

## **Аннотация**

В настоящей работе проводится обзор моделей относительного движения группы космических аппаратов. Предполагается движение аппаратов на близком расстоянии друг от друга на эллиптических орбитах с близким к нулю эксцентриситетом. На спутники влияет центрального поле Земли со второй гармоникой геопотенциала. В настоящей работе реализуются модели Хилла-Клохесси-Уилтшира и Швайгхарта-Седвика в декартовых координатах, а также их модификации в криволинейных координатах. При этом модифицированные уравнения Швайгхарта-Седвика в этой работе получены впервые путем формальной подстановки в модель Швайгхарта-Седвика в декартовых координатах. Показано, что использование криволинейных координат может существенно улучшить точность модели. Представлены результаты, которые позволяют выбрать подходящую модель для различных сценариев и миссий.

# Оглавление

Аннотация .....	2
Введение .....	4
1. Постановка задачи, системы координат .....	6
1.1 Постановка задачи.....	6
1.2 Системы координат .....	7
1 Уравнения движения .....	8
1.1 Полные уравнения движения.....	8
1.2 Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира.....	9
1.3 Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира в криволинейных координатах.....	17
1.4 Уравнения Швайгхарта-Седвика .....	19
1.5 Уравнения Швайгхарта-Седвика в криволинейных координатах ..	22
1.6 Уравнения Шонера-Хемпеля.....	23
2 Численное моделирование.....	24
2.1 Начальные данные.....	24
2.2 Методика получения результатов .....	25
2.3 Результаты .....	26
2.3.1 Модель ШС .....	26
2.3.2 Модель ШХ .....	31
2.3.3 Сравнение.....	32
Заключение .....	53
Список использованных источников .....	53

## Введение

В последние несколько десятилетий растет интерес к использованию группы спутников. Было запущено множество миссий, в том числе по исследованию магнитосферы [1] и гравитационного поля Земли [2]. Также проводится активное теоретическое изучение моделей относительного движения, например в [3] представлен достаточно большой обзор существующих моделей. Такая популярность групповых полетов объясняется как принципиально новыми возможностями (например, возможностью проведения одновременных измерений в различных точках пространства), так и развитием новых технологий, например, разработкой сверхтяжелых ракетносителей, которые позволяют вывести на низкую околоземную орбиту свыше 50 тонн. Например, ракетноситель (РН) «Енисей» для лунных пилотируемых миссий, разрабатываемая организацией РКК «Энергия» [4]. На данный момент разработка РН приостановлена, летные испытания запланированы после 2023 года.

Хочется отметить одну из главных проблем, возникающих в задачах по управлению группами космических аппаратов: в пассивном движении со временем спутники разлетаются друг от друга, в то время как многие миссии требуют поддержания определенной пространственной конфигурации. Это порождает задачу поддержания спутников на определенных относительных расстояниях, которая решается внедрением алгоритмов управления относительным движением аппаратов. Для разработки таких алгоритмов требуются модели относительного движения, которые, во-первых, будут желательны линейными для простого аналитического решения, и, во-вторых, достаточно точно описывать реальное движение.

К настоящему моменту было разработано немалое количество моделей. Большая часть из них получена путем линеаризации полных уравнений движений с учетом некоторых предположений. В данной работе приводится краткий обзор самых распространенных моделей, использующие для параметризации положение и скорости в локальной системе координат

(например, декартовы координаты в орбитальной системе координат или ее криволинейная модификация). Кроме того, исследуется точность рассматриваемых моделей и их модификаций в криволинейных координатах.

Существует достаточное количество статей, содержащих обзор как линейных, так и нелинейных моделей относительного движения. Например, в статье [5] рассматривались модель Хилла, нелинейная модель Яна-Альфренда и другие. В статье [6] помимо модели Хилла в рассмотрении брались уравнения Шонера-Хемпеля.

Для исследования в настоящей работе были выбраны уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира [7], их модификация в криволинейных уравнений [8], уравнения Швайгхарта-Седвика [9] и уравнения Шонера-Хемпеля [10]. Также была рассмотрена еще одна модель, состоящая в формальной замене декартовых координат в уравнениях Швайгхарта-Седвика на криволинейные координаты, как это было сделано для уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшира. Подобный обзор моделей был выполнен и ранее [11], однако в данной работе рассматривались только солнечно-синхронные орбиты (с наклоном 98 градусов) и также фиксировались все характеристики относительной орбиты, оставляя свободным только один параметр орбиты. В статье было 3 исследований, в каждом из которых был свой свободный параметр. Так, в качестве свободного параметра, выступал эксцентриситет орбиты главного аппарата, относительный эксцентриситет и наклонение.

Целью данной работы является реализация моделей Хилла-Клохесси-Уилтшира, Швайгхарта-Седвика, а также их модификаций в криволинейных координатах на нескольких наклонениях орбиты главного аппарата при фиксации только параметра дрейфа. В работе будет проведен сравнительный анализ точностей моделей, с помощью которого получен инструмент, позволяющий в дальнейшем выбрать подходящие уравнения с наименьшей точностью для конкретных задач.

Результаты работы были представлены на следующих конференциях:

- 1) И.А. Сулова, Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков, «Использование криволинейных координат в модели Швайгхарта-Седвика», 65-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, 2023
- 2) И.А. Сулова, Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков, «Сравнительный анализ моделей относительного движения группы космических аппаратов», 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Москва,
- 3) И.А. Сулова, Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков, «Численное исследование точности моделей относительного движения космических аппаратов в групповом полете», XLV Академические чтения по космонавтике, Москва, 2021
- 4) И.А. Сулова, Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков, «Исследование точности моделей относительного движения космических аппаратов в групповом полете», 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, 2020

Также результаты исследования были опубликованы в виде статьи:

- 1) И. А. Сулова, Я. В. Маштаков, С. А. Шестаков, “Сравнение моделей относительного движения группы космических аппаратов”, Матем. моделирование, 34:6 (2022), 75–91

Работа состоит из введения, трех глав и заключения. В первой главе описывается постановка задачи: вводятся системы координат и делаются необходимые предположения. Во второй главе описываются рассматриваемые модели движения. В третьей главе приводятся результаты численного исследования.

## **1. Постановка задачи, системы координат**

### **1.1 Постановка задачи**

Рассматривается задача описания относительного движения двух аппаратов. Один из аппаратов мы будем называть главным или ведущим, а второй аппарат будем именовать ведомым и рассмотрим движение ведомого аппарата относительно главного. Будем считать, что движение происходит на близких околокруговых орбитах. Орбиты возьмем достаточно высокими для

того, чтоб не учитывать влияние сопротивления атмосферы на движение аппаратов. В качестве возмущений будем рассматривать влияние второй гармоники геопотенциала Земли. В данной работе рассматриваются следующие модели:

1. Модель Хилла-Клохесси-Уилтшира (ХКУ);
2. Модификация модели ХКУ в криволинейных координатах;
3. Модель Швайгхарта-Седвика (ШС);
4. Модификация модели ШС в криволинейных координатах;
5. Модель Шонера-Хемпеля (ШХ)

Необходимо реализовать вышеперечисленные модели, провести их численное сравнение с истинным движением. А также по результатам исследования получить инструмент, позволяющий в различных задачах выбрать подходящую модель для поставленных критериев.

Реализация моделей происходит на нескольких размерах относительных орбит и наклонениях главного аппарата. Интервал моделирования ограничивается сутками.

## 1.2 Системы координат

В настоящей работе рассматриваются следующие системы координат (рис.1):

- $OY_1Y_2Y_3$  — инерциальная система координат (ИСК). Вводится следующим образом: центр системы координат находится в центре Земли, ось  $OY_1$  направлена в точку весеннего равноденствия эпохи J2000, ось  $OY_3$  направлена вдоль оси вращения Земли, а ось  $OY_2$  дополняет систему до правой тройки векторов;
- $SX_1X_2X_3$  — орбитальная система координат (ОСК). Центр данной системы координат мы помещаем в центр масс главного аппарата, ось  $SX_1$  мы направляем по радиус-вектору аппарата, ось  $SX_3$  направлена по орбитальному кинетическому моменту ведущего

аппарата, а ось  $SX_2$  дополняет систему до правой ортонормированной тройки.

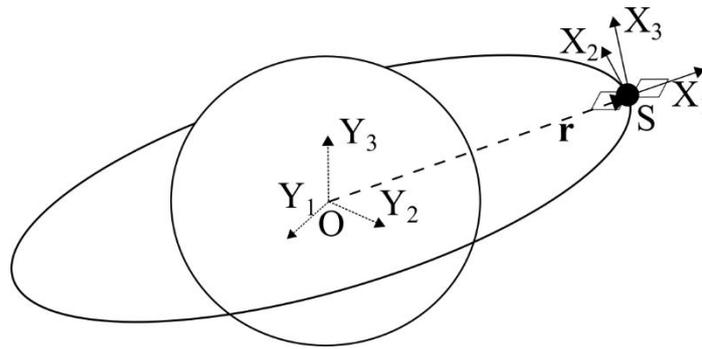


Рисунок 1 — Системы координат

Введем матрицу перехода из ИСК в ОСК  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{r}^{\text{OF}} = \mathbf{A}\mathbf{r}^{\text{IF}}$ , где  $\mathbf{r}^{\text{OF}}$  — радиус-вектор в орбитальной системе координат, а  $\mathbf{r}^{\text{IF}}$  — радиус-вектор в инерциальной системе координат. Для обратного перехода из ОСК в ИСК мы будем использовать матрицу  $\mathbf{A}^T$ .

Для явного вида матрицы  $\mathbf{A}$  введем единичные векторы орбитальной системы координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$  — радиус-вектор и вектор скорости аппарата, с которым связана орбитальная система координат.

Тогда матрица  $\mathbf{A}$  имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix}$$

## 1 Уравнения движения

### 1.1 Полные уравнения движения

Полные уравнения движений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\mu \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\mu \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Где  $\mathbf{r}_1$  — радиус-вектор главного аппарата в ИСК,  $\mathbf{r}_2$  — радиус-вектор ведомого аппарата в ИСК,  $r_1, r_2$  — их модули,  $\mu$  — гравитационный параметр,  $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$  — возмущающее ускорение, вызванное влиянием второй гармоники геопотенциала Земли. Его компоненты в ИСК имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}F_x &= J_2 \frac{x}{r^7} \left( 6z^2 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \right), \\ F_y &= J_2 \frac{y}{r^7} \left( 6z^2 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \right), \\ F_z &= J_2 \frac{z}{r^7} \left( 3z^2 - \frac{9}{2}(x^2 + y^2) \right).\end{aligned}$$

Где коэффициент  $J_2 = 1.75553 \times 10^{10} \text{ км}^5 \text{ с}^{-2}$ ,  $x, y, z$  — компоненты радиус-вектора  $\mathbf{r}$  в ИСК.

## 1.2 Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира

Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира (ХКУ) были получены впервые в 1960-х годах Дж. Хиллом [12] в общем виде, а затем заново выведены У. Клохесси и Р. Уилтширом, которые решали задачу орбитальной стыковки.

Данная модель получена при следующих предположениях:

1. Орбита главного спутника круговая
2. Движение аппаратов происходит только под действием центрального поля Земли
3. Расстояние между спутниками пренебрежимо мало по сравнению с радиус-вектором главного аппарата

Далее приводится вывод уравнений ХКУ. Выполним переход к декартовым относительным координатам.

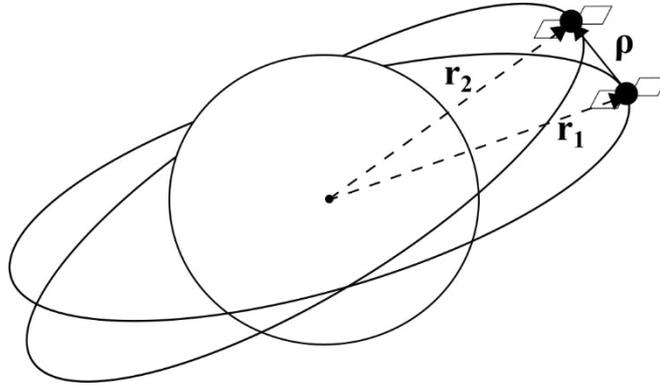


Рисунок 2 — Относительные координаты

Относительный радиус-вектор ведомого аппарата относительно главного аппарата в ИСК обозначим через вектор  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ .

Оси орбитальной системы координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|}, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1|}, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Матрица перехода из ИСК в ОСК:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix}$$

Здесь и далее коэффициенты разложения радиус-вектора в ОСК будем обозначать  $\boldsymbol{\rho}' = \mathbf{A}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = (x, y, z)$ .

Для нахождения относительной скорости необходимо выписать производные осей  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{r}_1|} - \mathbf{e}_1 \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1)}{|\mathbf{r}_1|}, \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= \frac{\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{v}}_1}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1|} - \mathbf{e}_3 \frac{(\mathbf{e}_3, \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{v}}_1)}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1|}, \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= \dot{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{e}}_1. \end{aligned}$$

Тогда производная матрица:

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1^T \\ \dot{\mathbf{e}}_2^T \\ \dot{\mathbf{e}}_3^T \end{pmatrix}$$

Угловую скорость ОСК  $\boldsymbol{\omega}_e$  найдем с помощью уравнений Пуассона:

$\dot{\mathbf{A}} = -[\boldsymbol{\omega}_e^{\text{OF}}]_x \mathbf{A}$ , где введено обозначение для матрицы векторного произведения:

$$[\boldsymbol{\omega}_e^{\text{OF}}]_x = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда компоненты угловой скорости ОСК, записанная в проекции на оси ОСК:

$$\begin{aligned} \omega_1^{\text{OF}} &= \frac{(\dot{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_3) - (\mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_3)}{2}, \\ \omega_2^{\text{OF}} &= \frac{(\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_1) - (\mathbf{e}_3, \dot{\mathbf{e}}_1)}{2}, \\ \omega_3^{\text{OF}} &= \frac{(\dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2) - (\mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{e}}_2)}{2}. \end{aligned}$$

Угловая скорость ОСК в проекции на оси ИСК:  $\boldsymbol{\omega}_e^{\text{IF}} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}_e^{\text{OF}}$ . Тогда относительная скорость:

$$\mathbf{v}^{\text{OF}} = \mathbf{A} \left( \dot{\mathbf{r}}_2^{\text{IF}} - \dot{\mathbf{r}}_1^{\text{IF}} - [\boldsymbol{\omega}_e^{\text{IF}} \times (\mathbf{r}_2^{\text{IF}} - \mathbf{r}_1^{\text{IF}})] \right) \quad (2)$$

Рассмотрим невозмущенные уравнения движения, учитывающие лишь центральное гравитационное поле Земли:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\mu \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mu \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3}. \end{aligned} \quad (3)$$

После вычитания второго уравнения из системы (3) из первого, учитывая  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , получим:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\mu \frac{(\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\rho})}{|\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\rho}|^3} + \mu \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \quad (4)$$

С другой стороны, воспользовавшись формулой сложного движения:

$$\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{w}_{\text{отн}} + 2(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_{\text{отн}}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}) \quad (5)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_e$  — угловая скорость ОСК относительно ИСК в проекции на оси ИСК. Как было сказано ранее, предполагаем, что орбита круговая, тогда угловая скорость на оси ОСК  $\boldsymbol{\omega}_e^{\text{IF}} = [0, 0, \dot{\theta}_1]^T$ , радиус-вектор главного аппарата в проекциях на оси ОСК  $\mathbf{r}_1 = [r_1, 0, 0]^T$ . Подставим уравнение (5) в уравнение (4):

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x &= -\mu \frac{r_1 + x}{\left((r_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{r_1^2}, \\ \ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y &= -\mu \frac{y}{\left((r_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{\left((r_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учтем, что  $\dot{\theta} = n = \text{const}$ ,  $\ddot{\theta} = 0$ ,  $r_1 = a_1 = \text{const}$ , и получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= -\mu \frac{a_1 + x}{\left((a_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{a_1^2}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= -\mu \frac{y}{\left((a_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{\left((a_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Разложим правую часть (7) в ряд Тейлора, учитывая предположение малости относительных расстояний по отношению с большой полуосью и возьмем только первый порядок малости:

$$-\mu \frac{a_1 + x}{\left((a_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx -\mu \frac{a_1 + x}{a_1^3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(2 \frac{x}{a_1}\right)\right) \approx n^2(2x - a_1),$$

$$-\mu \frac{y}{\left((a_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx -\mu \frac{y}{a_1^3} \left(1 - 3 \frac{x}{a_1}\right) \approx -n^2 y,$$

$$-\mu \frac{z}{\left((a_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx -n^2 z.$$

Здесь  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a_1^3}}$  — среднее движение. Подставив разложение в уравнения (7),

получим (с точностью только до линейных слагаемых):

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x &= 0, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + n^2z &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (8) называются уравнениями Хилла-Клохесси-Уилтшира. Данные уравнения являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. Если задать начальные данные, таким образом поставив задачу Коши:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0. \end{aligned} \tag{9}$$

То аналитическое решение уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшира принимает вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2C_1 + C_2 \sin nt - C_3 \cos nt, \\ y(t) &= 2C_2 \cos nt + 2C_3 \sin nt + C_4 - 3C_1 nt, \\ z(t) &= C_5 \sin nt + C_6 \cos nt. \end{aligned} \tag{10}$$

где константы  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  можно выразить через начальные условия следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\dot{y}_0}{n} + 2x_0, \\
C_2 &= \frac{\dot{x}_0}{n} \cos nt_0 - \left( \frac{2\dot{y}_0}{n} + 3x_0 \right) \sin nt_0, \\
C_3 &= \frac{\dot{x}_0}{n} \sin nt_0 + \left( \frac{2\dot{y}_0}{n} + 3x_0 \right) \cos nt_0, \\
C_4 &= y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} + 3n \left( \frac{\dot{y}_0}{n} + 2x_0 \right) t_0, \\
C_5 &= z_0 \sin nt_0 + \frac{\dot{z}_0}{n} \cos nt_0, \\
C_6 &= z_0 \cos nt_0 - \frac{\dot{z}_0}{n} \sin nt_0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Решение (10) можно представить в другом виде:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2C_{\text{drift}} + C_{\text{inplane}} \sin \psi, \\
y(t) &= C_{\text{shift}} + 2C_{\text{inplane}} \cos \psi, \\
z(t) &= C_{\text{outplane}} \sin \xi.
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
C_{\text{drift}} &= C_1, \\
C_{\text{inplane}} &= \sqrt{C_2^2 + C_3^2}, \\
C_{\text{outplane}} &= \sqrt{C_5^2 + C_6^2}, \\
C_{\text{shift}} &= C_4 - 3C_1 nt, \\
\psi &= nt - \alpha, \cos \alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_2^2 + C_3^2}}, \sin \alpha = \frac{C_3}{\sqrt{C_2^2 + C_3^2}} \\
\xi &= nt - \beta, \cos \beta = \frac{C_5}{\sqrt{C_5^2 + C_6^2}}, \sin \beta = -\frac{C_6}{\sqrt{C_5^2 + C_6^2}}
\end{aligned}$$

Стоит отметить, что константа  $C_{\text{drift}}$  отвечает за дрейф спутников,  $C_{\text{inplane}}$ ,  $C_{\text{outplane}}$  отвечают за амплитуды колебаний аппарата в плоскости орбиты и вне плоскости орбиты соответственно. Переменная  $C_{\text{shift}}$  отвечает за сдвиг спутников вдоль направления скорости движения. Две фазы  $\psi$ ,  $\xi$  отвечают за фазу относительно движения спутников в плоскости орбиты и вне плоскости орбиты.

