6 июля 2017 года

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Динамика и управление движением космических аппаратов

Оптимизация траекторий перелета с малой тягой на основе решения задачи Штарка

А.А. Целоусова, студентка 4 курса ФУПМ

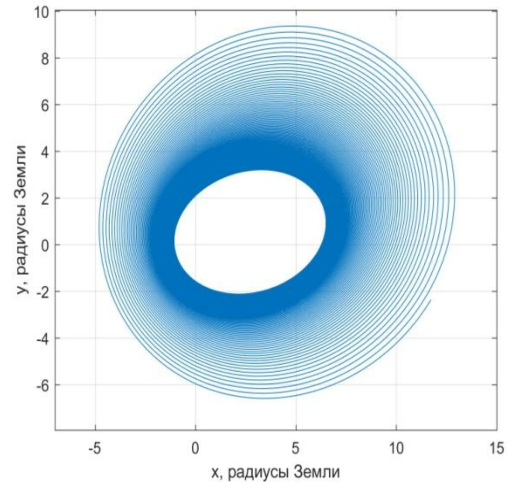
Научный руководитель:
к.ф.-м.н. М.Г. Широбоков

Содержание

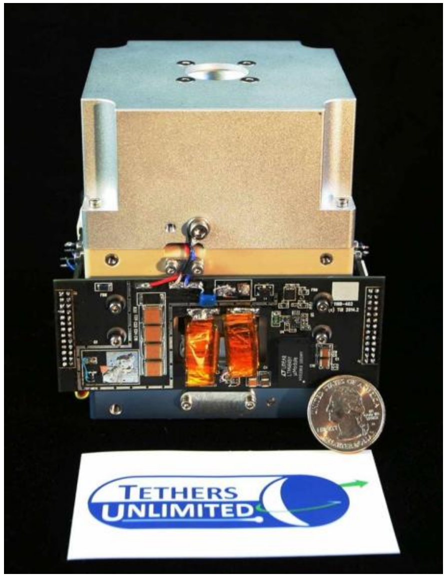
- Оптимизация траекторий с малой тягой
- Задача Штарка
- Обзор методов решения задачи Штарка
- Постановка и решение модельной задачи перелета к Марсу
- Заключение
- Дальнейшая работа

Малая тяга

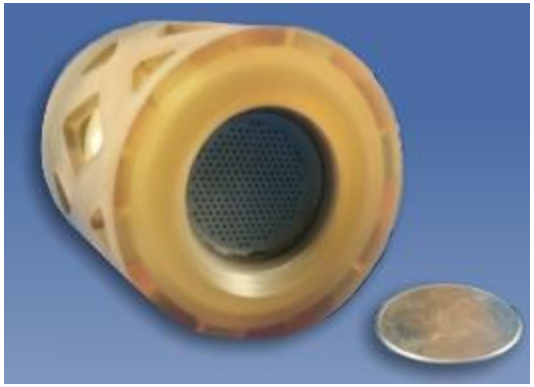
Тяга малая, если $$\frac{a_\tau}{g} < 10^{-4}$$



ОКБ Факел: СПД-100В



Tethers Unlimited: HYDROS



Busek: BIT-3

Двигатели большой тяги

- Большая сила тяги
- Небольшое время разгона
- Большой расход топлива
- Малый удельный импульс (< 1 000 с)

Двигатели малой тяги

- Малая сила тяги
- Большое время разгона
- Малый расход топлива
- Высокий удельный импульс (1 000—10 000 с)

