

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени магистра
по направлению 03.04.01 «Прикладные математика и физика»,
магистерская программа «Управление динамическими системами»

Прохождение сингулярной поверхности с локальным обеспечением управляемости аппарата

Выполнил:

студент группы М05-902в

Вознюк Данила Александрович

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент

Ткачев Степан Сергеевич

Москва, 2021

Аннотация

Работа посвящена проблеме управления ориентации космического аппарата с помощью гиродинов. В подобных системах всегда существуют такие взаимные расположения осей карданов гиродинов, когда невозможно сформировать управляющие воздействия, и происходит потеря управляемости. Эти конфигурации называются сингулярными и в этом случае применяются специальные методы их обхода. В работе представлен новый способ анализа возможности непрерывной управляемости аппарата в рамках выполнения задачи дистанционного зондирования Земли. А также разработан алгоритм формирования управляющего воздействия для четырехугольной пирамидальной системы гиродинов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аннотация.....	2
Введение	5
1. Постановка задачи и уравнения движения	7
1.1. Постановка задачи	7
1.2. Системы координат.....	7
1.3. Система управления ориентацией	9
1.4. Формирование управляющего воздействия	10
2. Проблема сингулярности	14
2.1. Сингулярная поверхность	14
2.2. Касательные пространство и подпространство.....	17
2.3. Квадратичные формы	19
2.4. Знак квадратичной формы.....	21
2.5. Проходимость сингулярной поверхности	21
2.6. Критерий проходимости.....	22
3. Многообразия углов гиروزлов	24
3.1. Многообразия.....	24
3.2. Траектории многообразий	25
3.3. Области в пространстве многообразий.....	28
3.4. Типы областей и правила многообразий	29
4. Закон управления	31
4.1. Обзор существующих методов	31
4.2. Требования к закону управления	34

4.3. Алгоритм	35
5. Моделирование	40
5.1. Параметры системы и модели	40
5.2. Примеры	42
5.3. Результаты моделирования	51
Заключение	52
Приложение А: Базисы касательных пространств.....	54
Приложение В: Обратная кинематика	56
В.1 Многообразия.....	56
В.2 Траектории многообразий	57
В.3 Области и классы эквивалентности	59
В.4 Терминальные классы и типы областей.....	61
В.5 Классы связности	62
В.6 Выбор многообразия.....	68
Список используемой литературы	70

Введение

В настоящее время при помощи космических аппаратов (КА) решается огромное количество научных и прикладных задач. Обеспечение связи, телевидение, изучение гравитационного и магнитного полей Земли, дистанционное зондирование земли (ДЗЗ) и другие. Для выполнения подавляющего большинства этих задач возникает необходимость управления ориентацией спутника и выработке законов управления углового движения.

На современных КА для управления угловым движением используют маховики, магнитные катушки, реактивные двигатели и прочие устройства. На крупных спутниках и космических станциях, где необходимы большие моменты, популярность приобрели одностепенные и двухстепенные гироины. Одностепенные гироины представляют собой устройство, изображенное на Рис. 1.

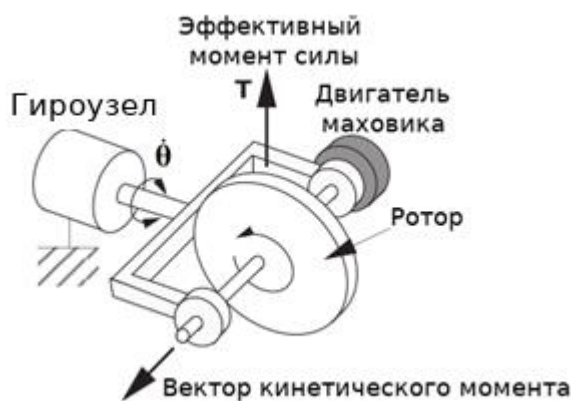


Рис.1 Одностепенной гироин.

Есть маховик, который раскручивается электродвигателем. Вдоль своей оси вращения маховик закрепляется в подвесе, которую гиروزел может вращать перпендикулярно направлению собственного кинетического момента маховика.

Гироины могут давать больший управляющий момент в сравнении с обычными маховиками при одинаковых массах и затратах энергии [1].

Однако, помимо более высокой технической сложности по сравнению с маховиками, они имеют ряд особенностей, которые необходимо учитывать при формировании управляющих воздействий. Для обеспечения управляемости гироины используются в комплекте из нескольких устройств. Поскольку оси их собственных кинетических моментов подвижны относительно спутника то возможны такие взаимные конфигурации, в которых происходит потеря управляемости. Такие конфигурации называют сингулярными. В общем случае, оказывается, что любая система из гироинов при заданном значении максимального модуля управляющего момента будет характеризоваться особой сингулярной поверхностью — поверхностью, на которой существует выделенное направление, вдоль которого нельзя создать управляющий момент. Это происходит, когда вектора производных кинетических моментов гироинов встают в одной плоскости. Таким образом, исчезает возможность выдачи управления по компоненте, перпендикулярной этой плоскости.

На крупных космических станциях используются двухстепенные гироины в количестве более пяти штук, что позволяет вводить другие законы управления [2]. Такая избыточность позволяет избегать сингулярных положений и обеспечивать непрерывность ориентации. Однако двухстепенные гироины существенно дороже одностепенных и намного сложнее в изготовлении. На малых аппаратах в настоящее время возможно использование лишь гироинов. По этой причине цель работы заключается в рассмотрении задачи ДЗЗ для малых аппаратов, на которых установлены одностепенные гироины в одной из наиболее популярных конфигураций.

