

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и физика  
(бакалавриат)

**Направленность (профиль) подготовки:** Математическое моделирование,  
вычислительная математика и физика

## **МЕТОДЫ ОБХОДА СИНГУЛЯРНОСТЕЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ УГЛОВОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ СПУТНИКА С ПОМОЩЬЮ ГИРОДИНОВ**

(бакалаврская работа)

**Студент:**

Вознюк Данила Александрович

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Ткачев Степан Сергеевич,  
канд. физ.-мат. наук, доц.

---

*(подпись научного руководителя)*

**Консультант (при наличии):**

---

*(подпись консультанта)*

Москва 2019

## **Аннотация**

Работа посвящена проблеме управления ориентацией космического аппарата с помощью гиродинов. В подобных системах всегда существуют такие взаимные расположения осей карданов гиродинов, когда невозможно сформировать управляющие воздействия, и происходит потеря управляемости. Эти конфигурации называются сингулярными и в этом случае применяются специальные методы их обхода. В работе проведен сравнительный анализ наиболее распространенных из этих методов (Moore-Penrose, Singular Robust, Generalized Singular Robust, SVD-разложение) с помощью предложенного критерия, и выполнено моделирование методов в условиях задачи стабилизации движения спутника в орбитальных осях.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Постановка задачи, система управления ориентацией</b>	<b>5</b>
1.1. Постановка задачи . . . . .	5
1.2. Системы координат при моделировании. . . . .	5
1.3. Система управления ориентацией гиродинов . . . . .	5
<b>2. Формирование управляющего воздействия</b>	<b>6</b>
<b>3. Построение сингулярной поверхности</b>	<b>10</b>
<b>4. Методы обхода сингулярностей</b>	<b>13</b>
4.1. Нуль-движение . . . . .	13
4.2. Singular Robust Inverse . . . . .	14
4.3. Generalized Singular Robust . . . . .	15
4.4. SVD-разложение . . . . .	15
<b>5. Моделирование</b>	<b>16</b>
5.1. Критерий сравнения методов. . . . .	16
5.2. Моделирование пересечения сингулярной поверхности . . . . .	17
5.3. Моделирование стабилизации спутника в орбитальных осях. . . . .	20
<b>Заключение</b>	<b>23</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>24</b>

## Введение

При решении задач, связанных с использованием космических аппаратов, часто возникает необходимость управления ориентацией спутника (для фотографирования местности, наиболее эффективной зарядки солнечных панелей, для связи с землей и прочее). Для этих целей современные спутники, как правило, оснащают маховиками или катушками. Для больших спутников, в том числе космических станций, где необходимы большие моменты, используются одностепенные и двухстепенные гиродины. Одностепенные гиродины представляют собой устройство, изображенное на Рис. 1.

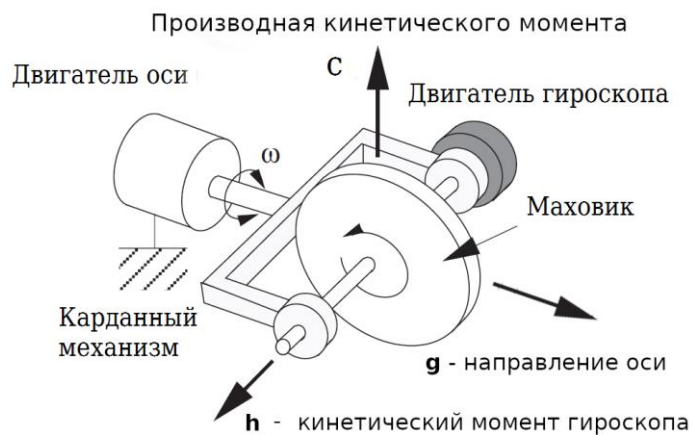


Рис. 1 Одностепенной гиродин

Есть маховик, который раскручивается двигателем. Перпендикулярно этой оси с помощью рамки ставится карданный механизм, способный вращаться перпендикулярно направлению кинетический момента маховика.

Эти приборы могут давать большой управляющий момент, в сравнении с другими элементами. Однако, они имеют ряд особенностей, которые необходимо учитывать при формировании управляющих воздействий. Речь идет о некоторых взаимных конфигурациях осей карданов гиродин, когда происходит потеря управляемости (в частности, случаи, когда несколько осей оказываются параллельны друг другу). Такие конфигурации называют сингулярными. В общем случае, оказывается, что любая система из гиродин при заданном значении максимального модуля управляющего момента будет характеризоваться особой сингулярной поверхностью — поверхностью, на которой существует выделенное направление, вдоль которого нельзя создать управляющий момент. В работе будут рассмотрено построение поверхности и различные методы ее обхода (Singular Robust, Generalized Singular Robust, SVD-разложение). [1–4]

# **1. Постановка задачи, система управления ориентацией**

## ***1.1. Постановка задачи***

В работе рассматривается задача сравнения методов обхода сингулярных поверхностей. При решении задачи необходимо выработать критерий, по которому производится сравнение, а также реализовать методику построения сингулярных поверхностей. Предполагаются известными:

- 1) технические характеристики и начальная ориентация каждого из гиродинов;
- 2) момент внешних сил, действующий на систему;
- 3) расположение и количество гиродинов относительно друг друга;
- 4) вектор состояния космического аппарата.

Помимо данных предположений считается, что гиродины предварительно закручены до больших скоростей и не меняют их на протяжении управления. Исходя из этих данных, требуется компенсировать внешний момент сил, используя различные методы выдачи управляющего момента, и сделать их сравнительный анализ, выбирая наиболее близкий к требуемому итоговый момент.

## ***1.2. Системы координат при моделировании***

ССК – связанная с главными осями спутника система координат.

ИСК – инерциальная система координат, связанная с центром Земли, две оси которой направлены в плоскости экватора (первая направлена на точку весеннего равноденствия в системе J2000), а третья на северный географический полюс.

ОСК – орбитальная система координат. Первый вектор сонаправлен с радиус-вектором спутника в ИСК, третий перпендикулярен первому и направлен в сторону движения спутника. Второй есть векторное произведение третьего на первый.

СКГ – система координат гиродинов. Центр находится в основании 4-угольной пирамиды гиродинов (Рис. 2), оси X и Y лежат в плоскости основания и сонаправлены с его сторонами. Ось Z направлена вертикально вверх на вершину пирамиды.

## ***1.3. Система управления ориентацией***

В работе рассматривается система из четырех гиродинов, расставленных по серединам сторон основания четырехугольной равнобедренной пирамиды с углом между

противоположными боковыми ребрами  $90^\circ$  (Рис. 1)[1,2]. Такая конфигурация позволяет обеспечивать трехосную стабилизацию спутника[1].

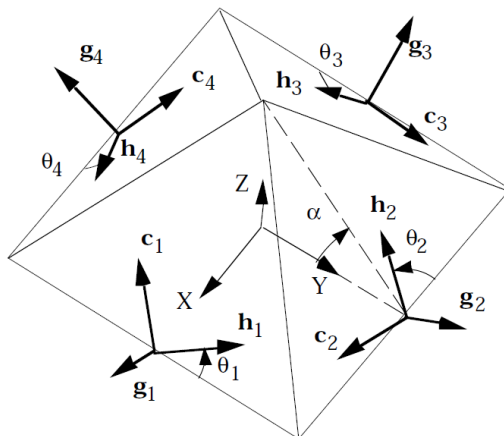


Рис.2 Схема пирамидальной систем

Здесь  $\theta_i$  – угол между стороной основания и направлением кинетического момента  $i$ -го гироскопа, измеряемый в плоскости стороны пирамиды.