Оптимизация траекторий с малой тягой

Непрямые методы: принцип максимума Понтрягина

✓ Условия оптимальности в классе непрерывных ограниченных функций управления

✗ Трудно подобрать начальные условия для сопряженных переменных

Прямые методы: управление дискретизируется

✗ Условия оптимальности в более узком классе функций

✓ Сходимость обеспечивается для более широкой области начальных условий

Задача Штарка

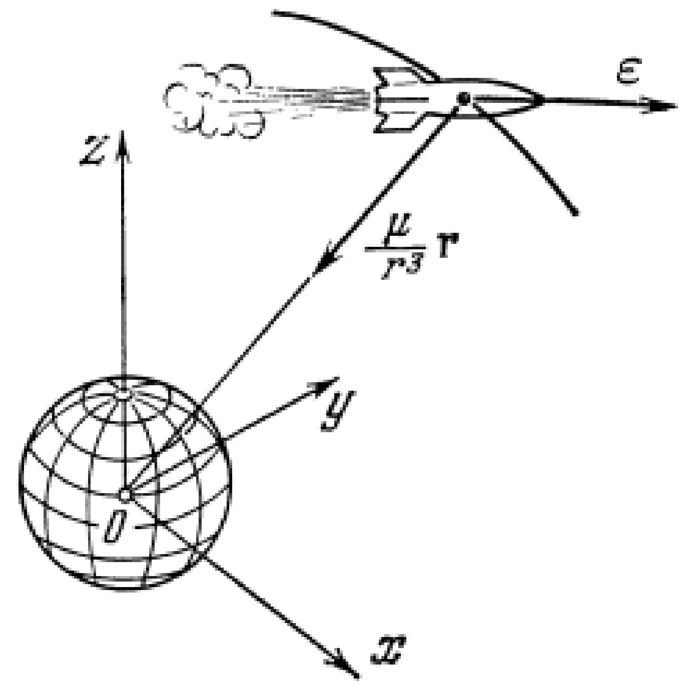
Определить траекторию космического аппарата (КА) в центральном поле с учетом постоянного по направлению и величине ускорения тяги ε

Уравнения движения:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r_0}$ $\qquad$ $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v_0}$

$\mathbf{r}(t) = ?$ $\qquad$ $\mathbf{v}(t) = ?$



Основные этапы исследования задачи Штарка

- **1815 г., Ж.Лагранж**: задача в квадратурах
- **1849 г., К. Якоби и Ж. Лиувилль**: параболические координаты, разделение уравнений движения
- **1964 г., В.В. Белецкий:** классификация орбит в двумерной задаче
- **1965 г., В.Г. Демин:** предельный случай интегрируемой задачи двух неподвижных центров, когда один из них удален в бесконечность
- **1966 г., А.Л. Куницын:** классификация орбит в трехмерной задаче
- **1971г., Ю. Кирхграбер:** KS-переменные для разделения уравнений
- **1972 г., Ю.Н.Исаев:** моделирование движения КА с учетом сил светового давления
- **2004 г., С.М. Полещиков:** KS-переменные для разделения уравнений

Современные эффективные методы решения задачи Штарка

Г. Лантуан, Р. Рассел 2009 г.	Ф. Бискани, Д. Иццо 2014 г.	Э. Пеллегрини, Р. Рассел 2015 г.
Представление решений в параболических координатах в виде эллиптических функций Якоби	Представление решений в параболических координатах в виде эллиптических функций Вейерштрасса	F-, G- и H- ряды

Сравнение методов (Н. Хаттен и Р.Рассел, 2015 г.)

Эллиптические функции Якоби (Лантуан)	**Эллиптические функции Вейерштрасса (Бискани)**	**F- , G- и H-ряды (Пеллегрини)**
✓ аналитический метод	✓ аналитический метод	✗ полуаналитический
✓ быстрее метода Бискани (t = 7 мкс)	✓ быстрее RKF8 (t = 20 мкс)	✓ быстрее всех при 12-18 порядках (t = 0.8 – 9 мкс)
✗ классификация случаев по начальным данным	✓ универсальные формулы	✓ универсальные формулы
✗ 3D и 2D различаются	✗ Только 3D	✓ 3D и 2D совпадают
✓ все вычисления проводятся с действительными числами	✗ используются вычисления в поле комплексных чисел	✗ нужно контролировать шаг по времени
✗ Ошибки округления являются основным источником погрешности	✓ проще всего реализуется программно	✓ точность регулируется выбором количеством слагаемых ряда

