

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени магистра
по направлению 03.04.01 «Прикладные математика и физика»,
магистерская программа «Управление динамическими системами»

Определение параметров модели гравитационного поля астероида с помощью группы малых аппаратов

Выполнил:

студент группы М05-872в

Воронина Мария Юрьевна

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент

Широбоков Максим

Геннадьевич

Москва, 2020

Аннотация

В работе предлагается методика определения параметров гравитационного поля астероида с помощью группы малых аппаратов. Параметрами являются коэффициенты перед гармониками в модели сферических гармоник поля астероида и гравитационный параметр астероида. Группа аппаратов состоит из материнского и дочерних аппаратов. Измерениями гравитационного поля являются расстояние и радиальная скорость между материнским и дочерними космическими аппаратами (КА). Считается, что в процессе формирования измерений аппараты не управляются.

На примерах уже изученных астероидов Эрос и Итокава была проверена предложенная методика. Была исследована точность нахождения параметров гравитационного поля в зависимости от ошибок навигационных и траекторных измерений и области видимости радиометрической системы материнского КА. В результате исследований было выяснено, что ошибка траекторных измерений играет определяющую роль в точности нахождения параметров гравитационного поля. Кроме того, результат вычисления этих параметров можно улучшить увеличением числа дочерних аппаратов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Исследование гравитационного поля массивного тела.....	8
1.1. Модели гравитационного поля массивного тела	8
1.2. Исследование гравитационного поля.....	16
2. Постановка задачи.....	20
2.1. Уравнения движения аппаратов.....	20
2.2. Дополнительные ограничения и ошибки измерения.....	23
3. Расчет сложного гравитационного поля астероида.....	25
3.1. Формирование данных траекторных измерений.....	25
3.2. Постановка оптимизационной задачи	26
3.3. Решение оптимизационной задачи	27
4. Примеры расчета гравитационного поля астероидов	29
4.1. Расчет гравитационного поля астероида Эрос	30
4.2. Расчет гравитационного поля астероида Итокава	40
Заключение.....	48
Список использованных источников	50
Приложение А. Метод Левенберга–Марквардта и метод доверительных областей	53

Введение

В последние несколько десятилетий растёт интерес к исследованию астероидов и комет. Было совершено множество миссий, среди которых были выполнены миссии с выходом на орбиту [1], мягкой посадкой на поверхность [1] и забором грунта астероида [2]. Астероиды и кометы часто называют малыми или примитивными телами Солнечной системы, однако они обладают важной информацией о раннем строении Солнечной системы и Вселенной в целом, содержат в себе полезные ископаемые и являются потенциально опасными объектами для человечества. В химический состав некоторых астероидов входят такие полезные ископаемые как золото, кобальт, платина, никель и т.д., что подкрепляет коммерческий интерес к этим объектам [3]. А падение метеорита 15 февраля 2013 года на территорию Челябинской области показало важность изучения и слежения за малыми телами с точки зрения безопасности человечества.

Астероиды различаются по форме и размерами между собой. Некоторые из них имеют форму близкую к сферически симметричной (астероид Веста), форма других сильно вытянута (например, Эрос, Итокава и т.д.). Размеры малых тел варьируются от нескольких метров до нескольких сотен километров. На Рис. 1 показано несколько астероидов и комет, фотографии которых удалось получить в миссиях. Малые тела классифицируются по составу на С-тип (углеродистый), S-тип (силикатный) и M-тип (металлический). Такая классификация называется спектральной классификацией астероидов и опирается на показатели цвета, альbedo и характеристик спектра отраженного света от поверхности малого тела [4]. Позже каталог классификации астероидов был расширен.

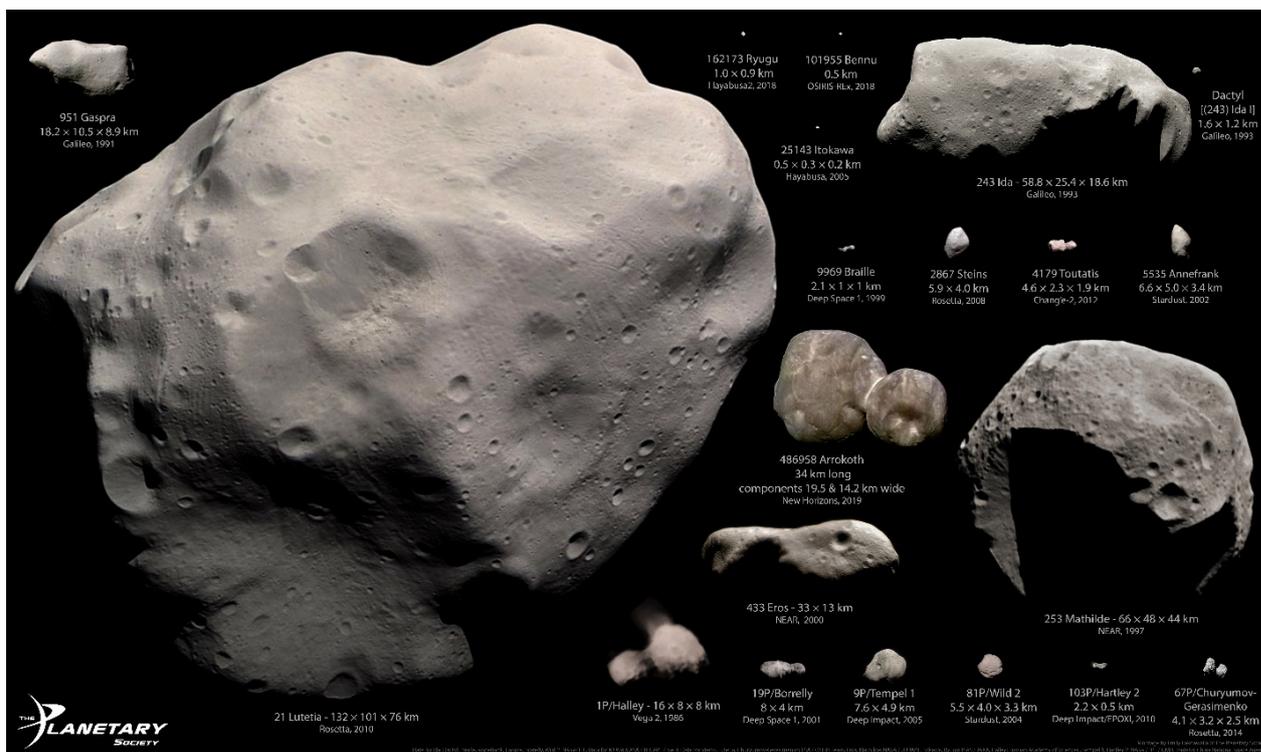


Рисунок 1 – Некоторые астероиды, их размеры и исследовавшие их космические миссии. [фото: Emily Lakdawalla/The Planetary Society]

Первые фотографии астероидов были получены в 1991 году космическим аппаратом (КА) Галилео (Jupiter Orbiter Probe mission) [5]. Аппарат Галилео сфотографировал астероиды Гаспра и Ида (Рис. 1 верхний левый угол и наверху справа) и обнаружил, что астероид Ида имеет спутник, названный Дактиль. В 2000 году аппарат «Near Earth Asteroid Rendezvous Shoemaker» (сокр. NEAR Shoemaker) [1] вышел на орбиту астероида Эрос и совершил мягкую посадку на его поверхность (на Рис. 1 снизу посередине). В ходе миссии был рассчитан гравитационный параметр астероида и получены параметры модели гравитационного поля. Первый забор грунта малого тела и доставка его на Землю был выполнен космическим аппаратом Хаябуса (Hayabusa) в 2005 году [2]. Аппарат Хаябуса взял образцы грунта астероида Итокава (на Рис.1 слева от астероида Ида). В 2010 году аппарат вошел в плотные слои атмосферы Земли. Благодаря данным орбитального движения аппарата вокруг Итокавы было рассчитано его гравитационное поле. В настоящий момент выполняются две миссии по забору и доставке грунта малого тела на Землю. Первая миссия Хаябуса-2 (Hayabusa-2) была запущена

в 2014 году и в прошлом году собрала частицы грунта астероида Рюгу [6]. Сейчас аппарат Хаябуса-2 направляется на Землю. Вторая миссия Origins Spectral Interpretation Resource Identification Security Regolith Explorer (OSIRIS-REx) запущена в 2016 году и исследует астероид Бену [7]. Забор грунта с поверхности Бену будет выполнен 20 октября этого 2020 года. Вышеупомянутые миссии – это малая часть уже выполненных и выполняемых миссий по исследованию малых тел Солнечной системы.

Построение точной модели гравитационного поля тела является важнейшей задачей при проектировании и проведении космических миссий. Исходными параметрами для построения модели гравитационного поля могут являться положение и скорость аппарата, показание гравиметра (градиента силовой функции в точке), относительное положение и скорость между КА и т.д. – все эти данные называются траекторными измерениями. Существует большой спектр методов нахождения параметров гравитационного поля. Для некоторых методов параметры гравитационного поля аналитически выражаются из кеплеровых элементов измеренной орбиты [8]. В других решается задача минимизации целевой функции, зависящей от траекторных измерений [9]. Кроме того, исследовать гравитационное поле можно с помощью интеграла энергии [10]. Эффективность этих методов напрямую зависит от точности траекторных измерений. Самыми яркими миссиями, в которых решалась проблема точности измерений, являлись следующие миссии: The Gravity Recovery And Climate Experiment (GRACE) [11], The Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL) [12]. В них определялось гравитационное поле Земли и Луны сверх высоких порядков точности. Особенностью этих миссий является использование группы, состоящей из двух аппаратов, что позволило исключить нежелательные возмущения и получить траекторные измерения с недостижимой ранее точностью

Целью данной работы является построение методики определения гравитационного поля астероида группой двух и более аппаратов. Группа

состоит из материнского и дочерних аппаратов. Траекторными измерениями являются расстояние и радиальная скорость между материнским и дочерними КА. В работе будет исследована зависимость точности определения параметров гравитационного поля от ошибок навигации материнского аппарата, ошибок траекторных измерений и радиуса области видимости радиометрической системы материнского КА.

В главе 1 представлены различные модели гравитационного поля тела и изложен основной метод определения параметров поля. Глава 2 посвящена постановке задачи, описанию дополнительных ограничений и ошибок. В этой главе определяется система координат и вводятся уравнения движения аппаратов вокруг астероидов. В главе 3 представлена методика решения поставленной задачи. Была поставлена и решена оптимизационная задача. Описан численный метод решения задачи оптимизации. Глава 4 демонстрирует применение построенного метода к исследованию астероидов Эрос и Итокава. В заключении приводятся выводы данной работы.

1. Исследование гравитационного поля массивного тела

1.1. Модели гравитационного поля массивного тела

Моделирование гравитационного поля является важнейшей задачей небесной механики. Космические тела редко имеют форму близкой к правильной. Планеты обычно сплюснуты у полюсов, а формы астероидов и комет разнообразны. Поэтому существует множество способов описать гравитационное поле тела, каждый из которых имеет свои особенности. В этом параграфе рассмотрим основные модели: модель сферических и эллипсоидальных гармоник и полиэдральная модель.

Модель сферических гармоник.

Пусть тело массой M и объемом V_M имеет произвольную форму. Поместим начало декартовой системы координат (СК) в центр масс (Рис. 1.1). И пусть фиксированная точка P , в которой необходимо определить силовую функцию гравитационного поля тела, – внешняя, то есть находится вне тела. Вектор \mathbf{r} определяет координату точки P , \mathbf{r}' – радиус вектор к элементу массы dm , а плотность массы $\rho(\mathbf{r}')$ – кусочно-непрерывная функция координат.

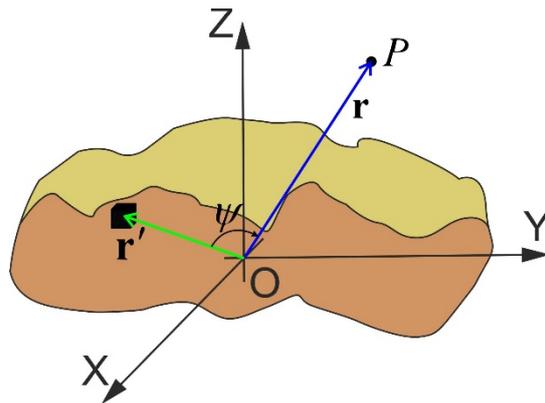


Рисунок 1.1 – Притяжение тела произвольной формы.

Силовая функция гравитационного поля имеет вид:

$$U(\mathbf{r}) = G \int_{V_M} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV = G \int_M \frac{dm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.1)$$

где G – гравитационная постоянная.

Используя теорему косинусов, получим:

$$U(\mathbf{r}) = G \int_M \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}} dm = G \int_M \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} dm \quad (1.2)$$

где r и r' – модули советующих векторов, а ψ – угол между \mathbf{r} и \mathbf{r}' .