$h_i$  – направление вектора кинетического момента  $i$ -го гироскопа.

$g_i$  – направление оси  $i$ -го гироскопа.

$c_i$  – направление управляющего момента  $i$ -го гироскопа, возникающего при повороте оси кардана.

В силу такого выбора такого типа пирамиды мы получаем следующие данные для угла  $\alpha$ :

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ и } \sin(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

В нашей задаче будем считать все гироскопы одинаковыми со сферическим тензором инерции.

## 2. Формирование управляющего воздействия

В дальнейшем рассмотрении мы будем пользоваться следующей схемой (Рис.3) в которой вектора составляют правую тройку.

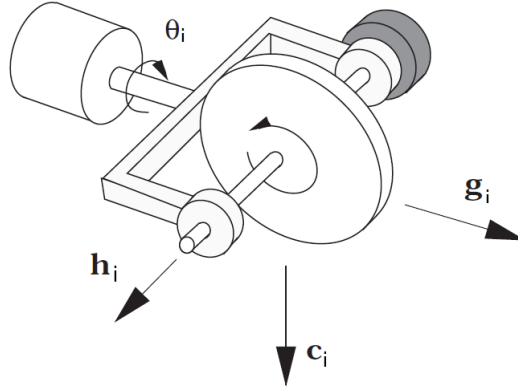


Рис. 3 Ортонормированность векторов

Нормированная производная кинетического момента  $\mathbf{c}_i$  может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{c}_i = \partial \mathbf{h}_i / \partial \theta_i = \mathbf{g}_i \times \mathbf{h}_i. \quad (2.1)$$

Направление оси карданова подвеса  $\mathbf{g}_i$  неизменно, в то время как остальные два вектора зависят от угла поворота оси  $\theta_i$ .

Кинетические моменты и их производные в СКГ определяются следующим образом:

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \\ \sin(\alpha) \sin(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_2) \\ -\cos(\alpha) \sin(\theta_2) \\ \sin(\alpha) \sin(\theta_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \sin(\theta_3) \\ -\cos(\theta_3) \\ \sin(\alpha) \sin(\theta_3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) \\ \cos(\alpha) \sin(\theta_4) \\ \sin(\alpha) \sin(\theta_4) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \cos(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) \\ \sin(\alpha) \cos(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_2) \\ -\cos(\alpha) \cos(\theta_2) \\ \sin(\alpha) \cos(\theta_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) \\ \sin(\alpha) \cos(\theta_3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_4) \\ \cos(\alpha) \cos(\theta_4) \\ \sin(\alpha) \cos(\theta_4) \end{bmatrix},$$

здесь все направления заданы как на Рис. 2.

Уравнения углового движения спутника записываются в виде

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{T},$$

$$\dot{\mathbf{q}} = -0.5 \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} \bullet \mathbf{q}, \quad (2.2)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  - угловая скорость аппарата,  $\mathbf{q}$  - кватернион ориентации аппарата,  $\mathbf{H}$  - кинетический момент спутника вместе с гироскопами,  $\bar{\boldsymbol{\omega}} = [0 \ \boldsymbol{\omega}]^T$  - кватернион угловой

скорости,  $\bullet$  - кватернионное умножение. Уравнения динамики можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} &= -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} + \mathbf{T}, \\ \mathbf{U} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} &\Leftrightarrow \dot{\mathbf{H}} = -\mathbf{U} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

здесь  $\mathbf{U}$  - закон управления, который необходим в нашей задаче. Таким образом, чтобы задать управление, нам необходимо найти производную кинетического момента.

Полный кинетический момент - это сумма всех  $\mathbf{h}_i$ , умноженная на модуль кинетического момента одного гироскопа  $h$ . Далее будем рассматривать суммарный кинетический момент, нормированный на эту величину  $h$ .

$$\mathbf{H}h = \sum \mathbf{h}_i h. \quad (2.4)$$

Следует заметить, что в таком случае итоговый нормированный кинетический момент является функцией от углов  $\theta_i$ ,  $i = 1..4$ .

$$\mathbf{H} = f(\boldsymbol{\theta}). \quad (2.5)$$

В данном случае  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4)^T$  - вектор, составленный из углов поворота осей карданов гироскопов.

Итоговый вектор нормированного управляющего момента получается дифференцированием по времени кинетического момента системы гироскопов.

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{H}} = \sum \partial \mathbf{h}_i / \partial \theta_i \cdot d\theta_i / dt. \quad (2.6)$$

Поскольку суммарный управляющий момент - есть сумма производных кинетических моментов всех гироскопов, то он также записывается как

$$\mathbf{T} = \sum \mathbf{c}_i \dot{\theta}_i = \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.7)$$

где  $\dot{\theta}_i = d\theta_i / dt$ , и  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = (\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4)^T$  - вектор угловых скоростей. Матрица  $\mathbf{C}$  задается следующим соотношением

$$\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3 \ \mathbf{c}_4). \quad (2.8)$$

Таким образом, мы приходим к необходимости получения угловых скоростей  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ , способных обеспечить требуемое значение управляющего момента. Из формулы (2.7) видно, что момент обеспечивается положением осей карданов гироскопов (матрица  $\mathbf{C}$ ) и их угловыми скоростями. Одним из самых простых методов получения угловых скоростей для фиксированного положения гироскопов, является метод псевдообращения Мура-Пенроуза[5], который хорошо работает в регулярном случае.



Стоит отметить, что по теореме Кронекера-Капелли система уравнений совместна тогда и только тогда, когда  $\mathbf{Rg}(\mathbf{C}) = \mathbf{Rg}([\mathbf{C} \ \mathbf{T}])$ , в общем случае это равенство может не удовлетворяться, и решений не будет существовать. Такие конфигурации углов осей карданов гиродинов называются сингулярными. В окрестности этих положений решения системы могут сильно расти по модулю. Но, как и любая техника, гиродины имеют свое ограничение на использование. Вращение маховика и оси кардана ограничены сверху возможностями двигателей, потому невозможно выдать бесконечно большой момент или закрутить ось с произвольной угловой скоростью, что не позволяет выдать нужный управляющий момент в сингулярных конфигурациях.

В общем случае, если ранг матрицы  $\mathbf{C}$  равен 3, то она имеет три линейно-независимых строки. Таким образом, мы можем записать выражение для частного решения:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{particular} = \sum \alpha_i \mathbf{R}_i^T = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{R}_i$  -  $i$ -ая строка матрицы  $\mathbf{C}$ , а  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)^T$  - некий вектор коэффициентов.

Включив в это уравнение ограничение  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{T}$ , получим:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}. \quad (2.10)$$

Отсюда находим  $\boldsymbol{\alpha}$ :

$$\boldsymbol{\alpha} = [\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T]^{-1} \mathbf{T}. \quad (2.11)$$

В таком случае получаем следующее выражение на угловую скорость:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{particular} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_{MP} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T]^{-1} \mathbf{T}. \quad (2.12).$$

По сути, этот метод эквивалентен решению следующей задачи минимизации:

$$\min_{\dot{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}}, \text{ с ограничением } \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{T}, \text{ где } \mathbf{A} = \mathbf{E}_4.$$

В ходе работы алгоритма управления даже в регулярном случае существует проблема дискретности. При каждом шаге управления мы подаем на вход системы конфигурацию углов  $\theta_{n+1} = \theta_n + \dot{\theta}_n \cdot \tau$ , где  $\tau$  - шаг управления. Таким образом, между  $n$  и  $n+1$  шагом решение  $\dot{\theta}_n$  не является точным и чем больше  $\tau$ , тем больше ошибка (Рис. 4)..