Первые два уравнения (12) отвечают за движение в плоскости орбиты, а последнее уравнение — за движения вне плоскости. Возможны как периодические траектории относительного движения, так и неперiodические:

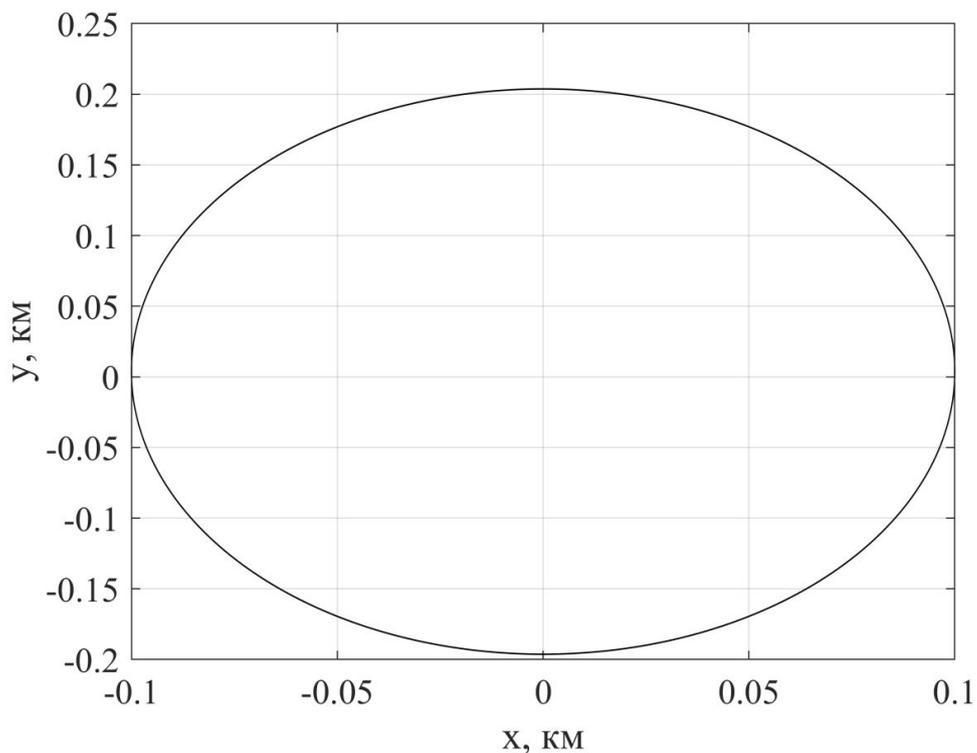


Рисунок 3 – Замкнутое движение в плоскости орбиты

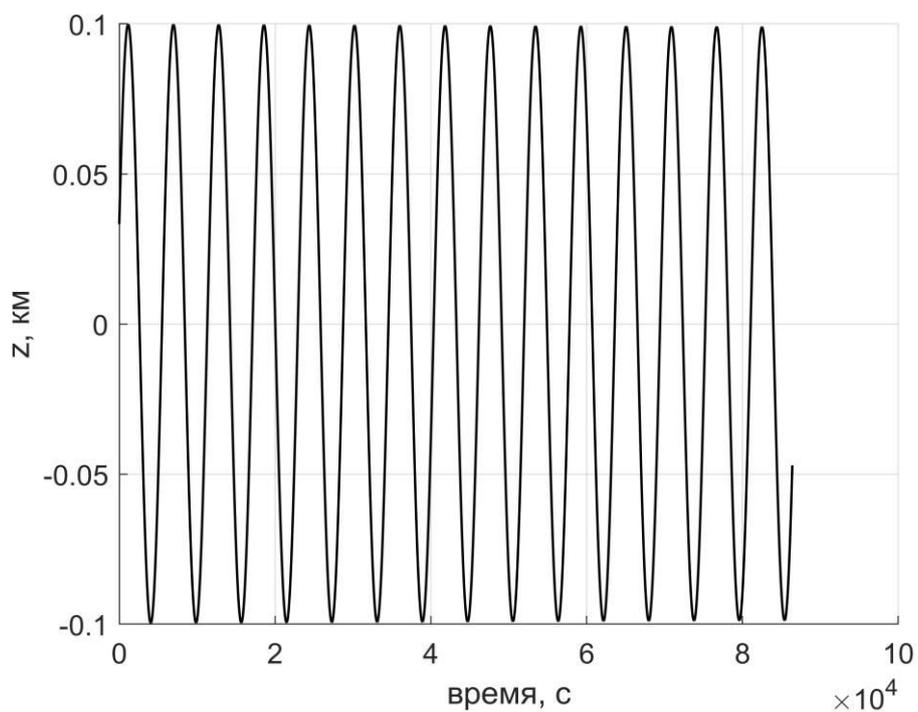


Рисунок 4 – Движение вне плоскости орбиты

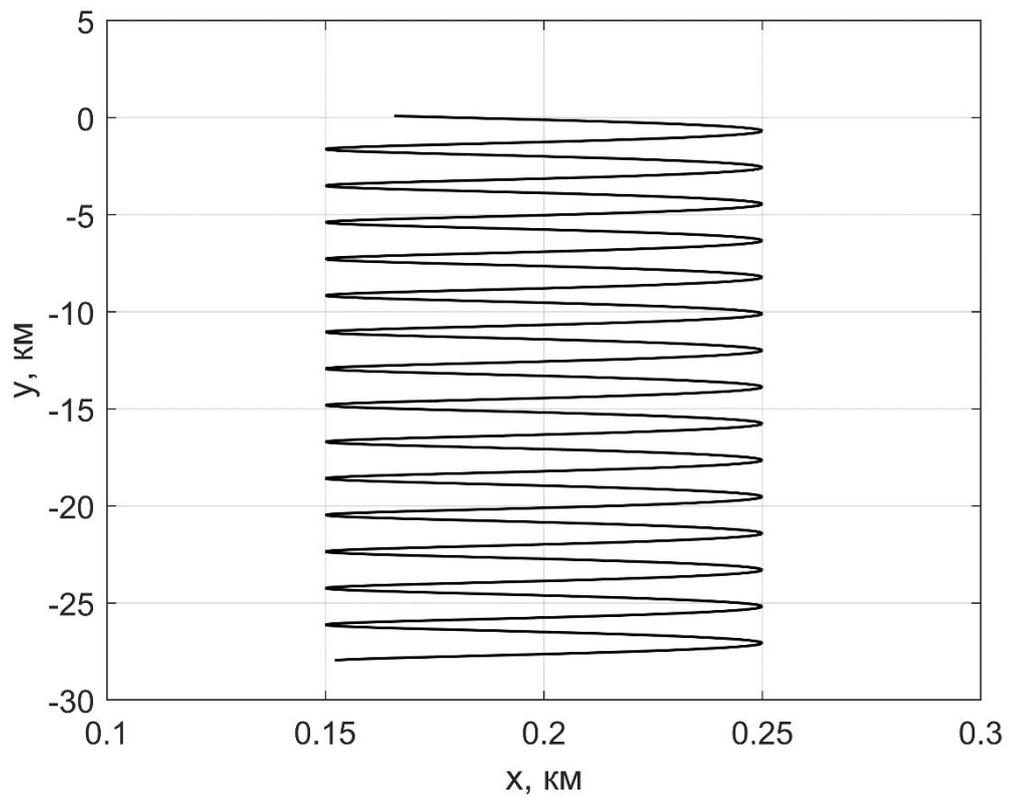


Рисунок 5 – Незамкнутое движение в плоскости орбиты

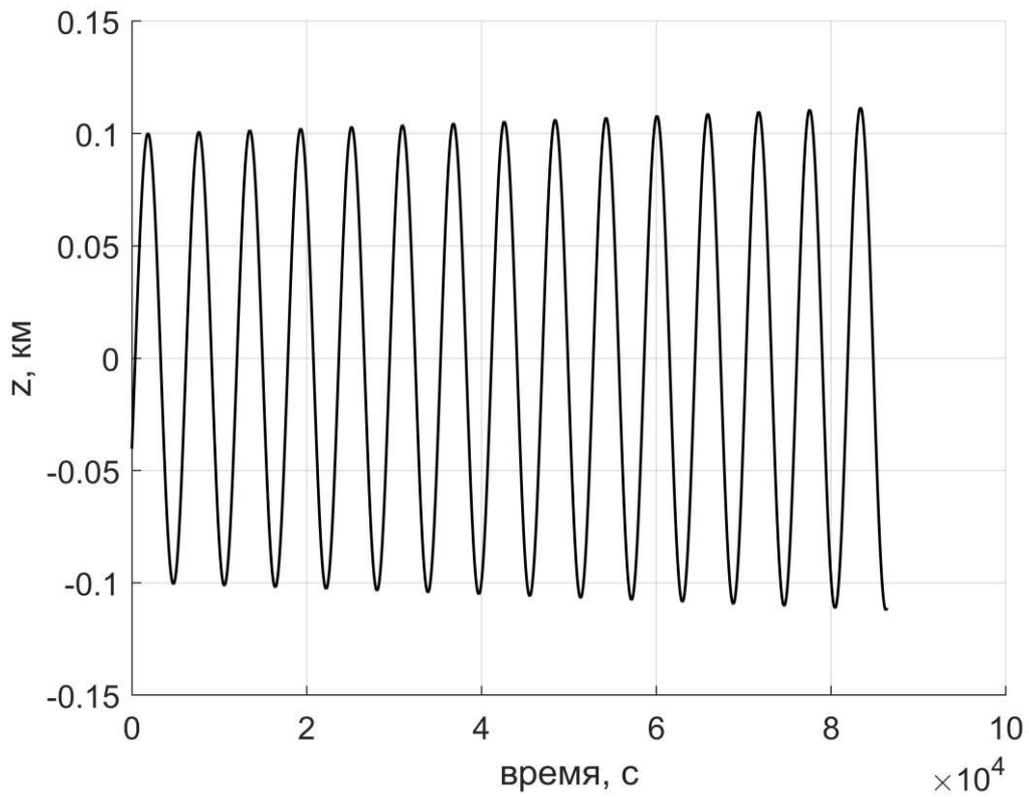


Рисунок 6 – Движение вне плоскости с учетом  $J_2$

Отметим, что движение вне плоскости орбиты представляет собой колебания (рис. 4 и рис. 6). В случае учета возмущения  $J_2$  амплитуда колебаний со временем меняется (рис. 6). Движение в плоскости в общем случае является незамкнутым (рис. 5), однако в случае нулевого дрейфа представляет собой эллипс с соотношением сторон 1:2 (рис. 3)

### 1.3 Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира в криволинейных координатах

Уравнения ХКУ в декартовых координатах корректно описывают реальное относительное движение аппаратов лишь на небольших интервалах времени. При выводе данной модели происходит линейризация, в процессе которой отбрасываются нелинейные члены уравнений.

Заметим, что естественное движение аппаратов происходит по дугам, поэтому описание в криволинейных координатах кажется более естественным и может обеспечить лучшую точность. Поэтому рассмотрим модификацию уравнений ХКУ и введем криволинейные координаты.

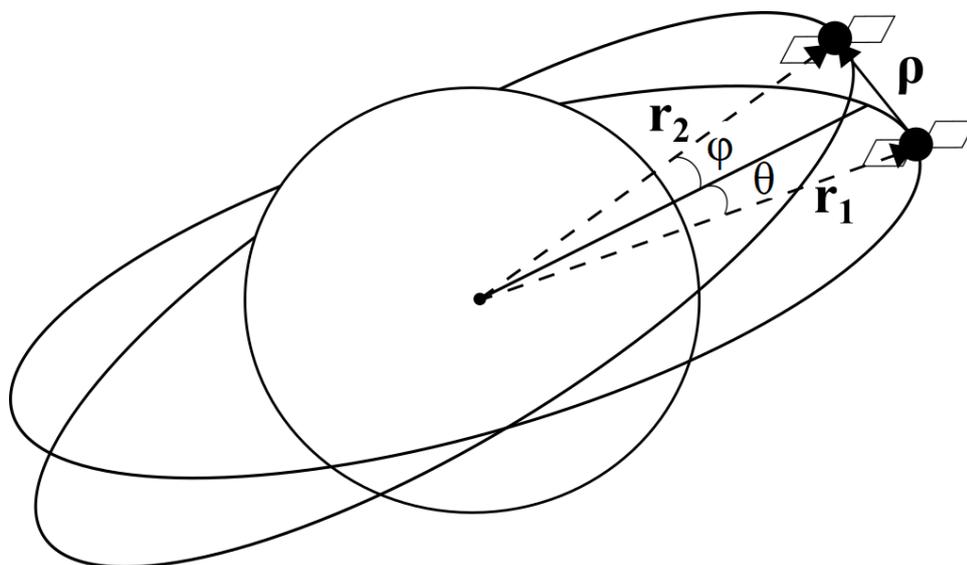


Рисунок 7 — Криволинейные координаты

Вместо декартовых относительных координат  $x, y, z$  будем использовать разницу норм радиус-векторов  $\rho = |\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_1|$  в качестве первой компоненты криволинейных относительных координат, а также сферические углы  $\theta, \varphi$  — угол в плоскости орбиты между радиус-вектором главного аппарата и

проекцией радиус-вектора ведомого аппарата на плоскость орбиты первого аппарата и угол вне плоскости орбиты между радиус-вектором ведущего аппарата и его проекцией соответственно.

Для дальнейшей работы с криволинейными координатами необходимо получить выражения для производных.

$$\rho = |\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_1|,$$

$$\dot{\rho} = \frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{r}_2|} - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)}{|\mathbf{r}_1|}.$$

Радиус-вектор и скорость ведомого аппарата можно выразить через криволинейные относительные координаты:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= (r_1 + \rho)(\mathbf{e}_1 \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_3 \sin \theta) \\ \mathbf{v}_2 &= (\dot{r}_1 + \dot{\rho})(\mathbf{e}_1 \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_3 \sin \theta) + \\ &+ (r_1 + \rho)[(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1) \cos \theta \cos \varphi + \\ &+ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2) \cos \theta \sin \varphi \\ &+ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) \sin \theta] + \\ &+ (r_1 + \rho)[\mathbf{e}_1(-\sin \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \cos \theta \sin \varphi \dot{\varphi}) + \\ &+ \mathbf{e}_2(-\sin \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \cos \theta \cos \varphi \dot{\varphi}) + \\ &+ \mathbf{e}_3 \cos \theta \dot{\theta}] \end{aligned} \quad (13)$$

Из уравнений (13) можно получить следующие выражения:

$$\theta = \arcsin \left( \frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{r}_2|} \right),$$

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{r}_2| \cos \theta} \right),$$

$$\dot{\theta} = \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3)}{r_2 \cos \theta} - \frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)}{r_2} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r_2} + (\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\omega}) \cos \varphi - (\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\omega}) \sin \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2)}{r_2 \cos \theta \cos \varphi} - \frac{\left( \frac{(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}_1)}{r_1} + \dot{\rho} \right)}{r_2} \operatorname{tg} \varphi - (\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\omega}) + \frac{(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\omega}) \operatorname{tg} \theta}{\cos \varphi} + \dot{\theta} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta.$$

Таким образом производится перевод в криволинейные координаты из декартовых. Переписывая уравнения движений в ИСК в криволинейные

координаты и линеаризуя их, предполагая, что орбита главного аппарата круговая, получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - 2nr_1\dot{\theta} - 3n^2\rho &= 0, \\ r_1\ddot{\theta} + 2n\dot{\rho} &= 0, \\ r_1\ddot{\phi} + n^2r_1\phi &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Уравнения (14) являются уравнениями ХКУ в криволинейных координатах. Стоит отметить, что уравнения в криволинейных координатах имеют аналогичный вид, как и уравнения ХКУ в декартовых координатах с точностью до замены координат  $(x, y, z) \rightarrow (\rho, r_1\theta, r_1\phi)$ .

Уравнения (14) также являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, поэтому аналогично уравнениям (8) можно выписать простое аналитическое решение:

$$\begin{aligned} \rho &= 2C'_{drift} + C'_{inplane} \sin \psi' \\ \dot{\rho} &= C'_{inplane} n \cos \psi' \\ r_1\theta &= C'_{shift} + 2C'_{inplane} \cos \psi' \\ r_1\dot{\theta} &= -2C'_{inplane} n \sin \psi' - 3C'_{drift} n \\ r_1\phi &= C'_{ouplane} \sin \xi' \\ r_1\dot{\phi} &= C'_{ouplane} n \cos \xi' \end{aligned}$$

## 1.4 Уравнения Швайгхарта-Седвика

Уравнения ХКУ в декартовых и криволинейных координатах учитывают только влияние сферической Земли, что вызывает ошибку при использовании данных уравнений. Для учета несферичности используют модель Швайгхарта-Седвика. Приведем главные моменты вывода уравнений ШС. Полный вывод можно найти в статье [9].