В работе рассмотрен подробный анализ свойств поверхности и ее самопересечений, выработана методика оценки возможности реализации заданной траектории спутника, а также построен алгоритм расчетного управляющего воздействия на фазе, предшествующей манёвру.

1. Постановка задачи и уравнения движения

В главе сформулирована задача, определены используемые в работе системы координат, описана система управления ориентацией, а также получены уравнения на требуемые угловые скорости гиросузлов, позволяющие реализовать алгоритм управления.

1.1. Постановка задачи

Рассматривается задача обеспечения съемки заданной точки на поверхности Земли. При этом предполагаются известными:

- 1) орбитальное движение КА, то есть его скорость и местоположение в пространстве в каждый заданный момент времени;
- 2) параметры КА – тензор инерции, дипольный момент, начальная угловая скорость и ориентация;
- 3) координаты точки на поверхности Земли либо время пролета над ней;
- 4) параметры системы управления ориентацией КА: тензоры инерции гиросузов, их количество и взаимное расположение, скорость раскрутки роторов, максимальные угловые скорости и ускорения гиросузлов, начальное положение системы гиросузов;

Требуется при заданных начальных условиях и параметрах гарантировать съемку заданной точки. То есть исключить попадание системы гиросузов в сингулярные конфигурации на протяжении всего времени съемки.

1.2. Системы координат

В работе рассматриваются следующие ортонормированные системы координат.

ССК – связанная с КА система координат, начало координат в центре масс спутника, оси направлены параллельно главным осям тензора инерции аппарата;

ИСК – инерциальная система координат, связанная с центром Земли, две оси которой лежат в плоскости экватора (первая направлена на точку весеннего равноденствия в системе J2000), а третья на северный географический полюс.

ГСК – гринвическая (географическая) система координат, связанная с Землей система координат, начало в центре масс Земли, первая ось лежит в плоскости экватора и направлена на нулевой меридиан, третья перпендикулярно экватору на северный полюс.

СКГ – система координат гироидинов, начало находится в основании 4-угольной пирамиды гироидинов (Рис. 2), который совпадает с центром масс КА, оси X и Y лежат в плоскости основания и сонаправлены с его сторонами. Ось Z направлена вертикально вверх на вершину пирамиды.

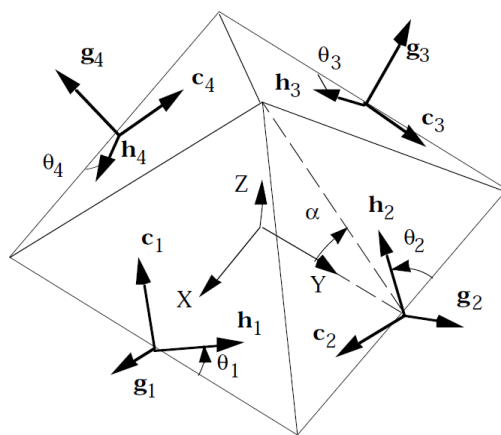


Рис. 2 Схема пирамидальной системы

ОСК – опорная система координат, начало в центре масс КА, положение ее осей задается с помощью матрицы направляющих косинусов $\mathbf{B}(t)$, описывающей поворот из ИСК в ОСК $\mathbf{r}^{ОСК} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}^{ИСК}$ и опорной угловой

скорости $\boldsymbol{\omega}_{ref}$, компоненты которой записаны в проекциях на ОСК. Все это вместе задает опорное движение спутника в рамках задачи ДЗЗ.

ВСК – визирная система координат. В работе полагается, что центр фоточувствительного элемента находится в центре масс спутника, а сам элемент направлен в надир. Оптическая ось параллельна третьей оси ССК.

Переходы между этими системами координат осуществляются с помощью матриц направляющих косинусов. \mathbf{A} – из ИСК в ССК, \mathbf{B} – из ИСК в ОСК, $\mathbf{D} = \mathbf{AB}^T$ – из ОСК в ССК, \mathbf{G} – из ИСК в ГСК. В работе полагается, что СКГ совпадает с ССК

1.3. Система управления ориентацией

В работе рассматривается система из четырех идентичных одностепенных гироскопов, расставленных по серединам сторон основания четырехугольной равнобедренной пирамиды с углом между противоположными боковыми ребрами 90 (Рис. 2) [3,4]. Такая конфигурация позволяет обеспечивать трехосную стабилизацию спутника[3] и гарантирует наибольший радиус рабочей области для заданного числа гироскопов[5–7].

Здесь θ_i – угол между стороной основания и направлением кинетического момента i -го гироскопа, измеряемый в плоскости боковой грани пирамиды.

\mathbf{h}_i – вектор кинетического момента i -го гироскопа;

\mathbf{g}_i – нормированный вектор в направлении оси вращения гироскопа;

\mathbf{c}_i – вектор управляющего момента i -го гироскопа, возникающего при повороте гироскопа;

В силу такого выбора пирамиды мы получаем следующие данные для угла α :

$$\cos(\alpha) = cz = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ и } \sin(\alpha) = sz = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

В нашей задаче будем считать все гироины одинаковыми со сферическими тензорами инерции.

1.4. Формирование управляющего воздействия

В дальнейших выкладках считаем, что векторы кинетических моментов гироинов \mathbf{h}_i и векторы управляющих моментов \mathbf{c}_i нормированы на единицу. Также в работе будем пользоваться схемой на Рис.3 [8], в которой векторы представляют правую тройку.

