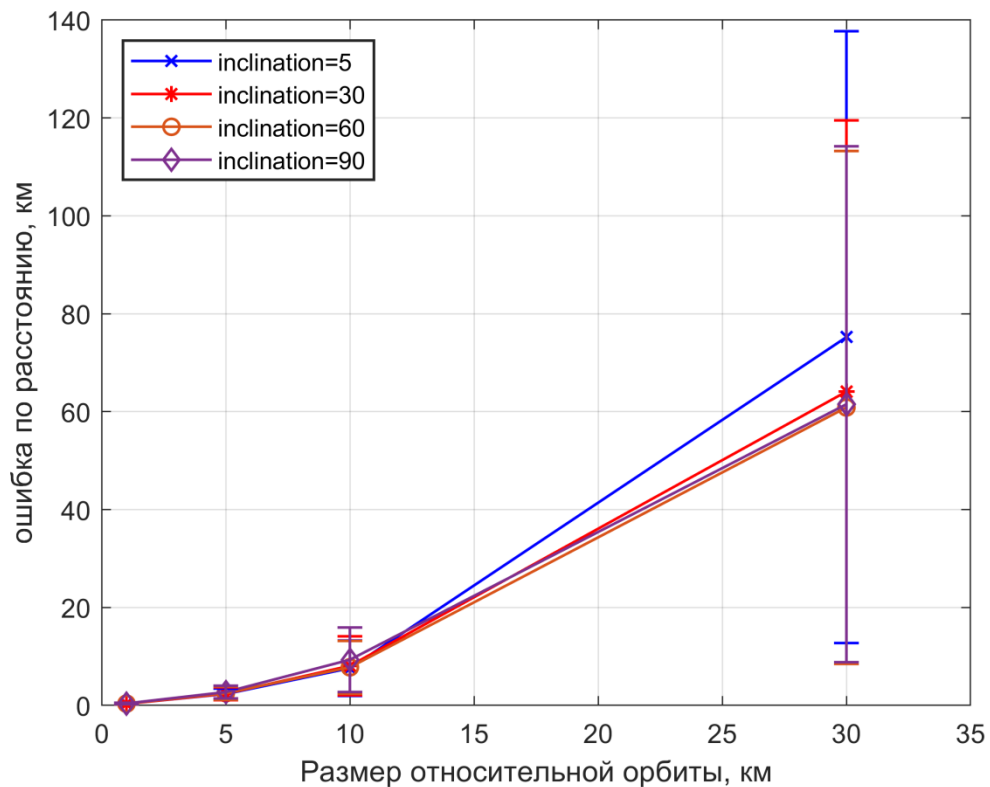


Рисунок 18 – Результаты моделирования для уравнений Швайгарта-Седвика для больших размеров относительных орбит

Из графиков следует, что в зависимости от наклона уравнения Швайгарта-Седвика, как и ХКУ, имеют различные ошибки. Более того, при размере орбиты в 30 километров уравнения ШС выдают ошибку в среднем в два раза бóльшую размера орбиты, что позволяет сделать вывод, что применять уравнения ШС на достаточно больших размерах орбит является нецелесообразным.

Проведем исследование для выявления зависимости от ошибки выведения (рис. 19, 20)