Возьмем полные уравнения движения с учетом влияние второй гармоники геопотенциала Земли J<sub>2</sub>:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_2(\mathbf{r}), \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \\ \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) &= -\frac{3}{2} \left( \frac{J_2 \mu R_e^2}{r^4} \right) \begin{bmatrix} (1 - 3 \sin^2 u \sin^2 i) \mathbf{e}_1 + \\ +(2 \sin^2 i \sin u \cos u) \mathbf{e}_2 + (2 \sin i \cos i \sin u) \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{15}$$

Здесь  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — оси орбитальной СК,  $u$  — аргумент широты,  $i$  — наклонение орбиты.

Введем опорную орбиту. Будем считать, что опорная орбита круговая и находится под действием только центрального поля Земли.

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ref} = \mathbf{g}(\mathbf{r}_{ref})$$

Линеаризуем уравнение (15) по отношению к опорной орбиты:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}_{ref}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{r}_{ref}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref}) + \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref}) \cdot \mathbf{x}\tag{16}$$

Где относительное движение аппарата по отношению к опорной орбите, обозначенное как  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{ref}$$

Так как орбитальная система координат вращается:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}_{ref} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})\tag{17}$$

Подставляя уравнение (16) в уравнение (17), получим:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_{ref}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{r}_{ref}) \cdot \mathbf{x} \\ + \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref}) + \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref}) \cdot \mathbf{x} - \ddot{\mathbf{r}}_{ref}\end{aligned}\tag{18}$$

Данные уравнения являются дифференциальными уравнениями с непостоянными коэффициентами. Это связано с тем, что  $\nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref})$  не постоянно за исключением экваториальных орбит. Проведем усреднение по аргументу широты для  $\nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref})$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) d\theta = \frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} 4s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -3s \end{bmatrix},$$

$$s = \frac{3J_2 R_e^2}{8r^2} (1 + 3\cos 2i)$$

Тогда уравнения (18) примут вид:

$$\ddot{\mathbf{x}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}_{ref}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{r}_{ref}) + \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref}) d\theta \cdot \mathbf{x} - \ddot{\mathbf{r}}_{ref}$$

При взятии среднего градиента может потеряться часть информации о реальном движении. Для того, чтобы исправить это сделаем необходимые коррекции.

Во-первых, для того, чтобы линеаризация сработала, спутник, находящийся под влиянием потенциала  $J_2$ , должен находиться в непосредственной близости от опорной орбиты. Это накладывает требование, чтобы как периоды, так и средние радиусы двух орбит были одинаковыми. Средний радиус опорной орбиты так, как она сейчас введена, на самом деле соответствует радиусу спутника, но имеет другой период. Для того, чтобы поддерживать спутник в непосредственной близости друг от друга, искусственно скорректируем период опорной орбиты:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ref} = \mathbf{g}(\mathbf{r}_{ref}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref}) d\theta$$

Теперь периоды совпадают, однако, спутники все еще расходятся из-за различия в долготе восходящего узла. Исправим это:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ref} = \mathbf{g}(\mathbf{r}_{ref}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref}) d\theta + [J_2(r_{ref}) \cdot \mathbf{e}_3] \mathbf{e}_3$$

Последнюю коррекцию, которую необходимо сделать, это движение вне плоскости. Хотя уравнение обеспечивает достаточно точную модель движения вне плоскости, оно имеет ошибку в периоде и не отражает вековое движение.

Итого окончательные уравнения, называемые уравнениями Швайгхарта-Седвика, имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2nc\dot{y} - (5c^2 - 2)n^2x &= 0, \\ \ddot{y} + 2nc\dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + q^2z &= 2lq \cos(qt + \beta). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь константы  $n, c, l, q, \beta$  вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} s &= \frac{3J_2R_e^2}{8r_{ref}^2} \left(1 + 3\cos(2i_{ref})\right), \quad c = \sqrt{1 + s}, \\ n &= \sqrt{\mu / r_{ref}^3}, \quad k = nc + \frac{3nJ_2R_e^2}{2r_{ref}^2} \cos^2 i_{ref}, \\ i_{sat1} &= \dot{z}_0 / kr_{ref} + i_{sat2}, \quad \Delta\Omega_0 = z_0 / (r_{ref} \sin i_{ref}), \\ \gamma_0 &= \text{ctg}^{-1} \left[ \frac{\text{ctg} i_{sat2} i_{sat1} - \cos i_{sat1} \cos \Delta\Omega_0}{\sin \Delta\Omega_0} \right], \\ \Phi_0 &= \cos^{-1} \left[ \cos i_{sat1} \cos i_{sat2} + \sin i_{sat1} \sin i_{sat2} \cos \Delta\Omega_0 \right], \\ \dot{\Omega}_{sat1} &= -\frac{3nJ_2R_e^2}{2r_{ref}^2} \cos i_{sat1}, \quad \dot{\Omega}_{sat2} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{2r_{ref}^2} \cos i_{sat2}, \\ q &= nc - \left( \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 \text{ctg} \Delta\Omega_0 - \sin^2 \gamma_0 \cos i_{sat1} \right) \left( \dot{\Omega}_{sat1} - \dot{\Omega}_{sat2} \right) \\ &\quad - \dot{\Omega}_{sat1} \cos i_{sat1}, \\ l &= -r_{ref} \frac{\sin i_{sat1} \sin i_{sat2} \sin \Delta\Omega_0}{\sin \Phi_0} \left( \dot{\Omega}_{sat1} - \dot{\Omega}_{sat2} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} m \sin \beta &= z_0, \\ l \sin \beta + qm \cos \beta &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $R_e$  — средний радиус Земли,  $r_{ref}, i_{ref}$  — параметры опорной орбиты,  $i_{sat1}, i_{sat2}$  — наклоны ведущего и ведомого аппаратов соответственно,  $x_0, y_0, z_0, \dot{z}_0$  — начальные значения декартовых относительных орбит. Последние два уравнения (21) можно решить любым методом решения нелинейных уравнений. В нынешней работе использовался метод Ньютона [14].

Стоит отметить, что в уравнениях (19) константа  $c$  близка к единице, константа  $q$  близка к значению среднего движения, поэтому уравнения ШС близки к уравнениям ХКУ.

## 1.5 Уравнения Швайгхарта-Седвика в криволинейных координатах

Как было показано для модели ХКУ возможна модификация с использованием криволинейных координат. Помимо этого, уравнения движения для криволинейных и для декартовых координат совпали в линейном. По этой причине возникла идея сделать формальную замену для уравнения Швайгхарта-Седвика. Возьмем уравнения ШС в декартовых координатах (19), сделаем замену следующего вида:

$$\begin{aligned}x &= \rho, \\y &= r_1\theta, \\z &= r_1\varphi, \\ \dot{x} &= \dot{\rho}, \\ \dot{y} &= r_1\dot{\theta}, \\ \dot{z} &= r_1\dot{\varphi}.\end{aligned}$$

И получим уравнения

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} - 2ncr_1\dot{\theta} - (5c^2 - 2)n^2\rho &= 0, \\ r_1\ddot{\theta} + 2ncr_1\dot{\rho} &= 0, \\ r_1\ddot{\varphi} + q^2r_1\varphi &= 2lq\cos(qt + \beta).\end{aligned}\tag{22}$$

Добавим эти уравнения в моделирование и будем рассматривать наравне с вышеописанными моделями.

## 1.6 Уравнения Шонера-Хемпеля

Все приведенные выше модели выведены для круговых орбит и не учитывают наличие ненулевого эксцентриситета. Другую модель, которую будем рассматривать в данной части работы, это модель Лоудена-Шонера-Хемпеля.

Пусть теперь орбита главного аппарата является эллиптической с эксцентриситетом  $e_1$  и фокальным параметром  $p_1$ . Расстояние до ведущего аппарата в точке орбиты с истинной аномалией  $\nu_1$  определяется выражением

$$r_1 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos \nu_1}$$

Введем безразмерные относительные координаты следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x}{r_1}, \bar{y} = \frac{y}{r_1}, \bar{z} = \frac{z}{r_1}.$$

И также вместо производной по времени будем рассматривать производную по истинной аномалии, используя следующие выражения:

$$\dot{\nu} = \frac{c}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos \nu)^2,$$

$$\dot{x} = x' \cdot \dot{\nu}$$

Тогда выражение для производных:

$$\bar{x}' = \left( \frac{x}{r_1} \right)' = \frac{\left( \frac{\dot{x}}{r_1} - \frac{x \dot{r}_1}{r_1^2} \right)}{\dot{\nu}_1} = \frac{\left( \frac{\dot{x}(1 + e_1 \cos \nu_1)}{p_1} - x \frac{e_1 \sin \nu_1 \dot{\nu}_1}{p_1} \right)}{\sqrt{\frac{\mu}{p_1^3}} (1 + e_1 \cos \nu_1)^2} = \dot{x} \sqrt{\frac{p_1}{\mu}} \frac{1}{(1 + e_1 \cos \nu_1)} - \frac{e_1 \sin \nu_1}{p_1} x,$$

$$\bar{x}'' = \ddot{x} \frac{p_1^2}{\mu (1 + e_1 \cos \nu_1)^3} - x \frac{e_1}{p_1} \cos \nu_1.$$

Аналогичными получаются выражения для других координат.

Подставив выражения для производных в нелинейные уравнения (6) и сохранив в правых частях лишь линейные слагаемые, получим уравнения Лоудена-Шонера-Хемпеля:

$$\begin{aligned} \bar{x}'' - 2\bar{y}' - 3 \frac{\bar{x}}{1 + e_1 \cos \nu_1} &= 0, \\ \bar{y}'' + 2\bar{x}' &= 0, \\ \bar{z}'' + \bar{z} &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Данные уравнения являются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами

## 2 Численное моделирование

После описания моделей проведем численное моделирование и оценим точность моделей для проведения дальнейшего сравнения

## 2.1 Начальные данные

Согласно постановке задачи, необходимо промоделировать движение на нескольких размерах относительной орбиты. При задании начальных данных через декартовы координаты в ИСК информация о размере и форме относительной орбиты отсутствует, поэтому будем задавать две амплитуды из хилловских констант в качестве размера относительной орбиты.

Опишем способ задания начальных данных. Зададим параметры орбиты главного аппарата: большую полуось, наклонение, эксцентриситет, аргумент широты, аргумент перицентра и долготу восходящего узла. Размер большой полуоси фиксирован и равен 7000км, наклонение будем перебирать от 10 градусов до 90 градусов. Эксцентриситет орбиты главного аппарата берется равным 0.01, аргумент широты в начальный момент равен нулю, чтобы спутник стартовал с экватора — это важно для уравнений Швайгхарта-Седвика. После задания характеристик орбиты главного аппарата получаем начальный радиус-вектор и скорость главного аппарата в ИСК.

Оценка точности рассматриваемых моделей проводится при помощи метода Монте-Карло. Для задания положения и скорости ведомого аппарата фиксируется размер относительной орбиты  $b$ , для которого будет проводиться моделирование. Амплитуды хилловских констант приравниваются к размеру относительной орбиты  $b$ . Переменные  $\psi$  и  $\xi$ , отвечающие за фазы, выбираются случайно из равномерного распределения на отрезке  $[0, 2\pi]$ , сдвиг — из равномерного распределения на отрезке  $[-b, b]$ , дрейф же будет предполагаться нулевым — в задачах управляемого движения предполагается, что аппараты не разлетаются друг от друга. Для имитации ошибки выведения к начальным радиус-векторам и скорости добавляются случайные величины. Таким образом, мы получаем набор начальных данных для дальнейшего моделирования. Отметим, что из-за зашумления начальных данных дрейф может оказаться не равным нулю, однако останется достаточным малым, чтобы за интервал моделирования спутники не успели сильно разлететься.

## 2.2 Методика получения результатов

Интегрирование уравнений в рамках каждой из модели проводится с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка с постоянным шагом в 5 секунд [15]. Интервал моделирования ограничивается сутками.

Точность оценивается несколькими способами. Один из способов — осреднение ошибки по расстоянию, либо по хилловским переменным на последнем витке. Другой способ заключается в оценке времени, когда решение приближенных уравнений в рамках каждой модели начинает отличаться от реального движения на заданную величину. В качестве такой величины выбирается некоторый процент от начального размера относительной орбиты: 10%, 25% и 50%. По полученным данным проведем сравнение моделей.

## 2.3 Результаты

Для моделирования будем рассматривать размеры относительных орбит от 50 метров до 10 километров. Для наглядности разделим все результаты на малые размеры (до километра) и большие размеры относительных орбит.

### 2.3.1 Модель ШС

При выводе уравнений ШС (19) использовалась опорная орбита. Главным условием было то, чтобы радиус опорной орбиты был постоянным. В константах для уравнений ШС (20) фигурируют радиус и наклонения опорных орбит. В связи с этим хотелось бы ответить на вопрос, влияет ли выбор опорной орбиты на результаты модели Швайгхарта-Седвика.

Для ответа на поставленный вопрос проведем исследование. Зафиксируем наклонение опорной орбиты, равное наклонению орбиты главного аппарата, а радиус опорной орбиты переберем от 6900км до 7100 км. Такие радиусы выбраны, так как большая полуось орбиты главного аппарата равна 7000 км, а опорная орбита должна иметь близкий радиус. Посчитаем ошибку, полученную от модели ШС. Результаты представлены на рис. 8 (логарифмический масштаб):

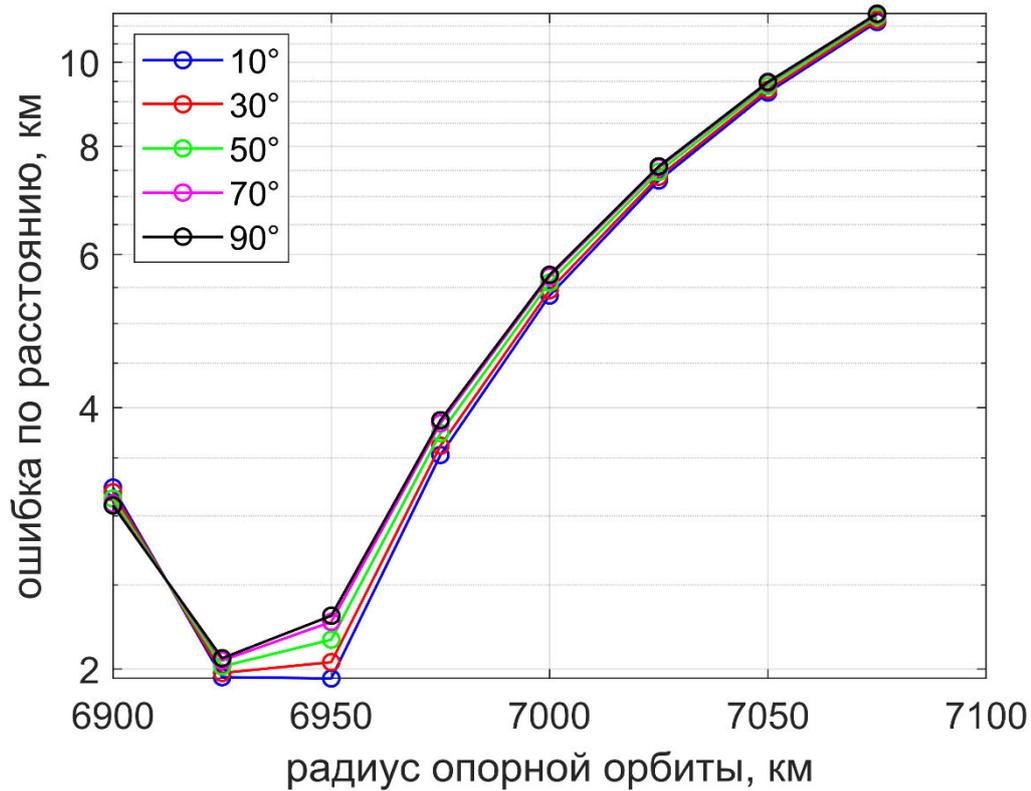


Рисунок 8 — Зависимость ошибки по расстоянию от наклонению главного аппарата для различных радиусов опорной орбиты

Также посмотрим на влияние наклонения опорной орбиты. Зафиксируем радиус опорной орбиты, а наклонение опорной орбиты будем перебирать. Получим следующие результаты (рис. 9):

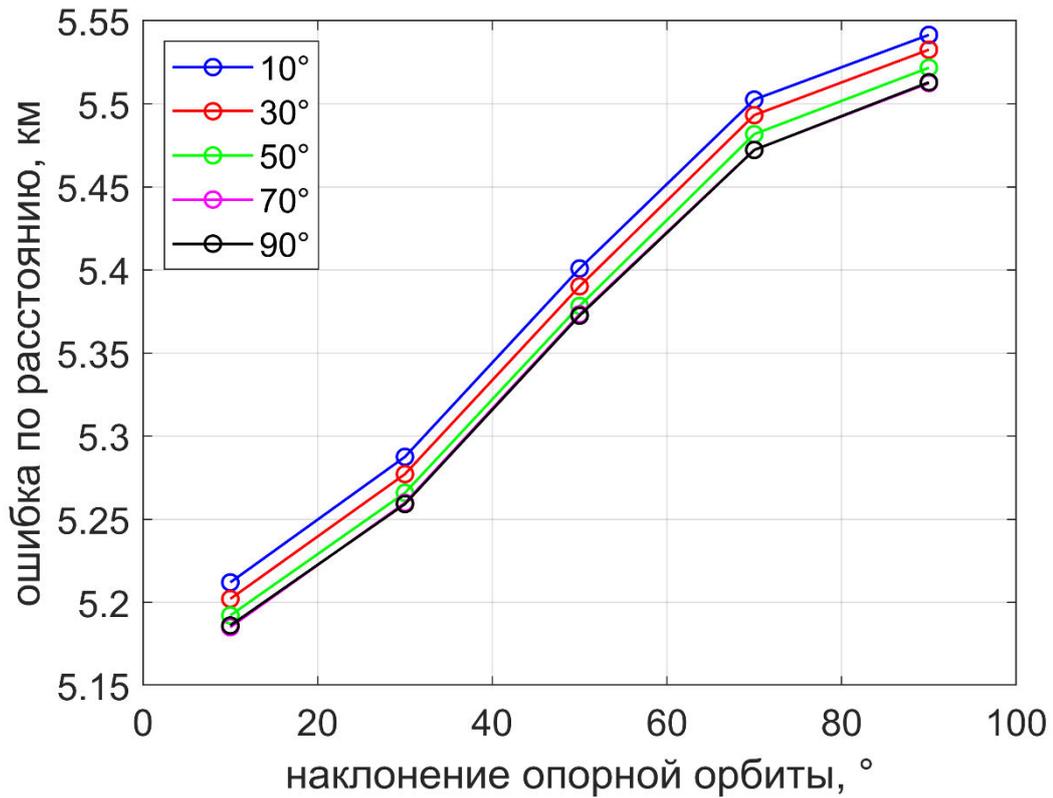


Рисунок 9 — Зависимость ошибки по расстоянию от наклона главного аппарата для различных наклонений опорной орбиты

Из графиков на рис.8 и рис.8 видно, что и наклонение, и радиус опорной орбиты имеют влияние на точность модели Швайгхарта-Седвика. Таким образом, возникает задача нахождения такой опорной орбиты, чтобы уменьшить ошибку.