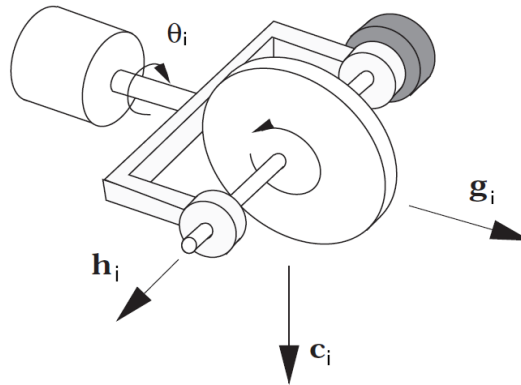


Рис. 3 Правая тройка векторов

В таком случае нормированная производная кинетического момента \mathbf{c}_i может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{c}_i = \partial \mathbf{h}_i / \partial \theta_i = \mathbf{g}_i \times \mathbf{h}_i \quad (1.1)$$

Направление оси вращения гиروزла \mathbf{g}_i фиксировано и не изменяется с течением времени, в то время как остальные два вектора зависят от угла поворота оси θ_i .

Кинетические моменты и их производные в СКГ определяются как

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} -cz \cdot \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \\ sz \cdot \sin(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_2) \\ -cz \cdot \sin(\theta_2) \\ sz \cdot \sin(\theta_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} cz \cdot \sin(\theta_3) \\ -\cos(\theta_3) \\ sz \cdot \sin(\theta_3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) \\ cz \cdot \sin(\theta_4) \\ sz \cdot \sin(\theta_4) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -cz \cdot \cos(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) \\ sz \cdot \cos(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) \\ -cz \cdot \cos(\theta_2) \\ sz \cdot \cos(\theta_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} cz \cdot \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) \\ sz \cdot \cos(\theta_3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_4) \\ cz \cdot \cos(\theta_4) \\ sz \cdot \cos(\theta_4) \end{bmatrix},$$

здесь все направления заданы в соответствии со схемой на Рис. 2.

Для описаний уравнений движения КА использована модель, состоящая из динамических уравнений Эйлера и кинематических соотношений Пуассона, записанных для кватернионов. В общем случае эти уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} &= \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{M}_{ext}, \\ \dot{\boldsymbol{\Lambda}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Lambda} \circ \bar{\boldsymbol{\omega}}_{abs}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ – тензор инерции КА, $\boldsymbol{\omega}_{abs}$ – вектор абсолютной угловой скорости, \mathbf{M}_{ctrl} – управляющий момент, \mathbf{M}_{ext} – возмущающий момент внешних сил, действующих на аппарат. $\boldsymbol{\Lambda} = (\lambda_0 \ \boldsymbol{\lambda})$ – кватернион ориентации ССК относительно ИСК, $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{abs} = [0 \ \boldsymbol{\omega}_{abs}]$ – кватернион угловой скорости аппарата. Напомним, что кватернионное перемножение определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \mu_0 - (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix}$$

При добавлении в систему вектора суммарного кинетического момента системы гиродинов \mathbf{H} , уравнения (1.2) преобразуются в:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} &= -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H} + \mathbf{M}_{ext}, \\ \dot{\boldsymbol{\Lambda}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Lambda} \circ \bar{\boldsymbol{\omega}}_{abs}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В таком случае если принять за \mathbf{M}_{ctrl} необходимый в нашей задаче закон управления, то динамические уравнения Эйлера могут быть переписаны с учетом

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{H}} = -\mathbf{M}_{ctrl} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H} \quad (1.4)$$

Таким образом, чтобы задать управление, необходимо найти производную полного кинетического момента системы.

Полный кинетический момент системы гироскопов – это сумма всех \mathbf{h}_i , домноженная на модуль максимального кинетического момента одного гироскопа h . Далее в выкладках будем рассматривать полный кинетический момент, нормированный на эту величину h :

$$\mathbf{H}h = \sum \mathbf{h}_i h \quad (1.5)$$

Поскольку каждый \mathbf{h}_i является функцией от угла поворота i -го гироскопа θ_i , то полный кинетический момент будет функцией от всех углов θ_i , $i = 1..4$.

$$\mathbf{H} = f(\boldsymbol{\theta}), \text{ где } \boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4)^T \quad (1.6)$$

Итоговый нормированный вектор управляющего момента, выдаваемого системой гироскопов, получается путем дифференцирования по времени полного кинетического момента системы:

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{H}} = \sum \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Также его можно переписать через производные кинетических моментов гироскопов следующим образом:

$$\mathbf{T} = \sum \mathbf{c}_i \dot{\theta}_i = \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (1.8)$$

где $\dot{\theta}_i = \partial \theta_i / \partial t$, и $\dot{\boldsymbol{\theta}} = (\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4)^T$ – вектор угловых скоростей гироскопов. Матрица \mathbf{C} является якобианом преобразования (1.6) [3] и задается следующим соотношением:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3 \ \mathbf{c}_4). \quad (1.9)$$

Таким образом, мы приходим к необходимости определения вектора угловых скоростей гироскопов $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, способных обеспечить требуемый

управляющий момент. Из формулы (1.8) видно, что момент обеспечивается поворотами гиروزлов (матрица C) и их угловыми скоростями. Наиболее простым методом получения требуемых угловых скоростей гиروزлов для фиксированного положения последних является метод псевдо-обращения Мура-Пенроуза[4,9], который хорошо работает в регулярном случае. В таком случае, если ранг матрицы C равен трем, то решение будет записываться в следующем виде:

$$\dot{\theta}_{part} = C^T (CC^T)^{-1} T. \quad (1.10)$$

Также, учитывая что матрица системы C имеет размер 3×4 , а вектор T трехмерен, то существует вектор из нуль-подпространства этой матрицы, для которого выполнено

$$\dot{\theta}_{null} : C\dot{\theta}_{null} = 0. \quad (1.11)$$

То есть при изменении углов поворота гиродинов, управляющий момент равен нулю. Для его нахождения есть разные способы, например, метод обобщенного векторного произведения и другие [9,10].