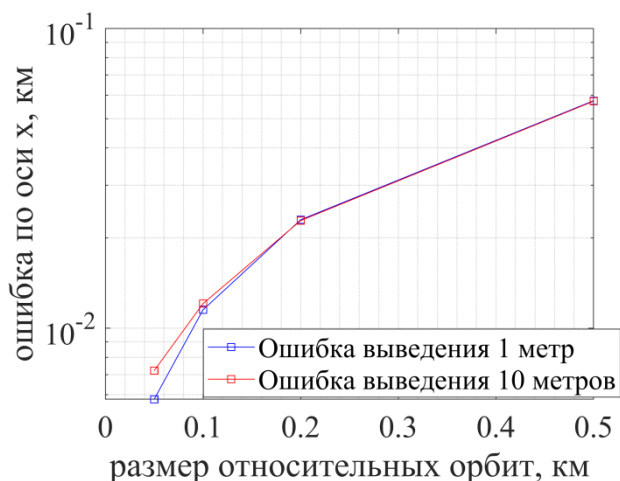


Рисунок 19 – зависимость от ошибки выведения для малых орбит

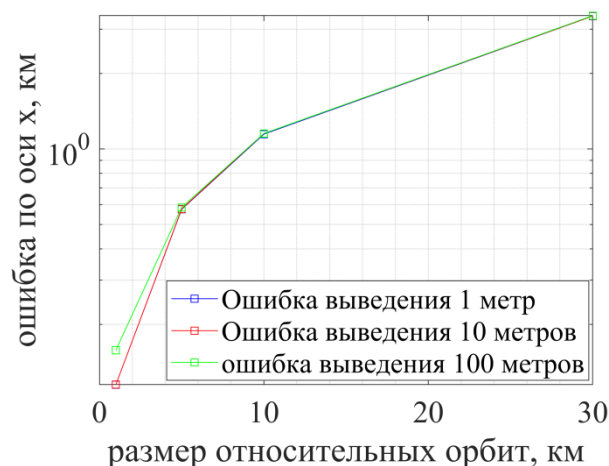


Рисунок 20 – зависимость от ошибки выведения для больших размеров

Из рисунков 19 и 20 следует, что для модели ШС, как и для ХКУ, ошибка выведения играет роль только на малых размерах относительных орбит.

3.3.4 Модифицированная модель ШС

В данной подглаве описываются результаты моделирования уравнения Швайгарта-Седвика в криволинейных координатах (13). Также, как и раньше, все исследование разделено на малые орбиты и достаточно большие. Приведем результаты (рис. 21 и 22).

Моделирование показало, что, несмотря на отсутствие точного вывода этой модели движения, результаты оказались схожими с результатами уравнений ШС в декартовых относительных координатах для малых относительных орбит.