А если система находится в окрестности сингулярности, то ошибка растет еще сильнее, что приводит к потере управляемости.

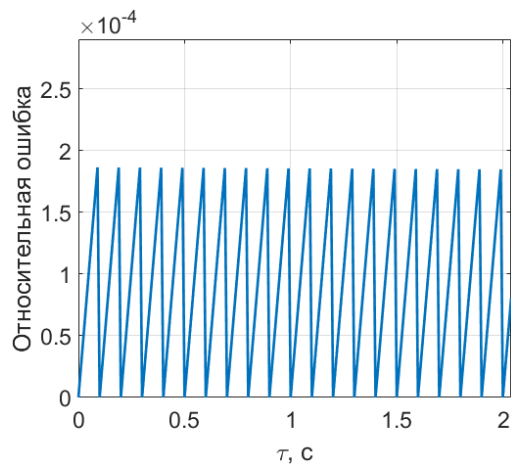


Рис.4 Относительная ошибка управления в регулярном случае.

Таким образом, поданное управление не будет обеспечивать парирование внешнего момента на протяжении всей фазы управления, что приводит к ошибкам в ориентации аппарата.

### 3. Построение сингулярной поверхности

Закон управления из уравнения (2.12) нельзя использовать, если ранг матрицы  $\mathbf{C}$  меньше трех. Тогда выполняется следующее равенство:

$$\det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) = 0. \quad (3.1)$$

Как видно из Рис. 5 если ранг матрицы  $\mathbf{C}$  меньше трех, т.е. вектора  $\mathbf{c}_i$  лежат в одной плоскости, то суммарный управляющий момент из уравнения (2.7) не охватывает трехмерное пространство.

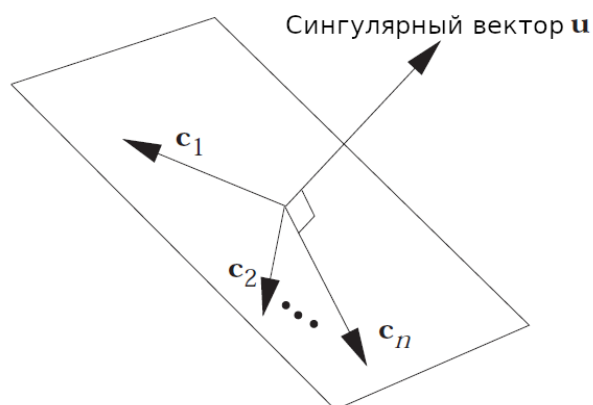


Рис.5 Условие сингулярности и сингулярный вектор

Так как все вектора  $\mathbf{c}_i$  из матрицы  $\mathbf{C}$  компланарны, то управляющий момент  $\mathbf{T}$  не имеет компоненты, нормальной к плоскости. Обозначим за  $\mathbf{u}$  единичный вектор нормали к плоскости и назовем его сингулярным вектором. Он определяется следующим соотношением

$$\mathbf{u}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

Назовем сингулярной точкой такое положение осей карданов гиродинов, при котором система (2.7) вырождается (становится сингулярной). Тогда рассмотрим все сингулярные точки и их векторы  $\mathbf{H}$ . Все векторы  $\mathbf{c}_i$  удовлетворяют уравнению (3.1), когда система сингулярна. В таком случае у каждой сингулярной точки определяется свой сингулярный вектор  $\mathbf{u}$ . Верно и обратное – по сингулярному вектору  $\mathbf{u}$  можно получить сингулярные точки.

У любого вектора  $\mathbf{u}$  для каждого гироина существуют две возможных сингулярных конфигурации кинетических моментов в виде  $\mathbf{h}_s$  и  $-\mathbf{h}_s$  как на Рис. 6. Эти два случая отличаются знаком следующей переменной

$$\varepsilon_i = \text{sign}(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{h}_i). \quad (3.3)$$

Таким образом, мы имеем  $2^n$  комбинаций, для заданного направления  $\mathbf{u}$ , где  $n$  – число гиродинов в системе (в нашем случае 4). Эти комбинации определяются с помощью  $\varepsilon$  последовательностью знаков  $\{+ - + + \dots +\}$ . Для каждого заданного направления  $\mathbf{u}$  и заданной последовательности знаков, вектор управляющего момента в сингулярном положении определяется как

$$\mathbf{c}_{s_i} = \varepsilon_i \mathbf{g}_i \times \mathbf{u} / |\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|. \quad (3.4)$$

С этого момента переменные, обозначенные буквой  $S$ , будут обозначать сингулярные значения. Суммарный кинетический момент получаем из следующего соотношения

$$\mathbf{H}_s = \sum \varepsilon_i (\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}) \times \mathbf{g}_i / |\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|. \quad (3.5)$$

Это выражение определяет непрерывное отображение из  $\mathbf{u}$  в  $\mathbf{H}_s$ , где  $\varepsilon_i$  являются параметрами. Область  $\mathbf{u}$  является единичной сферой на всех направлениях, кроме  $\pm \mathbf{g}_i$ , поскольку в этих двух случаях знаменатель уравнения (3.5) обращается в нуль. Таким образом, вектор  $\mathbf{H}_s$  с фиксированной последовательностью  $\varepsilon_i$  формирует двумерную поверхность, накрывающую сферу  $\mathbf{u}$ . Если все значения  $\varepsilon_i$  заменить на  $-\varepsilon_i$  и вектор  $\mathbf{u}$  на

$-\mathbf{u}$ , то  $\mathbf{H}_S$  останется тем же. Таким образом, поверхность, заданная  $\varepsilon_i$ , и поверхность, заданная  $-\varepsilon_i$ , совпадают, а значит достаточно рассмотреть только те комбинации  $\varepsilon_i$ , в которых число плюсов не превышает половины. Т.е. число различных поверхностей падает до  $2^{n-1}$ .

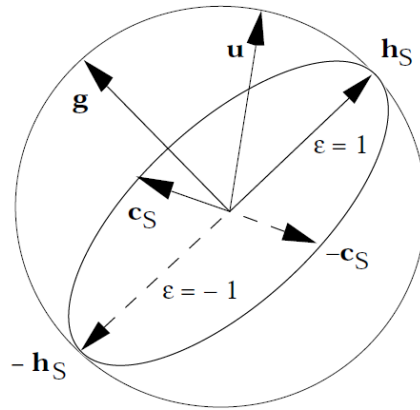


Рис.6 Вектора в условиях сингулярности

Перебирая всевозможные направления векторов  $\mathbf{u}$  и комбинаций  $\varepsilon_i$ , мы строим для них сингулярную поверхность, отвечающую нашей системе. Ее внешняя и внутренняя части представлены на Рис. 7.1 и 7.2.