Таким образом, в регулярном случае решение будет записываться в следующем виде:

$$\dot{\theta}_{full} = \dot{\theta}_{part} + \dot{\theta}_{null} \quad (1.12)$$

Хотя решение и получается просто, у него есть свои недостатки. Из-за использования псевдо-обращения возникают свои ограничения и проблемы. При приближении определителя матрицы CC^T к нулю (если равен нулю, то ранг матрицы будет меньше трех) $\dot{\theta}_{part}$ может неограниченно возрастать, что невозможно обеспечить техническими средствами, имеющими свои ограничения. Если определитель станет равным нулю, то псевдо-обращение станет невозможным и мы не сможем получить решение. Это плавно приводит нас к проблеме сингулярности.

2. Проблема сингулярности

В главе качественно рассмотрена проблема сингулярности, построенная в работах [3,8,11]. Даны определения проходимой и непроходимой сингулярной поверхности, а также рассмотрены критерии позволяющие определить этот тип.

2.1. Сингулярная поверхность

Уравнение (1.10) имеет решение, если ранг матрицы C будет равен 3. Однако, если матрица C будет иметь ранг 2 и меньше, то есть строки станут линейно-зависимыми, то по теореме Кронекера-Капелли система (1.8), в общем случае, перестанет быть совместной. Взаимные положения углов различных гироузлов, при которых матрица вырождается, называют сингулярными. В окрестности этих положений решения будут сильно расти по модулю, что увеличит ошибку из-за дискретности управления. К тому же гиродины имеют свои физические ограничения по скорости вращения, которые ограничены сверху возможностями двигателей. Поэтому невозможно выдать бесконечно большой момент или закрутить ось с произвольной угловой скоростью, что не позволяет обеспечить требуемую точность выдачи управляющего воздействия в окрестностях сингулярных положений.

Поскольку векторы производных кинетических моментов гиродинов c_i лежат на некопланарных плоскостях, то ранг матрицы C может быть либо 3, либо 2. В последнем случае выполняется следующее неравенство:

$$\det(CC^T) = 0 \quad (2.1)$$

Геометрически это означает, что векторы c_i лежат в одной плоскости и суммарный управляющий момент не охватывает трехмерное пространство (Рис.4).

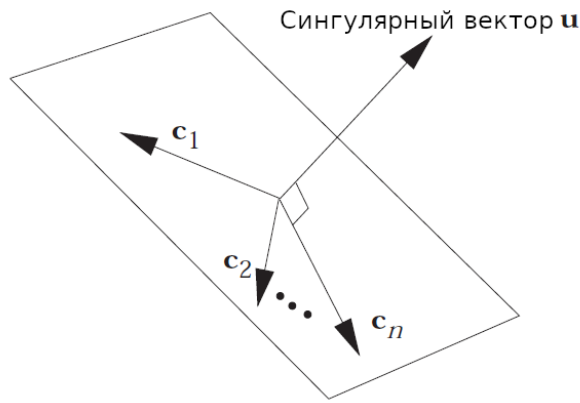


Рис. 4 Условие сингулярности и сингулярный вектор

С другой стороны, вырожденность матрицы \mathbf{C} означает, что существует единичный вектор, нормальный ко всем \mathbf{c}_i . Назовем такой вектор сингулярным. Для него будет выполняться следующее соотношение:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Назовем сингулярной точкой 4-мерный вектор из пространства углов поворотов гиروزлов, при котором матрица \mathbf{C} вырождается. Тогда рассмотрим, как будет формироваться сингулярная поверхность в пространстве кинетического момента из множества таких точек.

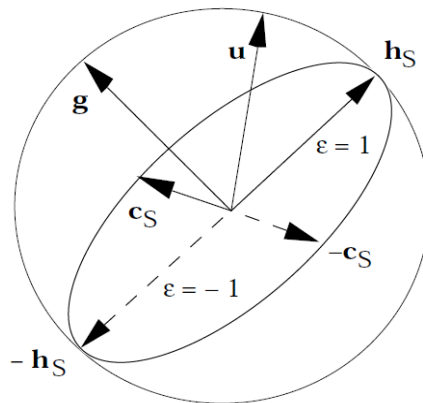


Рис. 5 Векторы в условиях сингулярности

У любого вектора \mathbf{u} для каждого гиродина существует две возможных сингулярных конфигурации кинетических моментов \mathbf{h}_S и $-\mathbf{h}_S$ как на Рис. 5.