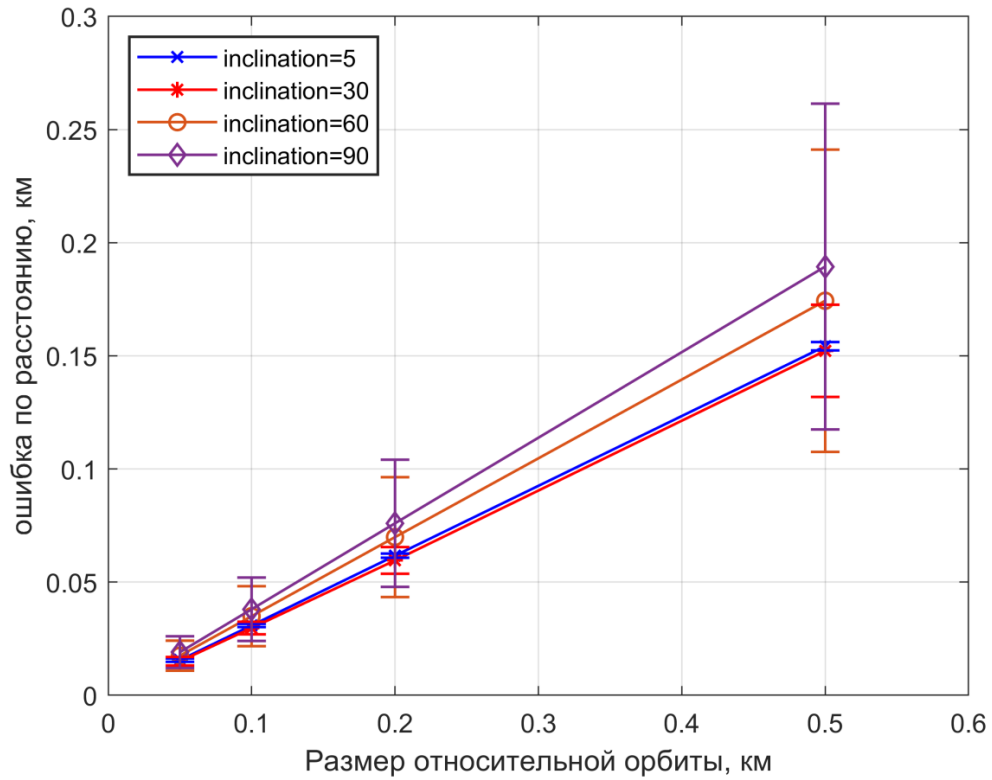


Рисунок 21 – Результаты моделирования для уравнений Швайгарта-Седвика в криволинейных координатах для малых размеров относительных орбит

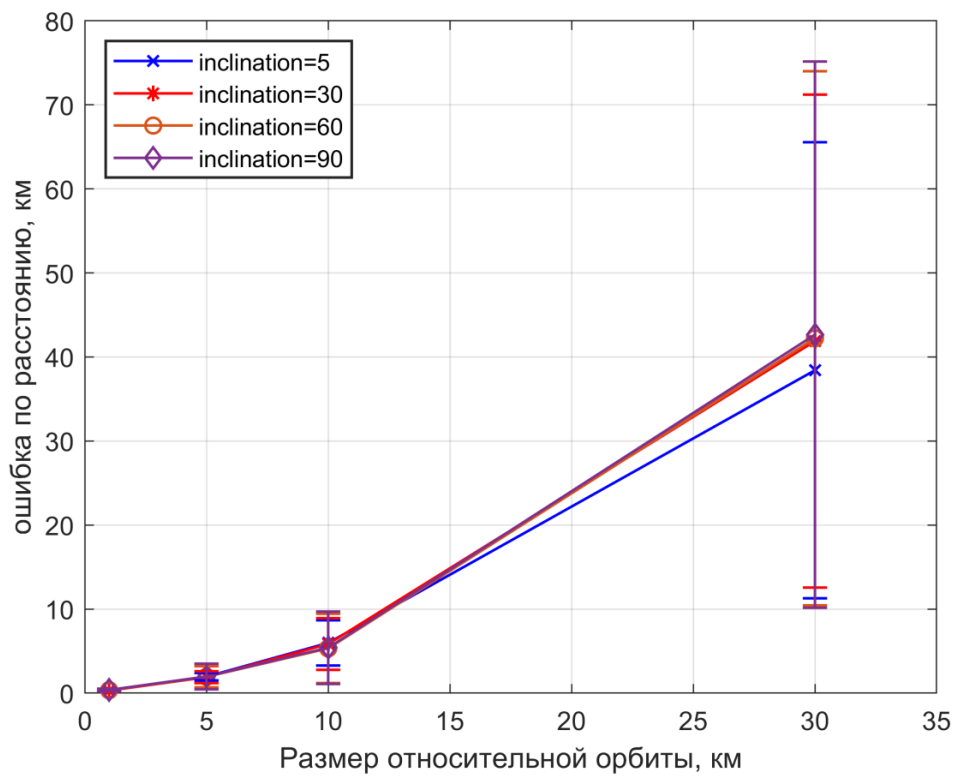


Рисунок 22 – Результаты моделирования для уравнений Швайгарта-Седвика в криволинейных координатах для больших размеров относительных орбит

Из графиков следует, что модифицированные уравнения ШС имеют зависимость от наклонений, а также для достаточно больших размеров относительных орбит уравнения ШС в криволинейных координатах точнее описывают движение, чем те же уравнения в декартовых координатах, так как имеют меньшую ошибку в среднем. Это связано, как и в случае уравнений ХКУ, с учетом криволинейности относительных орбит уравнениями в относительных декартовых координатах.