Самым логичными вариантами оказались следующими:

- 1) В качестве опорной орбиты возьмем орбиту главного аппарата;
- 2) В качестве опорной орбиты возьмем орбиту ведомого аппарата;
- 3) В качестве опорной орбиты возьмем среднее между орбитами главного и ведомого аппаратами;
- 4) Наклонение опорной орбиты бралось из статьи ШС

$$i = i_{ref} - \left( \frac{3\sqrt{\mu}J_2R_e^2}{2kr^{7/2}} \right) \cos i_{ref} \sin i_{ref}$$

- 5) Возьмем осредненные элементы орбиты главного аппарата в качестве опорной орбиты

- 6) Возьмем осредненные элементы орбиты ведомого аппарата в качестве опорной орбиты
- 7) В качестве опорной орбиты возьмем осредненные элементы средних параметров орбит аппаратов

Сравним точность моделей для предложенных вариантов (рис. 10)

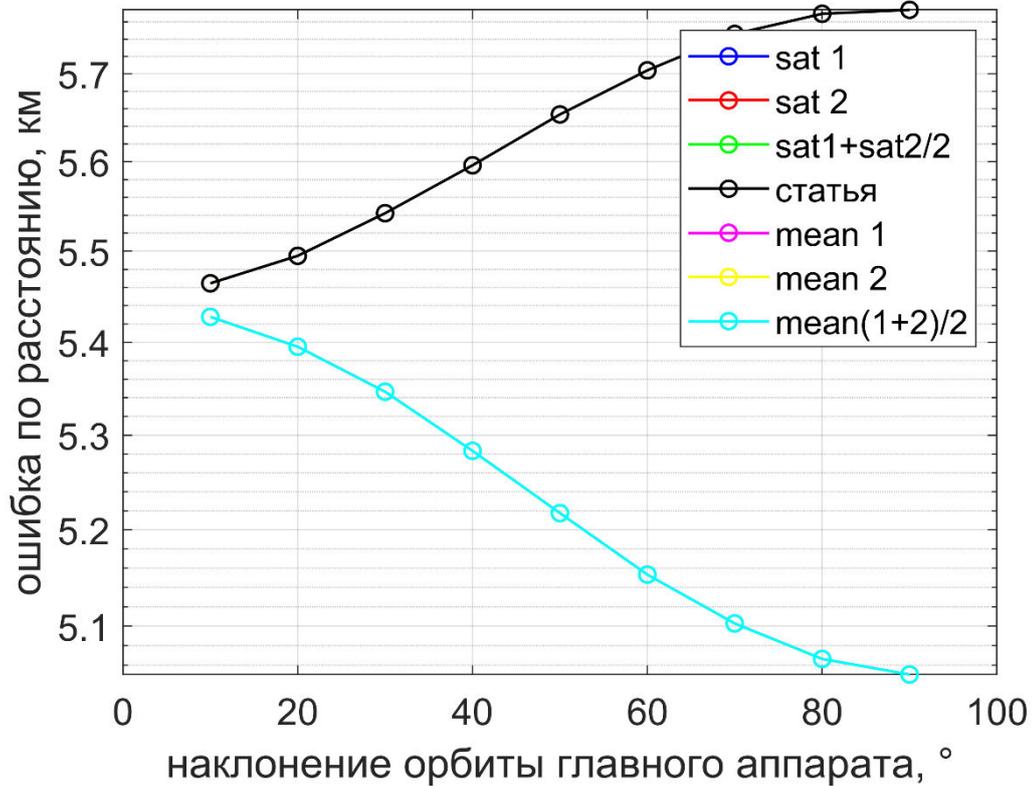


Рисунок 10 — Зависимость ошибки по расстоянию от наклона главного аппарата для различных опорных орбит

Отметим, что орбита главного аппарата, ведомого аппарата, среднее между ними выбранные в качестве опорных орбит, а также орбита, где наклонение считает по формуле из статьи, близки по значениям, имея отличие в 4 знаке после запятой (рис. 11)

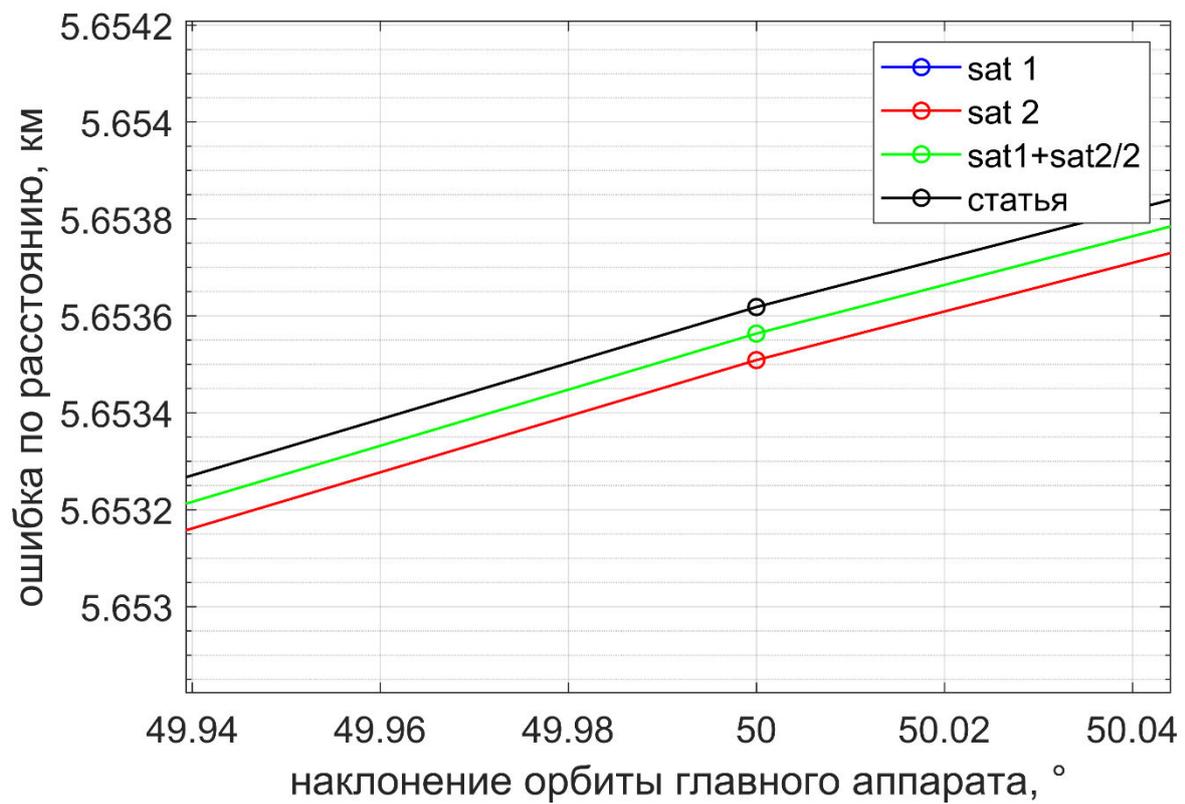


Рисунок 11 — Опорные орбиты, высчитанные по оскулирующим элементам

Также опорные орбиты, равные осредненным значениям (варианты 5, 6, 7), отличаются лишь в 4 знаке после запятой (рис. 12).

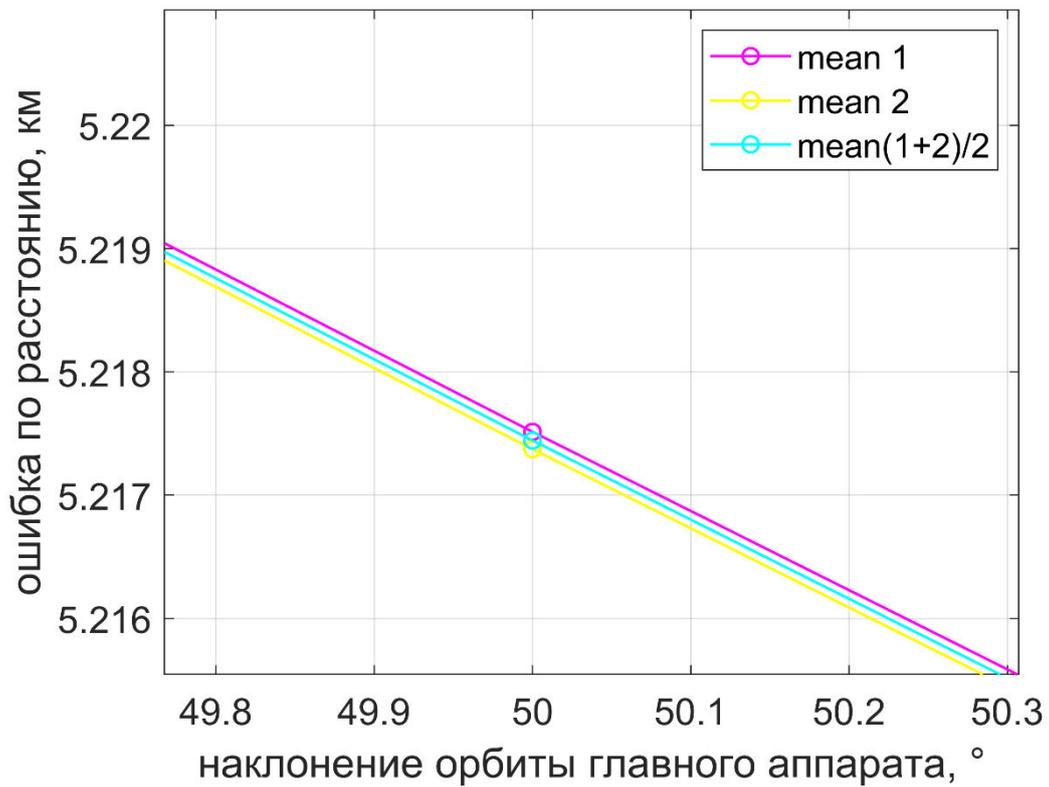


Рисунок 12 — Различие осредненных опорных орбит

При сравнении оскулирующих элементов орбиты и осредненных лучшую точность дает использование осредненных элементов орбиты, поэтому целесообразно их использование для описания уравнений Швайгхарта-Седвика.

### 2.3.2 Модель ШХ

Про моделируем движение в рамках модели Шонера-Хемпеля и сравним с моделью Хилла-Клохесси-Уилтшира. Исследуем на сколько наличие ненулевой эксцентриситет влияет на результат (рис. 13)

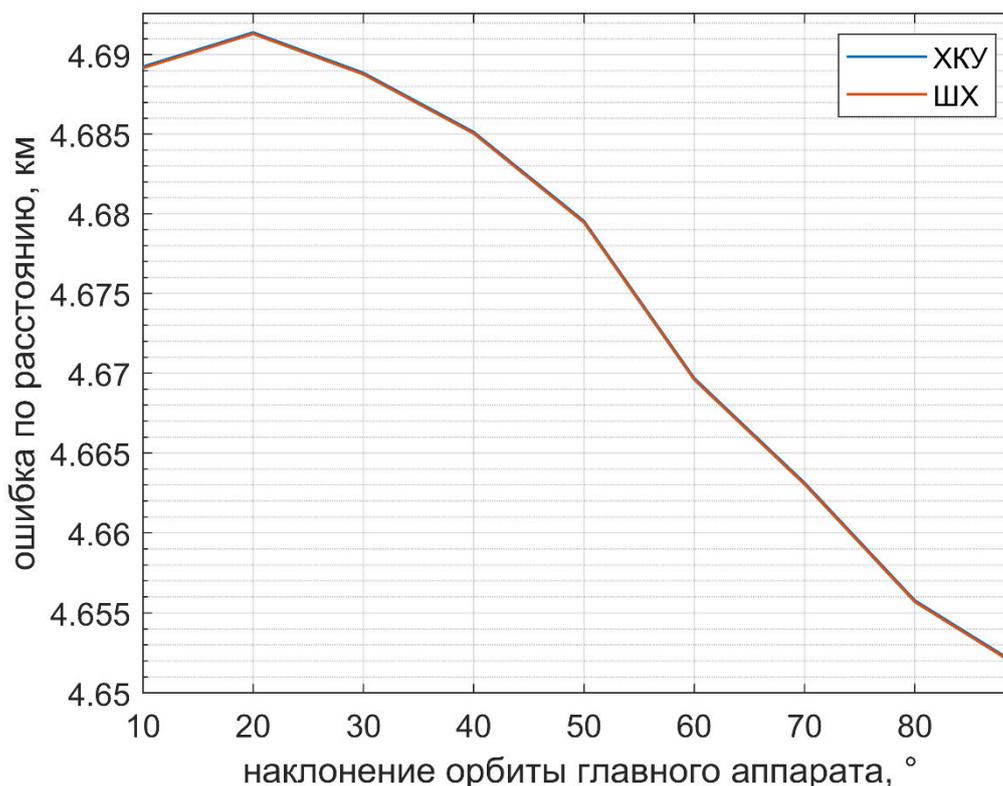


Рисунок 13 — Сравнение модели ХКУ и ШХ в декартовых координатах

Из графика видно, что различие между уравнениями ШХ и ХКУ минимальное. Это связано с тем, что в работе взят малый эксцентриситет, равный 0.01, поэтому в дальнейшем сравнении моделей уравнения ШХ не будут учитываться.

### 2.3.3 Сравнение

Как было описано выше, оценку точности мы будем проводить двумя способами:

- 1) Для определенного набора данных рассчитывается средняя ошибка каждой модели по расстоянию за последний виток
- 2) Посчитаем максимум ошибки по расстоянию за последний виток
- 3) Рассчитывается средняя ошибка по хилловским переменным за последний виток
- 4) Фиксируется время, когда ошибка модели начинает отличаться от реального движения на заданную величину.

Оценим точность по первому способу. Для наглядности и компактности проведем сравнение только для наклона главного аппарата в  $30^\circ$  и  $90^\circ$  градусов.

На рисунках 14 и 15 представлены результаты для наклона в  $30^\circ$ . На рисунке 14 отображены только малые размеры относительных орбит до километра. На рисунке 15 отобразим большие размеры относительных орбит.

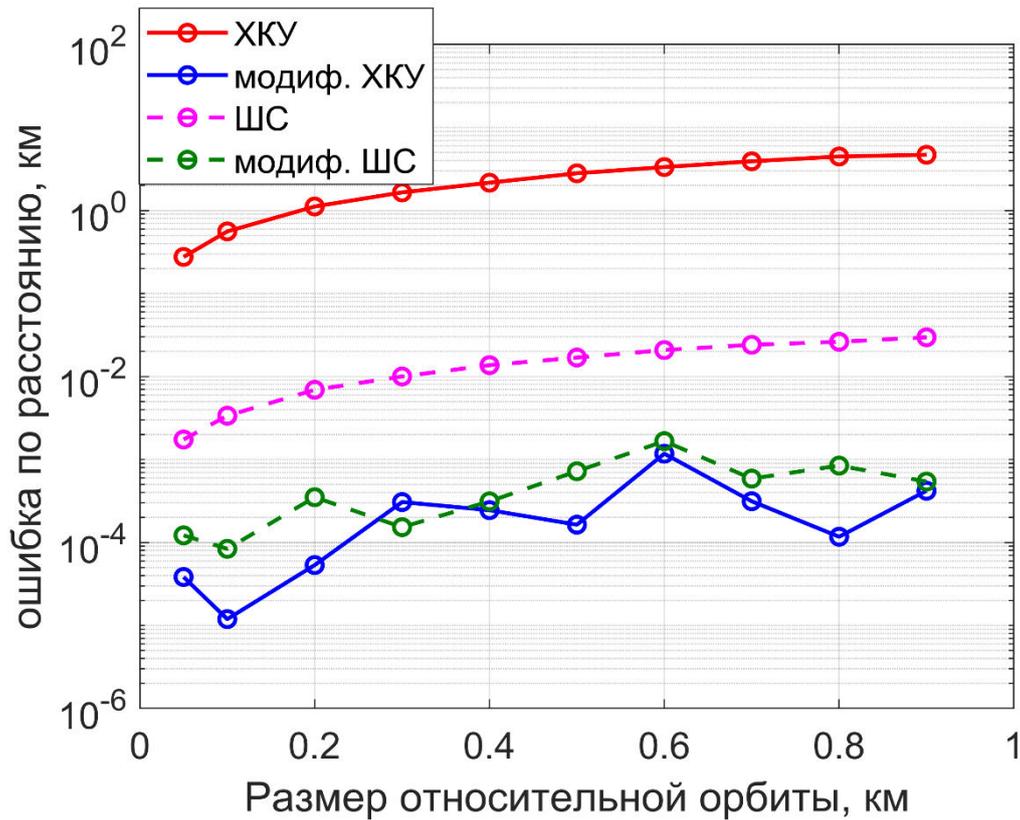


Рисунок 14 — Ошибка по расстоянию для малых относительных орбит

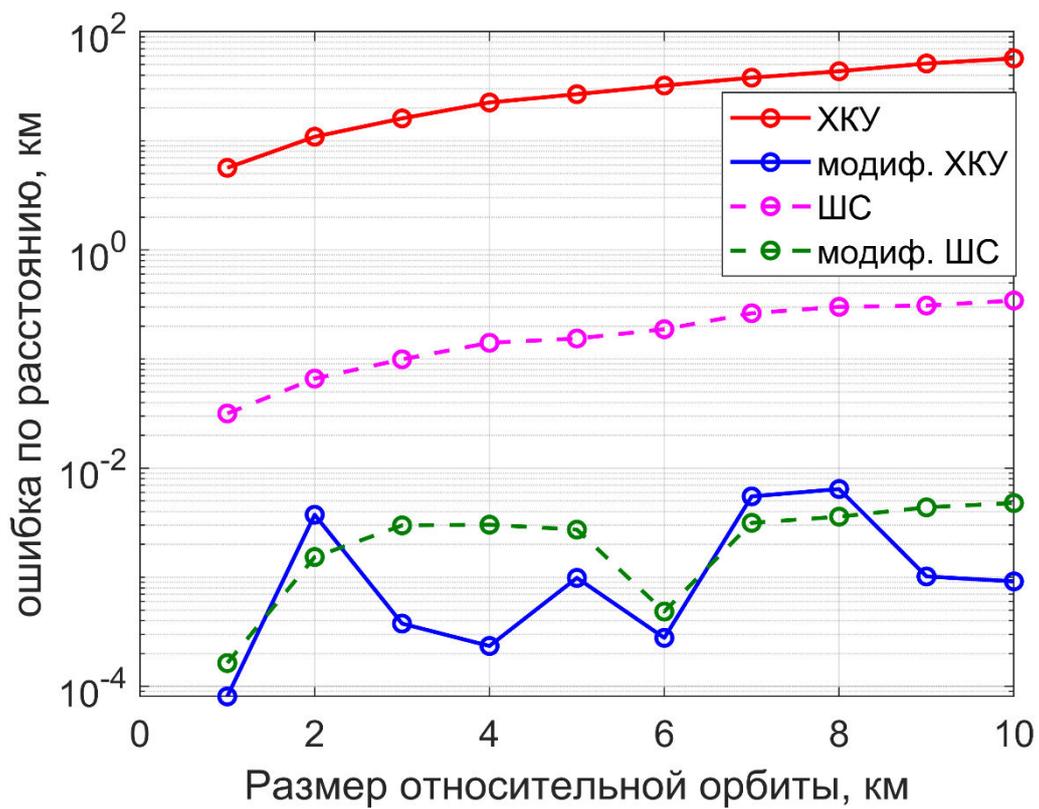


Рисунок 15 — Ошибка по расстоянию для больших размеров относительных орбит

На рисунке 16 и 17 представлены результаты для наклонения в 90° для малых и больших размеров относительных орбит соответственно.