Поскольку точка P находится вне тела, и как правило, далеко от него, знаменатель подынтегрального выражения можно разложить в ряд по степеням r'/r . Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\alpha) \quad (1.3)$$

где $P_n(\alpha)$ – полиномы Лежандра степени n . Такой полином можно задать формулой Родрига:

$$P_n(\alpha) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\alpha^2 - 1)^n}{d\alpha^n} \quad (1.4)$$

Тогда выражение для силовой функции примет вид:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{G}{r} \int_M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \psi) dm \quad (1.5)$$

Перейдем в сферическую систему координат (r, θ, φ) :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \cos \varphi \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.6)$$

Выразив $\cos \psi$ через сферические координаты $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$, $(x', y', z') \rightarrow (r', \theta', \varphi')$ и используя теорему сложения для полиномов Лежандра, получим выражение $P_n(\cos \psi)$ через координаты (r, θ, φ) (подробнее см. [13]).

$$\begin{aligned}
P_n(\cos\psi) &= P_n(\sin\theta)P_n(\sin\theta') + \\
&+ 2\sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin\theta)\cos m\varphi P_{nm}(\sin\theta')\cos m\varphi' + \\
&+ 2\sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin\theta)\sin m\varphi P_{nm}(\sin\theta')\sin m\varphi'
\end{aligned} \quad (1.7)$$

где $P_{nm}(\sin\theta)$ – присоединенная функция Лежандра порядка n и степени m . Присоединенная функция Лежандра связана с полиномом Лежандра формулой:

$$P_{nm}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad (1.8)$$

Далее заменим тело произвольной формы на шар массой M и радиусом R^* (обычно он равен максимальному или среднему радиусу тела) и будем считать, что гравитационное поле шара полностью соответствует гравитационному полю тела. Тогда силовую функцию гравитационного поля тела можно записать в виде:

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R^*}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\theta) [C_{nm} \cos(m\varphi) + S_{nm} \sin(m\varphi)] \quad (1.9)$$

где μ – гравитационный параметр тела, (r, θ, φ) – координата точки P .

Коэффициенты C_{nm} и S_{nm} называются коэффициентами перед гармониками гравитационного поля (или коэффициенты Стокса). Они выражаются формулами:

$$\begin{cases} C_{nm} = \frac{(2-\delta_{0,m})(n-m)!}{M(n+m)!} \int_{V_M} \left(\frac{r'}{R^*}\right)^n P_{nm}(\sin\theta') \cos(m\varphi') \rho(r', \theta', \varphi') dv \\ S_{nm} = \frac{2}{M(n+m)!} \int_{V_M} \left(\frac{r'}{R^*}\right)^n P_{nm}(\sin\theta') \sin(m\varphi') \rho(r', \theta', \varphi') dv \end{cases} \quad (1.10)$$

где $\delta_{0,m}$ – символ Кронекера, (r', θ', φ') – координаты элемента массы dm , $\rho(r', \theta', \varphi')$ – плотность элемента массы.

Ряд (1.9) сходится абсолютно и равномерно, если выполнено: $r > R^*$ [14 стр. 21]. Гравитационное поле в модели сферических гармоник полностью описывается выражением (1.9). Точность моделируемого поля определяется степенью и порядком известных для тела коэффициентов Стокса. Рассмотрим первые три члена разложения силовой функции (1.9).

- Первый член разложения

При $n = 0$:

$$C_{00} = 1 \quad (1.11)$$

$$U_0(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu}{r} \int_{V_M} \rho(r', \theta', \varphi') dv = \frac{\mu}{r} \quad (1.12)$$

Это соответствует силовой функции притяжения материальной точки.

- Второй член разложения

При $n = 1$:

$$C_{10} = \frac{z_M}{R^*}, C_{11} = \frac{x_M}{R^*}, S_{11} = \frac{y_M}{R^*} \quad (1.13)$$

$$U_1(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu}{r^3} (x x_M + y y_M + z z_M) \quad (1.14)$$

где $(x_M, y_M, z_M) = (r_M \cos \theta_M \cos \varphi_M, r_M \sin \theta_M \cos \varphi_M, r_M \sin \theta_M \sin \varphi_M)$ – координаты центра масс притягивающего центра M , (x, y, z) выражаются формулой (1.6). Поскольку центр масс тела находится в начале координат, то $C_{10} = 0, C_{11} = 0, S_{11} = 0$. В задачах член U_1 обычно не рассматривается.

- Третий член разложения

При $n = 2$:

$$C_{20} = \frac{2C - (A + B)}{2MR^{*2}}, C_{21} = \frac{E}{MR^{*2}}, S_{21} = \frac{D}{MR^{*2}} \quad (1.15)$$

$$C_{22} = \frac{B - A}{4MR^{*2}}, S_{22} = \frac{F}{2MR^{*2}}$$

здесь A, B, C – осевые моменты инерции, D, E, F – центробежные моменты инерции. Тогда силовая функция второго порядка разложения имеет вид:

$$U_2 = \frac{\mu}{2r^3}(A + B + C + 3I) \quad (1.16)$$

где I – полный момент инерции. Зачастую выбирают такую систему координат, в которой оси системы координат параллельны осям инерции. Тогда $C_{21} = S_{21} = S_{22} = 0$.

Таким образом, первый член разложения силовой функции равен силовой функции центрального гравитационного поля, второй член разложения выражается через координаты центра масс тела в выбранной СК, а третий член – через моменты инерции тела второго порядка. При степенях разложения выше второй силовая функция будет зависеть от моментов инерции более высокого порядка.

Разложение силовой функции гравитационного поля астероида в ряд по сферическим функциям имеет особенности. Форма астероида может быть сильно несферической. Тогда аппроксимация тела шаром может не учитывать некоторые явления, связанные с распределением гравитационного поля тела несферической формы. Конечно, такие тела лучше описывать схожей фигурой. Это позволит описать гравитационное поле точнее, однако модель получится сложнее приведенной выше. Так была построена модель эллипсоидальных гармоник.

Модель эллипсоидальных гармоник.

Выпишем уравнения разложения силовой функции по эллипсоидальным гармоникам без вывода и определим нескольких вспомогательных функций. Подробнее вывод следующих уравнений можно изучить в книге «Небесная механика. Основные задачи и методы» автора Г.Н. Дубошина [13].

Как и в предыдущем случае, поставим задачу нахождения значения силовой функции в точке P с координатами (x, y, z) . Тело аппроксимируем эллипсоидом, с полуосями a, b, c и условием: $c \leq b \leq a$ (Рис. 1.2).

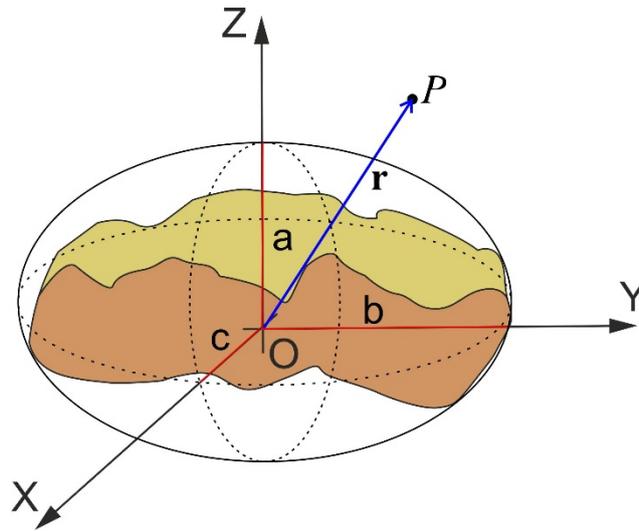


Рисунок 1.2 – Аппроксимация тела произвольной формы эллипсоидом.

Перейдем в эллипсоидальную систему координат $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, где координаты $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – действительные числа и являются корнями решения канонического уравнения относительно s :

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1 \quad (1.17)$$

Координаты $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ определены в следующей области: $\lambda_1 \geq -c^2$, $-b^2 \leq \lambda_2 \leq -c^2$, $-a^2 \leq \lambda_3 \leq -b^2$.

В этой СК определим функцию Ламе $E_n^s(\xi)$ (где $\xi = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) первого рода и n -го порядка – частное решение уравнения Ламе [13, стр. 198]:

$$4R(\xi) \frac{d}{d\xi} \left[R(\xi) \frac{dE_n^s(\xi)}{d\xi} \right] \equiv [n(n+1)\xi + K_{ns}] dE_n^s(\xi) \quad (1.18)$$

здесь

$$R(\xi) = \sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)},$$

K_{ns} – вещественные числа ($s = 1, 2, \dots, 2n+1$), при которых уравнение Ламе имеет решение в виде многочлена относительно ξ .

Также введем уравнение Ламе второго рода и n -го порядка $F_n^s(\xi)$:

$$F_n^s(\xi) = (2n+1)E_n^s(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{R(x)[E_n^s(x)]^2} \quad (1.19)$$

Оно обращается в нуль при $\xi = \infty$.

Итак, силовая функция гравитационного поля в модели эллипсоидальных гармоник имеет вид:

$$U(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mu \sum_{n=0}^N \sum_{s=1}^{2n+1} \alpha_n^s \frac{F_n^s(\lambda_1)}{F_n^s(a)} E_n^s(\lambda_2) E_n^s(\lambda_3) \quad (1.20)$$

где α_n^s – некоторые характерные для тела коэффициенты, которые можно вывести из коэффициентов C_{nm}, S_{nm} модели сферических гармоник или моментов инерции тела [15].

Конечно, аппроксимация сильно нерегулярного тела эллипсоидом может описать гравитационное поле с большей точностью, однако такая аппроксимация приводит к усложнению уравнения силовой функции.

Модели сферических и эллиптических гармоник хорошо описывают гравитационное поле, если точка P (или аппарат) находится далеко от поверхности тела. В случае, когда аппарат приближается к поверхности одного, эти модели использовать нельзя (в силу условия $r'/r \ll 1$) и тогда рассматривается следующая модель.

Полиэдральная модель тела с постоянной плотностью.

В общем случае плотность тела не является постоянной величиной, однако для простоты в этом разделе рассмотрим однородное тело. Пусть поверхность тела задана многогранником с треугольными гранями и пусть имеется ν вершин, тогда в этом многограннике $f = 2\nu - 4$ граней и $e = 3(\nu - 2)$ ребер. Каждая грань имеет набор векторов \mathbf{r}_i^f , $i = 1, 2, 3$ обозначающий порядок вершин таким образом, что три вершины взятые по порядку проходят треугольник против часовой стрелки относительно нормали к грани \mathbf{n}_f . Ребро к смежным граням f и f' обозначается вектором

\mathbf{r}_i^e , $i=1,2$, а нормаль к ребру $\mathbf{n}_e^f \perp \mathbf{n}_f$ (Рис. 1.3). Все нормали нормированы на единицу.

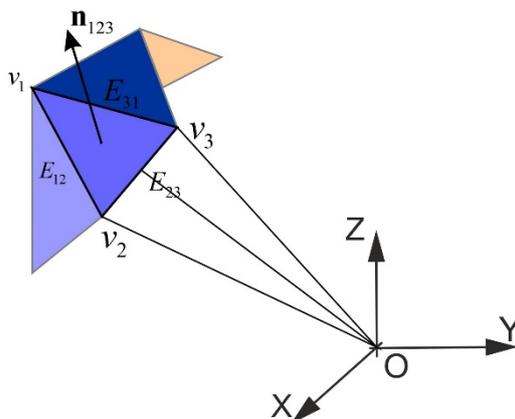


Рисунок 1.3 – Обозначение граней и ребер.

Выберем произвольную точку P вне тела с координатами $\mathbf{r} = [x, y, z]$ в декартовой системе координат $OXYZ$. Вектор, направленный от ребра e в точку P , обозначим \mathbf{r}_e , а вектор от грани f – \mathbf{r}_f . Силовая функция в точке \mathbf{r} имеет вид:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{G\rho}{2} \left[\sum_{e \in \text{edges}} \mathbf{r}_e \mathbf{E}_e \mathbf{r}_e L_e - \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{r}_f \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f w_f \right] \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= \mathbf{n}_f \times \mathbf{n}_e^f + \mathbf{n}_{f'} \times \mathbf{n}_e^{f'} \\ \mathbf{F}_f &= \mathbf{n}_f \times \mathbf{n}_{f'} \end{aligned} \quad (1.22)$$

являются весовыми матрицами (знак \times обозначает векторное произведение) и отвечают за вклад ребра двух смежных граней и самих граней соответственно, а коэффициенты

$$L_e = \ln \frac{r_1^e + r_2^e + |r_1^e - r_2^e|}{r_1^e + r_2^e - |r_1^e - r_2^e|} \quad (1.23)$$

$$w_f = 2 \arctg \frac{\mathbf{r}_1^f \mathbf{r}_2^f \mathbf{r}_3^f}{r_1^f r_2^f r_3^f + r_1^f \mathbf{r}_2^f \mathbf{r}_2^f + r_2^f \mathbf{r}_3^f \mathbf{r}_1^f + r_3^f \mathbf{r}_1^f \mathbf{r}_2^f}$$

отвечают за вклад тетраэдра с основанием f .

Данная модель хорошо предсказывает распределение гравитационного поля тела, однако она требует вычислительной мощности бóльшей, чем для модели сферических гармоник. Поэтому эта модель часто комбинируется с другими, например, с моделью сферических гармоник. Например, пока аппарат находится вне аппроксимирующей сферы, используется разложение по шаровым функциям. При движении внутри сферы применяется полиэдральная модель.

Таким образом, были рассмотрены некоторые модели гравитационного поля тела. Каждая из моделей обладает рядом преимуществ и недостатков. Так, модель сферических гармоник имеет простой вид и не требует больших вычислительных мощностей (относительно полиэдральной модели), но она плохо отображает гравитационное поле сильно нерегулярных по форме тел и не подходит для моделирования движения вблизи к поверхности тела. В модели эллипсоидальных гармоник тело аппроксимируется близкой по форме фигурой, однако расчет силовой функции уравнением (1.21) гораздо сложнее, чем для предыдущей модели. Последняя модель лучше предыдущих учитывает форму тела и определяет динамику аппарата вблизи к поверхности, но требует большей вычислительной мощности, в сравнении с предыдущими моделями.