Также было проведено исследование для выявления зависимости результатов от ошибки выведения.

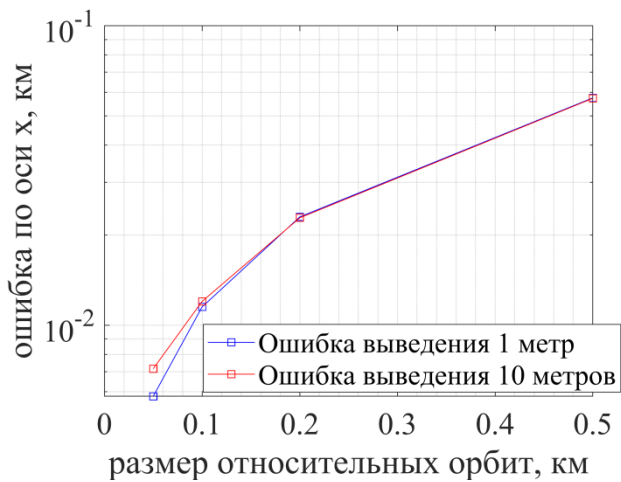


Рисунок 23 – зависимость от ошибки выведения для малых орбит

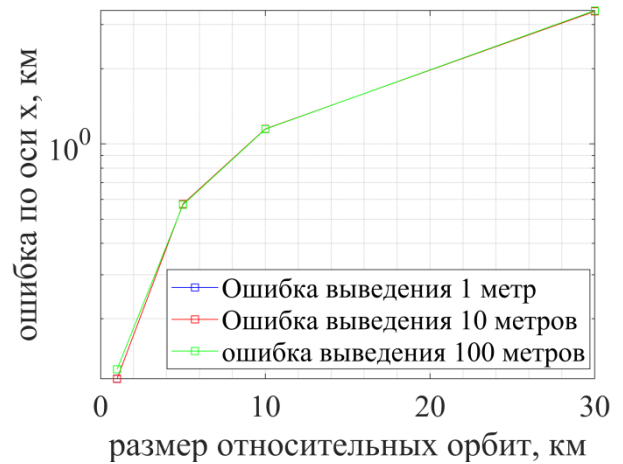


Рисунок 24 – зависимость от ошибки выведения для больших размеров

Из рисунков 23 и 24 следует, что ошибки выведения для уравнений ШС в криволинейных координатах, как в остальных моделях, не имеют влияние на больших размерах относительных орбит, но влияют в случае малых размеров.

3.3.5 Сравнение моделей

Как было описано выше, оценка точности производится двумя способами:

- 1) Для определенного набора данных рассчитывается средняя ошибка модели по расстоянию за последний виток.

- 2) Также для определенного набора данных фиксируется время, когда ошибка модели движения начинает отличаться от точного на некоторый процент от размера относительной орбиты.

Оценим точность по первому способу. Для наглядности и компактности проведем сравнение для моделей ХКУ, ШС и их модификацией только для наклона в 30° и ошибки выведения в 1 метр. На рисунках 25–28 представлены результаты моделирования для малых относительных орбит. На рисунках 29–32 представлены результаты для больших размеров относительных орбит.