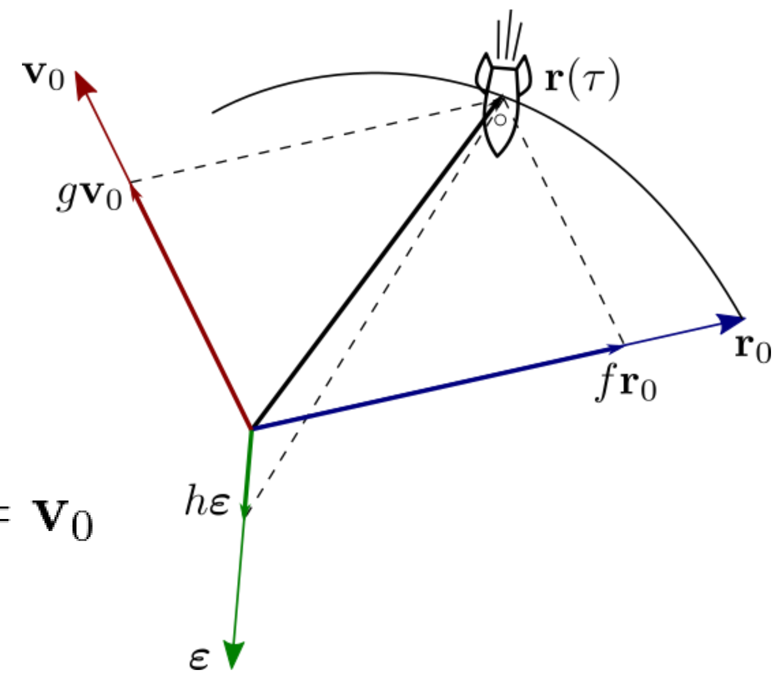
F-, G- и H-ряды

Регуляризирующее преобразование:

$$dt = r^{\alpha} d\tau$$

Решение ищется в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\tau) = f(\tau)\mathbf{r}_0 + g(\tau)\mathbf{v}_0 + h(\tau)\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{v}(\tau) = \dot{f}(\tau)\mathbf{r}_0 + \dot{g}(\tau)\mathbf{v}_0 + \dot{h}(\tau)\boldsymbol{\varepsilon} \end{cases}$$



$$\tau = \tau_0 + \Delta\tau, \quad \mathbf{r}(\tau_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(\tau_0) = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{d^n\mathbf{r}}{d\tau^n}\right|_{\tau_0} \frac{\Delta\tau^n}{n!}$$,где

$$\left.\frac{d^n\mathbf{r}}{d\tau^n}\right|_{\tau_0} = F_n\mathbf{r}_0 + G_n\mathbf{v}_0 + H_n\boldsymbol{\varepsilon}$$

Дифференцируя выражение по τ :

$$\left.\frac{d^n\mathbf{r}}{d\tau^n}\right|_{\tau} = F_n(\tau)\mathbf{r}(\tau) + G_n(\tau)\mathbf{v}(\tau) + H_n(\tau)\boldsymbol{\varepsilon}$$

выражаем $F_{n+1}, G_{n+1}, H_{n+1}$ через F_n, G_n, H_n

В итоге: $\mathbf{r}(\tau) = f\mathbf{r}_0 + g\mathbf{v}_0 + h\boldsymbol{\varepsilon}$, где

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} [F_n \mid_{\tau_0} \frac{\Delta\tau^n}{n!}]$$

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} [G_n \mid_{\tau_0} \frac{\Delta\tau^n}{n!}]$$

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} [H_n \mid_{\tau_0} \frac{\Delta\tau^n}{n!}]$$

$$F_{n+1} = F'_n + cr^{\alpha} G_n (-\frac{\mu}{r^3})$$

$$G_{n+1} = G'_n + cr^{\alpha} F_n$$

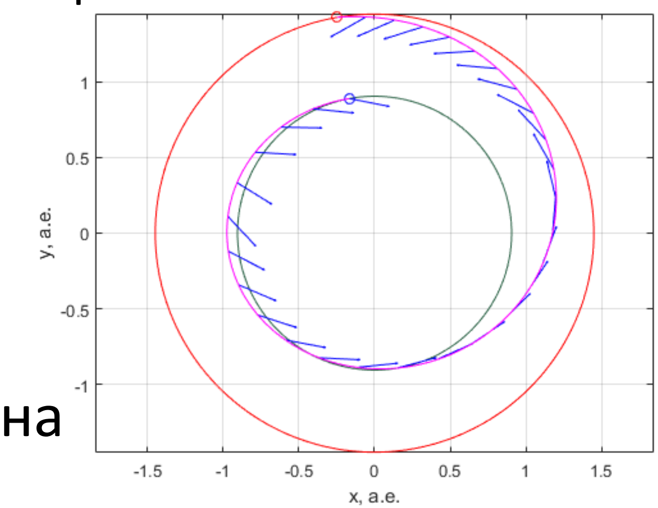
$$H_{n+1} = H'_n + cr^{\alpha} G_n$$

$$\Delta t \simeq \sum_{n=1}^{N} T_n \frac{\Delta\tau^n}{n!}, \; T_{n+1} = T'_n ,$$