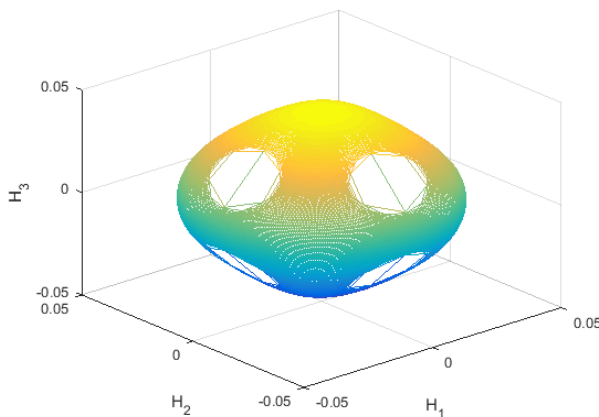


Рис. 7.1 Внешняя сингулярная поверхность

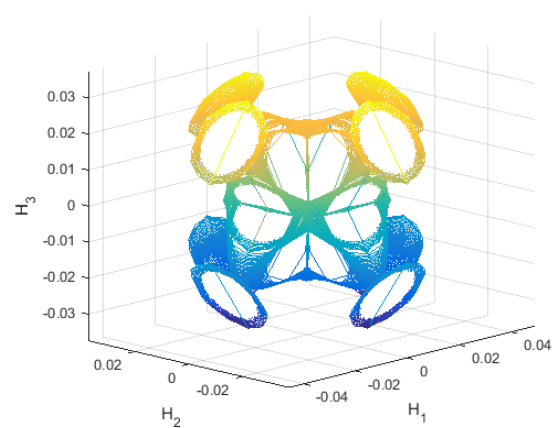


Рис.7.2 Внутренняя сингулярная поверхность

В общем случае суммарный кинетический момент системы гиродинов может выходить на внешнюю сингулярную поверхность, и тогда потребуется разгрузка гиродинов с помощью других средств. Внутреннюю поверхность аппарат может пересекать в ходе управления и нашей задачей будет научиться ее обходить. Для этой цели

есть множество различных методов, наиболее распространённые из которых рассмотрены далее.

#### 4. Методы обхода сингулярности

В работе рассматриваются методы обхода сингулярности в режиме реального времени – нуль движение и транзитные методы. В начале будет рассмотрен метод нуль-движения, не добавляющий ошибку в момент управления, а следом три транзитных метода, позволяющих проходить сингулярные поверхности, внося различного рода ошибки.

##### 4.1. Нуль-движение

Метод нуль-движения можно использовать в комбинации с любым другим, что увеличивает точность работы. Как можно заметить, матрица системы (2.8) имеет размерность  $3 \times 4$ , за счет чего при любом решении у нас есть возможность найти вектор из ядра системы (т.е. ее нуль-подпространства), который будет вносить нулевой вклад в момент управления.

Ниже представлен метод нахождения нуль-движения, основанный на обобщенном векторном произведении [6,7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= [\mathbf{D}_1; \mathbf{D}_2; \mathbf{D}_3; \mathbf{D}_4] - \text{вектор нуль движения:} \\ \mathbf{Cn} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_i &= (-1)^{i+1} \mathbf{M}_i \\ \mathbf{M}_i &= \det(\mathbf{C}_i) \\ \mathbf{C}_i &= \mathbf{C} \text{ без } i\text{-го столбца} \end{aligned} \tag{4.1}$$

С учетом этого общее решение представимо в виде

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{частн}} + \alpha \mathbf{n} \tag{4.2}$$

Здесь  $\alpha$  - некий коэффициент, подбираемый эмпирически для каждого случая. При моделировании, этот коэффициент выбирался следующим образом:

$$\alpha = \begin{cases} \pm m, & \text{если } m \geq 1 \\ \pm m^{-1}, & \text{если } m < 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

где  $m = \det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)$  - мера сингулярности. Знак выбирался так, чтобы  $\alpha \mathbf{n}$  был направлен в сторону градиента  $m$ , для отдаления от сингулярности.

Следует отметить, что этот метод позволяет бороться как с внутренними сингулярностями, так и с внешними, в большинстве случаев отдаляя их

приближение[3,6,8]. Однако, в общем случае полностью исключить попадание на сингулярную поверхность нельзя. Поэтому существуют методы, вносящие ошибку в управление, что позволяет огибать внутреннюю сингулярную поверхность более точно.[1,2]

## 4.2. Singular Robust Inverse

Этот метод, как и последующие два предлагает внести определенную поправку в матрицу  $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ , при решении системы (2.10), огибая внутреннюю сингулярную поверхность. Все подобные поправки вносят различного рода ошибки в итоговый момент управления, однако с их помощью мы можем избежать попадания на сингулярность и сохранить систему в рабочем состоянии.

Метод SR (Singular Robust Inverse) был предложен Накамурой и Ханафусой [9] для манипуляторов роботов, которые с точки зрения математики являются аналогами гиродинов. Он может быть определен как задача минимизации следующего вида

$$\min_{\dot{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{2} \left\{ \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{T}_{err}^T \mathbf{B} \mathbf{T}_{err} \right\}, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{T}_{err} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – симметричные, положительно определенные матрицы.

Решение задачи минимизации выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{\dot{\boldsymbol{\theta}}} &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{A} (\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{T}) + \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} = 0 \\ \Rightarrow (\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{A} \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{B}) \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{B} \mathbf{T}, \text{ откуда получаем} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{C}_{SR} \mathbf{T} = \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{A} \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{B} \right]^{-1} \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{A} \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – диагональные матрицы  $\mathbf{E}_3$  и  $\alpha \mathbf{E}_4$  соответственно, то путем несложной замены получаем SR-обратную матрицу  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C}_{SR} = \mathbf{C}^T \left[ \alpha \mathbf{I}_3 + \mathbf{C}\mathbf{C}^T \right]^{-1}. \quad (4.6)$$

Здесь  $\alpha$  - параметр, который нужно эмпирически подбирать для наилучшего ухода от сингулярности. Тогда требуемые угловые скорости гиродинов задаются следующим соотношением:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{SR} = \mathbf{C}_{SR} \mathbf{T} \quad (4.7)$$

Очевидно, что если  $\alpha$  равен нулю, то мы имеем обычное псевдообращение Мура-Пенроуза. Обычно этот параметр выбирают в зависимости от меры сингулярности  $m$  и некоторого критического значения  $m_{cr}$ , например, так[2]:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & , \text{ при } m \geq m_{cr} \\ \alpha_0(1 - m / m_{cr})^2 & , \text{ при } m < m_{cr} \end{cases} \quad (4.8)$$

### 4.3. Generalized Singular Robust

Метод GSR (Generalized Singular Robust) похож на предыдущий, однако вместо диагональной и постоянной матрицы ошибок  $\mathbf{A}$  здесь вводится матрица, синусоидально зависящая от времени, с ненулевыми коэффициентами вне диагонали. Данный метод был предложен В. Вие[10], как улучшение SR- метода. Здесь

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{GSR}} = \mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{C}^T + \lambda \mathbf{E}]^{-1} \mathbf{T}, \quad (4.9)$$

где  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 1 \end{pmatrix} > 0$ , и  $\varepsilon_i$  - модуляционные функции,  $\varepsilon_i = 0.01 \sin(0.5\pi t + \varphi_i)$ , где  $\varphi_i$

равны 0,  $\pi/2$  и  $\pi$  соответственно.

Данный метод, к сожалению, не позволяет избегать сингулярности и не способен получить точный управляющий момент около сингулярности. Вместо этого он позволяет пройти через нее, генерируя малые периодические возмущения. В общем случае этот метод не подходит для алгоритмов, реализующих точные траектории.

### 4.4. SVD-разложение

Этот метод, представленный в работах Форда и Халла[4], в отличие от предыдущих, вносит поправку, целенаправленно увеличивая меру матрицы  $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ . В данном случае используется методика сингулярного разложения матрицы  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T. \quad (4.10)$$

Здесь  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  – ортогональные матрицы, имеющие размерность 3x3 и 4x4 соответственно.