В данной работе гравитационное поле астероида будет описываться моделью сферических гармоник.

1.2. Исследование гравитационного поля

Задачей нахождения гравитационного поля космического тела занимаются в разделе науки геодезии. В ней параметры модели гравитационного поля определяются с помощью наземных и орбитальных наблюдений. Большинство методов получения параметров гравитационного поля сводятся к решению задачи минимизации невязки измерений и измерений, рассчитанных в математической модели. Основные принципы такого подхода изложены в монографиях [16] и [8].

Алгоритм получения параметров гравитационного поля не привязан к модели гравитационного поля. Для описания алгоритма сделаем следующие предположения: пусть O_i – наблюдаемая величина, C_i – аналогичная наблюдаемая величина в математической модели а i – порядковый номер, и пусть известно начальное приближение модели.

В общем случае реальные измерения не совпадают с измерениями из математической модели, т.е.

$$O_i \neq C_i \quad (1.24)$$

Чтобы выражение (1.24) стало равенством введем поправку к наблюдениям dO_i , которая устраняет все расхождения, связанные с несовершенством математической модели. Она состоит из измерений, связанных с влиянием возмущений, например, атмосферным сопротивлением, силой светового давления, притяжением от других небесных тел и т.д. В начальной задаче поправки к наблюдениям являются следствием не только возмущений, но и неточностью параметров $\mathbf{P} = [P_1; \dots; P_i; \dots; P_m]$, где m – количество параметров математической модели, гравитационного поля начального приближения. Линеаризуем равенство $O_i + dO_i - C_i = 0$:

$$O_i + dO_i = C_i + \sum_i \frac{\partial C_i}{\partial P_j} dP_j \quad (1.25)$$

или

$$(O - C)_i = \sum_i \frac{\partial C_i}{\partial P_j} dP_j - dO_i \quad (1.26)$$

где dP_j – поправки к параметрам модели. Для решения этой задачи число наблюдений должно быть не меньше числа параметров. Обычно, число наблюдений значительно больше числа параметров. Заменим $(O - C)_i = f_i$, $\partial C_i / \partial P_j = M_{ij}$, $dP_j = z_j$, $dO_i = x_i$, тогда уравнение (1.26) запишется в матричном виде:

$$\mathbf{f} = \mathbf{Mz} - \mathbf{x} \quad (1.27)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [dO_1, dO_2, \dots, dO_n]^T, \\ \mathbf{z} &= [dP_1, dP_2, \dots, dP_m]^T, \\ \mathbf{f} &= [O_1 - C_1, O_2 - C_2, \dots, O_n - C_n]^T, \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial P_1} & \frac{\partial C_1}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial C_1}{\partial P_m} \\ \frac{\partial C_2}{\partial P_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial C_n}{\partial P_1} & \dots & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial P_m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

здесь n – количество наблюдений, m – количество параметров в модели гравитационного поля.

Уравнение (1.26) запишем в более общем виде:

$$\mathbf{Cx} + \mathbf{Mz} = \mathbf{f} \quad (1.28)$$

где \mathbf{C} – матрица, каждая строка которой должна иметь минимум один ненулевой элемент. Вернемся к определению поправок к наблюдению для начальной задачи. Заметим, что задача нахождения параметров \mathbf{z} сводится к решению задачи условной оптимизации квадрата поправок \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x} &= \min \\ \mathbf{Cx} + \mathbf{Mz} - \mathbf{f} &= 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

здесь $\mathbf{W} = \text{cov}\{dO_i, dO_j\}$ – ковариационная матрица поправок к наблюдениям. Поскольку измерения всегда содержат ошибки случайного характера, то поправки к наблюдениям являются псевдослучайными величинами.

Эта задача решается методом множителей Лагранжа. Опустив соответствующие преобразования [8], поправки dO_i и dP_j находятся из уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= [\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{W} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \left[\mathbf{E} - \mathbf{M} (\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \right] \mathbf{f} \end{aligned} \quad (1.30)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{C} \mathbf{W} \mathbf{C}^T$, \mathbf{E} – соответствующая размерности следующего слагаемого в (1.30) единичная матрица. Ковариационные матрицы поправок к параметрам dP_j и новую ковариационную матрицу поправок к наблюдениям можно вычислить по формулам соответственно:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_z &= (\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{-1} \\ \mathbf{U} &= \mathbf{W} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \left[\mathbf{I} - \mathbf{M} (\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \right] \mathbf{C} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Формулы (1.30) позволяют уточнить гравитационное поле тела. Этот алгоритм был использован для нахождения гравитационного поля Земли [17], Луны [18], астероида Эрос [19] и т.д. Однако он имеет ряд недостатков. В реальных миссиях число измерений, как и число параметров \mathbf{P} может быть достаточно большим, соответственно большим будет и размерность матриц \mathbf{f} , \mathbf{M} и \mathbf{K} . Находить обратную к матрице и транспонирование таких матриц требует больших вычислительных мощностей. Поэтому задачу (1.29) обычно решают методами оптимизации для задач больших размерностей или методами диагонализации матриц.

В данной работе параметрами гравитационного поля P_i астероида являются гравитационный параметр и коэффициенты Стокса. Для их нахождения будет поставлена задача оптимизации квадрата невязки траекторных измерений O_i и измерений, рассчитанных в модели C_i .

2. Постановка задачи

Целью данной работы является разработка методики нахождения сложного гравитационного поля астероида с помощью группы малых аппаратов. Поле астероида определяется гравитационным параметром и коэффициентами перед гармониками в модели разложения гравитационного поля в ряд по шаровыми функциям. В данной постановке у астероида известны следующие параметры:

- Размеры астероида
- Радиус аппроксимирующей сферы
- Период вращения

Группа аппаратов состоит из материнского и дочерних КА, управление аппаратами не рассматривается. Дочерние КА являются малыми аппаратами, которые в некоторый момент времени отделяются от материнского аппарата и движутся по соседним орбитам. С заданным интервалом времени измеряется расстояние и радиальная скорость между материнским и дочерними аппаратами. Полученные измерения образуют данные траекторных измерений.

2.1. Уравнения движения аппаратов

Помимо гравитационного поля астероида на группу аппаратов действует сила гравитационного притяжения Солнца и планет Солнечной системы, а также сила светового давления. Для расчета точного положения массивных тел Солнечной системы используется эфемеридная модель движения DE430 [20]. В ней основной системой координат является Международная небесная система координат. Это инерциальная СК с началом в барицентре Солнечной системы и осями, расположенными определенным образом относительно 295 внегалактических радиоисточников. В этой системе координат определяются положения планет Солнечной системы, Солнца и астероида в заданные моменты времени.

Для описания движения аппаратов вокруг астероида введем псевдоинерциальную систему координат (ИСК) и вращающуюся системы координат (ВСК), с началом в центре масс астероида. Такая СК считается инерциальной поскольку аппараты движутся в течении короткого, относительно орбитального движения астероида, интервала времени. В ВСК ось Oz направлена вдоль главной оси инерции и сонаправлена с вектором угловой скорости вращения астероида $-\mathbf{w}_{aster}$. Оси Ox и Oy параллельны соответствующим осям инерции. В инерциальной системе координат $OXYZ$ в начальный момент времени оси совпадают с осями вращающейся системы координат и фиксированы по времени (Рис. 2.1).

Ориентация осей инерциальной системы координат относительно Международной небесной системы координат задается углами Эйлера.

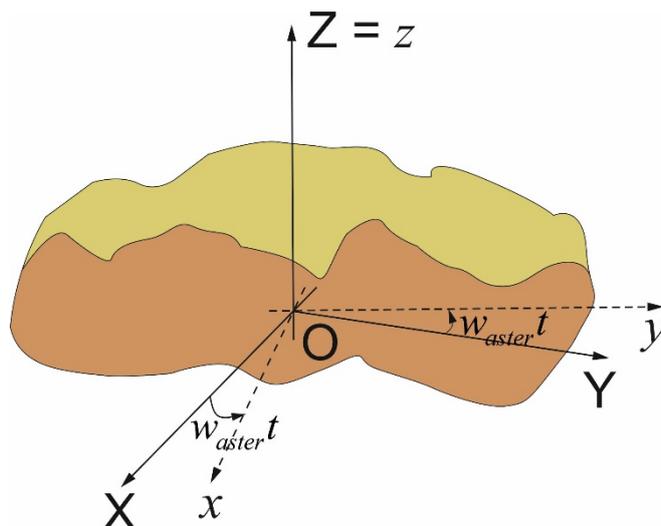


Рисунок 2.1 – Инерциальная и вращающаяся системы координат.

Уравнения движения аппарата в ИСК с учетом притяжения N тел Солнечной системы и силы светового давления имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \nabla_{xyz} \mathbf{U} - \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \right) + \mathbf{a}_{SRP} \end{cases} \quad (2.1)$$

где $[\mathbf{r}; \mathbf{v}]$ – фазовый вектор аппарата, \mathbf{U} – силовая функция гравитационного поля, описанный уравнением (1.9), μ_i – гравитационный параметр i -го

массивного тела Солнечной системы, \mathbf{r}_i – его радиус-вектор, \mathbf{a}_{SRP} – ускорение силы светового давления.

Ускорение силы светового давления зависит от вектора направления от КА на Солнце \mathbf{r}_s , вектора нормали к поверхности аппарата \mathbf{n} , отношения площади к массе КА S_M , коэффициентов отражения зеркального отражения α, μ соответственно и имеет вид [21]:

$$a_{SRP} = S_M \cdot P_0 \cdot (\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) \left[(\alpha - 1)\mathbf{r}_s - 2\alpha\mu(\mathbf{r}_s, \mathbf{n})\mathbf{n} - \alpha(1 - \mu) \left(\mathbf{r}_s + \frac{2}{3}\mathbf{n} \right) \right] \quad (2.2)$$

где

$$P_0 = \frac{S_0}{c} \left(\frac{AU}{|\mathbf{r}_{sun}|} \right)^2,$$

$S_0 = 1361 \text{ Вт/м}^2$ – солнечная постоянная, AU – астрономическая единица, c – скорость света.

В данной задаче считается, что направление вектора нормали аппаратов всегда сонаправлено с направлением на Солнце. Уравнение ускорения силы светового давления в этом случае принимает вид:

$$a_{SRP \text{ const}} = -S_M \cdot P_0 \cdot \mathbf{r}_s \left[\frac{1}{3}\alpha(2 + \mu) - 1 \right] \quad (2.3)$$

Кроме того, введем безразмерную систему единиц, в которой 1) за единицу расстояния R_{norm} принимается значение радиуса аппроксимирующей сферы R^* из уравнения (1.7), 2) за единицу времени: $T_{norm} = T_{aster}$. Единицы скорости V_{norm} , гравитационного параметра μ_{norm} , угловой скорости W_{norm} и ускорения вычисляются по формулам:

$$V_{norm} = \frac{R_{norm}}{T_{norm}}, \quad \mu_{norm} = \frac{4\pi^2 R_{norm}^3}{T_{norm}^2}, \quad W_{norm} = \frac{2\pi}{T_{norm}}, \quad a_{norm} = \frac{R_{norm}}{T_{norm}^2} \quad (2.4)$$

Коэффициенты перед гармониками являются безразмерными величинами. Таким образом, траекторные измерения в новой системе единиц

станут безразмерными, это свойство будет использовано при постановке задачи оптимизации.

2.2. Дополнительные ограничения и ошибки измерения

В реальных миссиях существуют ошибки измерений и навигации. Они связаны с неточной работой навигационных систем, а также со случайными отклонениями. В данной работе ошибки моделируются как случайное независимое отклонение, подчиненное нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием. Значение среднеквадратического отклонения нормального распределения зависит от типа измерения. В задаче вводятся три типа ошибок измерений:

- ошибка начального вектора состояния аппарата,
- ошибка системы отделения дочерних аппаратов,
- ошибка траекторных измерений.

Значения ошибок начального вектора состояния материнского аппарата были взяты из статьи миссии NEAR Shoemaker [22]. Среднеквадратические ошибки траекторных измерений того же порядка, что и ошибки относительного положения и радиальной скорости между двумя аппаратами в миссии GRAIL [23]. Стандартное отклонение системы отделения является ошибкой начального вектора состояния дочерних КА. Значения отклонения равны доле от модуля значения и направления скорости отделения аппаратов.

Данные траекторных измерений формируются с помощью радиометрической системы материнского КА. Положение дочернего аппарата детектируются из задержки по времени между излученным и принятым материнским аппаратом сигналом. Скорость измеряется с помощью доплеровского сдвига частоты, полученного материнским КА сигналом. В данной работе радиометрическая система материнского аппарата обладает ограничением по дальности действия (или области видимости дочерних аппаратов). Под дальностью действия радиосистемы понимают

максимальное расстояние, при котором могут фиксироваться траекторные. От радиуса видимости будет зависеть объем траекторных данных.

В задаче исследуется точность нахождения коэффициентов и гравитационного параметра астероида при различных значениях ошибок измерения и радиуса действия радиометрической системы материнского КА.

3. Расчет сложного гравитационного поля астероида

В главе 2 задача определения параметров модели сводилась к задаче оптимизации, в которой целевая функция представляется в виде квадрата невязки траекторных измерений в известном гравитационном поле и траекторных измерений в моделируемом гравитационном поле. В данной задаче траекторными измерениями являются расстояние и радиальная скорость между материнским и дочерними КА, алгоритм получения которых описан в следующем параграфе.