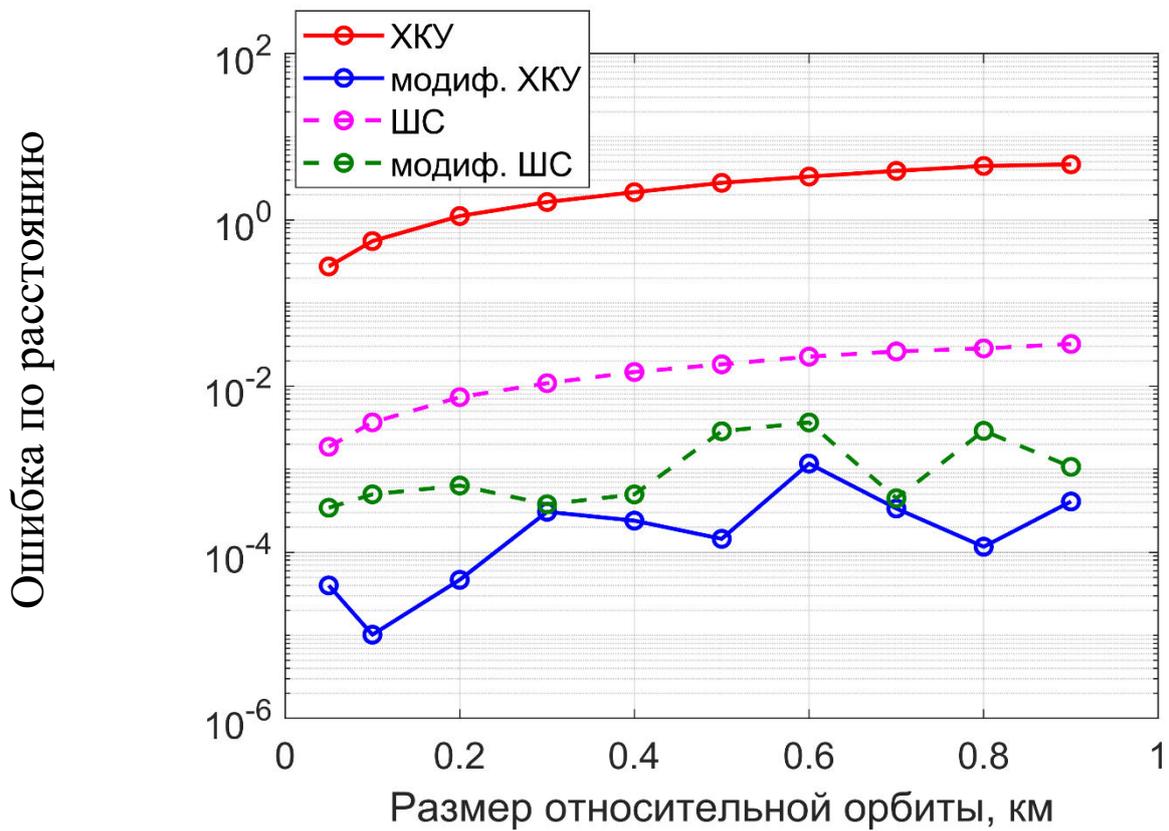


Рисунок 16 — Ошибка по расстоянию для малых относительных орбит для наклонения в  $90^\circ$

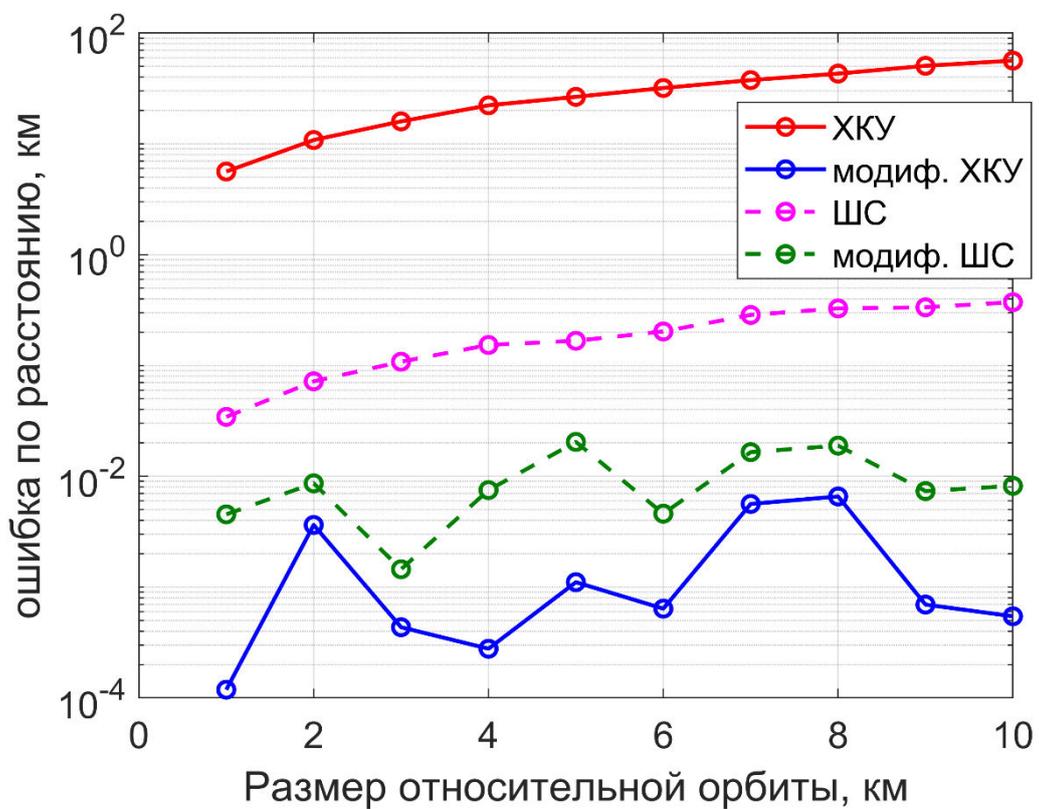


Рисунок 17 — Ошибка по расстоянию для больших размеров относительных орбит для наклонения в  $90^\circ$  градусов.

Отметим, что при оценке точности по расстоянию криволинейные координаты показывают меньшую ошибку по сравнению с моделями в декартовых координатах. При этом точность моделей ХКУ и ШС в криволинейных координатах мало отличается, поэтому возможно использование любой из модели в криволинейных координатах.

Перейдем к оценке точности вторым способом. Аналогично приведем результаты для наклона в 30 и 90 градусов (рис. 18-19 и рис. 20-21).

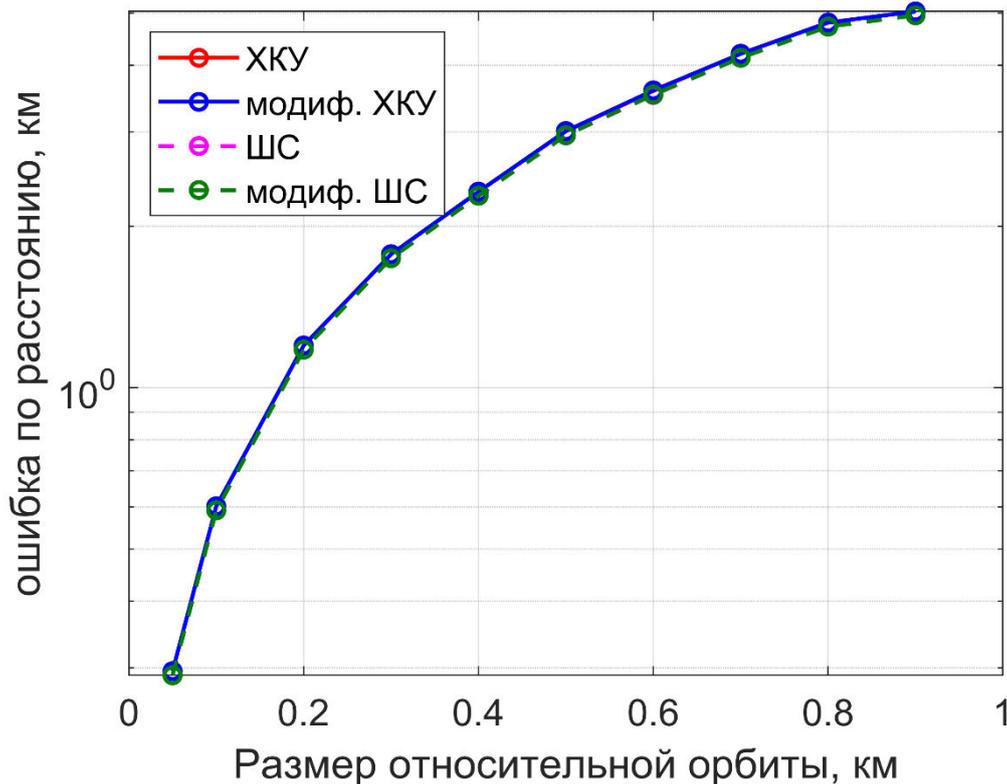


Рисунок 18 — Максимальная ошибка по расстоянию в зависимости от размера относительной орбиты, 30 градусов

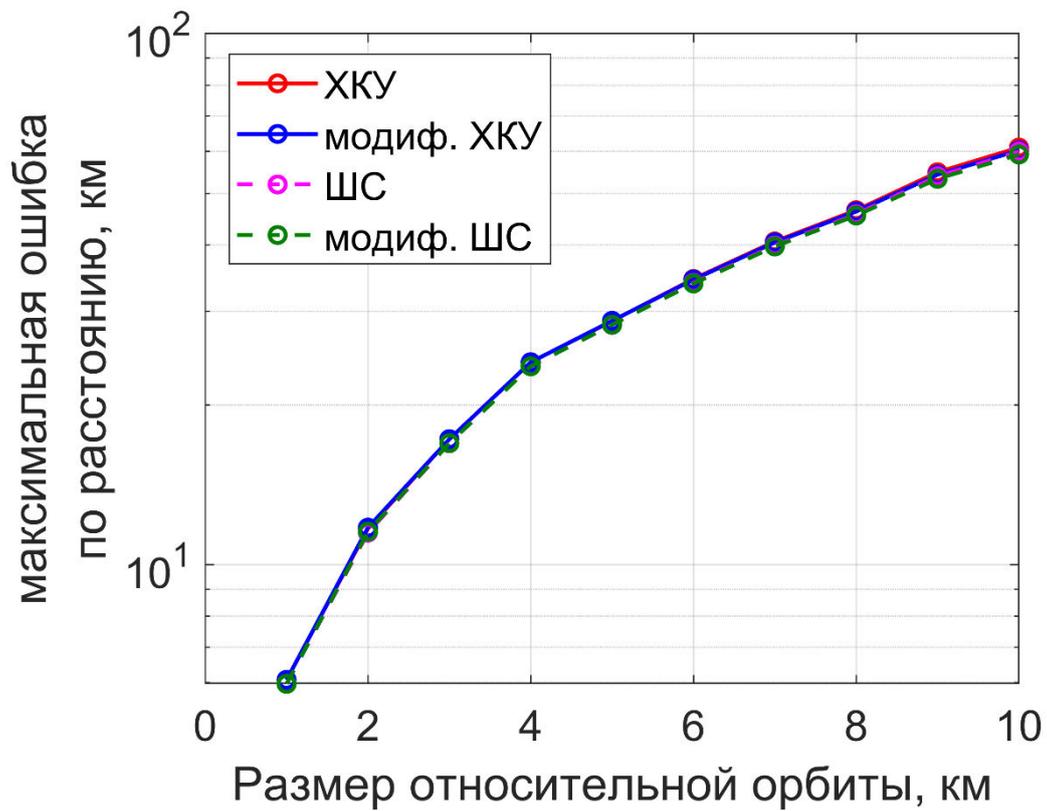


Рисунок 19 — Максимальная ошибка по расстоянию для больших размеров относительных орбит, 30 градусов

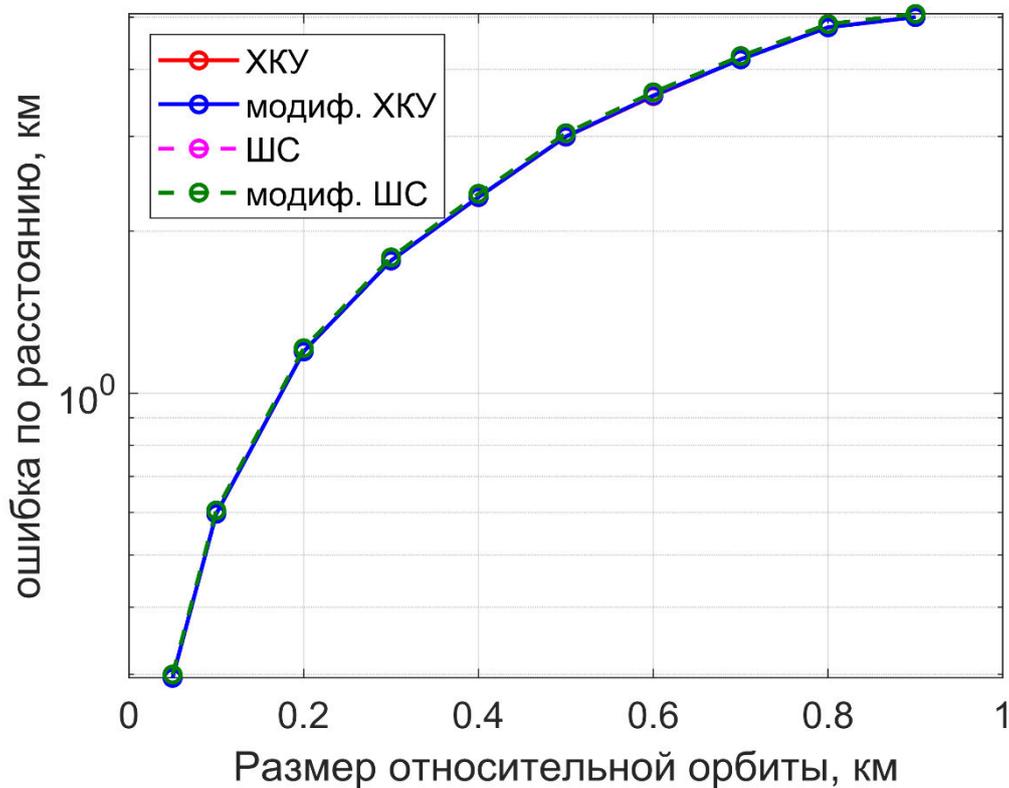


Рисунок 20 — Максимальная ошибка по расстоянию для наклона 90 градусов

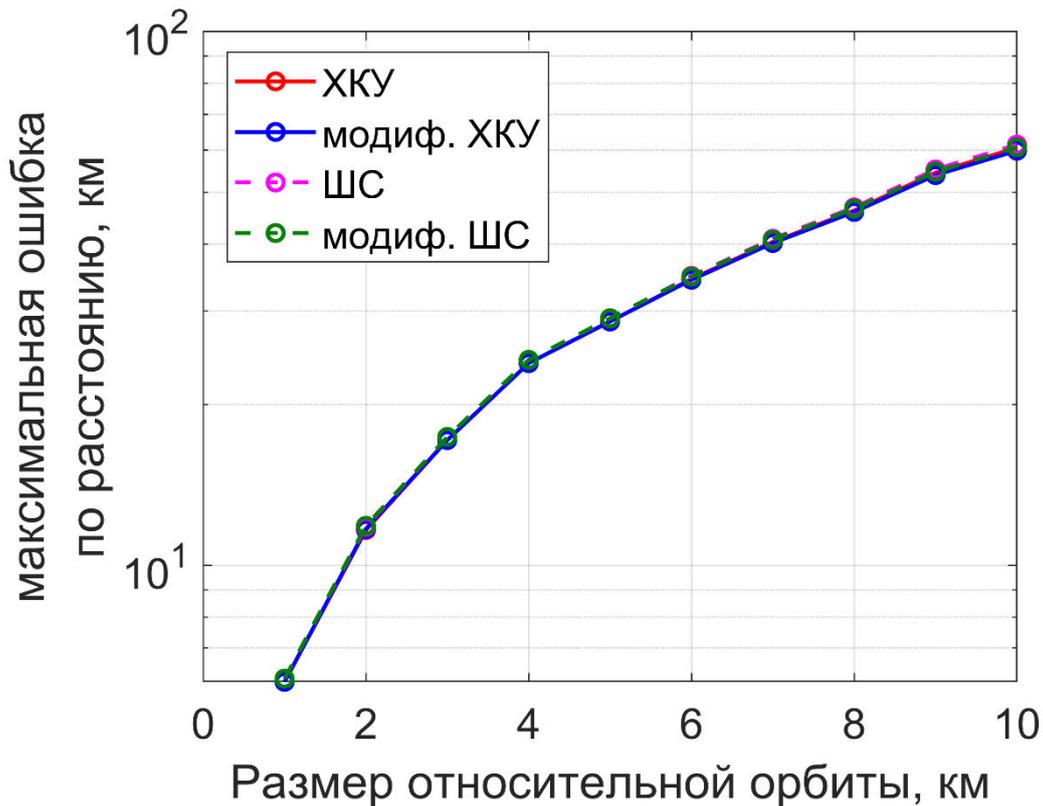


Рисунок 21 — Максимальная ошибка по расстоянию для наклонения 90 градусов

По результатам оценивания точности вторым способом максимальная ошибка по расстоянию для всех моделей не сильно отличается для любых размеров относительных орбит, поэтому возможно использование любой модели.