Матрица  $\mathbf{S}$  записывается в следующем виде

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  есть сингулярные числа матрицы  $\mathbf{C}$ . Чем ближе матрица  $\mathbf{C}$  к вырождению, то есть ближе к сингулярности, тем меньшим по модулю числом является  $\sigma_3$ . Суть метода

сводится в добавлении ошибки  $\alpha$  к наименьшему сингулярному числу  $\sigma_3$ . В таком случае введем матрицу  $\mathbf{S}_{err}$  следующим образом:

$$\mathbf{S}_{err} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3 + \alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Тогда решение (2.12) записывается в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{SVD}} = \mathbf{V}\mathbf{S}_{err}\mathbf{U}^T\mathbf{T} \quad (4.13)$$

Ошибку  $\alpha$  чаще всего выбирают в виде  $\alpha_0 \exp(-m^2)$ , где  $m$  – мера матрицы  $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ .

В рамках данного метода за  $m$  здесь была принята  $\sigma_3$ .

## 5. Моделирование

Моделирование происходило в программе Matlab R2016b. Для проведения анализа всех методов были искусственно подобраны значения начальных положений осей карданов гиродинов и внешний момент, чтобы обеспечить близость к сингулярности.

### 5.1. Критерий сравнения методов

Все три метода обхода сингулярностей добавляют ошибку в матрицу, однако, чтобы сравнивать их между собой необходимо выбрать некоторый критерий. Чтобы говорить об их эффективности, требуется, чтобы методы были схожи по возмущению матриц  $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ . Для этой цели было решено выбрать в качестве возмущения изменение мер матриц  $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ , где мерой являлась сумма обратных квадратов сингулярных чисел. Таким образом, коэффициенты методов эмпирически подбирались так, чтобы максимальное возмущение в методах было одинаковым.

В качестве критерия сравнения используется точность парирования внешнего момента, которая в конечном итоге и определяет качество работы системы управления.

Для приближения задачи к реальным параметрам на гиродины были наложены следующие ограничения:

- $h = 0.013 \text{ Н} \cdot \text{м/с}$  [11]



- $\dot{\theta}_{\max} = 0.1$  рад/с
- $m_{cr} = 0.05$
- Шаг интегрирования 0.01 сек, а шаг управления – 0.1 сек.
- Возмущение задается как  $\sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{\sigma_{new i}^2} - \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$ , где  $\sigma_i$  - i-ое сингулярное число
- Если  $|\dot{\theta}_i| > \dot{\theta}_{\max}$ , то  $\dot{\theta} = \dot{\theta} \cdot \dot{\theta}_{\max} / \text{norm}(\dot{\theta})$

## 5.2. Моделирование пересечения сингулярной поверхности

Пусть  $\delta = [\pi/2 \ \pi/8 \ \pi/2 \ \pi/8]^T$  - вектор ориентации осей карданов гиродинов. Пусть на протяжении всего времени  $\tau = 3600$  секунд на аппарат действовал постоянный внешний момент  $\mathbf{T} = 10^{-6} \cdot [-10 \ 4 \ 12]^T$  Н. В этом случае результаты работы метода Мура-Пенроуза имеют вид, изображенный на Рис. 8.1-8.2.

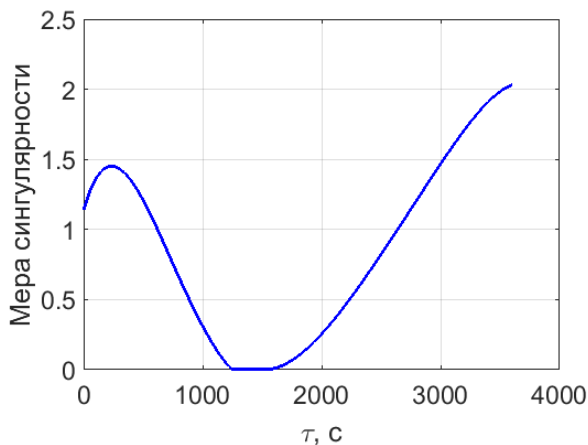


Рис. 8.1 Мера сингулярности в методе Мура-Пенроуза

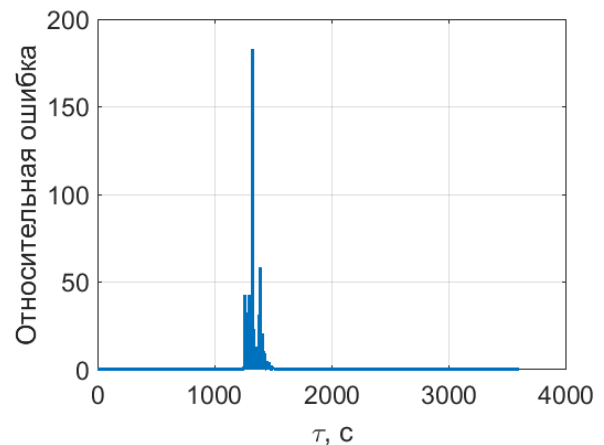


Рис. 8.2 Относительная ошибка управляющего момента

На рисунках с 1300 секунд до 1500 система попадает в окрестность сингулярности, вызывая сильную ошибку по управлению, что хорошо видно на Рис. 8.2. Таким образом, в течение этого промежутка метод не будет обеспечивать стабилизацию спутника.

Далее продемонстрированы результаты для трех других методов на тех же начальных положениях гиродинов и внешнем моменте.

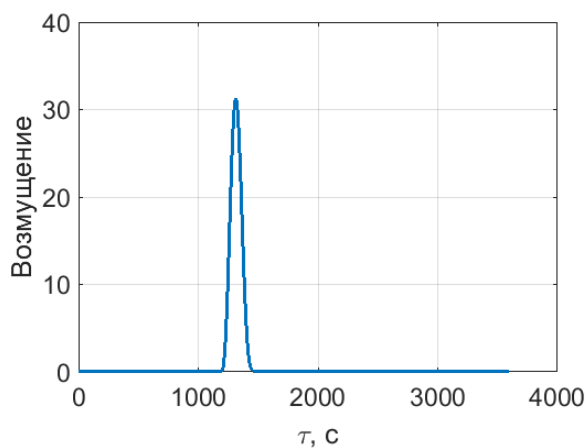


Рис. 9.1 Возмущение SR-метода

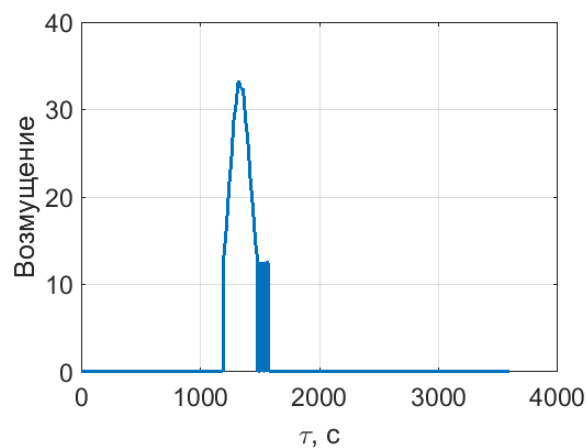


Рис. 9.2 Возмущение GSR-метода

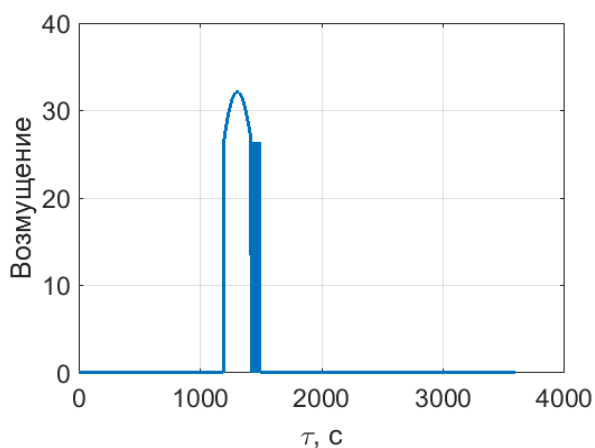


Рис. 9.3 Возмущение SVD-метода

Как можно видеть на Рис. 9.1-9.3 возмущение матриц на протяжении сингулярности имеет одно и то же максимальное значение, поэтому методы можно сравнивать друг с другом. Ниже на Рис. 10.1 – 10.4 представлены графики угловых скоростей осей карданов гиродинов в разных методах. Из них хорошо видно, что метод Мура-Пенроуза в окрестности сингулярности для идеального управления требует превышения возможностей системы, в то время как для остальных трех методов эти величины находятся в пределах допустимых значений.