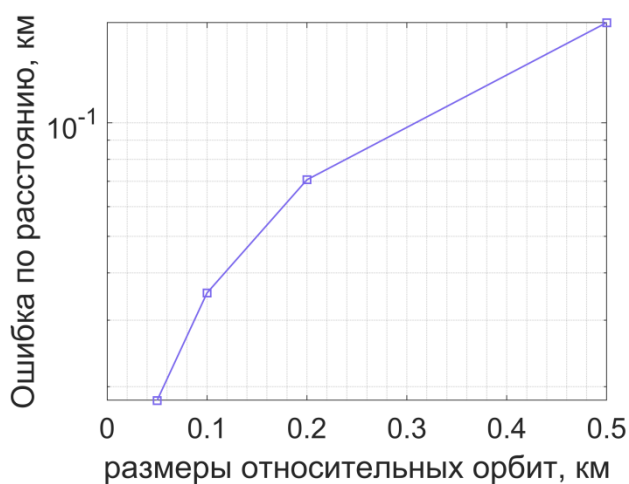


Рисунок 25 – уравнения ХКУ

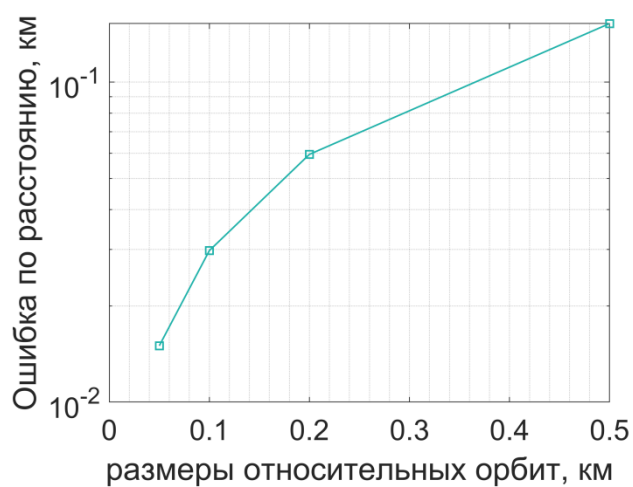


Рисунок 26 – уравнения ШС

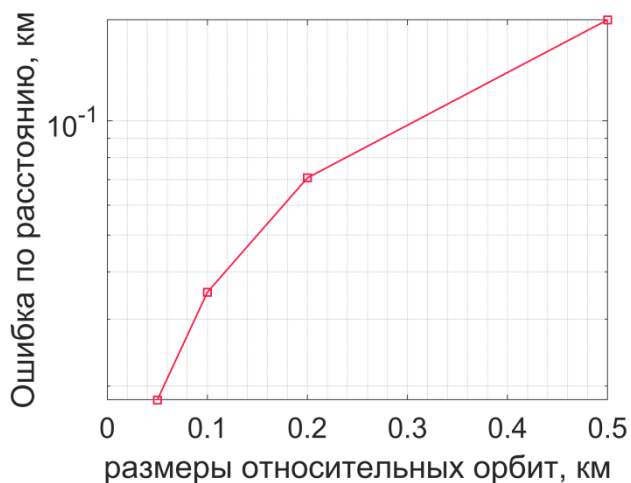


Рисунок 27 – уравнения ХКУ в криволинейных координатах

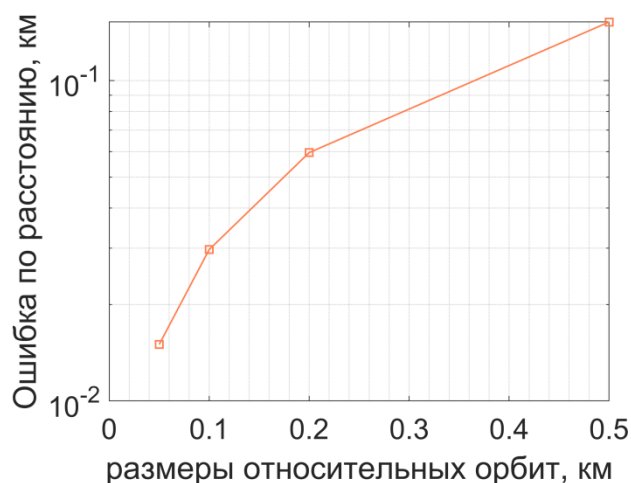


Рисунок 28 – уравнения ШС в криволинейных координатах

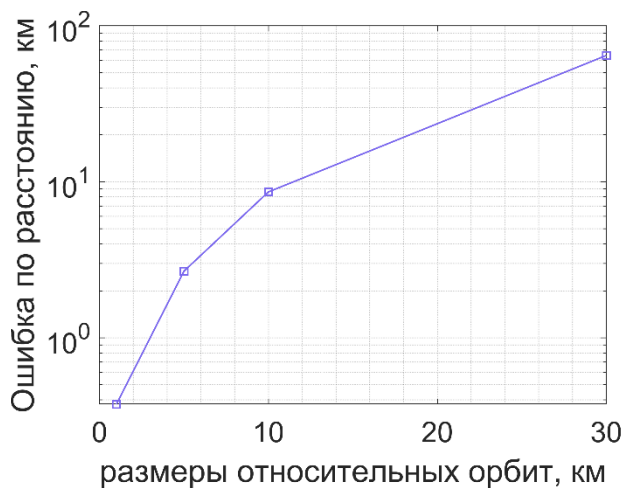


Рисунок 29 – уравнения ХКУ

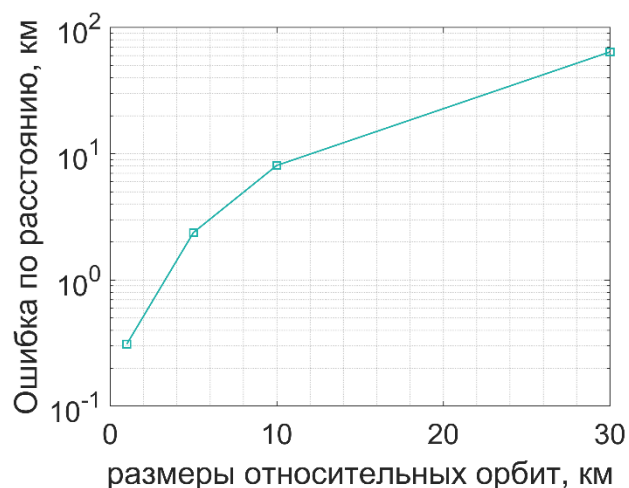


Рисунок 30 – уравнения ШС

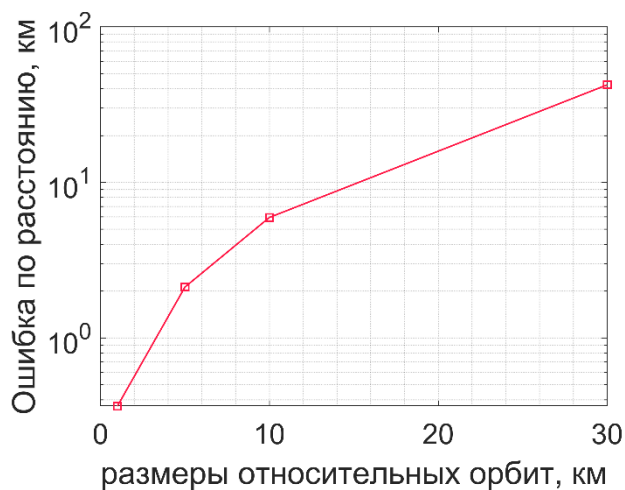


Рисунок 31 – уравнения ХКУ в криволинейных координатах

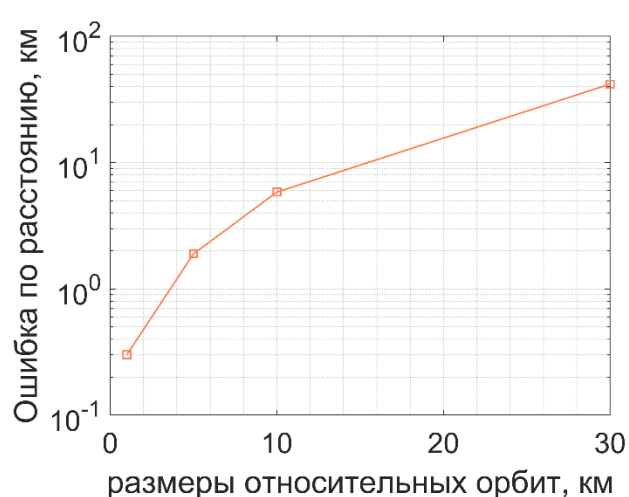


Рисунок 32 – уравнения ШС в криволинейных координатах

Отметим, что для малых размеров относительных орбит разницы между криволинейными и декартовыми моделями не наблюдается, при этом уравнения ШС оказываются чуть более точными по сравнению с моделями ХКУ. Для достаточно больших размеров относительных орбит криволинейные модели имеют меньшую ошибку, чем декартовые модели, поэтому точнее оценивают реально движение. При этом, как и в случае малых размеров относительных орбит, уравнения ШС являются точнее моделей ХКУ, так как выдают ошибку почти в 1.5 раза меньшую.

Перейдем к оценке точности вторым способом. Рассматривать будем два значения наклона: 30° и 90° . Также возьмем 4 значения размеров