где $F_0 = 1, G_0 = 0, H_0 = 0, T_1 = cr^{\alpha}$

Постановка задачи(1)

Определить оптимальную по затратам топлива межпланетную траекторию перелета от Земли к Марсу в центральном гравитационном поле Солнца



Предположения:

тяга малая

ускорение тяги ограничено

управление кусочно-постоянное

скорость истечения топлива постоянна

Определяется: направление и величина вектора тяги на каждом участке траектории

Варьируются:

даты старта и прилета КА

Постановка задачи(2)

ОКБ Факел: СПД-100В

- Точка старта: Земля
- Точка прилета: Марс
- Эфемериды: DE423
- Масса аппарата : 300 кг
- Двигатель : СПД 100-В (80 мН, 1600 с)
- Вектор гелиоцентрической скорости отлета равен вектору скорости Земли
- Вектор гелиоцентрической скорости в точке прилета равен вектору скорости Марса

Задача нелинейного программирования

Формула Циолковского:

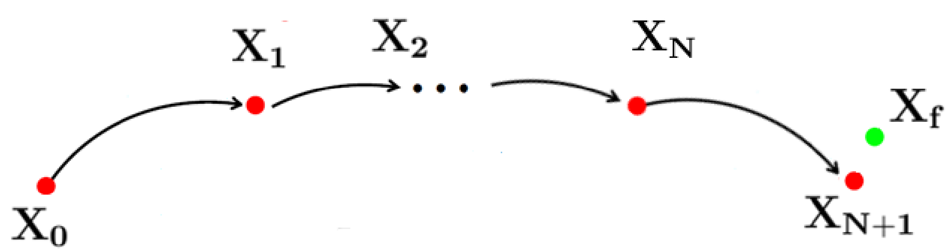
$$\Delta m = m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta v}{I_{sp} g}\right)\right), \quad \Delta v = \sum_{i=1}^{N} |\varepsilon_i| \Delta t$$

где Δv - затраты характеристической скорости, m_0 - начальная масса КА,

I_{sp} - удельный импульс двигателя, g = 9.80665 м/с ^{2}

Задача нелинейного программирования:

$$\begin{cases} J = \sum\limits_{i=1}^{N} |\varepsilon_i| \, \Delta \, t \longrightarrow \min \\ |\varepsilon_i| \leq \varepsilon_{max}, i = \overline{1, N} \\ \mathbf{X_{N+1}} - \mathbf{X_f} = \mathbf{0} \end{cases}$$



где ε_{max} - максимальная величина ускорения тяги,

$\mathbf{X_0}$, $\mathbf{X_f}$ - фазовые векторы планет

Решение оптимизационной задачи

- **Оптимизационный пакет SNOPT 7.6** с реализованным методом последовательного квадратичного программирования (sequential quadratic programming, SQP)