3.1. Формирование данных траекторных измерений

Алгоритм получения траекторных измерений состоит из трех этапов:

- 1) формирование вектора начальных условий для каждого аппарата в группе,
- 2) интегрирование уравнений движения (2.1),
- 3) расчет вектора траекторных измерений.

Опишем каждый из этапов получения траекторных измерений в исследуемом, и моделируемом гравитационном поле.

В известном гравитационном поле вектор начального состояния материнского аппарата рассчитывается из условий выбранного радиуса и наклона орбиты. Положение и скорость дочерних аппаратов в начальный момент времени определяется с учетом системы отделения: дочерние аппараты отделяются от материнского в одном или нескольких (относительно материнского КА) направлениях с одинаковой относительной скоростью и в заданные моменты времени. Данный вектор начального состояния аппаратов используется в качестве вектора начального состояния КА в моделируемом гравитационном поле.

Уравнения движения (2.1) и полученные векторы начального состояния для каждого аппарата численно интегрируются на выбранных интервалах времени. В случае ненулевых ошибок навигации материнского аппарата, в

вектор начального состояния этого аппарата добавляются случайные отклонения положения и скорости в ИСК. Полученная матрица фазовых векторов аппарата в группе имеет размерность $6 \times N_t$, где N_t – количество интервалов времени t .

Расстояние ρ_{ij} и радиальная скорость $\dot{\rho}_{ij}$ рассчитывается для i -го дочернего аппарата и в j -ый момент времени по формуле:

$$\begin{aligned}\rho_{ij} &= \sqrt{(\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_j^{chief})^T (\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_j^{chief})} \\ \dot{\rho}_{ij} &= \frac{1}{\rho_{ij}} (\mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_j^{chief})^T (\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_j^{chief})\end{aligned}\quad (3.1)$$

где $[\mathbf{r}_i; \mathbf{v}_i]$ – вектор состояния дочернего аппарата, $[\mathbf{r}^{chief}; \mathbf{v}^{chief}]$ – вектор состояния материнского КА.

Значения расстояния и радиальной скорости записываются в вектор траекторных измерений. Если материнский аппарат имеет ограниченный радиус видимости, то дочерние аппараты с бóльшим радиусом видимости в траекторные измерения не записываются. При ненулевом значении ошибок траекторных измерений случайные отклонения по расстоянию и по скорости добавляются к каждому соответствующему траекторному измерению.

В моделируемом гравитационном поле вектор начального состояния аппаратов равен вектору начального состояния в исследуемом поле. Интегрирование уравнения движения выполняется на тех же интервалах, что и в исследуемом гравитационном поле. Расстояние и радиальная скорость рассчитывается по формулам (3.1) для каждого i -го аппарата в соответствующий j -ый момент времени.

3.2. Постановка оптимизационной задачи

С учетом приведенных замечаний целевая функция имеет вид:

$$J(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_t} (\rho_{ij}(\mathbf{p}) - \rho_{ij}^{dat})^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_t} (\dot{\rho}_{ij}(\mathbf{p}) - \dot{\rho}_{ij}^{dat})^2 \quad (3.2)$$

где $[C_{nm}; S_{nm}; \mu] = \mathbf{p}$, k – количество дочерних КА, N_i – количество измерений на орбите.

Задачу оптимизации можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{p}) &\rightarrow \min \\ \mathbf{l}_b &\leq \mathbf{p} \leq \mathbf{u}_b \end{aligned} \quad (3.3)$$

Значения боксовых условий для переменных задачи оптимизации индивидуальны для каждого астероида, порядок которых можно получить исходя из размеров исследуемого астероида.

Метод решения оптимизационной задачи описан в следующем параграфе.

3.3. Решение оптимизационной задачи

Данная задача оптимизации решалась в среде MATLAB. Из реализованных в MATLAB методов оптимизации были рассмотрены метод доверительных областей, внутренней точки, последовательного квадратичного программирования и Левенберга–Марквардта. Целевая функция одинаково хорошо сходится к минимуму при её решении методом Левенберга–Марквардта (Levenberg–Marquardt) и методом доверительных областей (trust-region) функции MATLAB «lsqnonlin». Эти методы схожи и принцип их работы будет изложен в приложении А.

Функция «lsqnonlin» создана для решения нелинейных задач, целевая функция которых представлена в виде суммы квадратов её членов. Для работы с «lsqnonlin» требуется записать целевую функцию в виде вектора, размер которой должен превышать или быть равным количеству переменных в задаче оптимизации.

Методы Левенберга–Марквардта и доверительных областей являются градиентными и требуют определения якобиана целевой функции. Тогда обозначим первый и второй члены целевой функции (3.2) J_1 и J_2 соответственно

$$\begin{aligned}
J_1(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_i} (\rho_{ij}(\mathbf{p}) - \rho_{ij}^{dat})^2 \\
J_2(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_i} (\dot{\rho}_{ij}(\mathbf{p}) - \dot{\rho}_{ij}^{dat})^2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

и построим матрицу первых производных:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{p}} &= 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_i} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{dat}) \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{r}_j^{chief}} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_j^{chief}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \mathbf{p}} \right] \\
\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{p}} &= 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_i} (\dot{\rho}_{ij} - \dot{\rho}_{ij}^{dat}) \left(\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{r}_j^{chief}} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_j^{chief}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \mathbf{p}} \right] + \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{v}_j^{chief}} \left[\frac{\partial \mathbf{v}_j^{chief}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{v}_{ij}}{\partial \mathbf{p}} \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где $\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{r}^{chief}}$, $\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{r}^{chief}}$, $\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{v}^{chief}}$ выражены следующими формулами

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{r}^{chief}} &= \frac{(\mathbf{r}^{chief} - \mathbf{r}_i)^T}{\rho} \\
\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{r}^{chief}} &= \frac{(\mathbf{v}^{chief} - \mathbf{v}_i)^T}{\rho^2} - \frac{(\mathbf{v}^{chief} - \mathbf{v}_i)^T (\mathbf{r}^{chief} - \mathbf{r}_i) (\mathbf{r}^{chief} - \mathbf{r}_i)^T}{\rho^3} \\
\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{v}^{chief}} &= \frac{(\mathbf{r}^{chief} - \mathbf{r}_i)^T}{\rho}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Производные фазовых векторов аппаратов по переменным целевой функции находятся из решения уравнений в вариациях, в которых \mathbf{y} – вектор состояния КА и \mathbf{f} – правая часть в уравнениях движения аппарата (2.1):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{p}} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{p}} \right) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{O}_{6 \times s} \end{cases} \tag{3.7}$$

Решением уравнения в вариациях является матрица производных $6 \times s$, где s – количество переменных целевой функции.

Таким образом, для решения оптимизационной задачи есть все необходимые параметры. Результаты расчета оптимизационной задачи представлены в следующей главе.

4. Примеры расчета гравитационного поля астероидов

В качестве примера расчета гравитационного поля выбраны астероиды Эрос и Итокава потому, что для них известны коэффициенты Стокса до 4 порядка и степени включительно и их физические характеристики сильно различаются. Астероиды имеют схожую форму. Однако, средний диаметр Эроса в 50 раз больше среднего диаметра Итокавы, а гравитационный параметр – в 10^5 раз.

В обоих исследованиях для верификации полученных значений все расчеты проводились 10 раз. Результатом исследования является среднее от 10 расчетов. Критерий точности решения задачи определяется следующим образом.

Решение задачи оптимизации. Относительная ошибка измерений.

Пусть вектор параметров исследуемого гравитационного поля обозначается \mathbf{p}_{true} , а на выходе численной оптимизации получается вектор параметров \mathbf{p}_{opt} . Поскольку коэффициенты Стокса могут быть разного порядка, критерием точности расчета служит относительная погрешность измерений. Она вычисляется по формуле:

$$\delta \mathbf{p} = \frac{|p_{true, j} - p_{opt, j}|}{p_{true, j}} \quad (4.1)$$

где $j = 1, \dots, s$. В данной работе результат расчета обычно имеет вид матрицы, в каждой ячейке которой лежит вектор относительной погрешности. Такую трехмерную матрицу сложно интерпретировать, поэтому вместо вектора $\delta \mathbf{p}$ результатом расчета выбирается максимальное значение в этом вектора.

Результат исследования может быть разной степени, поэтому далее в качестве критерия точности будет рассматриваться его степень, а итоговым критерием расчета является:

$$C = \log_{10} \left(\max_{1 \leq j \leq s} (\delta p_j) \right) \quad (4.2)$$

В данной работе нас будет интересовать значения $C < -1$, так как при этом гарантируется правильность нахождения хотя бы первой значащей цифры параметров гравитационного поля.

4.1. Расчет гравитационного поля астероида Эрос

Астероид Эрос – околоземный астероид класса S. Его орбита лежит между орбитами Земли и Марса (Рис. 4.1) и имеет наклонение $i \approx 10^\circ$. Период орбитального движения составляет 1.76 земных года. Сокращение а.е. означает астрономическую единицу.

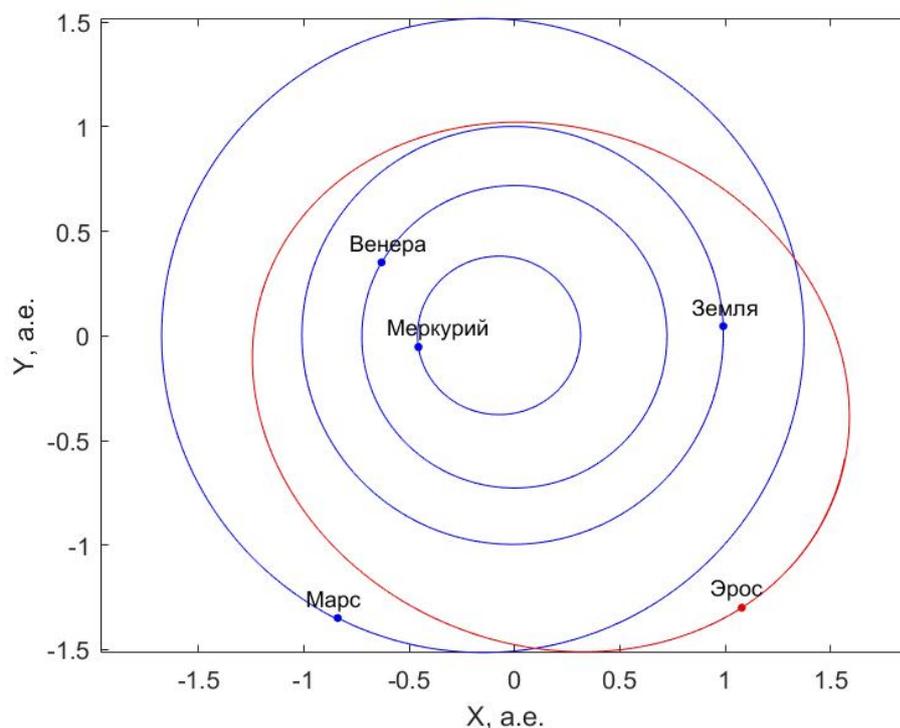


Рисунок 4.1 – Орбита астероида Эрос (красная линия). Точки соответствуют положению космических тел 1 января 2020 года.

Значения физических характеристик астероида, на которые будет опираться расчетная задача, приведены в статье [24] и имеют вид:

- $\mu = 4.4631 \cdot 10^{-4} \text{ км}^3/\text{с}^2$
- $T_{астер} = 5.27 \text{ ч}$
- Размер: $34.4 \times 11.2 \times 11.2 \text{ км}$

- Радиус аппроксимирующей сферы $R^* = 16$ км

Коэффициенты перед гармониками представлены ниже

$$\left| \begin{array}{l} C_{10} = 0, \quad C_{11} = 0, \\ S_{11} = 0, \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} C_{20} = -0.117344, \quad C_{21} = 0, \quad C_{22} = 0.053278, \\ S_{21} = 0, \quad S_{22} = -0.017909, \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} C_{30} = -0.003704, \quad C_{31} = 0.004379, \quad C_{32} = 6.120845 \cdot 10^{-4}, \quad C_{33} = -0.001441, \\ S_{31} = 0.003649, \quad S_{32} = -2.343136 \cdot 10^{-4}, \quad S_{33} = -0.001692, \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} C_{40} = 0.0387003, \quad C_{41} = -1.005604 \cdot 10^{-4}, \quad C_{42} = -0.003912, \\ S_{41} = 1.290209 \cdot 10^{-4}, \quad S_{42} = 0.001015, \\ C_{43} = -1.906389 \cdot 10^{-5}, \quad C_{44} = 3.715931 \cdot 10^{-4}, \\ S_{43} = -8.426361 \cdot 10^{-6}, \quad S_{44} = -1.888708 \cdot 10^{-4}. \end{array} \right.$$

Параметры и орбиты группы аппаратов.

В задаче формирования траекторных измерений в исследуемом гравитационном поле, т.е. поле с параметрами, определенными выше, материнский КА движется по околополярной орбите с наклоном $i_{chief} = 85^\circ$ на расстоянии $r_{chief} = 50$ км от начала координат и абсолютной скоростью $v_{chief} = 0.003$ км/с. Период орбиты аппарата равен $T_{chief} = 29.2$ ч. Следовательно, в течении одного обращения КА вокруг Эроса, астероид обернется вокруг своей оси 5.5 раз и аппарат исследует все стороны астероида. Для расчета ускорения светового излучения отношение площади к массе аппарата $S_M = 10^{-1}$ м²/кг.