относительных орбит. Про моделируем движение и зафиксируем время, когда приближенные уравнения начали давать ошибку, превышающую некоторое заданное значение. В данной работе в качестве такой величины берется некий процент $x\%$ от размера относительной орбиты. Всего рассматривается три значения процентов: 10%, 25%, 50%. В следующих таблицах 1, 2, 3 приведены результаты моделирования.

Из таблицы 1 видно, что в среднем примерно за 5 часов все приближенные уравнения начали выдавать ошибку больше, чем 10% от орбиты для наклона в 30 градусов. А для наклона в 90 градусов все уравнения начинают в среднем примерно за 12 часов выдавать такую ошибку.

Из таблицы 2 видно, что для наклона в 30 градусов в среднем все уравнения начинают выдавать ошибку, большую 25% от размера орбиты, примерно за 15 часов в то время, как для наклона 90 градусов мы получаем времена в районе 22 часов. Последнее не особо показательно, так как время моделирования было ограничено 24 часами.

Из таблицы 3 видно, что наши уравнения начинают давать большую ошибку в среднем за 18-20 часов для наклона в 30 градусов, а для наклона в 90 градусов, рассмотренные уравнения имеют достаточно хорошую точность и начинают выдавать достаточно большую ошибку в среднем уже после 23 часов.