Эти два случая отличаются только знаком их проекции на сингулярный вектор \mathbf{u} :

$$\varepsilon_i = \text{sign}(\mathbf{u}^T \mathbf{h}_i). \quad (2.3)$$

Таким образом, мы имеем 2^n (здесь n – количество гиринов в системе) комбинаций знаков, для заданного направления \mathbf{u} , однозначно определяющего сингулярную точку. Для каждого заданного направления \mathbf{u} и заданной последовательности знаков, вектор управляющего момента в сингулярном положении определяется как

$$\mathbf{c}_{Si} = \varepsilon_i \frac{\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}}{|\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|} \quad (2.4)$$

В таком случае для сингулярной точки ее «сингулярный» суммарный кинетический момент будет задаваться выражением

$$\mathbf{H}_S = \sum \varepsilon_i \frac{\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}}{|\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|} \times \mathbf{g}_i \quad (2.5)$$

Это выражение определяет непрерывное отображение из всевозможных \mathbf{u} в \mathbf{H} , где ε_i являются параметрами [3]. Пространство прообразов отображения \mathbf{u} является единичной сферой во всех направлениях, кроме $\pm \mathbf{g}_i$, поскольку в этих двух случаях знаменатель уравнения (2.5) обращается в нуль. Таким образом, для фиксированной последовательности ε_i вектор \mathbf{H}_S формирует двумерную непрерывную поверхность в качестве образа сферы \mathbf{u} . Стоит отметить, что если поменять все знаки у последовательности ε_i и сингулярного вектора \mathbf{u} , то суммарный кинетический момент \mathbf{H}_S останется тем же. Следовательно, поверхности заданные изначальной комбинацией знаков ε_i и вектора \mathbf{u} и их противоположностями совпадают. Значит, при построении поверхностей достаточно рассмотреть только те комбинации ε_i , где число положительных знаков не превышает половины. Т.е. число различных поверхностей падает до 2^{n-1} .

Перебирая по сфере всевозможные векторы \mathbf{u} и для разных комбинаций ε_i , мы строим для них сингулярные поверхности в пространстве суммарного кинетического момента, отвечающие нашей системе. Внешняя сингулярная поверхность (Рис. 6.1) является максимальной проекцией полного кинетического момента системы гиродинов во всевозможных направлениях и напоминает сферу. Если система достигает этой поверхности, то считается, что она достигла насыщения и более не может выдавать управляющий момент в данном направлении. В таком случае, требуется разгрузка гиродинов другими системами.

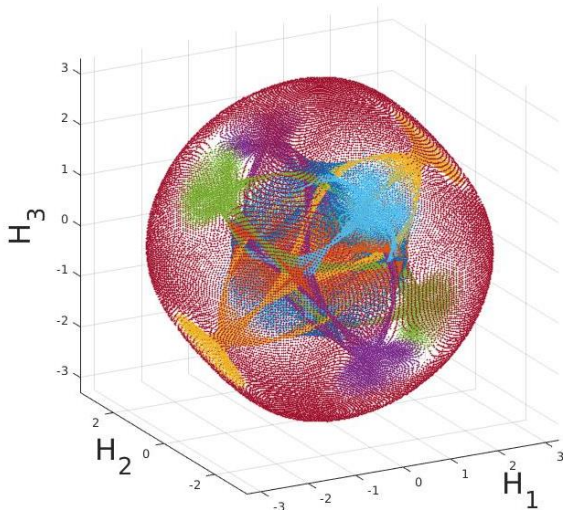


Рис. 6.1 Внешняя сингулярная поверхность

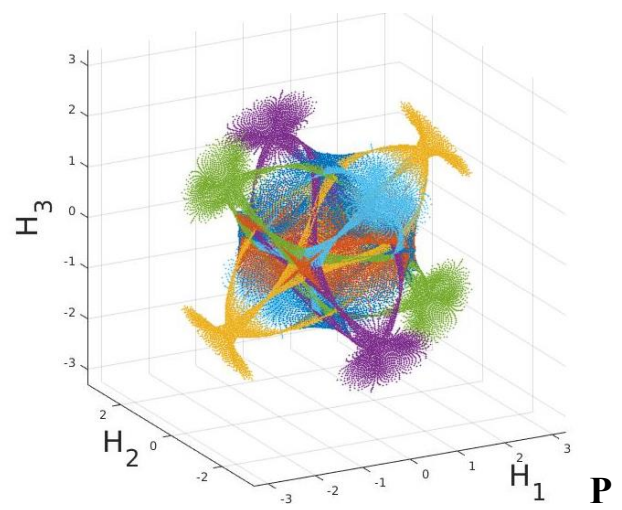


рис. 6.2 Внутренняя сингулярная поверхность

Внутренние сингулярные поверхности (Рис. 6.2) устроены значительно сложнее. Более того, их можно разделить на два разных типа по возможности проходимости. Рассмотрим это более детально.

2.2. Касательные пространство и подпространство

Для начала стоит отметить, что если вектор управляющего момента \mathbf{T} перпендикулярен сингулярному вектору \mathbf{u} , то даже в случае когда матрица \mathbf{C} имеет ранг 2, решение можно найти. Решение будет задаваться следующей системой [3,8]:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{C}^T + k\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1} \mathbf{T}, \quad (2.6)$$

где k – произвольная ненулевая константа. В случае если \mathbf{T} имеет на \mathbf{u} ненулевую проекцию, то она просто не будет реализована, таким образом это можно охарактеризовать как закон управления с внесением ошибки в момент управления.

Это уравнение может быть объяснено как добавление виртуального гироскопа, чья производная кинетического момента \mathbf{c} совпадает с \mathbf{u} .

Предположим, что $\boldsymbol{\theta}$ – это сингулярная точка в пространстве углов поворотов гиросузлов. Тогда дифференциал $d\boldsymbol{\theta}$ – это касательный вектор в этом же пространстве. Теперь определим на касательном пространстве углов $\boldsymbol{\theta}$ следующие три подпространства [8]:

Θ_S : сингулярно-ограниченное касательное пространство углов $\boldsymbol{\theta}$ (2-мерно). Ему принадлежат все сдвиги, переводящие $\boldsymbol{\theta}$ вдоль сингулярных точек.

Θ_N : пространство нуль-движения, или нуль-подпространство матрицы \mathbf{C} (n-2 мерно). Движения вдоль этого пространства не порождают управляющий момент.