Система отделения дочерних аппаратов представляет собой две пружины, выстреливающие дочерние КА в противоположные стороны. Аппараты отделяются от материнского с относительной скоростью

$v_{launch} = 0.5$ м/с и интервалом времени равным $\Delta\tau = 1$ мин. Материнский КА вращается вокруг своей оси с модулем угловой скорости $w_{rot} = 0.01$ рад/с. Это обеспечивает разнообразие орбит дочерних аппаратов. Параметр $S_M = 10^{-5}$ м²/кг для дочерних КА.

В задаче количество дочерних КА равно 5, данные траекторных измерений формируются в течении T_{chief} . Измерения фиксируются с интервалом равным 5.8 часа, то есть для 50 точек на орбите. Если дочерний КА оказывается внутри сферы видимости, его траекторные измерения записываются. Максимальное число траекторных измерений – 500. На Рис. 4.2 представлены орбиты группы аппаратов с учетом вышеперечисленных условий в размерной системе единиц для интервала времени равным $1.5 T_{chief}$. Черная линия соответствует орбите материнского КА.

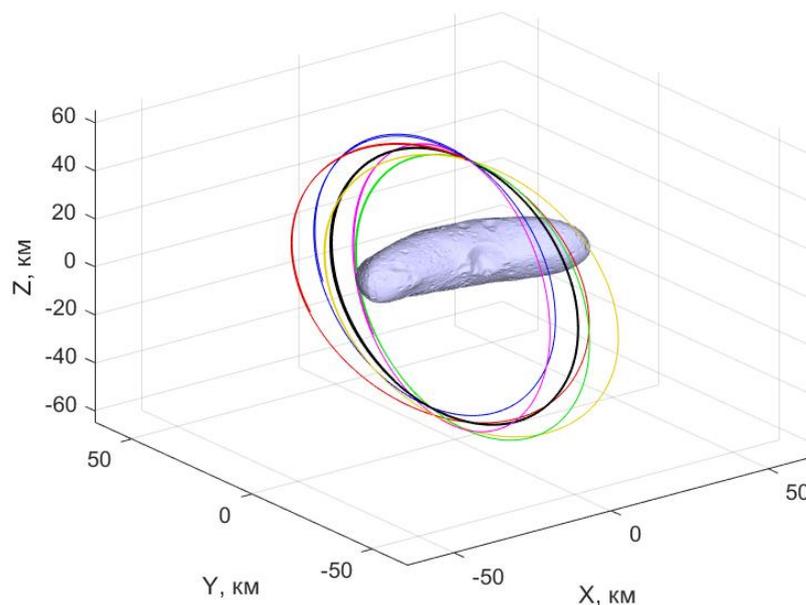


Рисунок 4.2 – Орбиты аппаратов вокруг Эроса в течении T_{chief} .

Далее все представленные начальные условия и параметры нормируются согласно (2.4).

Нормировка системы единиц.

Согласно формулам (2.4) нормировочные коэффициенты равняются:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_{norm}} &= 1.18 \cdot 10^3 \text{ с/км}, & \frac{1}{\mu_{norm}} &= 2.226 \cdot 10^3 \text{ с}^2/\text{км}^3, \\ \frac{1}{W_{norm}} &= 3.02 \cdot 10^3 \text{ с/рад}, & \frac{1}{a_{norm}} &= 2.25 \cdot 10^7 \text{ с}^2/\text{км} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.9935, \\ r_{chief} &= 3.125, \quad v_{chief} = 3.525, \quad T_{chief} = 5.54, \\ v_{launch} &= 0.593, \quad \Delta\tau = 0.003, \quad w_{rot} = 30.2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Влияние возмущений.

В данной задаче начальный момент времени полета аппаратов соответствует 1 января 2020 года. Положение Эроса и ближайших планет 1 января 2020 года отмечено точками на Рис. 4.1. Для интервала времени с 1 января 2020 года по 1 февраля 2020 года были рассчитаны возмущения, источником которых являются давления солнечного излучения, притяжение Солнца и планет Солнечной системы. На Рис. 4.3 представлены степени отношения ускорения, вызванного источником возмущения и членами разложения силовой функции a_{nm} (где n – степень, m – порядок разложения), к ускорению центрального гравитационного поля для материнского аппарата в течении выбранного месяца.

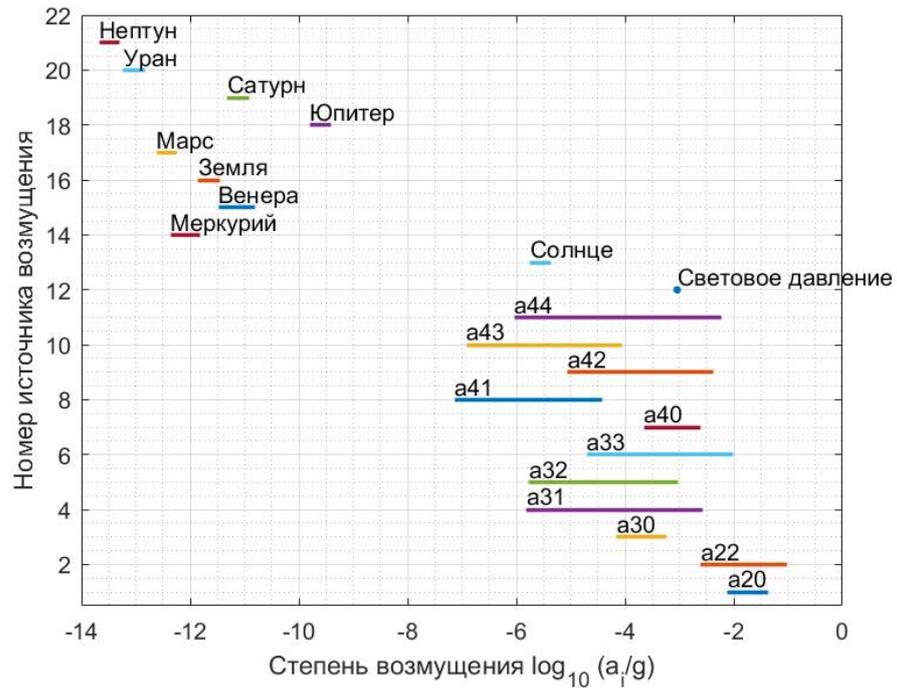


Рисунок 4.3 – Порядок степени отношения величины ускорения, вызванное источником возмущения, к величине ускорения центрального поля притяжения на орбите формирования траекторных измерений для астероида Эрос в период с 1 января 2020 года по 1 февраля 2020 года.

Данные траекторных измерений рассчитываются в поле с учетом всех вышеперечисленных источников возмущений. Из графика видно, что степень влияния возмущений светового давления и притяжения Солнца на движение аппаратов соответствует степени влияния гармоник гравитационного поля. При решении задачи оптимизации эти возмущения должны учитываться. Кроме того, учитываться будут возмущения от Венеры, Земли, Юпитера и Сатурна.

Начальное приближение и ограничения задачи оптимизации.

Коэффициенты $C_{10}, C_{11}, S_{11}, C_{21}, S_{21}$ отображают выбор системы координат. В оптимизационной задаче они считаются известными и равными нулю. Тогда параметры гравитационного поля образуют вектор \mathbf{p} размерности 20×1 . Нулевое приближение задачи (3.3) имеет вид:

$$\mathbf{p}_0 = [\mathbf{O}_{19 \times 1}; 1] \quad (4.5)$$

А левые \mathbf{I}_b и правые \mathbf{u}_b боксовые условия заданы вектором:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_b &= [-0.5 \cdot \mathbf{I}_{19 \times 1}; 0], \\ \mathbf{u}_b &= [0.5 \cdot \mathbf{I}_{19 \times 1}; 10]\end{aligned}\tag{4.6}$$

где $\mathbf{O}_{i \times j}$ – матрица нулей, $\mathbf{I}_{i \times j}$ – матрица единиц. В ходе работы было выяснено, что задача (3.3) сходится при нулевых приближениях $\mu_0 = 0.3\mu \div 1.4\mu$.

Зависимость точности решения от ошибок начального вектора состояния материнского КА и ошибок траекторных измерений.

Для определенных в главе 3 ошибок, связанных с определением начального вектора состояния материнского аппарата и системой детектирования траекторных измерений, была исследована точность нахождения переменных оптимизации. Стандартные отклонения положения и скорости материнского аппарата равны:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{r}_{chief,0}) &= 0.1 \cdot K_2 \text{ км} \\ \sigma(\mathbf{v}_{chief,0}) &= 0.1 \cdot K_2 \text{ мм/с}\end{aligned}\tag{4.7}$$

где $K_2 = 0.1 \div 10^4$ – коэффициент. Отклонения расстояния и радиальной скорости равны:

$$\begin{aligned}\sigma(\rho) &= 3 \cdot 10^{-3} \cdot K_1 \text{ км} \\ \sigma(\dot{\rho}) &= 0.05 \cdot K_1 \text{ мм/с}\end{aligned}\tag{4.8}$$

где $K_1 = 10^{-4} \div 10^4$. Коэффициенты K_1 и K_2 варьируют значения среднеквадратических отклонений. График решения этой задачи представлен на Рис. 4.4.

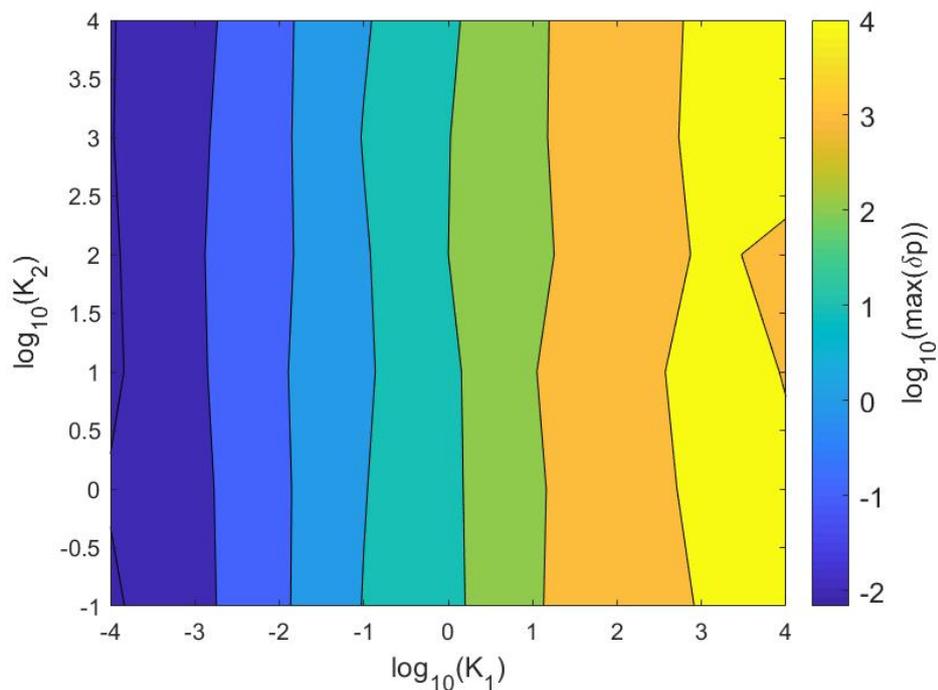


Рисунок 4.4 – Зависимость степени максимального значения относительной погрешности от ошибок траекторных измерений и начального вектора состояния материнского КА.

Из Рис. 4.4 видно, что навигационная ошибка материнского аппарата не влияет на результаты расчета. При значениях стандартного отклонений, меньших или равных $\sigma(\rho) = 3 \cdot 10^{-6}$ км, $\sigma(\dot{\rho}) = 5 \cdot 10^{-5}$ мм/с, – минимальная точность параметров модели равна первой значащей цифре коэффициента. Анализ полученных значений показал, что хуже всего определяется коэффициент C_{43} . Гравитационный параметр определяется с требуемой точностью при любых представленных ошибках (Рис. 4.5).

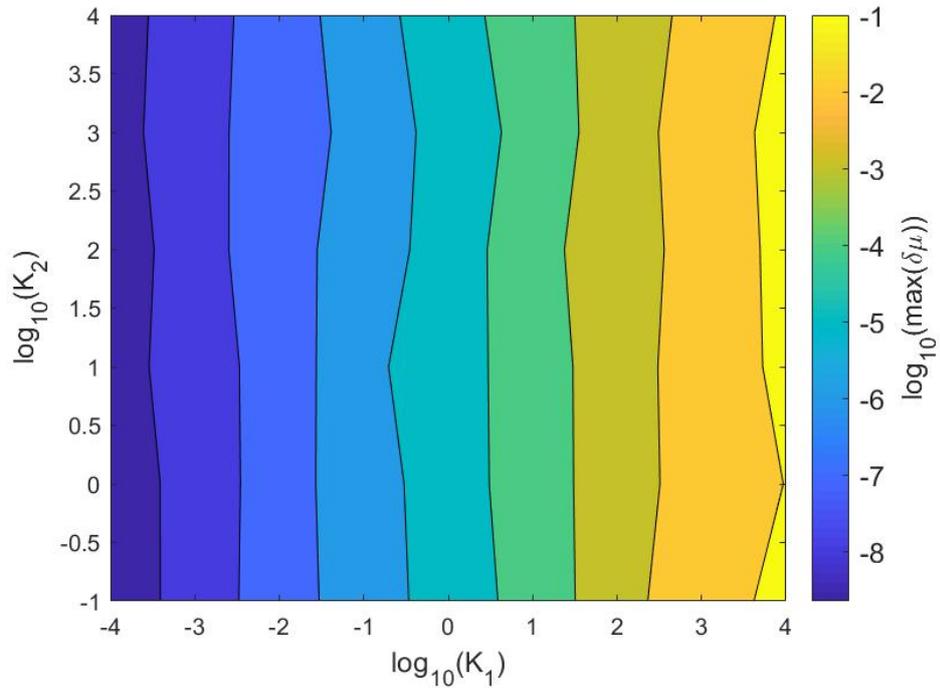


Рисунок 4.5 – Зависимость степени максимального значения относительной погрешности μ от ошибок траекторных измерений и начального вектора состояния материнского КА.