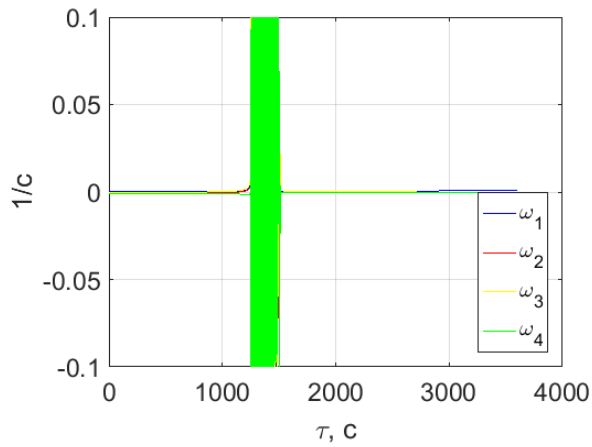


Рис. 10.1 Угловые скорости Мура-Пенроуза

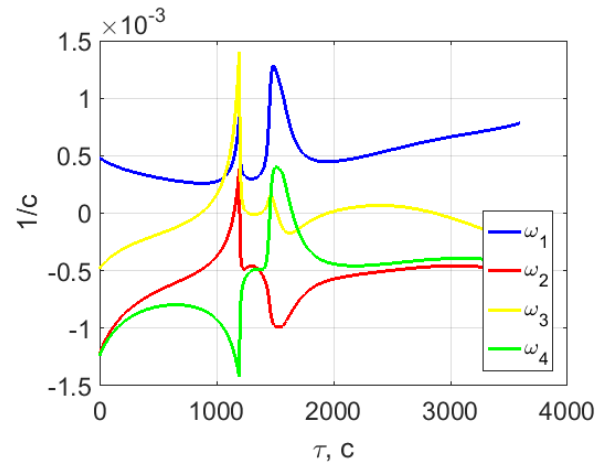


Рис. 10.2 Угловые скорости SR-метода

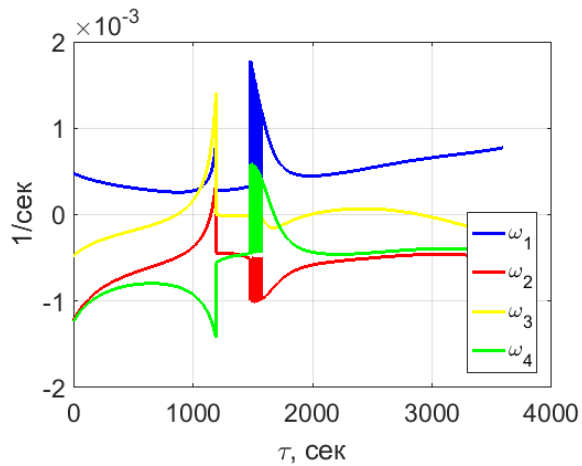


Рис. 10.3 Угловые скорости GSR-метода

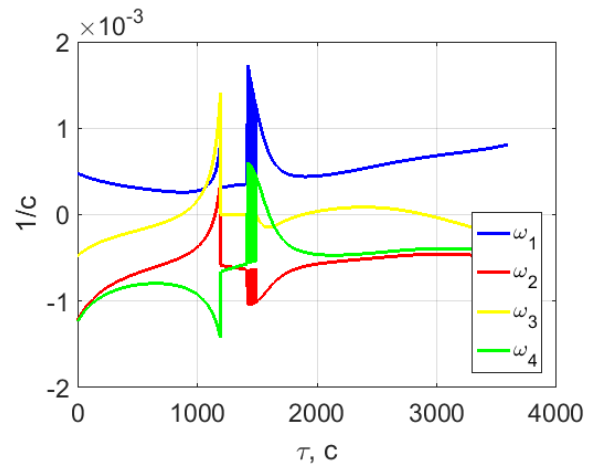


Рис. 10.4 Угловые скорости SVD-метода

И, наконец, на Рис. 11 представлена относительная ошибка выдачи управляющего момента. Как можно видеть, лучше всего себя ведет, с точки зрения выдачи момента, SVD-метод, который, впрочем, является наиболее сложным по вычислительной части. В целях проведения дальнейшего анализа точности методов было решено исследовать задачу стабилизации спутника в орбитальных осях.

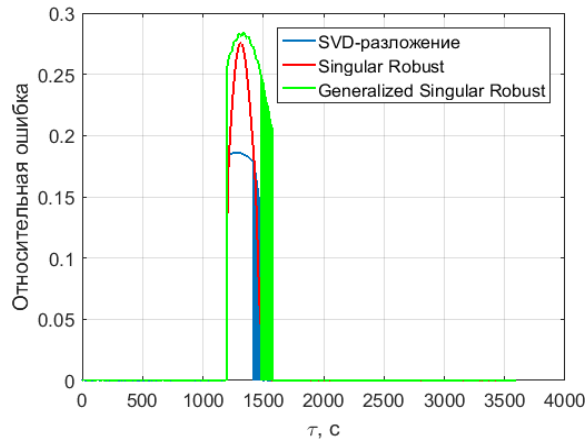


Рис. 11 Относительная ошибка различных методов обхода сингулярностей

### 5.3. Моделирование стабилизации спутника в орбитальных осях

Параметры моделирования следующие

- Большая полуось орбиты спутника -  $6.73 \cdot 10^6$  м;
- Эксцентриситет орбиты спутника - 0.008;
- Долгота восходящего узла орбиты спутника - 1 рад;
- Наклонение орбиты спутника - 0.5 рад;
- Аргумент перицентра орбиты спутника -  $\pi$  рад;
- Тензор инерции спутника в ССК -  $J = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$ ;
- Кватернион начальной ориентации ССК отн. ИСК -  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- Начальная абсолютная угловая скорость -  $\boldsymbol{\omega} = (1 \ 2 \ 3) \cdot 10^{-4}$  рад/с;
- Начальное положение гироскопов  $\boldsymbol{\theta}_0 = [\pi/2 + 10^{-5} \ \pi/2 \ \pi/2 \ \pi/2]$ .

Такое начальное положение системы гироскопов гарантировало близость к внутренней сингулярной поверхности.

Ставится задача стабилизации спутника в ОСК с конечным кватернионом ориентации ОСК относительно ИСК  $\mathbf{q}_0 = [0.9603 \ 0.2016 \ 0.1624 \ 0.1034]$ . Такое положение было выбрано, чтобы на систему постоянно действовало возмущение от гравитационного момента. В качестве алгоритма идеального управления было выбрано

управляющее воздействие на основе функции Ляпунова. Это управление было необходимо получить с помощью гироидов. Шаг интегрирования и управления остались теми же, что и при моделировании с постоянным внешним моментом.