Θ_T : дополнение пространства Θ_N (2-мерное). Этому пространству принадлежат решения, получаемые из уравнения (2.6) для всевозможных \mathbf{T} .

Элементами этих подпространств будут соответственно обозначаться как $d\boldsymbol{\theta}_S$, $d\boldsymbol{\theta}_N$ и $d\boldsymbol{\theta}_T$. Базис в подпространствах введен в приложении А.

Будем определять Гауссову кривизну κ сингулярной поверхности как [8]

$$1/\kappa = 1/2 \sum_i \sum_j p_i p_j [\mathbf{c}_i \quad \mathbf{c}_j \quad \mathbf{u}]^2, \text{ где } p_i = \frac{1}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{h}_i)} \quad (2.7)$$

Знак этой величины играет важную роль в определении проходимости сингулярной поверхности.

2.3. Квадратичные формы

Предположим, что система находится в сингулярном положении и θ_s – сингулярная точка, а \mathbf{H}_s – соответствующий ей вектор кинетического момента находящийся на сингулярной поверхности в соответствующем пространстве. Целесообразно исследовать малые изменения углов θ в этой сингулярной точке и результирующее малое изменение \mathbf{H} . Разложим в ряд Тейлора $\mathbf{H}(\theta)$ в окрестности θ_s до члена второго порядка:

$$\mathbf{H}(\theta_s + d\theta) = \mathbf{H}(\theta_s) + \sum_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_i} d\theta_i + 1/2 \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} d\theta_i d\theta_j + O(d\theta_i^3) \quad (2.8)$$

Воспользуемся следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{H} / \partial \theta_i &= \mathbf{c}_i, \\ \partial \mathbf{H}^2 / \partial \theta_i \partial \theta_j &= -\mathbf{h}_i, \text{ если } i=j, \text{ иначе } 0, \end{aligned}$$

и представим разницу

$$\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}(\theta_s + d\theta) - \mathbf{H}(\theta_s), \text{ как} \quad (2.9)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \sum_i \mathbf{c}_i d\theta_i - 1/2 \sum_i \mathbf{h}_i (d\theta_i)^2 \quad (2.10)$$

где член третьего порядка опущен.

Разность первого порядка – это линейная комбинация \mathbf{c}_i и она по определению не имеет компонент в сингулярном направлении \mathbf{u} . С другой стороны член второго порядка может иметь компоненты в этом направлении. Если более точно, то:

$$\Delta \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = 1/2 \mathbf{u} \cdot \left(-\sum_i \mathbf{h}_i (d\theta_i)^2 \right) = -1/2 \sum_i \frac{1}{p_i} (d\theta_i)^2. \quad (2.11)$$

Это также может быть записано в матричной форме:

$$\Delta \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = -1/2 d\theta^T \mathbf{P}^{-1} d\theta, \quad (2.12)$$

где \mathbf{P} – матрица, на главной диагонали которой стоят элементы p_i . Эта запись будет являться квадратичной формой приращений $d\theta_i$. Если $d\theta$

раскладывается как сумма двух следующих величин $d\boldsymbol{\theta} = d\boldsymbol{\theta}_S + d\boldsymbol{\theta}_N$, то квадратичную форму выше можно будет также разложить:

$$\Delta\mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = -1/2 d\boldsymbol{\theta}_S^T \mathbf{P}^{-1} d\boldsymbol{\theta}_S - 1/2 d\boldsymbol{\theta}_N^T \mathbf{P}^{-1} d\boldsymbol{\theta}_N. \quad (2.13)$$

Это определяется тем фактом, что $\mathbf{P}^{-1} d\boldsymbol{\theta}_S$ является элементом Θ_T (см. приложение А), отсюда $d\boldsymbol{\theta}_N^T \mathbf{P}^{-1} d\boldsymbol{\theta}_S = 0$.

Определим две следующие квадратичные формы:

$$\begin{aligned} Q_S &= -1/2 d\boldsymbol{\theta}_S^T \mathbf{P}^{-1} d\boldsymbol{\theta}_S, \\ Q_N &= -1/2 d\boldsymbol{\theta}_N^T \mathbf{P}^{-1} d\boldsymbol{\theta}_N. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Векторы $d\boldsymbol{\theta}_S$ и $d\boldsymbol{\theta}_N$ – это элементы касательных подпространств Θ_S и Θ_N соответственно, и они могут быть представлены с использованием базисов этих пространств (приложение А):

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\theta}_S &= \varphi_1 \mathbf{e}_{S1} + \varphi_2 \mathbf{e}_{S2}, \\ d\boldsymbol{\theta}_N &= \psi_1 \mathbf{e}_{N1} + \dots + \psi_{n-2} \mathbf{e}_{N_{n-2}}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где \mathbf{e}_{Si} и \mathbf{e}_{Ni} – базисы Θ_S и Θ_N соответственно. Эти выражения могут быть записаны просто в следующем виде:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\theta}_S &= \mathbf{E}_S \boldsymbol{\varphi}, \text{ где } \mathbf{E}_S : n \times 2, \boldsymbol{\varphi} : 1 \times 2, \\ d\boldsymbol{\theta}_N &= \mathbf{E}_N \boldsymbol{\psi}, \text{ где } \mathbf{E}_N : n \times n - 2, \boldsymbol{\psi} : 1 \times (n - 2), \end{aligned} \quad (2.16)$$

Матрицы \mathbf{E}_S и \mathbf{E}_N приведены в приложении А. Подставляя это в наши квадратичные формы, получаем следующий результат

$$\begin{aligned} Q_S &= -1/2 \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{E}_S^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{E}_S \boldsymbol{\varphi}, \\ Q_N &= -1/2 \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{E}_N^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{E}_N \boldsymbol{\psi}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

Первая квадратичная форма имеет порядок 2 и описывает кривизну сингулярной поверхности, поскольку $d\boldsymbol{\theta}_S$ отражает движение вдоль этой поверхности. Вторая квадратичная форма имеет порядок $n - 2$. По определению $Q_N = \Delta\mathbf{H}(d\boldsymbol{\theta}_N) \cdot \mathbf{u}$. В таком случае, если эта квадратичная форма не равна нулю, то нуль-движение двигает вектор \mathbf{H} либо от сингулярной поверхности, либо к ней, в зависимости от знака.