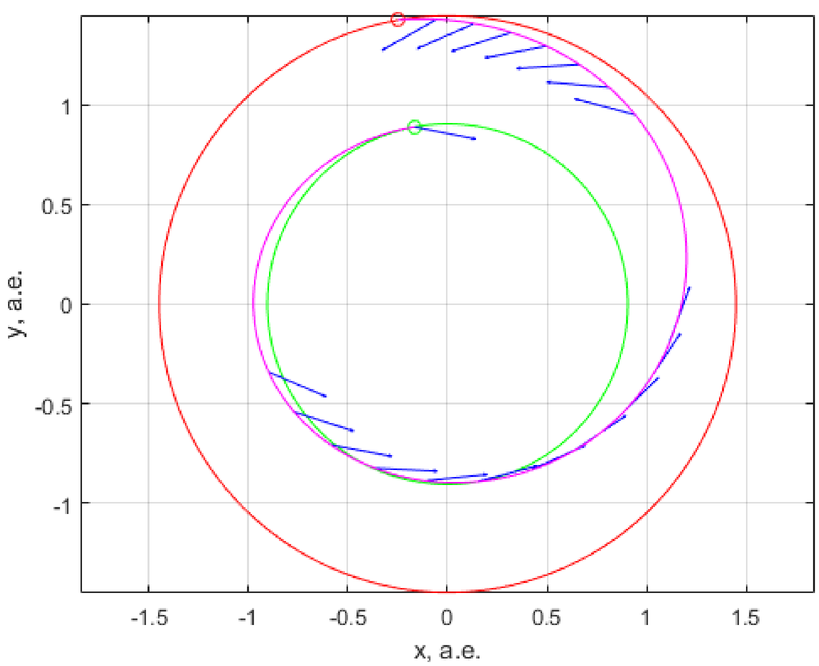
- **Реализация метода Пеллегрини**

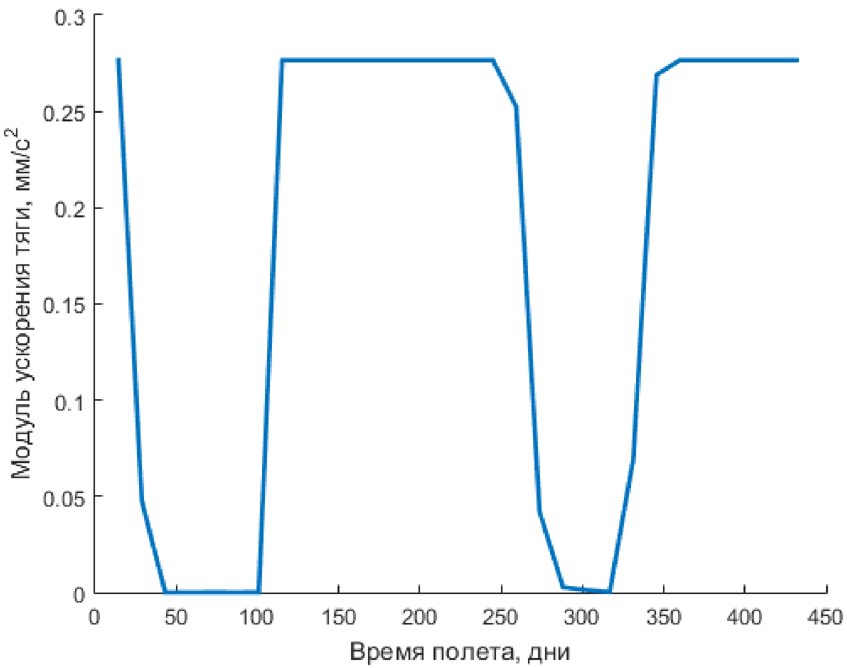
- **Языки программирования**: Fortran 90, MATLAB

- **Персональный компьютер:** операционная система Windows 7, процессор Intel Core i3 -2377M, частота 1.5 ГГц, оперативная память 4.0 ГБ.

- **К-60**: 66 вычислительных узлов с процессором 2 x Intel Xeon E5-2690 v4, 28 ядер, оперативная память 256 ГБ.