Ко всем методам было добавлено нуль-движение, позволяющее отдаляться от внешних сингулярностей, которые довольно быстро без его учета. Именно по этой причине нуль-движение рекомендуется использовать в связке с другими методами. В ходе интегрирования были получены следующие результаты:

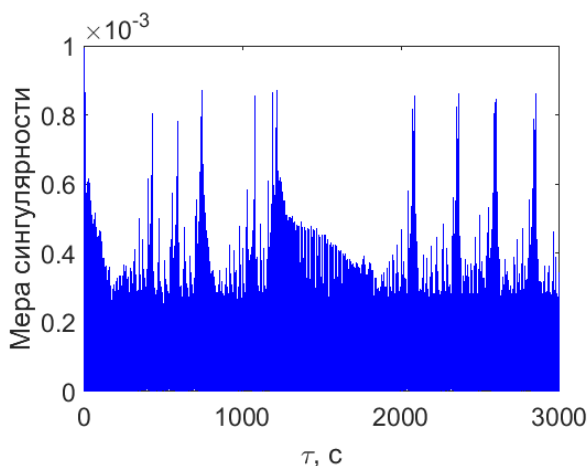


Рис. 12.1 Мера сингулярности при стабилизации в методе Мура-Пенроуза

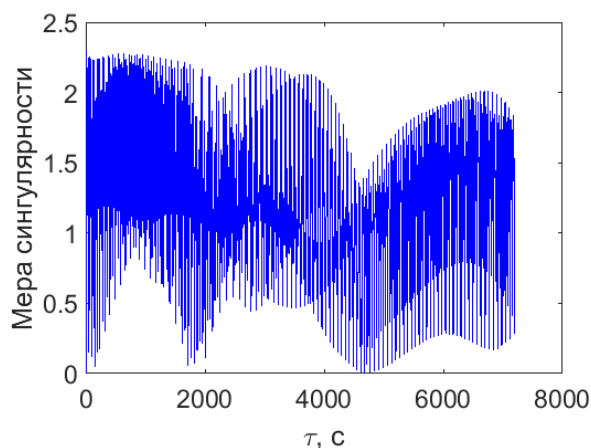


Рис. 12.2 Мера сингулярности при стабилизации в SR-методе

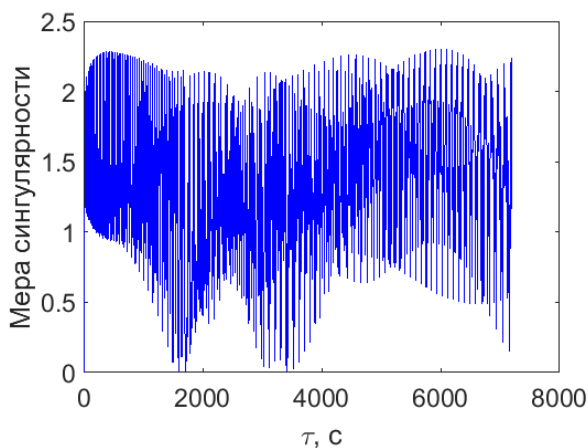


Рис. 12.3 Мера сингулярности при стабилизации в GSR-методе

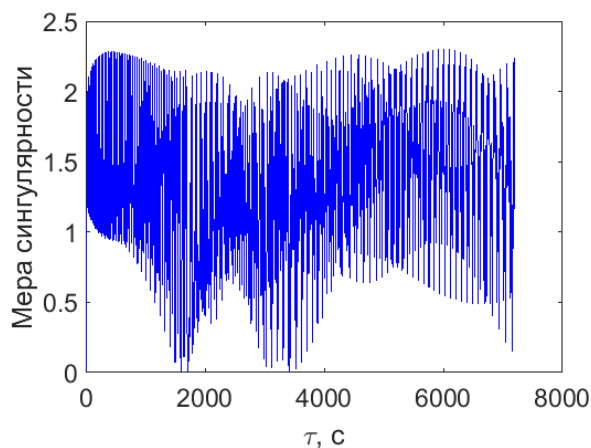


Рис. 12.4 Мера сингулярности при стабилизации в SVD-методе

Как можно видеть из Рис. 12.1, 13.1 метод Мура-Пенроуза не смог вывести систему из окрестности сингулярности, из-за чего система не смогла стабилизироваться должным образом.