Посчитаем точность третьим способом. Будем считать по всем хилловским переменным, кроме фаз.

Возьмем модуль разность переменной дрейфа модели и реального движения. И посчитаем среднее за последний виток (рис. 22-25)

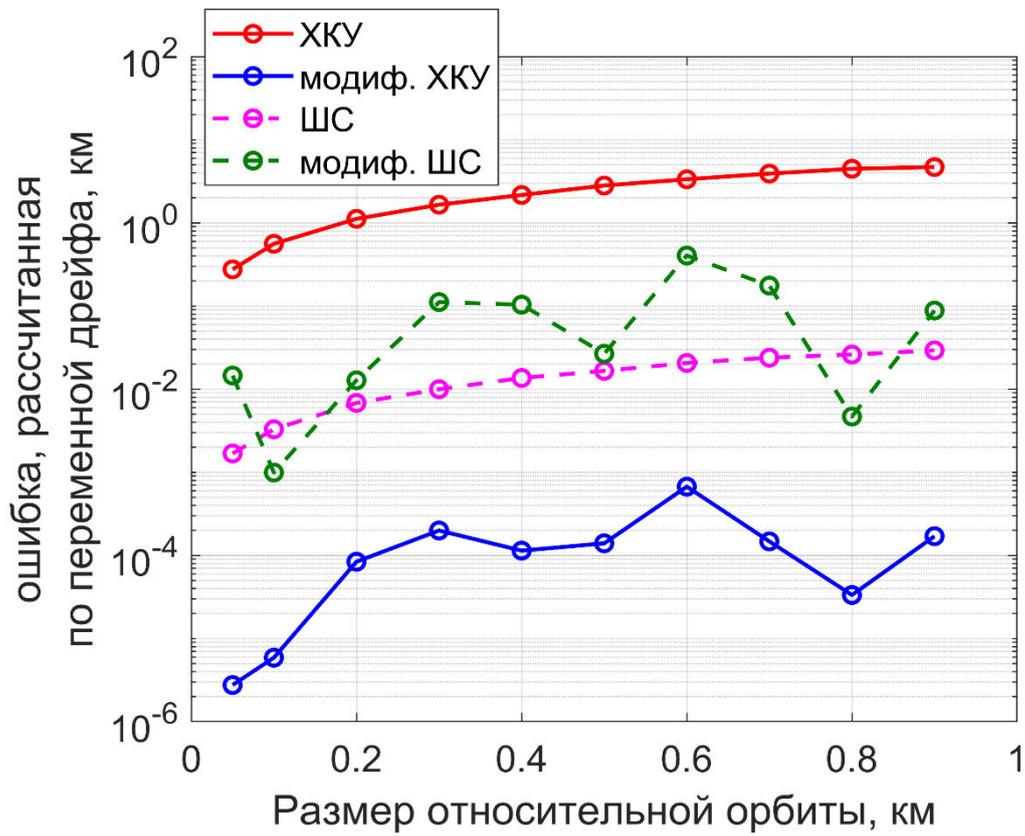


Рисунок 22 — Ошибка по дрейфу от размера относительной орбиты для наклона орбиты главного аппарата 30 градусов

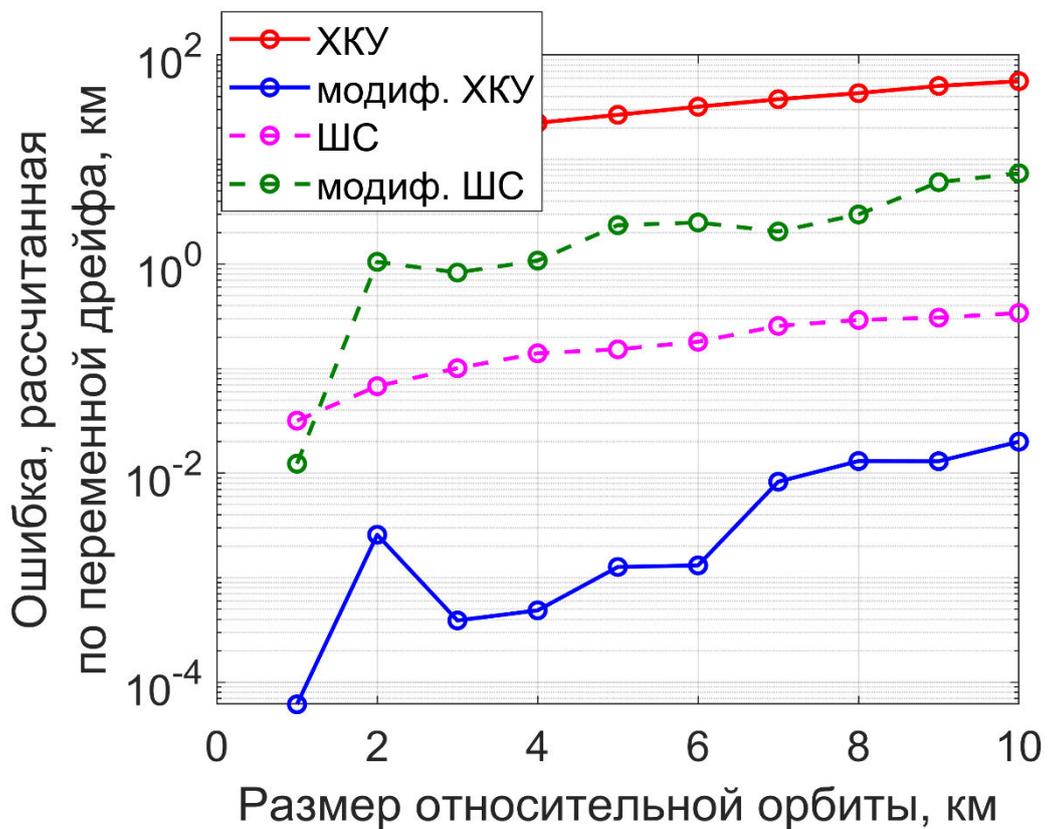


Рисунок 23 — Ошибка по дрейфу для размеров относительной орбиты от километра, наклонение главного аппарата 30 градусов

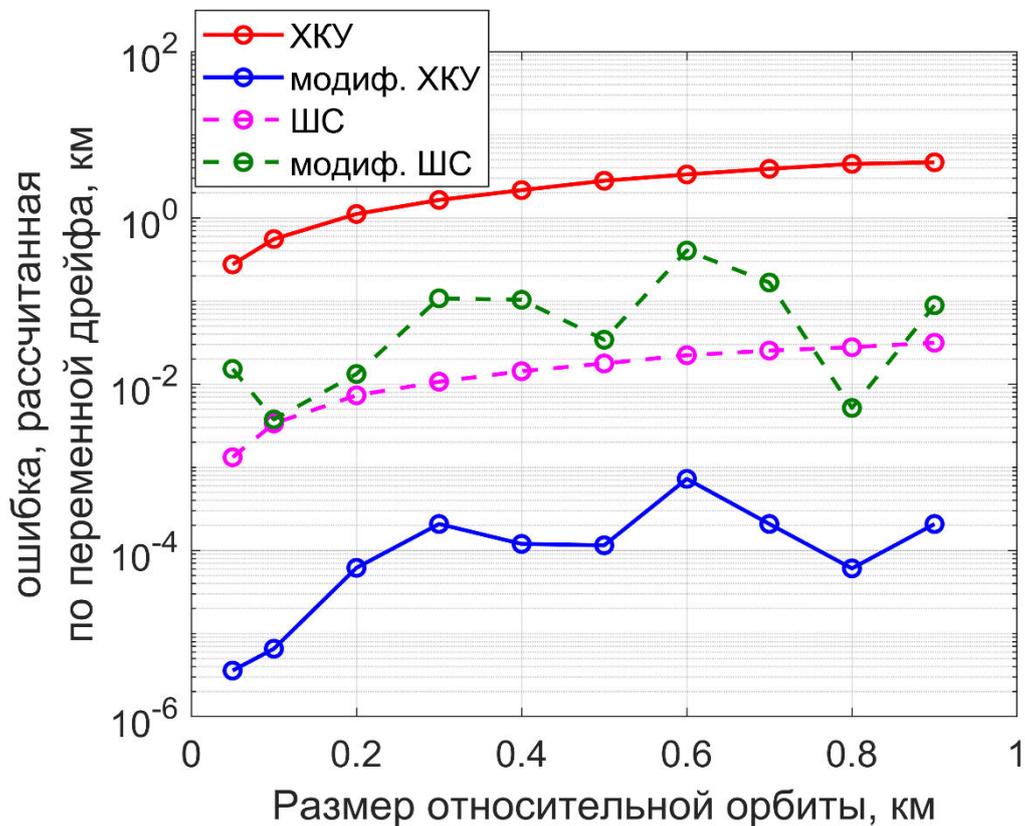


Рисунок 24 — Ошибка по дрейфу от размера относительной орбиты для наклонения орбиты главного аппарата 90 градусов

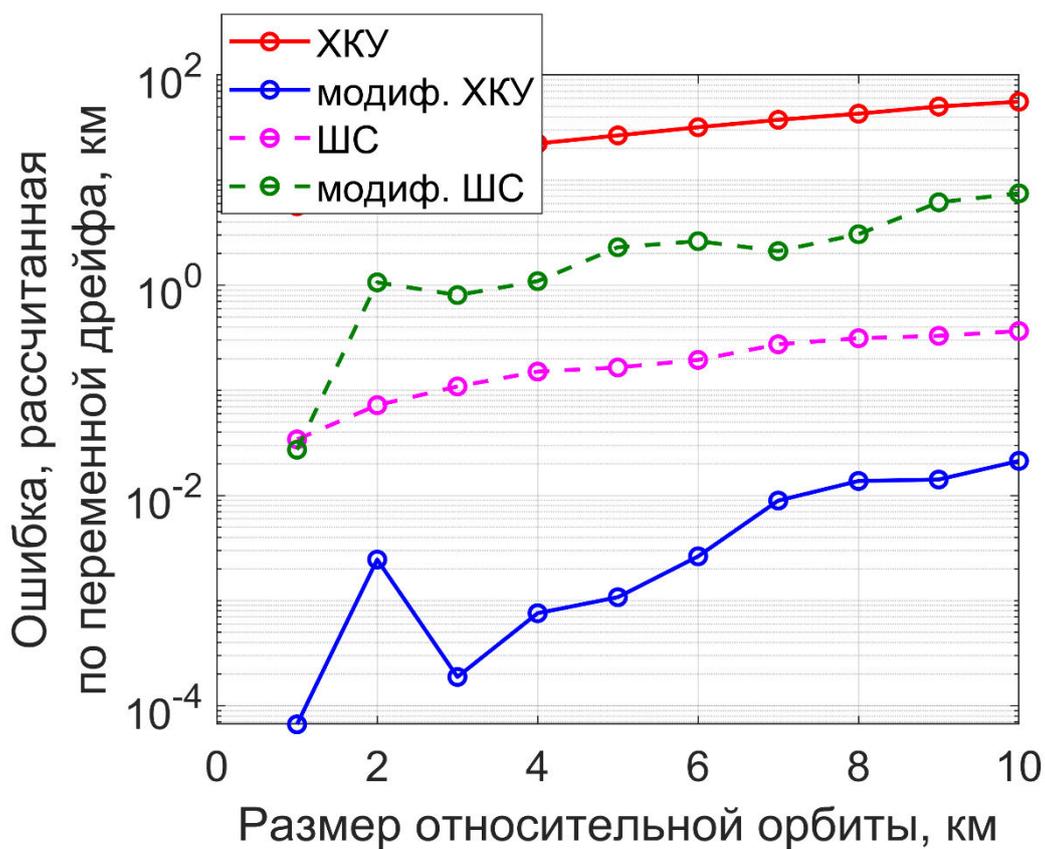


Рисунок 25 — Ошибка по дрейфу, наклонение главного аппарата 90 градусов, большие размеры относительных орбит

При оценивании разности переменных дрейфа оказалось, что наилучшей моделью оказываются уравнения ХКУ в криволинейных координатах, в то время как модификация для уравнений ШС не поменяла порядок ошибки.

Возьмем модуль разность амплитуды в плоскости движения из хилловских переменных модели и реального движения. И посчитаем среднее за последний виток. (рис. 26-29)

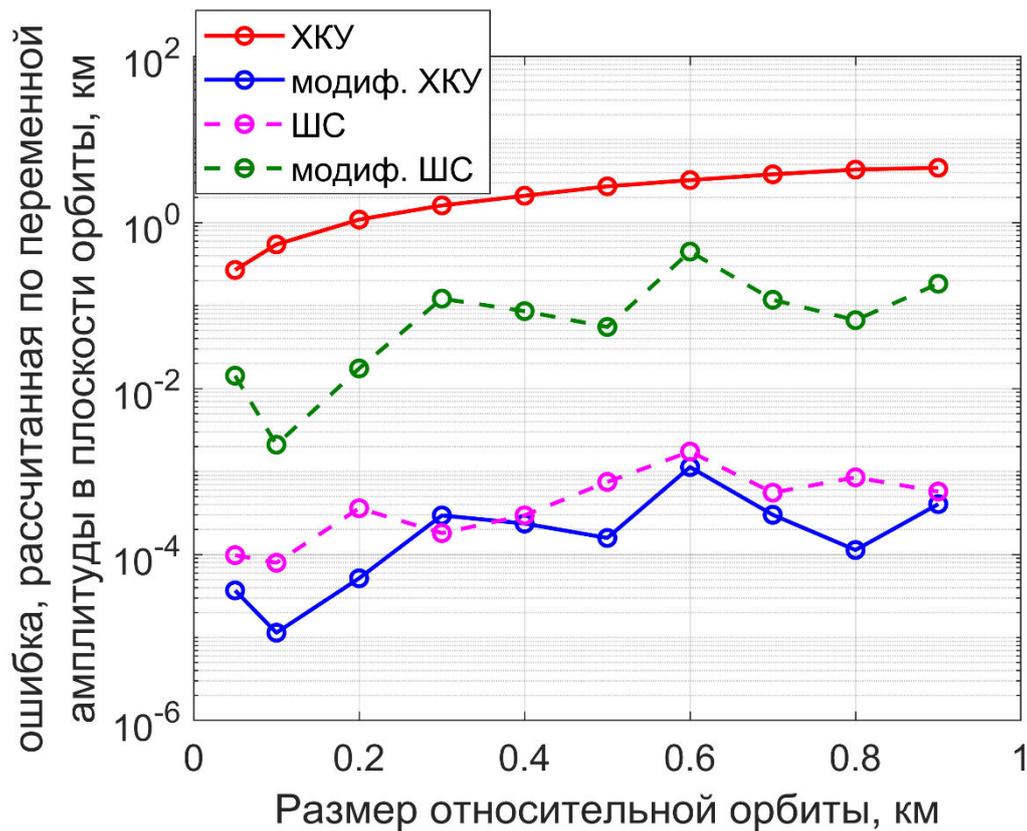


Рисунок 26— Ошибка по амплитуде в плоскости орбиты для наклонения орбиты главного аппарата 30 градусов

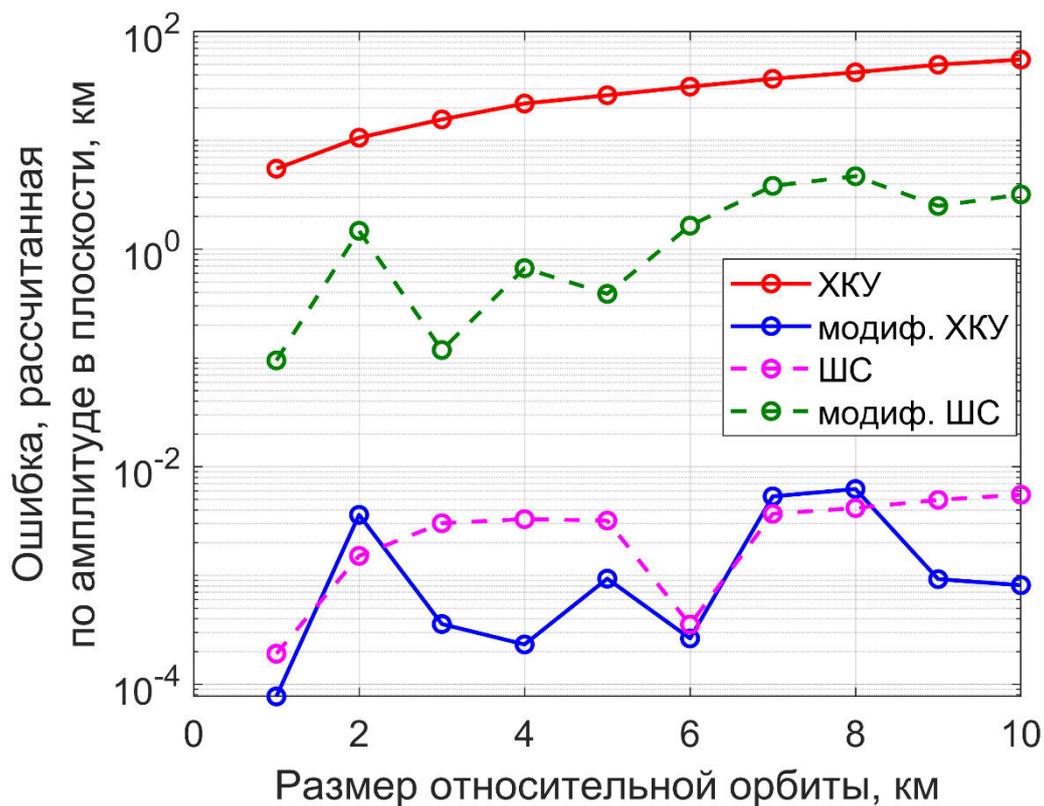


Рисунок 27 — Ошибка по амплитуде в плоскости орбиты, наклонение главного аппарата 30 градусов