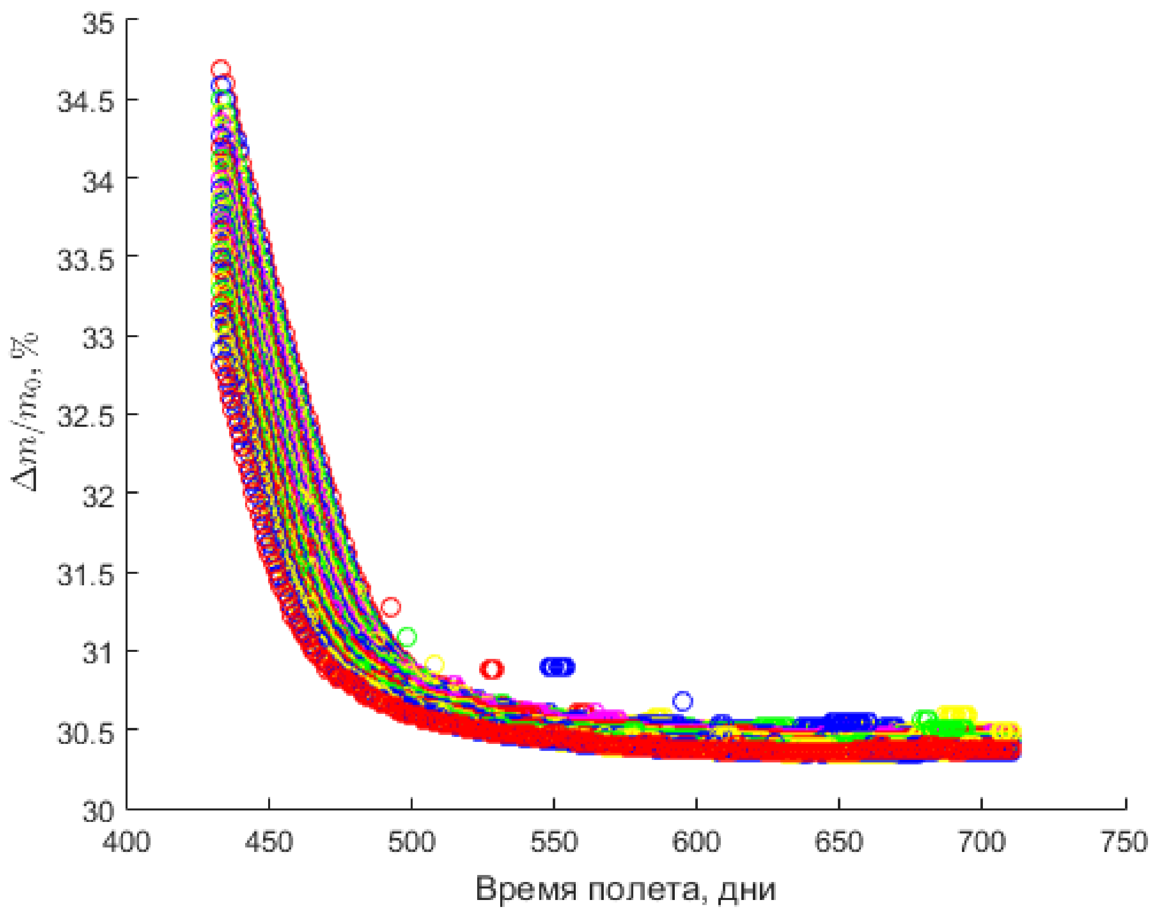
Оптимальные траектории перелета





Дата старта: 01.01.2020
Дата прилета: 08.03.2021
Время перелета: 432 дня
Участков траектории с постоянной тягой: 30
Затраты характеристической скорости: 6, 73 км/с
Относительные затраты топлива: 34, 75%

Зависимость затрат топлива от времени перелета для дат старта 01.01.2020 – 28.01.2020



Проблема выбора начального приближения для метода оптимизации

- **Возможные подходы:**
  метод Монте-Карло

  выбор начального приближения в более узкой области ускорений с нулевой и максимальной величиной

  метод продолжения по параметру

- **В данной работе:**
  метод проб и ошибок

  метод продолжения по времени перелета с шагом не более 6 часов

Заключение

- Проведен обзор методов решения задачи Штарка, наиболее эффективным по скорости методом оказалася метод Пеллегрини

- Разработан алгоритм поиска оптимальных траекторий с малой тягой на основе решения задачи Штарка методом Пеллегрини. Найдены оптимальные траектории перелета и исследована зависимость затрат топлива от времени перелета для различных дат старта и времени перелета, начальное приближение для найденных решений удалось получить с помощью метода продолжения по времени перелета

- Подготовлен интерфейс для работы с оптимизационным пакетом SNOPT для будущих исследований на многопроцессорных вычислительных системах

Выступления, гранты

Целоусова А.А., Широбоков М.Г. «Методы решения задачи Штарка для оптимизации межпланетных перелетов с малой тягой» Труды 59-й научной конференции МФТИ с международным участием, Москва--Долгопрудный--Жуковский, 21-26 ноября 2016 года.

Целоусова А.А., Широбоков М.Г. «Методы решения задачи Штарка для оптимизации межпланетных перелетов с малой тягой». XLI Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых-пионеров освоения космического пространства, Москва, 24-27 января 2017 г.

Целоусова А.А. «Оптимизация межпланетных траекторий с малой тягой на основе решения задачи Штарка» // Семинар кафедры математического моделирования и прикладной математики, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 15 мая 2017 года

Работа поддержана грантом РНФ №14-11-00621

Грант РФФИ №16-31-00321

Спасибо за внимание!