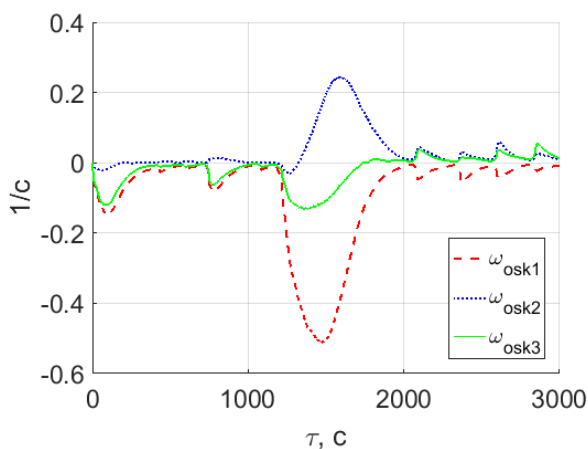


Рис. 13.1 Компоненты угловой скорости спутника в ОСК в методе Мура-Пенроуза

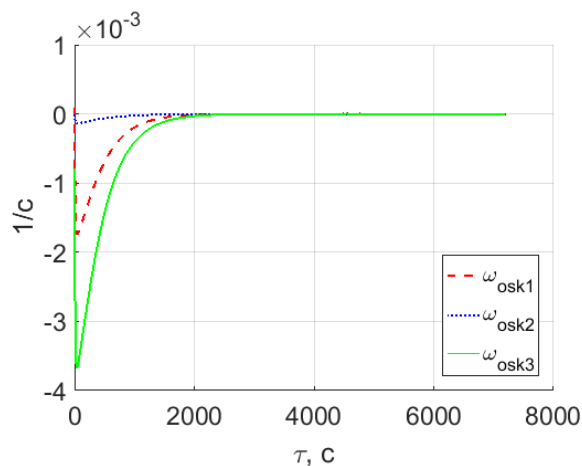


Рис. 13.2 Компоненты угловой скорости спутника в ОСК в SR-методе

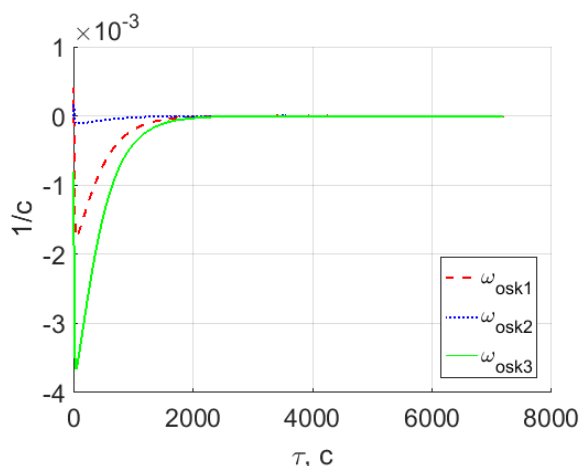


Рис. 13.3 Компоненты угловой скорости спутника в ОСК в GSR-методе

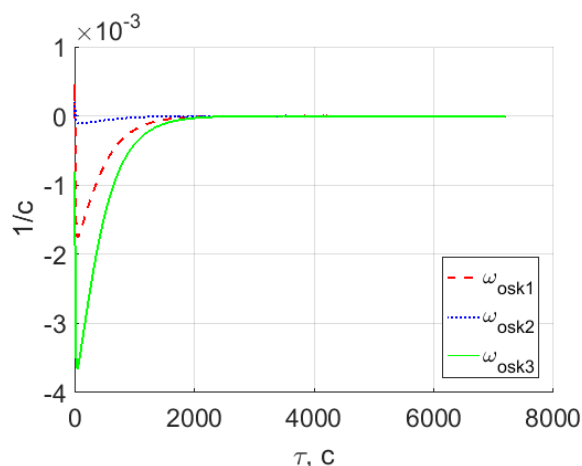


Рис. 13.4 Компоненты угловой скорости спутника в ОСК в SVD-методе

При таком масштабе, кажется, что три альтернативы метода Мура-Пенроуза справляются одинаково, однако при приближении можно увидеть, что все три метода ведут себя по-разному (Рис. 14.1-14.3). Скачки происходят в окрестностях сингулярностей. Как можно заметить, методы SVD и GSR проходят одну и ту же сингулярность, причем SVD обладает более высокой точностью вычислений. Метод SR попадает в другие окрестности сингулярности и по другому ее проходит.

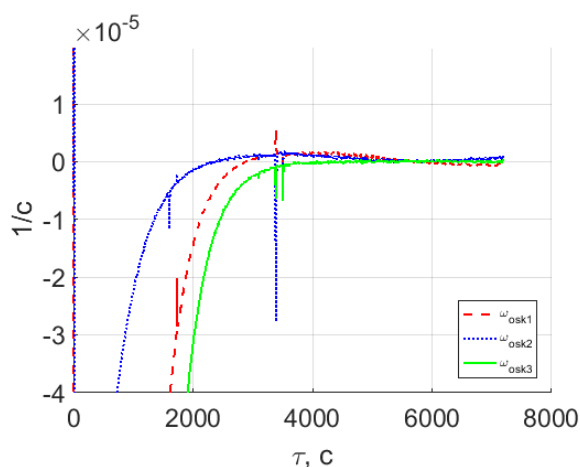


Рис. 14.1 Эволюция угловых скоростей спутника в ОСК в SVD-методе

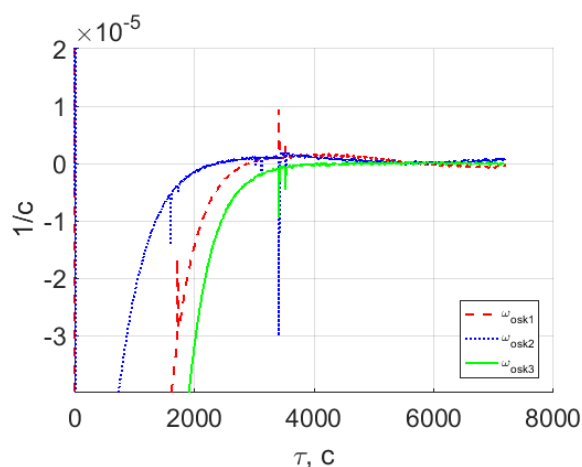


Рис. 14.2 Эволюция угловых скоростей спутника в ОСК в GSR-методе

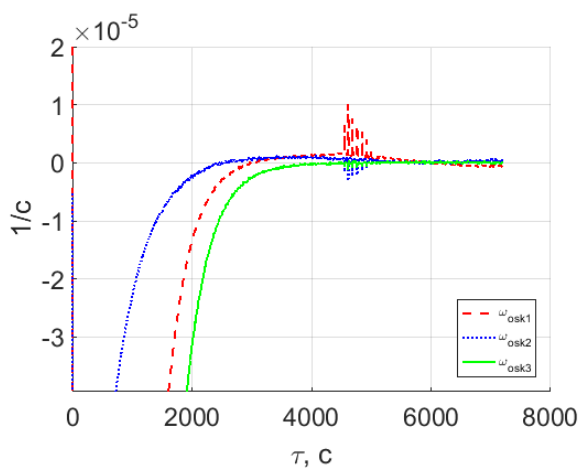


Рис. 14.3 Эволюция угловых скоростей спутника в ОСК в SR-методе

## Заключение

В работе рассмотрена система управления ориентацией спутника из гиродинов в виде четырехугольной пирамиды. Изучены принцип выдачи момента управления и особенности, возникающие при управлении. Проведено сравнение различных методов формирования управляющих воздействий для гиродинов при наличии сингулярностей. Выполнено моделирование методов в условиях одинаковых возмущений и рассмотрена их применимость в задаче стабилизации спутника в орбитальных осях.

В ходе исследования были выявлены особенности. Метод SVD-разложения обладает наибольшей точностью по выдаче момента, однако в реальной задаче его

превосходство над другими не столь велико. При этом он требует больших вычислительных мощностей для решения задачи. Метод Generalized Singular Robust обладает худшей точностью управления, однако он лучше избегает сингулярности, нежели его более старый аналог Singular Robust, что видно на примере стабилизации в орбитальных осях. Singular Robust, тем не менее, является самым вычислительно простым из представленных методов с обходом сингулярностей, поэтому может использоваться на слабом оборудовании, если не нужна высокая точность. Нуль-движение целесообразно применять в комбинации с любым из методов, поскольку оно обеспечивает отдаление от внешних границ сингулярности, позволяя поддерживать работу системы большее время.

### **Список используемой литературы**

1. Kurokawa H. A Geometric Study of Single Gimbal Control Moment Gyros -Singularity Problem and Steering Law- // Rep. Mech. Eng. Lab. 1998. Vol. 175, № 175. P. 108.
2. Yavuzoglu E. Steering Laws for Control Moment Gyroscope Systems Used in Spacecraft Attitude Control. 2003. № November. P. 191.
3. Margulies G., Aubrun J. Geometric Theory of single-Gimbal Control Moment Gyro Systems // J. Astronaut. Sci. 1978.
4. Ford K.A., Hall C.D. Singular Direction Avoidance Steering for Control-Moment Gyros // J. Guid. Control. Dyn. 2008. Vol. 23, № 4. P. 648–656.
5. Meffe, M. Stocking G. Momentum Envelope Topology of Single-Gimbal CMG Arrays for Space Vehicle Control // Proc. AAS Guid. Control Conf. CO., 1987. № Jan.-Feb.
6. BEDROSSIAN N.S. et al. Steering law design for redundant single-gimbal control moment gyroscopes // J. Guid. Control. Dyn. 2008.
7. BEDROSSIAN N.S. et al. Redundant single gimbal control moment gyroscope singularity analysis // J. Guid. Control. Dyn. 2008.
8. PARADISO J.A. Global steering of single gimballed control moment gyroscopes using a directed search // J. Guid. Control. Dyn. 2008.
9. Nakamura Y., Hanafusa H. Inverse Kinematic Solutions With Singularity Robustness for Robot Manipulator Control // J. Dyn. Syst. Meas. Control. 2009.
10. Wie B., Bailey D., Heiberg C. Singularity Robust Steering Logic for Redundant Single-Gimbal Control Moment Gyros // J. Guid. Control. Dyn. 2008.
11. СПУТНИКС - Гиродины, URL: <https://sputnix.ru/ru/oborudovanie/pribory-tabletsat/ispolnitelnyie-organyi-sistemyi-orientaczii-stabilizaczii-i-navigaczii/girodinyi>.