Зависимость точности решения от ошибок траекторных измерений и радиуса сферы видимости дочерних аппаратов.

Для этого исследования радиус области видимости $R_{observe}$ аппаратов варьировался от 5 км до 40 км. При $R_{observe} = 5$ км число траекторных измерений равно 50, при $R_{observe} = 40$ км – 500 измерений. Ошибка траекторных измерений принимает значения аналогичные пункту выше (4.7)-(4.8).

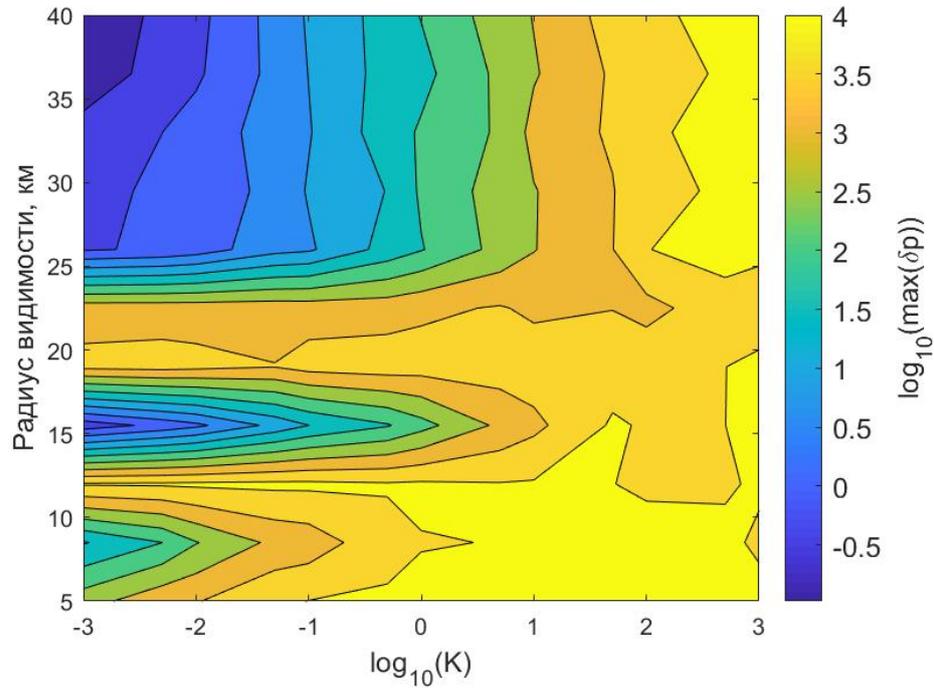


Рисунок 4.6 – Зависимость степени максимального значения относительной погрешности от ошибок траекторных измерений и радиуса видимости.

На Рис. 4.6 видно две области отрицательной степени относительной ошибки вычисления. Помимо предсказуемого улучшения результатов расчета при увеличении радиуса видимости, есть зона радиуса 15 км с числом траекторных измерений ≈ 250 , в которой $C < 0$. Аналогично заметна область понижения порядка относительной погрешности при $R_{observe} \approx 8.5$ км соответствующая ≈ 90 измерениям. Такие радиусы видимости соответствуют измерениям в околополярной области орбит (Рис. 4.2). Следовательно, в данной задаче для достижения отрицательных степеней погрешности не обязательно определять траекторные измерения на всей орбите аппаратов.

К подобному выводу можно прийти при исследовании точности расчета гравитационного параметра астероида при тех же условиях (Рис. 4.7). Видно, что критерий точности найденных значений гравитационного параметра всегда отрицателен.

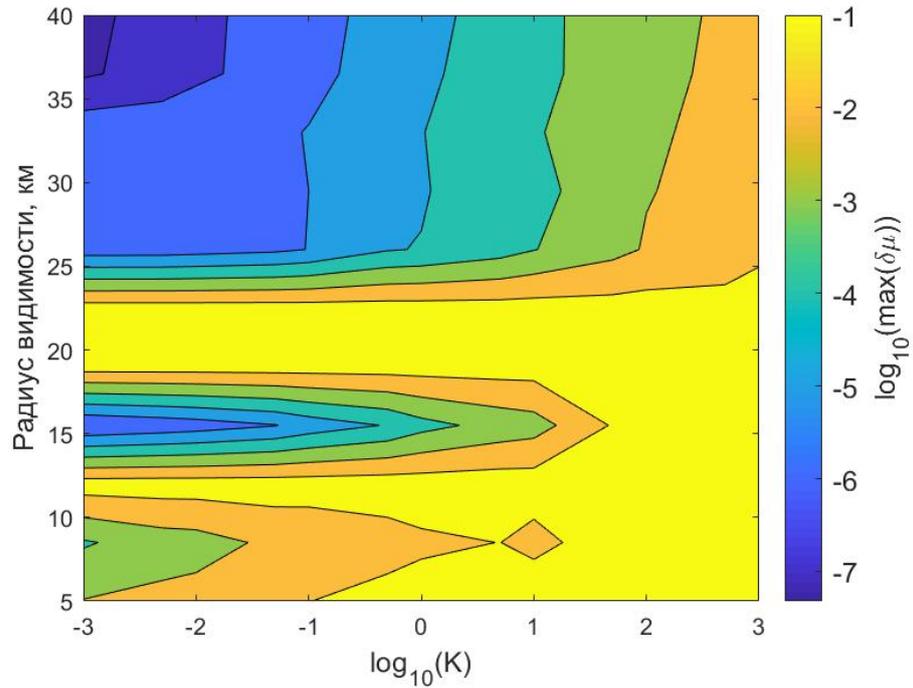


Рисунок 4.7 – Зависимость степени максимального значения относительной погрешности μ от ошибок траекторных измерений и радиуса видимости.

Зависимость точности решения от числа дочерних аппаратов.

На Рис. 4.8 представлен график зависимости точности решения задачи от числа аппаратов. Измерения проводились при ошибке траекторных измерений $\sigma(\rho) = 3 \cdot 10^{-3}$ км и $\sigma(\dot{\rho}) = 0.05$ мм/с. Известно, что количество дочерних аппаратов прямо пропорционально объему траекторных измерений на орбите. Из графика можно прийти к выводу, что при увеличении числа КА существенно уменьшается влияние ошибок траекторных измерений.

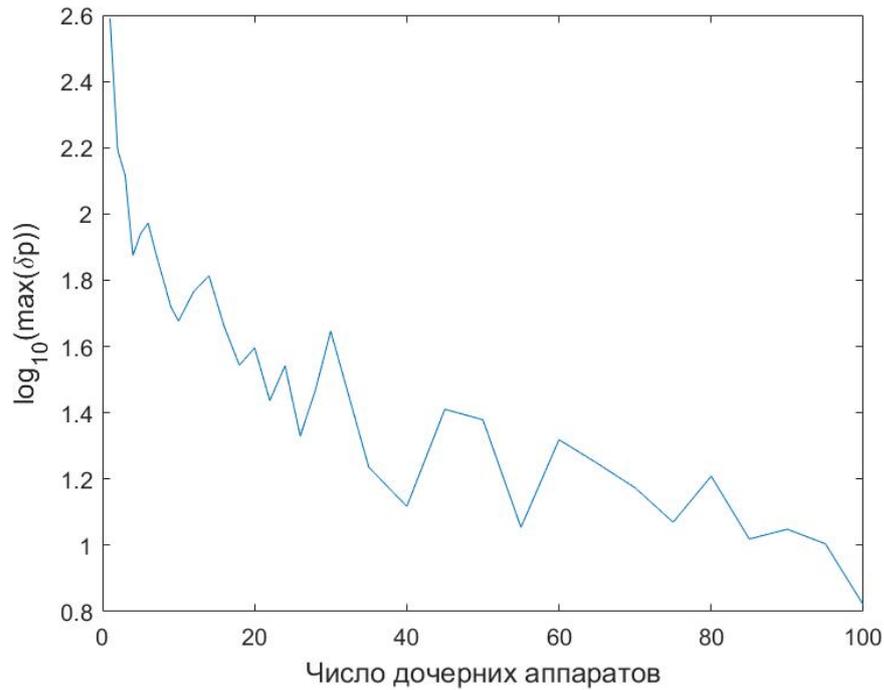


Рисунок 4.8 – Зависимость степени максимального значения относительной погрешности от числа дочерних аппаратов для ошибок $\sigma(\rho) = 3 \cdot 10^{-3}$ км и $\sigma(\dot{\rho}) = 0.05$ мм/с.

В задаче исследовалась точность расчета коэффициентов в зависимости от ошибки скорости отделения дочерних аппаратов. Было выяснено, что при значениях, превышающих 1% от модуля v_{launch} и 5% от направления скорости, степень относительной ошибки параметров больше нуля. То есть параметры гравитационного поля не находятся.

4.2. Расчет гравитационного поля астероида Итокава

В данной задаче будут исследоваться зависимость точности нахождения параметров поля от ошибок начального вектора состояния материнского КА и траекторных измерений и зависимость относительной погрешности от числа дочерних аппаратов. Исследование влияния радиуса видимости на расчет параметров проводиться не будет.

Астероид Итокава тоже околоземный астероид S класса. Большая часть его орбиты лежит между Землей и Марсом (Рис. 4.9). В отличие от Эроса,

плоскость орбиты имеет малое значение наклона: $i \approx 1.6^\circ$. Период обращения астероида вокруг Солнца составляет 1.52 земных лет.

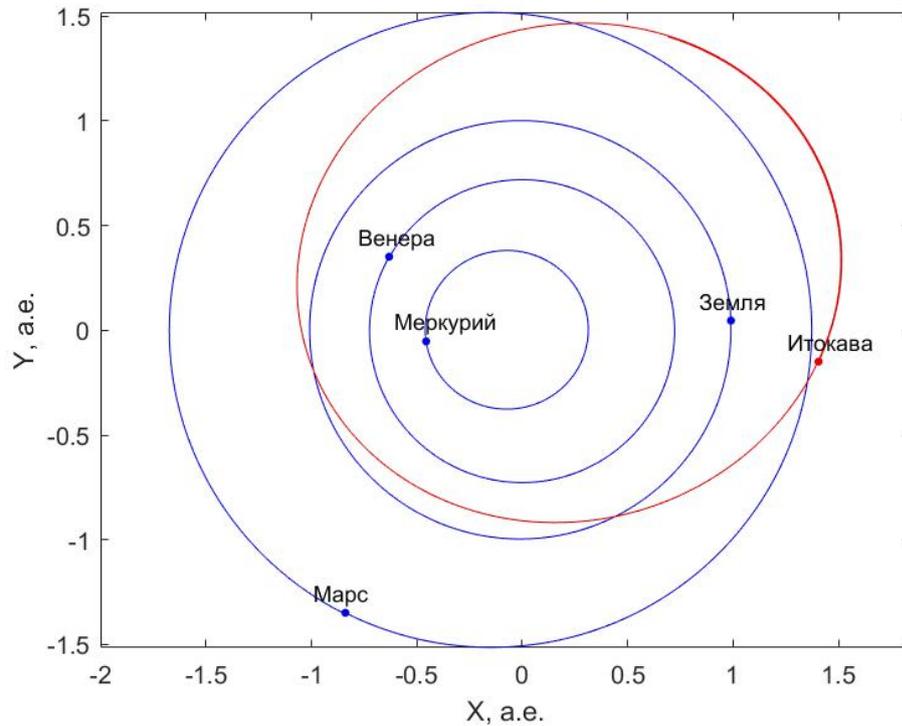


Рисунок 4.9 – Орбита астероида Итокава (красная линия). Точки соответствуют положению космических тел 1 января 2020 года. а.е. – астрономическая единица.

Физические характеристики Итокавы представлены в статье [25]. Из статьи следует, что:

- $\mu = 2.36 \cdot 10^{-9} \text{ км}^3/\text{с}^2$
- $T_{астер} = 12.132 \text{ ч}$
- Размер: $535 \times 294 \times 209 \text{ м}$
- Радиус аппроксимирующей сферы: $R^* = 0.16 \text{ км}$

Коэффициенты перед имеют значения:

$$\left| \begin{array}{l} C_{10} = 0, \quad C_{11} = 0, \\ S_{11} = 0, \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} C_{20} = -0.324712, \quad C_{21} = 0, \quad C_{22} = 0.141635, \\ S_{21} = 0, \quad S_{22} = 0, \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} C_{30} = 0.095551, \quad C_{31} = -0.0303935, \quad C_{32} = -0.016017, \quad C_{33} = 0.0096246, \\ S_{31} = -0.006628, \quad S_{32} = -0.016017, \quad S_{33} = 0.004737, \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} C_{40} = 0.263556, \quad C_{41} = 0.032320, \quad C_{42} = -0.027562, \quad C_{43} = -0.001833, \\ S_{41} = 0.004620, \quad S_{42} = 0.0000219, \quad S_{43} = -0.0008979, \\ C_{44} = 0.003175, \\ S_{44} = 0.0002456. \end{array} \right. \quad (9)$$

Параметры и орбиты группы аппаратов.