Решение

- **Первый этап:** разбиение траектории на несколько участков траектории, на которых тяга постоянна по величине и направлению

- **Второй этап:** сведение поставленной задачи к задаче нелинейного программирования

- **Третий этап:** решение полученной задачи нелинейного программирования численными методами

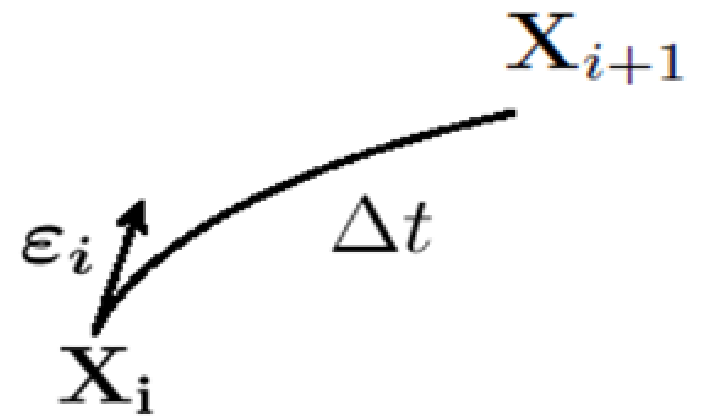
Дальнейшая работа

- Усовершенствование разработанного алгоритма для гарантированной сходимости процедуры
- Усовершенствование выбора начального приближения

Первый этап решения задачи

N - количество участков с фиксированной тягой

t - время перелета



$$\Delta t = \frac{t}{N}$$

$\mathbf{X}_i$ - фазовые векторы КА в узлах переключения тяги

ε_i - ускорение тяги на i-ом участке траектории

Аналитическое решение задачи

Гамильтониан системы в исходных переменных:

$$H = U + T = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} + \varepsilon z$$

Гамильтониан в параболических переменных:

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{\xi^2\eta^2} - \frac{2\mu}{\xi^2 + \eta^2} - \varepsilon\frac{\xi^2 - \eta^2}{2} \quad , \qquad p_\varphi = const$$

После выполнения преобразования Сундмана: $dt = (\xi^2 + \eta^2)d\tau$

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = p_\xi = \pm\dfrac{1}{\xi}\sqrt{\varepsilon\xi^6 + 2h\xi^4 + 2\alpha_1\xi^2 - p_\varphi^2} \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = p_\eta = \pm\dfrac{1}{\eta}\sqrt{-\varepsilon\eta^6 + 2h\eta^4 + 2\alpha_2\eta^2 - p_\varphi^2} \\ \dfrac{d\varphi}{d\tau} = p_\varphi^2\left(\dfrac{1}{\xi^2} + \dfrac{1}{\eta^2}\right) \end{cases}$$

$$\tau = \pm \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{u du}{\sqrt{P_\xi(u)}}$$

$$P_\xi(u) = \varepsilon u^6 + 2Hu^4 + 2\alpha_1 u^2 - p_\varphi^2$$

$$\tau = \tau(\xi)$$

$$\Downarrow$$

$$\xi = \xi(\tau)$$

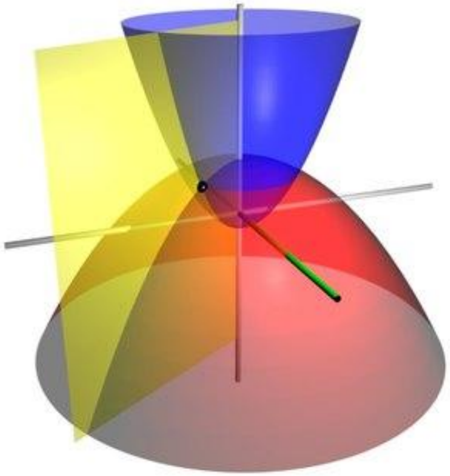
Эллиптические
функции
Якоби
(Лантуан, Рассел)

Эллиптические
функции
Вейерштрасса
(Бискани, Иццо)