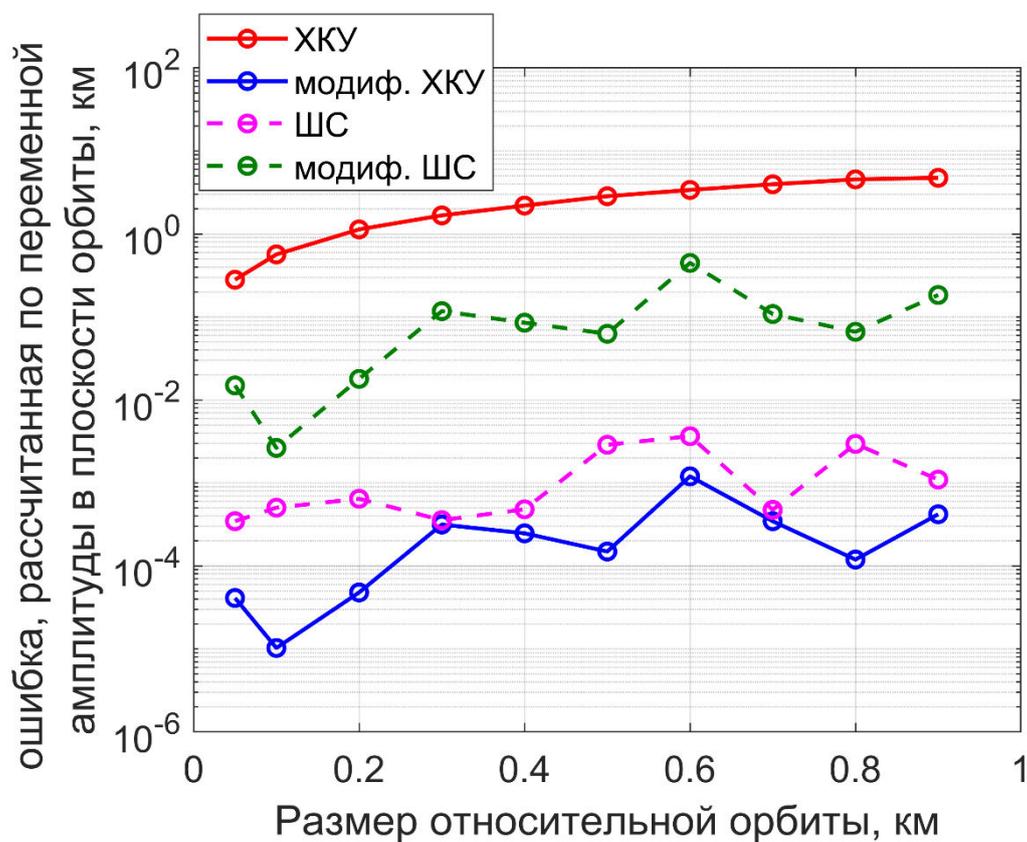


Рисунок 28 — Ошибка по амплитуде в плоскости орбиты для наклонения орбиты главного аппарата 90 градусов

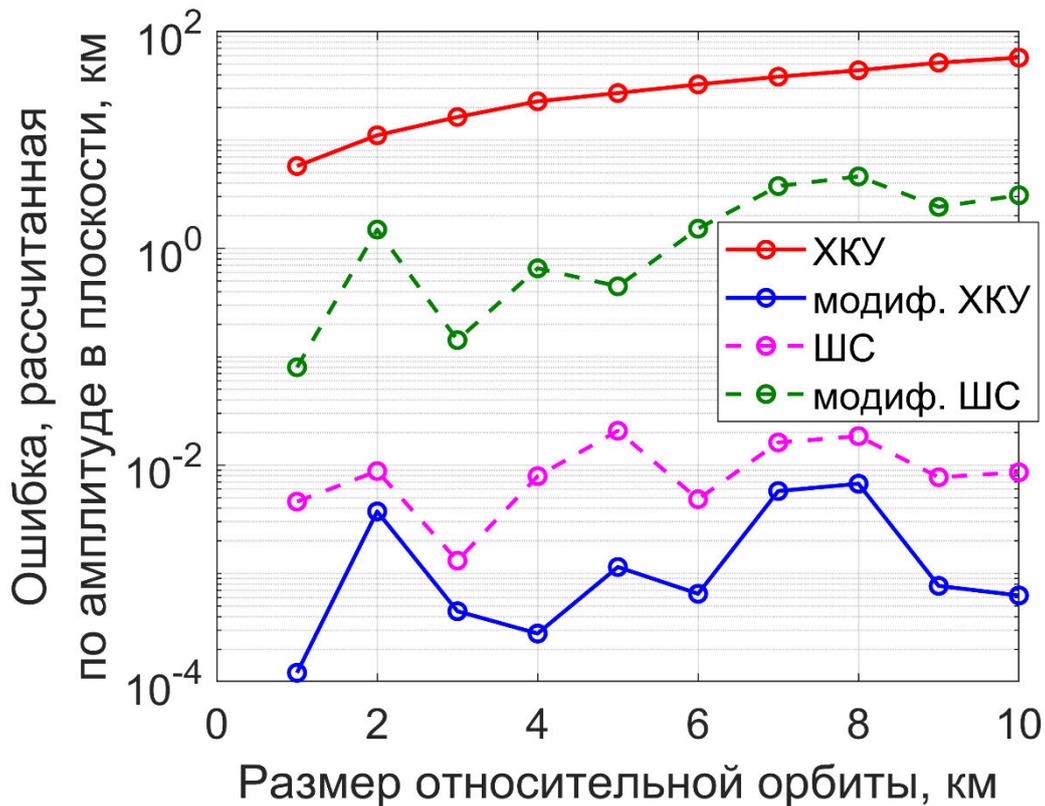


Рисунок 29 — Ошибка по амплитуде в плоскости орбиты, наклонение главного аппарата 90 градусов

Аналогично результатам для переменной дрейфа, разница амплитуд в плоскости имеет наименьший порядок для уравнений ХКУ в криволинейных координатах для размеров относительных орбит до километра.

Возьмем модуль разность амплитуды вне плоскости движения из хилловских переменных модели и реального движения. И посчитаем среднее за последний виток. (рис. 30-33)

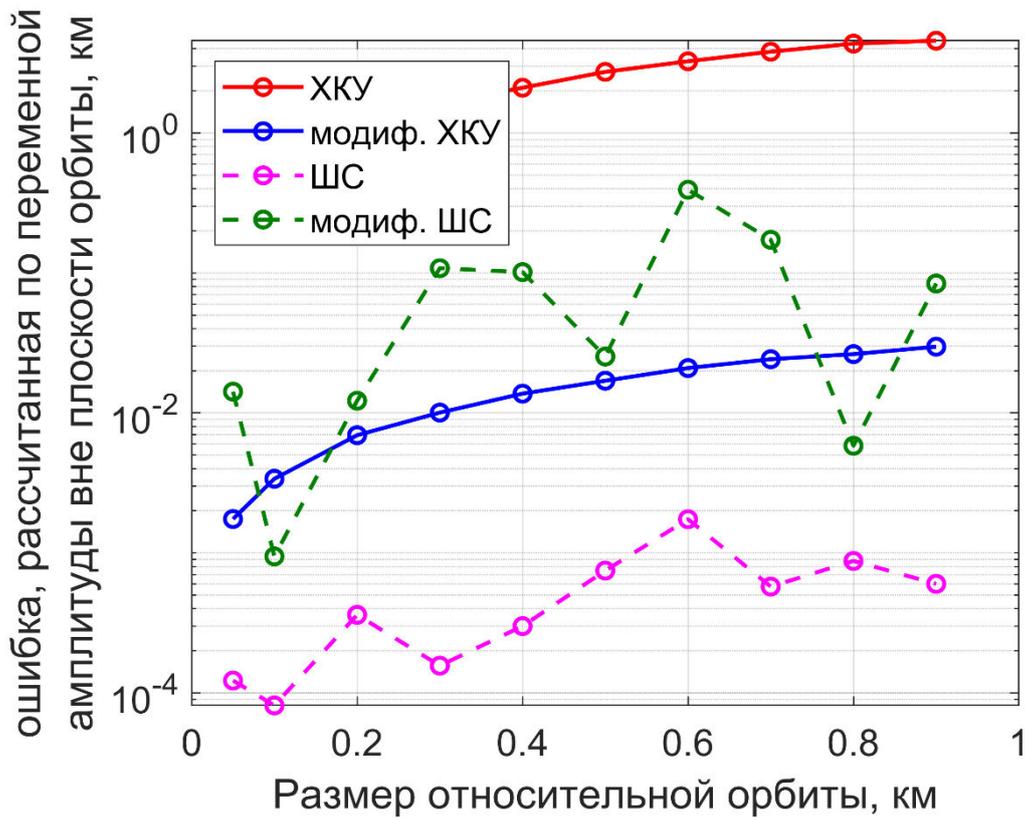


Рисунок 30 — Ошибка по амплитуде вне плоскости орбиты для наклонения орбиты главного аппарата 30 градусов

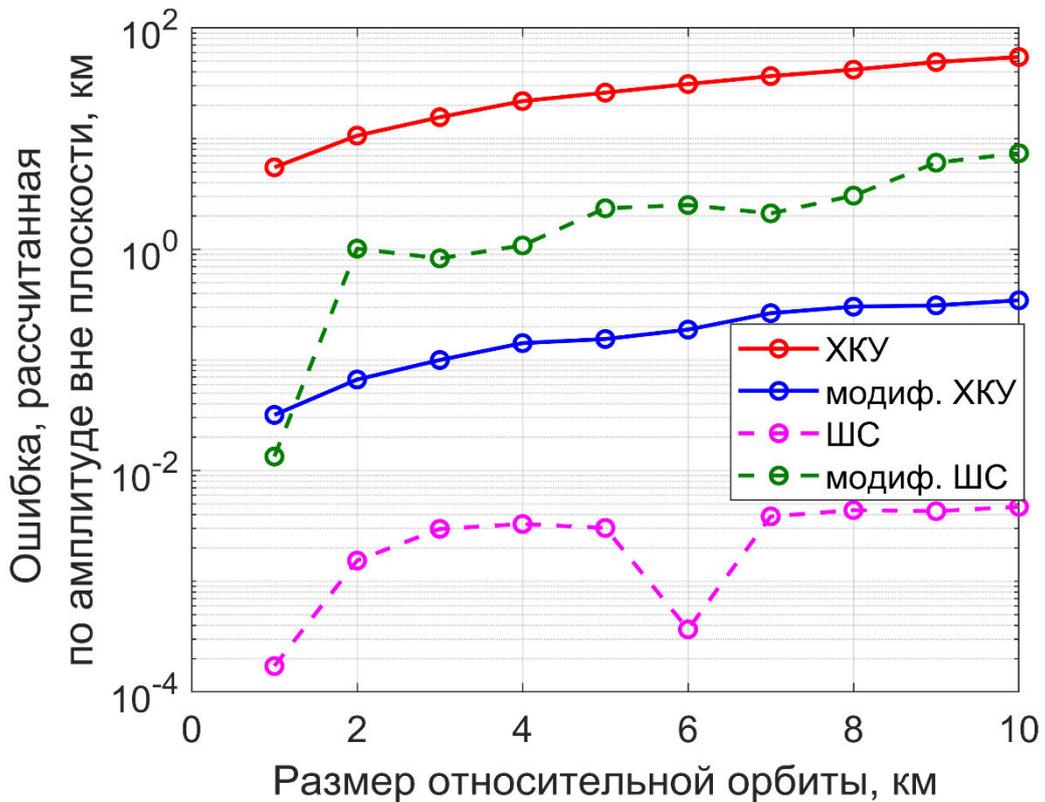


Рисунок 31 — Ошибка по амплитуде вне плоскости орбиты для наклонения главного аппарата в 30 градусов.

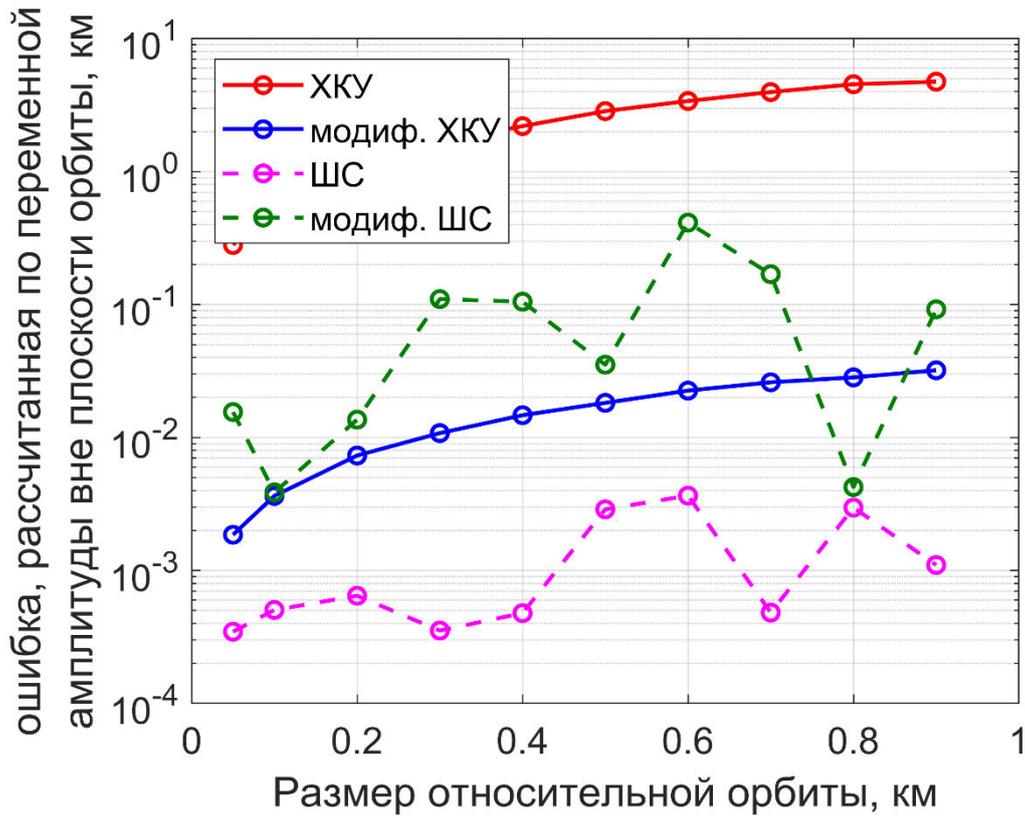


Рисунок 32 — Ошибка по амплитуде вне плоскости орбиты для наклонения орбиты главного аппарата 90 градусов

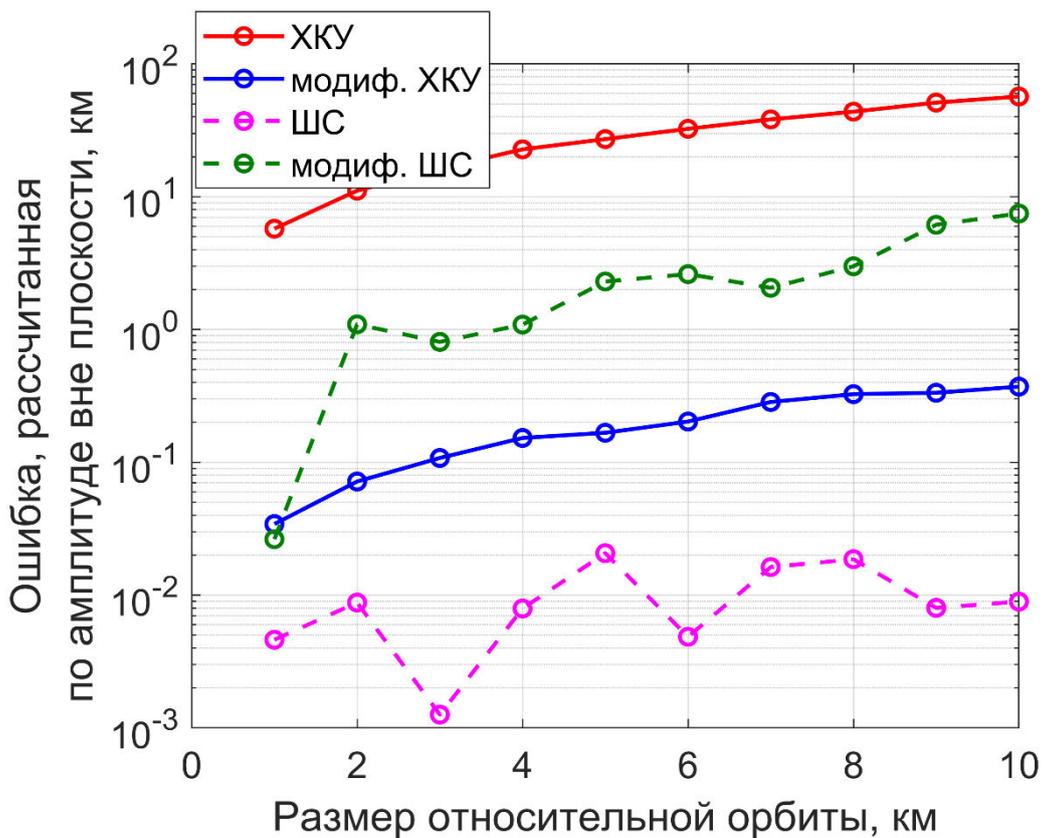


Рисунок 33 — Ошибка по амплитуде вне плоскости орбиты, наклонение орбиты главного аппарата 90 градусов

Для оценивания точности через разность переменных амплитуды вне плоскости орбиты модель ШС в декартовых координатах показала наименьшую ошибку. В то время, как модифицированные уравнения лучше уравнений ХКУ в декартовых координат, но хуже модели ШС.