Таблица 1. Исследование времени накопления ошибки 10%

x=10%								
	Наклонение орбиты 30°				Наклонение орбиты 90°			
	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километров	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километров
Уравнения ХКУ	22815.25	20698.575	21905.4	17562.975	61945.75	60845.4	59543.925	45696.275
Модифицированные уравнения ХКУ	22845.45	21314.3	22221.075	20925.7	62002.175	61801.425	62343.925	62253.1
Уравнения ШС	24632.20	22109.95	23233.925	17924.55	56485.375	56471.65	55560.825	43890.2
Модифицированные уравнения ШС	24579.675	22375.05	23572.925	20189.175	56491.075	57089.875	57336.65	62377.975

Таблица 2. Исследование времени накопления ошибки 25%

x=25%								
	Наклонение орбиты 30°				Наклонение орбиты 90°			
	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километро в	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километров
Уравнения ХКУ	52409.075	47406.05	50570.93	41542.65	82847.35	82529	82354.08	77235.875
Модифицированн ые уравнения ХКУ	52566.6	48234.475	50262.23	47432.925	82849.18	82580.13	82469.83	81104.65
Уравнения ШС	57074.5	51681.05	54178.53	41579.675	80885.68	80744.23	80541.18	75899.225
Модифицированн ые уравнения ШС	57217.475	51976.35	55344.63	46454.65	80908.25	80832.2	80782.73	79756.6