2.4. Знак квадратичной формы

Любая квадратичная форма $\sum a_{ij}x_i x_j$ может быть приведена к диагональному виду $\sum b_i y_i^2$ с помощью замены координат $\{x_i\}$ на $\{y_i\}$. Комбинация двух чисел, являющихся количеством положительных и отрицательных чисел b_i называется сигнатурой квадратичной формы. Любая квадратичная форма имеет единственную сигнатуру, которая не зависит от преобразования ее к диагональному виду – это закон инерции Сильвестра[12].

В зависимости сигнатуры квадратичная форма может быть определенной, полуопределенной и неопределенной. Диагональный вид определенной квадратичной формы имеет на только коэффициенты одного знака, в то время как неопределенная содержит и положительные и отрицательные коэффициенты. Полуопределенная форма имеет как коэффициенты одного знака, так и нулевые коэффициенты.

Если квадратичная форма Q_N определена или полуопределена, то это значит, что не существует движения, способного пройти сквозь данную сингулярную поверхность. Если же форма не определена, то подобное движение может существовать.

Сигнатура является характеристикой квадратичной формы, и она не зависит от переменных, которыми в данном случае являются $d\theta_N$. Таким образом, любая сингулярная точка по своим характеристикам может быть названа определенной или неопределенной.

2.5. Проходимость сингулярной поверхности

Так как квадратичная форма и ее производные непрерывны относительно θ , то ее собственные значения, которые определяют сигнатуру, также непрерывны вдоль поверхности. Это означает, что если точка имеет определенную квадратичную форму, то существует ее окрестность, в которой форма также определена. Учитывая непрерывность поверхности это означает, что тип поверхности однозначно определяется по одной ее точке. Точки с определенной формой задают определенную область поверхности, рядом с которой невозможно прохождение с одной стороны на другую, если θ находится в окрестности сингулярной точки. В таком случае, это область

называется непроходимой, в то время как у неопределенной формы аналогичная область зовется проходимой. Эти обозначения ввел Токарь[11], который первым провел такие исследования. Другие обозначения используют терминологию эллиптических и гиперболических или определенных и неопределенных поверхностей.

Если сингулярная точка является проходимой, т.е. имеет неопределенную форму, то смещение вдоль вектора $d\theta_N$ оставит \mathbf{H} на сингулярной поверхности, однако сам вектор углов θ при этом перестанет быть сингулярным. Это означает, что уход от проходимой сингулярной точки при неизменном значении \mathbf{H} возможен. И наоборот, не существует движения, которое оставит неизменным \mathbf{H} в случае непроходимой сингулярной точки.

Таким образом, из рассуждений выше понятно, что не существует закона управления в режиме реального времени, который позволил бы пройти непроходимую сингулярность, если необходимо приблизится к сингулярной поверхности при начальном θ из окрестности непроходимой сингулярной точки.

2.6. Критерий проходимости

Из заключений выше понятно, что проходимость сингулярной поверхности определяется сигнатурой квадратичной формы любой ее точки. Следующие рассуждения дают метод распознавания типа поверхности по знаку $\{\varepsilon_i\}$ и кривизне поверхности.

Уравнения (2.16) определяют базисы в каждом подпространстве. Как было отмечено выше, сигнатура останется неизменной при любой замене базиса. Таким образом, сигнатура полной квадратичной формы сохраняется и просто получается из знаков p_i , которые являются ε_i из уравнений (2.3), (2.7) и (2.11). Таким образом, проходимость, определяемая сигнатурой Q_N , вычисляется по общей сигнатуре и сигнатуре Q_S . Сигнатура Q_S отражает выпуклость и вогнутость сингулярной поверхности, поскольку эта квадратичная форма выражает кривизну поверхности. Таким образом, формируются три следующих условия для непроходимости поверхности, полученные в терминах знаков и кривизны поверхности [8].

Условие 1. $\{\varepsilon\} = \{+ + \dots +\}$

Обе формы Q_N и Q_S положительно определены. Таким образом, сингулярная точка лежит на поверхности $S_{\{+ \dots +\}}$, которая является частью внешней границы пространства кинетического момента, и является тривиально непроходимой. Гауссова кривизна выпукла в сторону \mathbf{u} .

Условие 2. Все ε_i кроме одного положительны и сигнатура Q_S равна $\{-+\}$.

Эта поверхность частично находится на внешней границе пространства и непроходима. Некоторые части этой непроходимой поверхности находятся внутри оболочки. Гауссова кривизна отрицательна и поверхность имеет гиперболическую седловую точку.

Условие 3. Все ε_i кроме двух положительны и сигнатура Q_S равна $\{- -\}$.

Эта поверхность полностью внутренняя. Она вогнута относительно вектора \mathbf{u} и Гауссова кривизна положительна. Заметим, что положительный знак не всегда является необходимым для этого условия, поскольку существует возможность, что сигнатура Q_S будет равна $\{++\}$.