Параболические координаты

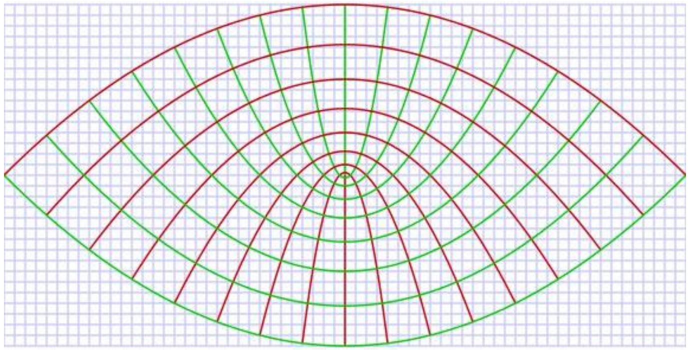
Трехмерный случай:

$$\begin{cases} x = \xi\eta\cos\varphi \\ y = \xi\eta\sin\varphi \\ z = \dfrac{\xi^2 - \eta^2}{2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \xi \geqslant 0 \\ \eta \geqslant 0 \\ \varphi \in (-\pi, \pi] \end{matrix}$$



Двумерный случай:

$$\begin{cases} x = \xi\eta \\ y = \dfrac{\xi^2 - \eta^2}{2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \xi \geqslant 0 \\ \eta \geqslant 0 \end{matrix}$$



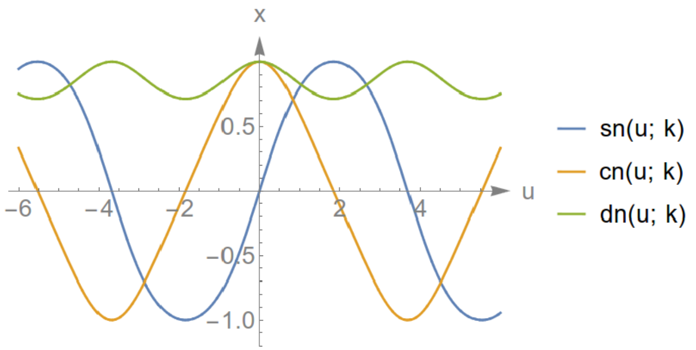
Эллиптические интегралы и функции

Эллиптический интеграл: $$f(x) = \int\limits_c^x R(t, \sqrt{P(t)})dt$$

Эллиптические функции – обратные к эллиптическим интегралам.

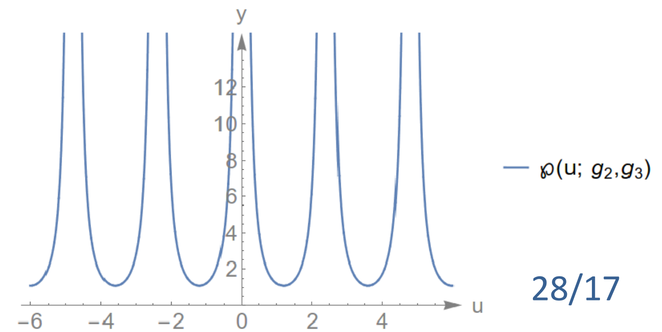
Эллиптическая функция Якоби $x = \mathrm{sn}(u;k)$ **–** обратная к :

$$u = \int\limits_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad 0 \le k^2 \le 1$$



Эллиптическая функция Вейерштрасса $y = \wp(u\,; g_2, g_3)$ – обратная к:

$$u = \int\limits_y^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} \qquad g_2, g_3 = \mathrm{const}$$



KS - переменные

- Переменные **u** и **w**, связанные с **r** и **v** соотношением

$$\mathbf{r} = \Lambda(\mathbf{u})\mathbf{u}$$
$$\mathbf{v} = \frac{2}{u^2}\Lambda(\mathbf{u})\mathbf{w}$$

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

Разделение переменных в Гамильтониане

- Введем функцию $\mathcal{H}_\tau = (H-h)(\xi^2+\eta^2)$
- Тогда $\mathcal{H}_\tau$ - гамильтониан системы во времени τ

$$\mathcal{H}_\tau = \underbrace{\frac{p_\xi^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2}\frac{1}{\xi^2} - h\xi^2 - \frac{\varepsilon}{2}\xi^4}_{\alpha_1} + \underbrace{\frac{p_\eta^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2}\frac{1}{2}\eta^2 - h\eta^2 + \frac{\varepsilon}{2}\eta^4}_{\alpha_2} - 2\mu$$

Заключение

- При оптимизации траекторий сначала используют прямые методы, а затем их решение рассматривают в качестве начального приближения для непрямых методов

- Оптимальное управление в прямых методах ищется в кусочно-постоянном виде, отсюда возникает задача Штарка

- Среди всех методов решения задачи Штарка на настоящий момент наиболее эффективным и универсальным является метод Пеллегрини

Спасибо за внимание!