Таблица 3. Исследование времени накопления ошибки 50%

x=50%								
	Наклонение орбиты 30°				Наклонение орбиты 90°			
	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километров	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километров
Уравнения ХКУ	73236.075	68375.35	71243.03	64596.825	85656.8	86116.43	86146.40	86055.95
Модифицированные уравнения ХКУ	73268.8	68328.825	71333.1	69746.375	85657.4	86174.98	86152.28	85304.625
Уравнения ШС	76525.125	72453.825	75306.83	65520.925	85397.53	85627.53	85602.28	85535.1
Модифицированные уравнения ШС	76679.725	72347.85	75888.4	69941.7	85397	85632.25	85632.83	84860.35

Таким образом, исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что уравнения Швайгарта-Седвика в декартовых относительных координатах точнее описывает движение, чем уравнения ХКУ. А замена декартовых относительных переменных на криволинейные координаты позволяет еще больше увеличить точность, особенно для больших относительных орбит.

В связи с этим можно сделать следующие выводы:

- 1) На достаточно небольших размерах относительной орбиты возможно использование любой из вышеописанных моделей с достаточно хорошей точностью и небольшой ошибкой по расстоянию.
- 2) При рассмотрении больших размеров орбит уравнения ХКУ и ШС в криволинейных координатах ведут себя лучше и выдают ошибку в два раза меньше, чем те же уравнения в декартовых относительных координатах. Поэтому в таком случае целесообразно использовать модифицированных уравнений

Заключение

В ходе данной работы были рассмотрены несколько моделей относительного движения: уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира, уравнения Швайгарта-Седвика и их модификации в криволинейных координатах. В результате численного моделирования было выявлено, что уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира хорошо себя ведут на малых размерах относительной орбиты, однако на достаточно больших размерах уравнения Хилла выдают достаточно большую ошибку. Уравнения Швайгарта-Седвика ведут себя аналогично уравнениям ХКУ, однако имеют меньшую ошибку. В отличие от обычных уравнений ХКУ, данная модель способна достаточно точно описывать движение не только на малых размерах орбит, но и на размерах орбит до 30 километров. В качестве четвертой модели движения были рассмотрены уравнения Швайгарта-Седвика в криволинейных координатах, полученные заменой относительных декартовых координат на криволинейные в обычных уравнениях Швайгарта-Седвика. Моделирование показало, что данная модель движения оказалась самой точной из четырех рассмотренных, однако уравнения не имеют точного обоснования. Аккуратный вывод уравнений предполагается в дальнейшем.

Полученные результаты могут быть использованы при построении алгоритмов управления для выбора подходящей модели относительного движения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Alfriend K.T. et al. Spacecraft formation flying: Dynamics, control and navigation // Spacecraft Formation Flying: Dynamics, control and navigation. 2010. 402 p.
2. Alfriend K.T., Yan H. Evaluation and comparison of relative motion theories // J. Guid. Control. Dyn. 2005. Vol. 28, № 2.
3. Condurache D., Martinusi V. Exact solution to the relative orbital motion in a central force field // 2008 2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, ISSCAA 2008. 2008.
4. CLOHESSY W.H., WILTSHIRE R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // J. Aerosp. Sci. 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–658.
5. De Bruijn F., Gill E., How J. Comparative analysis of Cartesian and curvilinear Clohessy-Wiltshire equations // J. Aerosp. Eng. Sci. Appl. 2011. Vol. 3, № 2.
6. Schweighart S.A., Sedwick R.J. High-fidelity linearized J2 model for satellite formation flight // J. Guid. Control. Dyn. 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
7. Sullivan J., Grimberg S., D'Amico S. Comprehensive survey and assessment of spacecraft relative motion dynamics models // J. Guid. Control. Dyn. 2017. Vol. 40, № 8. P. 1837–1859.
8. Мирер С.А. Механика космического полета. Орбитальное движение. Москва, 2007.
9. Самарский А.А. Введение в численные методы // Наука. 2007. 133–135 p.
10. Hairer E., Wanner G., Nørsett S.. Runge-Kutta and Extrapolation Methods // Solving Ordinary Differential Equations I. Springer Berlin Heidelberg, 2008. P. 129–353.