Как и в предыдущей задаче материнский аппарат движется по околополярной орбите. Кратко характеристика орбиты материнского аппарата, следующая:

$$\begin{aligned} r_{chief} &= 1.5 \text{ км}, \quad v_{chief} = 3.96 \cdot 10^{-5} \text{ км/с}, \\ i_{chief} &= 85^\circ, \quad T_{chief} = 66 \text{ ч}. \end{aligned} \quad (10)$$

Период орбитального движения КА превосходит период астероида в 5.4 раза. Этот результат схож с отношением периодов для Эроса. Так как световое давление существенно влияет на орбиту аппарата в окрестности Итокавы, это будет показано ниже, отношение площади к массе аппарата выбрано равным $S_M = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{кг}$.

Система отделения в данной задаче отличается от системы отделения в прошлой. Аппараты отделяются от материнского в противоположные стороны без пружины. Изменение скорости дочерних, относительно материнского, осуществляется за счет вращения материнского вокруг своей оси. Как и в предыдущей задаче модуль угловой скорости $w_{rot} = 0.01 \text{ рад/с}$,

интервал времени отделения $\Delta\tau = 20$ с. Значение отношения площади к массе дочернего аппарата не меняется $S_M = 10^{-5}$ м²/кг.

Количество дочерних КА выбрано равным 5, данные траекторных измерений формируются в течении $0.5 \cdot T_{chief}$. За это время фиксируется 100 траекторных измерений (50 расстояния и 50 радиальной скорости) одного дочернего аппарата. Максимальное и в этой задаче постоянное число траекторных измерений равно 500. На Рис. 4.10 изображены орбиты аппаратов в размерной системе единиц для данной задачи. Орбита материнского аппарата обозначена черным цветом.

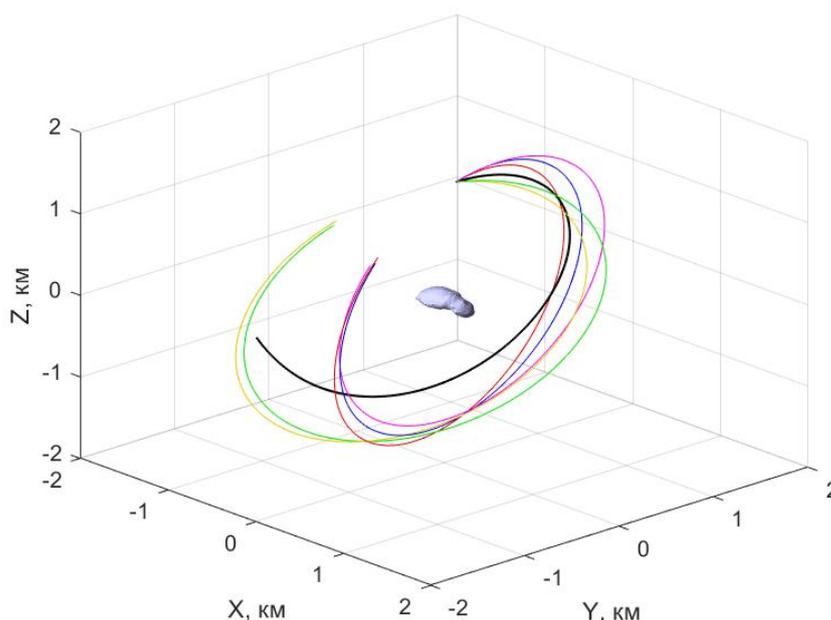


Рисунок 4.10 – Орбиты аппаратов вокруг Итокавы в течении $0.5 \cdot T_{chief}$.

Нормировка системы единиц.

Согласно формулам (2.4) нормировочные коэффициенты для астероида Итокава равняются:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_{norm}} &= 2.73 \cdot 10^5 \text{ с/км}, & \frac{1}{\mu_{norm}} &= 1.179 \cdot 10^{10} \text{ с}^2/\text{км}^3, \\ \frac{1}{W_{norm}} &= 6.95 \cdot 10^3 \text{ с/рад}, & \frac{1}{a_{norm}} &= 1.19 \cdot 10^{10} \text{ с}^2/\text{км} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \mu &= 27.84, \\ r_{chief} &= 9.37, \quad v_{chief} = 10.83, \quad T_{chief} = 5.44, \\ v_{launch} &= 0, \quad \Delta\tau = 4.58 \cdot 10^{-4}, \quad w_{rot} = 69.5 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Влияние возмущений.

Исследование возмущений проводится для периода с 1 января 2020 года по 1 февраля 2020 года. Положение Итокавы и планет 1 января 2020 года обозначено точками на Рис. 4.9. Нулевой момент времени полета аппаратов соответствует 1 января 2020 года. На Рис. 4.11 показана степень отношения возмущений светового давления, притяжения планет и Солнца и членов разложения силовой функции a_{nm} (где n – степень, m – порядок разложения), к ускорению центрального гравитационного поля астероида в течении месяца.

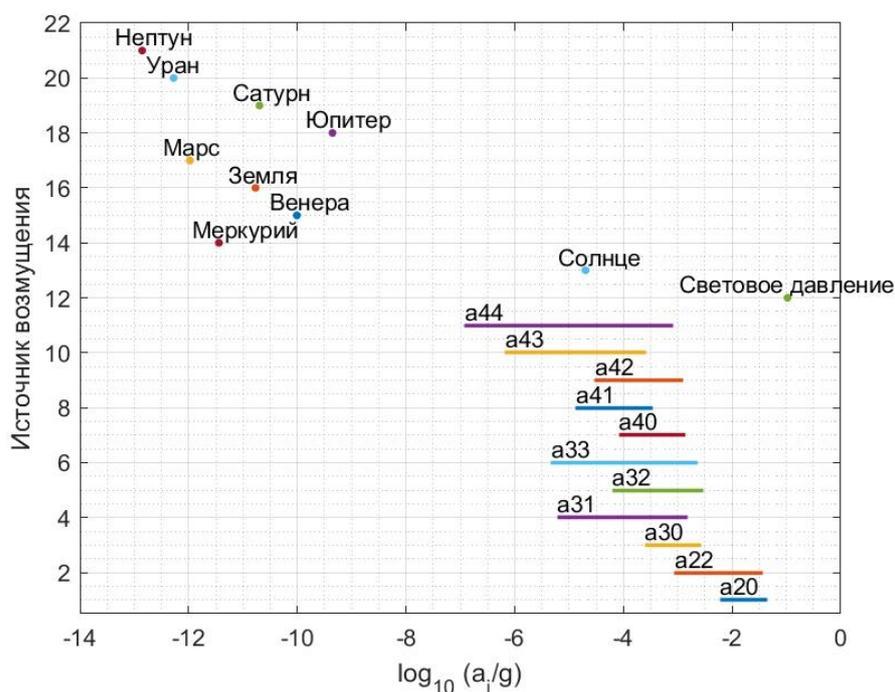


Рисунок 4.11 – Порядок степени отношения величины ускорения, вызванное источником возмущения, к величине ускорения центрального поля притяжения на орбите формирования траекторных измерений для астероида Эрос в период с 1 января 2020 года по 1 февраля 2020 года.

Как и в предыдущем случае, траекторные измерения получаются в поле с учетом всех вышеуказанных источников возмущения. На рисунке видно, световое давление и притяжение Солнца играет существенную роль в около астероидной динамике. В ходе работы было выяснено, что эти силы практически «сдувают» КА с орбиты Итокавы и аппараты могут двигаться вокруг астероида максимум половину периода орбитального движения. В задаче оптимизации помимо этих двух сил учитываются возмущения от Венеры, Земли, Юпитера и Сатурна.

Начальное приближение и ограничения задачи оптимизации.

В задаче принимаем коэффициенты известными и равными $C_{10}, C_{11}, S_{11}, C_{21}, S_{21} = 0$. Тогда параметры гравитационного поля образуют вектор \mathbf{p} размерности 20×1 . Нулевое приближение задачи (3.3) состоит из вектора нулей и начального приближение по гравитационному параметру и имеет вид:

$$\mathbf{p}_0 = [\mathbf{O}_{19 \times 1}; 1] \quad (4.13)$$

Боксовые условия заданы вектором:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_b &= [-0.5 \cdot \mathbf{I}_{19 \times 1}; 0], \\ \mathbf{u}_b &= [0.5 \cdot \mathbf{I}_{19 \times 1}; 100] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Было выяснено, что задача сходится при нулевых приближениях $\mu_0 = 0.1\mu \div 2\mu$.

Зависимость точности решения от ошибок траекторных измерений и начального вектора состояния материнского КА.

Ошибки траекторных измерений и начального вектора состояния материнского КА совпадают с прошлой задачей. Для удобства продублируем их:

$$\begin{aligned} \sigma(\rho) &= 3 \cdot 10^{-3} \cdot K_1 \text{ км} \\ \sigma(\dot{\rho}) &= 0.05 \cdot K_1 \text{ мм/с} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{r}_{chief,0}) &= 0.1 \cdot K_2 \text{ км} \\ \sigma(\mathbf{v}_{chief,0}) &= 0.1 \cdot K_2 \text{ мм/с}\end{aligned}\tag{4.16}$$

где $K_1 = 10^{-4} \div 10^4$, $K_2 = 0.1 \div 10^4$. Тогда результаты расчетов для астероида Итокава представлены ниже.

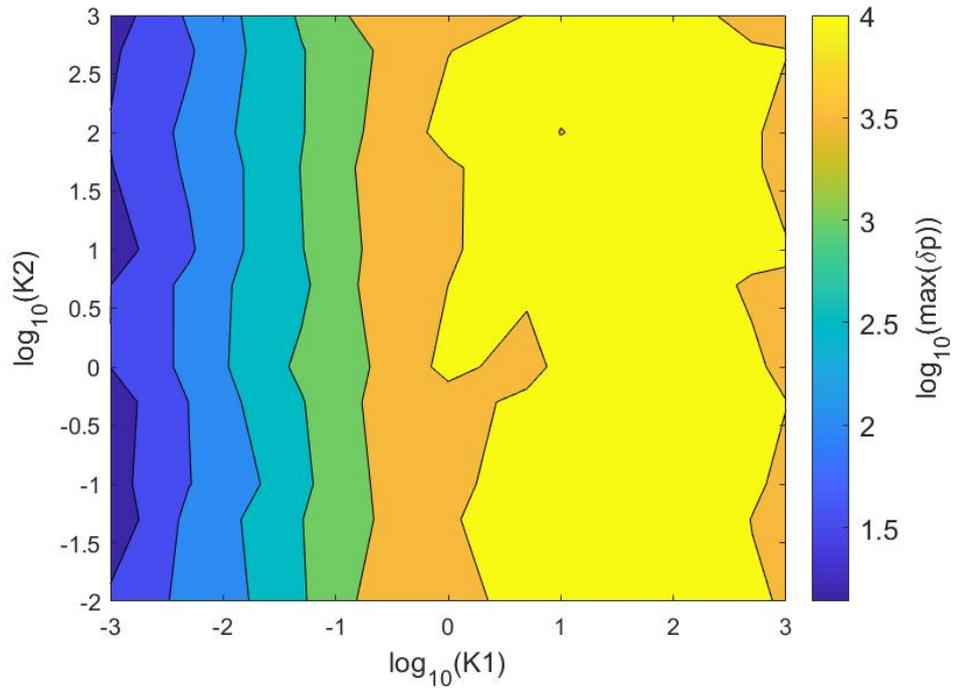


Рисунок 4.12 – Зависимость степени максимального значения относительной погрешности от ошибок траекторных измерений и начального вектора состояния материнского КА.

Аналогично прошлой задаче на Рис. 4.12 видно, что навигационная ошибка материнского аппарата слабо влияет на точность расчета. Отрицательные значения критерия S не достигаются при предложенных значениях стандартного отклонения. Следовательно, приведенная точность траекторных измерений не подходит для данного исследования. Исследование показало, что хуже всего подлежал определению коэффициент S_{42} . Однако, приведенной точности измерений хватает для расчета гравитационного параметра до первой значащей цифры (Рис. 4.13).

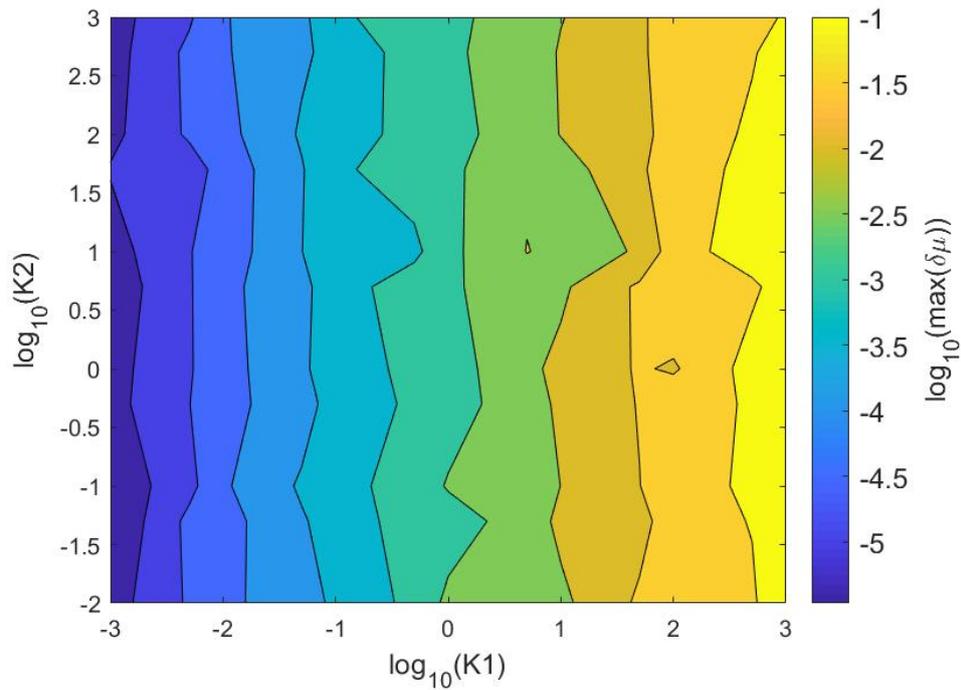


Рисунок 4.13 – Зависимость степени максимального значения относительной погрешности μ от ошибок траекторных измерений и начального вектора состояния материнского КА.