Возьмем модуль разность сдвига модели и реального движения. И посчитаем среднее за последний виток (рис. 34-37).

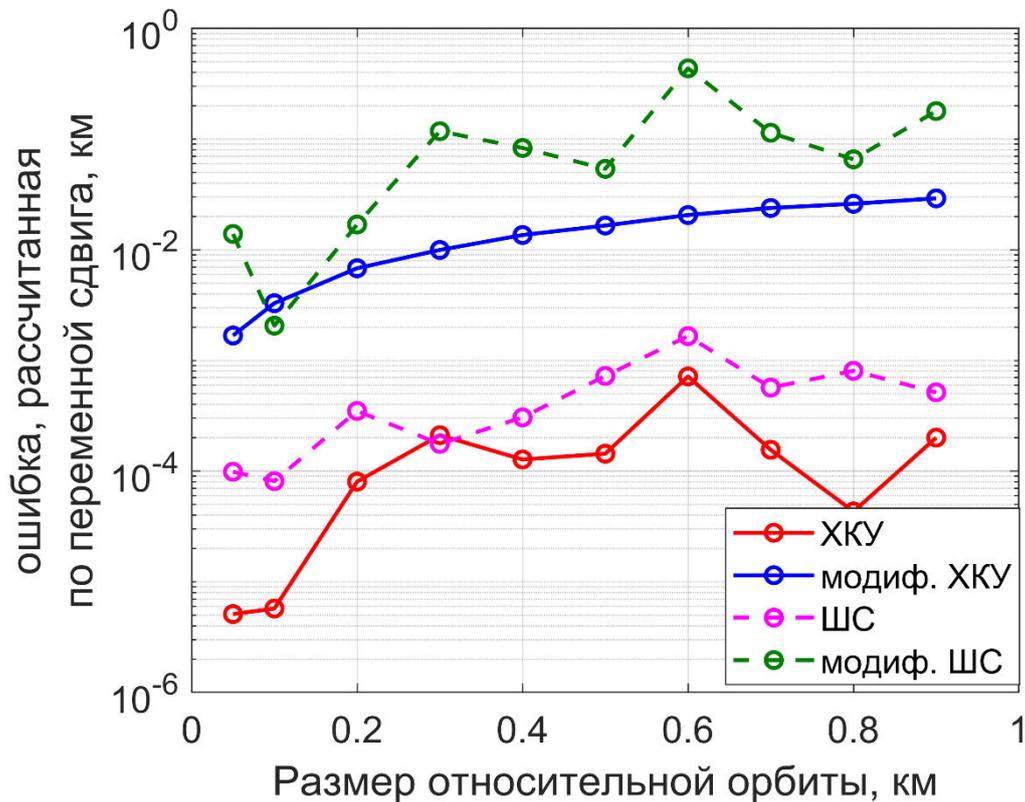


Рисунок 34 — Ошибка по переменной сдвига для наклона орбиты главного аппарата 30 градусов

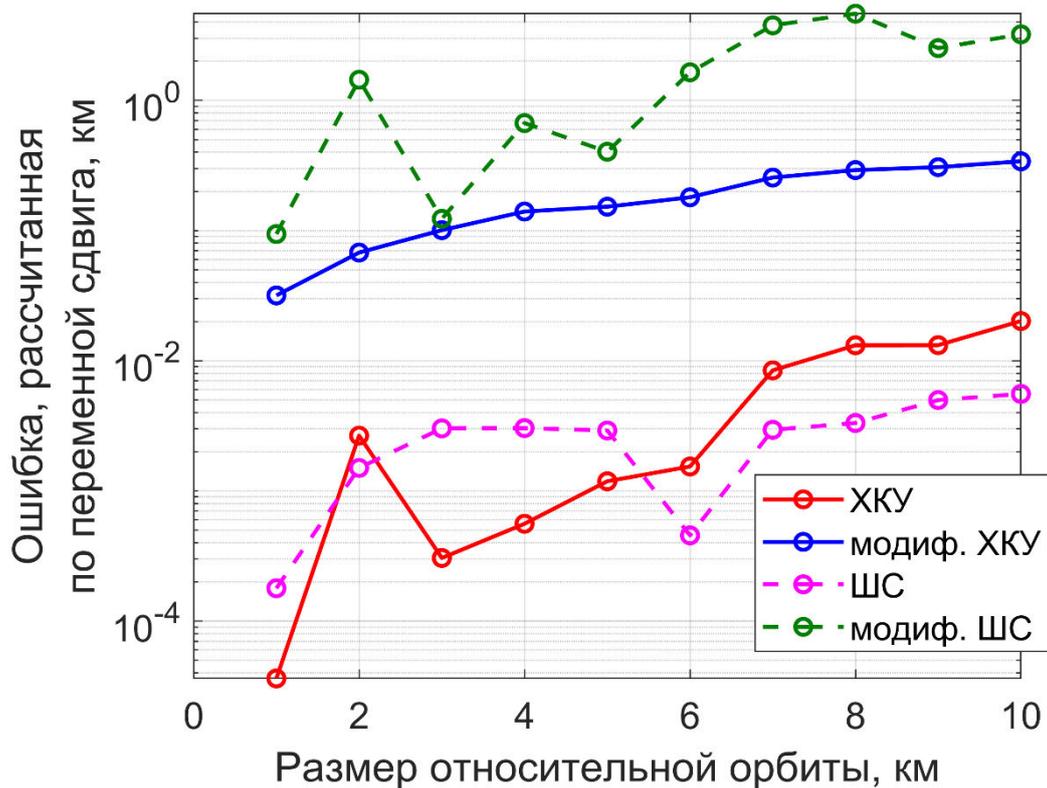


Рисунок 35 — Ошибка по переменной сдвига, наклонение главного аппарата 30 градусов

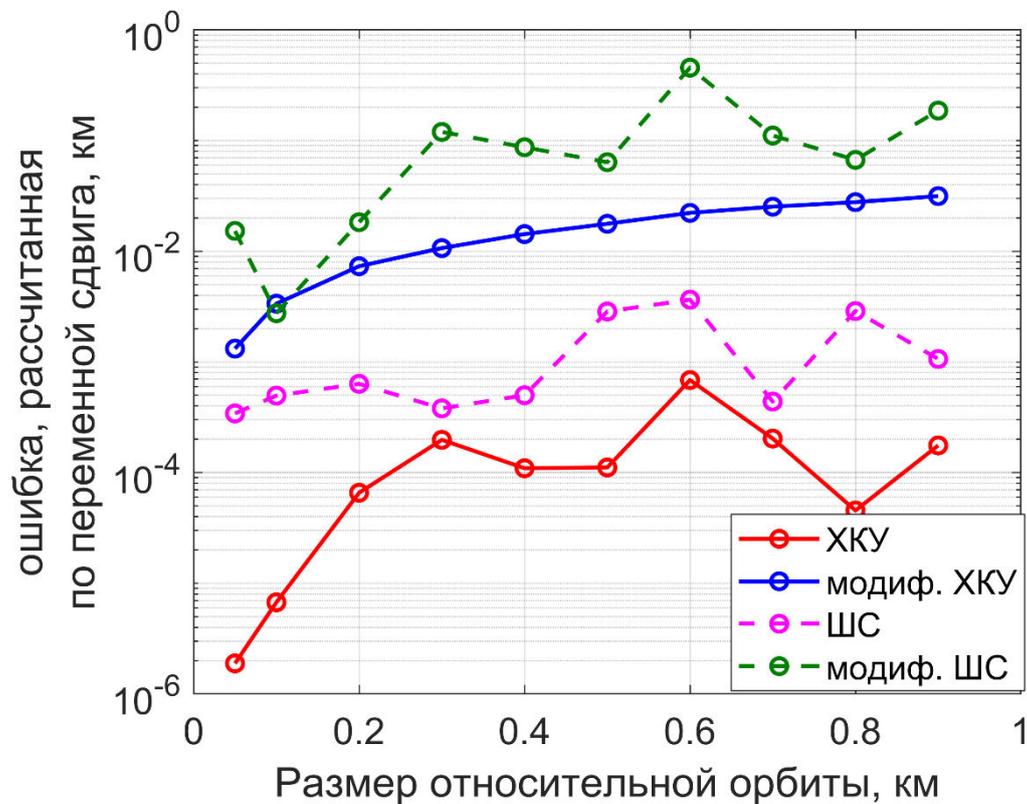


Рисунок 36 — Ошибка по переменной сдвига для наклонения орбиты главного аппарата 90 градусов

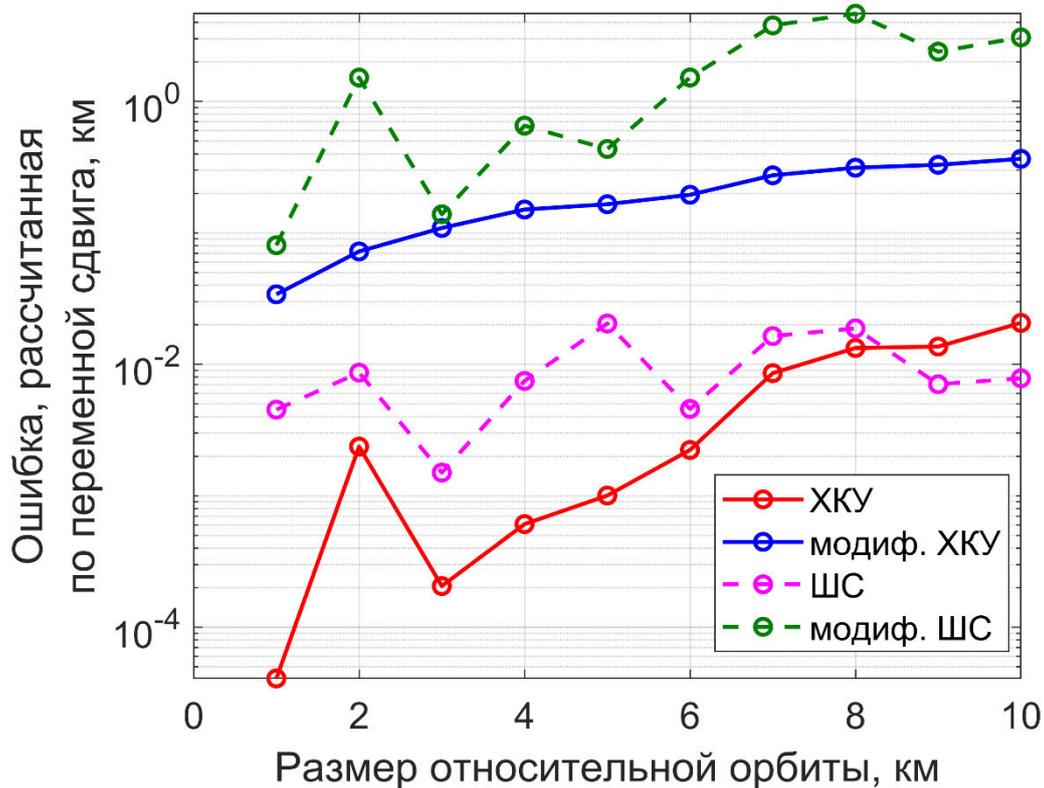


Рисунок 37 — Ошибка по переменной сдвига, наклонение орбиты главного аппарата 90 градусов.

Для переменной сдвига наименьшую ошибку показала модель ХКУ в декартовых координатах.

Посчитаем точность последним способом. Рассматривать будем два значения наклонения:  $30^\circ$  и  $90^\circ$ . Также возьмем 4 значения размеров относительных орбит. Промоделируем движение и зафиксируем время, когда приближенные уравнения начали давать ошибку, превышающую некоторое заданное значение. В данной работе в качестве такой величины берется некий процент  $x\%$  от размера относительной орбиты. Всего рассматривается три значения процентов: 10%, 25%, 50%. В следующих таблицах 1, 2, 3 приведены результаты моделирования.

Из таблицы 1 видно, что в среднем примерно за 5 часов все приближенные уравнения начали выдавать ошибку больше, чем 10% от орбиты для наклонения в  $30^\circ$  градусов. А для наклонения в  $90^\circ$  градусов все уравнения начинают в среднем примерно за 12 часов выдавать такую ошибку.

Из таблицы 2 видно, что для наклона в 30 градусов в среднем все уравнения начинают выдавать ошибку, большую 25% от размера орбиты, примерно за 15 часов в то время, как для наклона 90 градусов мы получаем времена в районе 22 часов. Последнее не особо показательно, так как время моделирования было ограничено 24 часами.

Из таблицы 3 видно, что наши уравнения начинают давать большую ошибку в среднем за 18-20 часов для наклона в 30 градусов, а для наклона в 90 градусов, рассмотренные уравнения имеют достаточно хорошую точность и начинают выдавать достаточно большую ошибку в среднем уже после 23 часов.

Таблица 1. Исследование времени накопления ошибки 10% в часах

x=10%								
	Наклонение орбиты 30°				Наклонение орбиты 90°			
	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километро в	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километров
Уравнения ХКУ	6,34 ч	5,75 ч	6,08 ч	4,88 ч	17,21 ч	16,9 ч	16,53 ч	12,69 ч
Модифицированн ые уравнения ХКУ	6,35 ч	5,92 ч	6,17 ч	5,81 ч	17,22 ч	17,12 ч	17,32 ч	17,29 ч
Уравнения ШС	6,84 ч	6,14 ч	6,45 ч	4,98 ч	15,69 ч	15,69 ч	15,43 ч	12,19 ч
Модифицированн ые уравнения ШС	6,83 ч	6,22 ч	6,55 ч	5,61 ч	15,69 ч	15,86 ч	15,93 ч	17,33 ч

Таблица 2. Исследование времени накопления ошибки 25% в часах

x=25%								
	Наклонение орбиты 30°				Наклонение орбиты 90°			
	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километро в	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километров
Уравнения ХКУ	14,56	13,17	14,05	11,54	23,01	22,92	22,88	21,45
Модифицированн ые уравнения ХКУ	14,60	13,40	13,96	13,18	23,01	22,94	22,91	22,53
Уравнения ШС	15,85	14,36	15,05	11,55	22,47	22,43	22,37	21,08
Модифицированн ые уравнения ШС	15,89	14,44	15,37	12,90	22,47	22,45	22,44	22,15

Таблица 3. Исследование времени накопления ошибки 50% в секундах

x=50%								
	Наклонение орбиты 30°				Наклонение орбиты 90°			
	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километро в	Размер орбиты 100 метров	Размер орбиты 500 метров	Размер орбиты 1 километр	Размер орбиты 5 километров
Уравнения ХКУ	20,34	18,99	19,79	17,94	23,79	23,92	23,93	23,90
Модифицированн ые уравнения ХКУ	20,35	18,98	19,81	19,37	23,79	23,94	23,93	23,70
Уравнения ШС	21,26	20,13	20,92	18,20	23,72	23,79	23,78	23,76
Модифицированн ые уравнения ШС	21,30	20,10	21,08	19,43	23,72	23,79	23,79	23,57

## **Заключение**

В ходе данной работы были рассмотрены уравнения ХКУ и ШС, а также их модификации в криволинейных координатах. В результате численного моделирования было выявлено, что использование криволинейных координат может в некоторых случаях улучшить точность, особенно при оценивании точности по расстоянию и по времени.

Также было показано, что использование осредненных элементов для опорной орбиты может улучшить точность уравнений Швайгхарта-Седвика.

По итогу работы модель Хилла-Клохесси-Уилтшира в криволинейных координатах оценивает лучше переменную сдвига по сравнению с другими моделями. Уравнения Швайгхарта-Седвика в декартовых координатах лучше оценивать амплитуду вне плоскости орбиты. Модифицированные уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира показывают наименьшую ошибку по переменной дрейфа и амплитуде в плоскости орбиты. При этом при оценке точности по расстоянию наилучшую точность показали уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира и Швайгхарта-Седвика в криволинейных координатах.

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейшем при построении алгоритмов управления для выбора подходящей модели относительного движения.

## **Список использованных источников**

1. Burch J.L. et al. Magnetospheric Multiscale Overview and Science Objectives // Space Science Reviews. 2016. Vol. 199, № 1–4.
2. Tapley B.D. et al. The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results // Geophys. Res. Lett. 2004. Vol. 31, № 9. P. L09607 1-4.
3. Alfriend K.T. et al. Spacecraft formation flying: Dynamics, control and navigation // Spacecraft Formation Flying: Dynamics, control and navigation. 2010. 402 p.

4. Зотов В.Г., Никитин А.О., Языков А.В. Анализ динамических режимов работы системы вертикализации универсального стартового комплекса для перспективной ракеты космического назначения сверхтяжелого класса // Инженерный журнал наука и инновации. № 8 (116). P. 1–19.
5. Alfried K.T., Yan H. Evaluation and comparison of relative motion theories // J. Guid. Control. Dyn. 2005. Vol. 28, № 2.
6. Condurache D., Martinusi V. Exact solution to the relative orbital motion in a central force field // 2008 2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, ISSCAA 2008. 2008.
7. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // J. Aerosp. Sci. 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–658.
8. De Bruijn F., Gill E., How J. Comparative analysis of Cartesian and curvilinear Clohessy-Wiltshire equations // J. Aerosp. Eng. Sci. Appl. 2011. Vol. 3, № 2.
9. Schweighart S.A., Sedwick R.J. High-fidelity linearized J2 model for satellite formation flight // J. Guid. Control. Dyn. 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
10. Tschauner J., Hempel P. Optimale Beschleunigungsprogramme für das Rendezvous-Manöver // Astronaut. Acta. 1964. Vol. 10, № 5–6.
11. Sullivan J., Grimberg S., D’Amico S. Comprehensive survey and assessment of spacecraft relative motion dynamics models // J. Guid. Control. Dyn. 2017. Vol. 40, № 8. P. 1837–1859.
12. Hill G.W. Researches in the Lunar Theory // Am. J. Math. 1878. Vol. 1, № 3. P. 245.
13. Айзерман М.А. Классическая механика. 1980. 368 p.
14. Самарский А.А. Введение в численные методы // Наука. 2007. 133–135 p.
15. Hairer E., Wanner G., Nørsett S.. Runge-Kutta and Extrapolation Methods // Solving Ordinary Differential Equations I. Springer Berlin Heidelberg, 2008. P. 129–353.