Зависимость точности решения от числа дочерних аппаратов.

Зависимость S от числа дочерних аппаратов приведена на Рис. 4.14. Измерения проводились при ошибках траекторных измерений $\sigma(\rho) = 3 \cdot 10^{-3}$ км и $\sigma(\dot{\rho}) = 0.05$ мм/с. В зависимости видна тенденция уменьшения степени погрешности с ростом числа аппаратов. Однако, в отличие от предыдущей задачи, для расчета параметров астероида Итокава количество аппаратов играет меньшую роль.

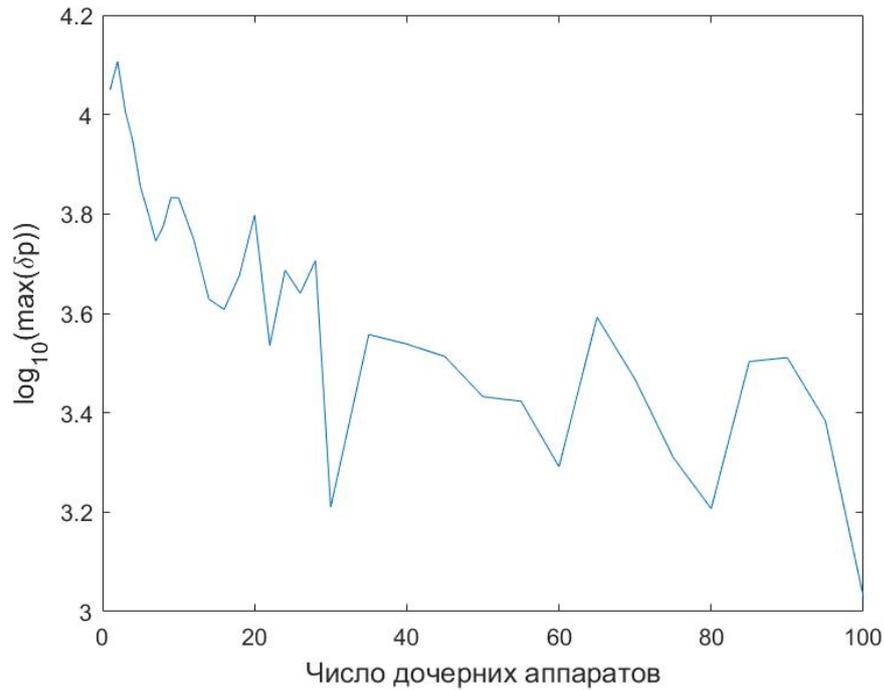


Рисунок 4.14 – Зависимость степени максимального значения относительной погрешности от числа дочерних аппаратов для ошибок $\sigma(\rho) = 3 \cdot 10^{-3}$ км и $\sigma(\dot{\rho}) = 0.05$ мм/с.

Так же было выяснено, что при любом значении ошибки вектора направления скорости отделения дочерних КА параметры модели гравитационного поля не находятся.

Заключение

В работе была предложена методика определения гравитационного поля малого тела с помощью группы малых аппаратов. На примере двух астероидов Эроса и Итокавы было выяснено, что ошибки, вносимые в вектор траекторных измерений, играют определяющую роль в точности рассчитываемых параметров. Так, для астероида Эрос при значениях стандартного отклонения меньших $3 \cdot 10^{-6}$ м для расстояния и $5 \cdot 10^{-5}$ мм/с для радиальной скорости коэффициенты Стокса находятся с минимальной точностью до первой значащей цифры. Для Итокавы при приведенных значениях погрешности траекторных измерений коэффициенты Стокса силовой функции не определяются. Результаты расчета можно улучшить на

несколько порядков, увеличив число аппаратов в группе. Для Эроса радиус сферы видимости дочерних аппаратов, а следовательно, количество траекторных измерений влияет на точность определяемых параметров нелинейно. В ходе исследований было выяснено, что для радиуса области видимости равными 15 км и 40 км (аппараты видны на всей орбите) коэффициенты Стокса находятся с точностью до первой значащей цифры. Далее было показано, что ошибка начального вектора состояния материнского аппарата не влияет на расчет параметров модели гравитационного поля. При этом, ошибки бóльшие 1% от величины и 5% от направления скорости отделения дочерних аппаратов от материнского разрушает процесс оптимизации целевой функции и коэффициенты Стокса с гравитационным параметром не определяются. Таким образом, требуется чтобы ошибка величины скорости отделения не превышала 1%, и ошибка направления скорости отделения была меньше 5%.

Использование группы аппаратов в задачах определения гравитационного поля тела позволяет за период (в случае астероида Эрос) или за полпериода (для Итокавы) набрать необходимый объем траекторных измерений. Кроме того, межспутниковая навигация обычно точнее межпланетной. Обнаружена высокая чувствительность метода к ошибкам начального состояния дочерних аппаратов, причины этого явления остаются открытыми.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Dunham D. W., McAdams J. V., and Farquhar R. W. *NEAR Mission Design*, Johns Hopkins apl Technical Digest, 2002, Vol 23, No. 1, pp. 18-33.
- [2] Asteroid Explorer "HAYABUSA" (MUSES-C). URL:
https://global.jaxa.jp/projects/sas/muses_c/ (дата обращения: 19.06.2020).
- [3] Planetary Resources Intellectual Property Pledge. URL:
<https://www.consensus.space/pr> (дата обращения: 19.06.2020).
- [4] Bus S. J., and Binzel R. P. *Phase II of the Small Main-Belt Asteroid Spectroscopic Survey*, Icarus, 2002, Vol. 158, No. 1, pp. 16-177.
- [5] O'Neil W.J., and Mitchel K.T. *Galileo Mission Overview*, 21-st Aerospace Sciences Meeting, Nevada, U.S.A, 10-13 January, 1983, Vol 96, No. 1, pp. 1-10.
- [6] Watanabe S., Tsuda Y, and Yoshikawa M, and et al. *Hayabusa2 Mission Overview*, Space Science Reviews, 2017, Vol 208, pp. 3-16.
- [7] Gal-Edd J., and Chevront A., *The OSIRIS-REx Asteroid Sample Return Mission operations design*, 2015 IEEE Aerospace Conference, Big Sky, Montana, USA, March 7-14, 2015, Vol 1, No. 1, pp. 1-9.
- [8] Каула У. *Спутниковая геодезия*. М.: Мир, 1970. 170 с.
- [9] Mundim K.C., Lemaire T.J., and Bassrei A. *Optimization of non-linear gravity models through generalized simulated annealing*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 1998, Vol 252, No. 3, pp. 405-416.

- [10] Visser P.N.A.M., Sneeuw N., and Gerlach C. *Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates*, Journal of Geodesy, 2003, Vol. 77, pp. 207–216.
- [11] Tapley B. D., Bettadpur S., Watkins M., and Reigber C. *The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results*, Geophysical Research Letters, 2004, Vol. 31, No. 9, pp. 1-4.
- [12] Roncoli R., and Fujii K. *Mission Design Overview for the Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL) Mission*, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Toronto, Ontario, Canada, August 2-5, 2010, Vol. 83, pp. 1-22.
- [13] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
- [14] Охочимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.
- [15] Scheeres D. J. *Orbital Motion in Strongly Perturbed Environments. Applications to Asteroid, Comet and Planetary Satellite Orbiters*. Springer–praxis Books in Astronautical Engineering. 2012. 396 p.
- [16] Аким Э. Л., Энеев Т.М. *Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений*, Космические Исследования, 1963, Т. 1, Вып. 1, 5-50 с.
- [17] Garcia R.V. *Local Geoid Determination from GRACE Mission*, Ohio State University. Division of Geodetic Science, 2002, No. 460, 122 p.
- [18] Park R., Konopliv A., Yuan D.-N., and et al. *High-Resolution Lunar Gravity from the Gravity Recovery and Interior Laboratory Mission*, 23rd AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Lihue, Hawaii, USA, February 10–14, 2013, Vol. 13-272, pp. 1-12.

- [19] Jason L., Brandon J., Villalba E., and Born G. *Absolute Orbit Determination and Gravity Field Recovery for 433 Eros Using Satellite-to-Satellite Tracking*, Astrodynamics Specialist Conference, Minneapolis, Minnesota, USA, August 13-16, 2012, pp. 1-17.
- [20] JPL Planetary and Lunar Ephemerides. URL:
<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top> (дата обращения: 19.06.2020).
- [21] Yelnikov R. V., Mashtakov Y. V., Ovchinnikov M. Yu., and Tkachev S. S. *Orbital and Angular Motion Construction for Low Thrust Interplanetary Flight*, Cosmic Research, 2016, Vol. 54, No. 6, pp. 483–490.
- [22] Williams B. G., *Technical Challenges and Results for Navigation of NEAR Shoemaker*, Johns Hopkins Apply Technical Digest, 2002, Vol. 23, No. 1, pp. 34-45.
- [23] Kruizinga, G., Asmarand S., and et al. *The role of grail orbit determination, in preprocessing of Gravity Science Measurements*, 23rd AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Lihue, Hawaii, USA, February 10–14, 2013, Vol. 13-270, pp. 1-12.
- [24] Miller J.K., Konopliv A.S., Antreasian P.G., and et al. *Determination of Shape, Gravity, and Rotational State of Asteroid 433 Eros*, Icarus, 2002, Vol. 155, pp. 3-17.
- [25] Scheeres D. J., Gaskell R., and et al. *The actual dynamical environment about Itokawa*, Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Keystone, Colorado, August 21-24, 2006, pp. 1-22.

Приложение А. Метод Левенберга–Марквардта и метод доверительных областей

Метод Левенберга–Марквардта является одним из самых известных методов решения нелинейных систем уравнений вида:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

где число переменных $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ не превышает количество уравнений в системе $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})]$.

Этот метод является модификацией метода Гаусса для систем уравнения вида (1). Как и в методе Гаусса вместо системы уравнений (1) рассмотрим задачу безусловной оптимизации:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \min \quad (2)$$

Для нахождения минимума приравняем к нулю первую производную функции $F(\mathbf{x})$:

$$\nabla F(\mathbf{x}) = 0 \quad (3)$$

Заметим, что данная система уравнений имеет размерность $n \times n$. В методе Гаусса нелинейные компоненты вектора функции \mathbf{f} не рассматриваются, тогда:

$$\begin{aligned} \nabla F &= \mathbf{f}^T (\nabla \mathbf{f}) \\ \nabla (\nabla F)^T &= (\nabla \mathbf{f})^T (\nabla \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (4)$$

Система (2) решается методом Ньютона, в котором:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left(J_k^T J_k \right)^{-1} J_k^T \mathbf{f}_k \quad (5)$$

где \mathbf{x}_k – обозначает k -е приближение к решению (2), $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$, $J_k = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$. Эта система уравнений является итерационной схемой метода Гаусса. Поскольку матрица $\left(J_k^T J_k \right)^{-1}$ не является положительно определенной и

может быть вырожденной, Марквардт предложил следующую итерационную схему:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - (J_k^T J_k + \lambda \mathbf{E}_n)^{-1} J_k^T \mathbf{f}_k \quad (6)$$

где $\lambda > 0$, \mathbf{E}_n – единичная матрица размерности $n \times n$. Значение λ меняется на каждой итерации. Если значение функции $F(\mathbf{x}_{k+1}) < F(\mathbf{x}_k)$, то шаг \mathbf{x}_{k+1} принимается и λ уменьшается. В случае $F(\mathbf{x}_{k+1}) \geq F(\mathbf{x}_k)$ шаг \mathbf{x}_{k+1} не будет приниматься, значение λ будет увеличено, а расчет повторится. Таким образом, при приближении функции $F(\mathbf{x}_k)$ к минимуму значение $\lambda \rightarrow 0$, а схема становится гауссовской. При $\lambda \rightarrow \infty$ направление шага $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ сонаправлено с направлением антиградиента функции $F(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = -\frac{J_k^T \mathbf{f}_k}{\lambda} \quad (7)$$

Метод доверительных областей имеет такую же итерационную схему (5). В этом методе считается, что аппроксимация целевой функции в области радиуса D полностью описывает поведение функции в этой области. Значение λ выбирается с точки зрения максимальной величины шага $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| = D$, где $\{\mathbf{z} \in R^n : \|\mathbf{z}\| \leq D\}$ – доверительной областью радиусом D . Как и в методе Левенберга–Марквардта, величина радиуса доверительной области рассчитывается на каждой итерации и зависит от изменения значения целевой функции на следующем шаге. Характер изменения D совпадает с предыдущим методом.