Из этих трех условий можно сформировать следующий алгоритм определения типа сингулярной точки. Сначала получаем знаки $\{\varepsilon_i\}$. Затем меняем их на противоположные, чтобы количество отрицательных знаков было меньше числа положительных. Если все знаки положительны, то поверхность непроходима. Если более двух знаков отрицательны – поверхность непроходима (для числа гиродинов более 4). Оставшиеся случаи относятся к условиям (2) и (3). Следующим действием считаем Гауссову кривизну κ , как в уравнении (2.7). Если у поверхности только один отрицательный знак, то она непроходима в случае отрицательной κ и проходима иначе. Если поверхность имеет два отрицательных знака и κ положительна, то нам нужно еще одно вычисление для определения

проходимости. Убирая член с отрицательным знаком из квадратичной формы, мы проверяем второе условие для подсистемы и определяем тип проходимости изначальной системы.

3. Многообразия углов гиросузлов

Непроходимые сингулярные поверхности, определенные во 2 главе вызывают проблемы при реализации требуемого управления. В данной главе кратко представлены выводы геометрического исследования из работы [8]. Закон управления, выражающийся через производную кинетического момента системы гиросузов задан в качестве непрерывной траектории вектора кинетического момента. Возможные углы поворотов гиросузов представлены с помощью многообразий. Подробно заключения изложены в приложении В.

3.1. Многообразия

Закон управления – это метод получения угловых скоростей гиросузов, которые отвечают требуемой производной кинетического момента. Если исключить фактор времени, то закон управления можно описать как метод получения углов гиросузов по данному изменению кинетического момента. Это обратная связь кинематического уравнения $\mathbf{H}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$. (Прямая) кинематика – это однозначное отображение. Но обратная связь, которую будем называть обратной кинематикой, будет являться отображением один ко многим. Таким образом, возможные $\boldsymbol{\theta}$, дающие один и тот же вектор кинетического момента \mathbf{H} являются прообразами нашего отображения.

Для каждого фиксированного значения кинетического момента \mathbf{H} существуют несвязные друг с другом множества углов гиросузов, отвечающих данному кинетическому моменту. Причем каждое из этих множеств является непрерывным многообразием.

Форма многообразий в окрестности сингулярной точки характеризуется квадратичной формой уравнения (2.11). Предположим, что \mathbf{H} находится в окрестности сингулярной поверхности, где $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \epsilon \mathbf{u}$. По той же самой логике рассуждений, что в уравнениях от (2.9) до (2.14), возможные $\boldsymbol{\theta}$ в окрестности сингулярной точки $\boldsymbol{\theta}_s$, удовлетворяют следующей квадратичной записи:

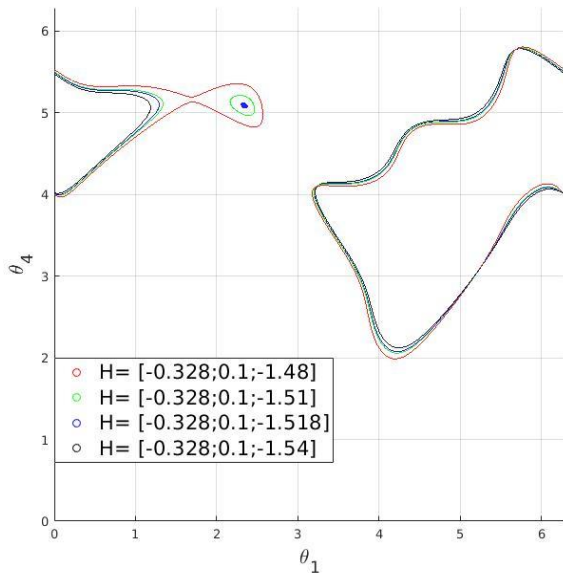
$$-1/2 \sum_i (d\theta_{Ni})^2 / p_i \approx \epsilon,$$

где $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_s + d\boldsymbol{\theta}_N$.

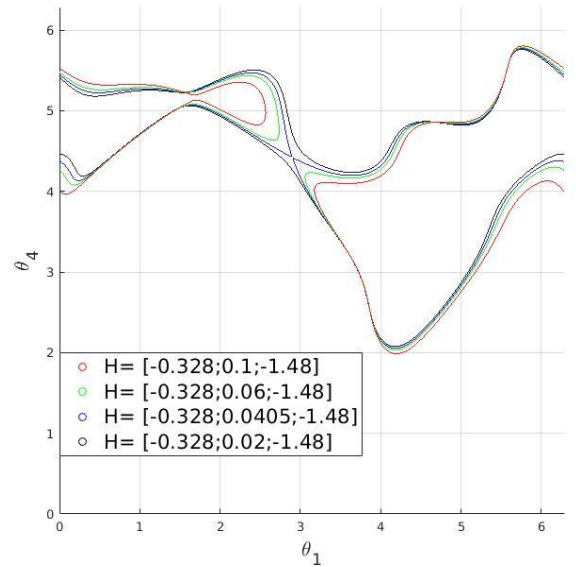
В этом уравнении движения $d\boldsymbol{\theta}_N$ являются касательными векторами сингулярной точки $\boldsymbol{\theta}_s$. В случае непроходимого сингулярного положения эта квадратичная форма будет определенной, таким образом, многообразие похоже на многомерный эллипсоид. Квадратичная форма проходимой сингулярной точки не определена, так что форма многообразия напоминает многомерную гиперболическую поверхность в окрестности сингулярной точки.

3.2. Траектории многообразий

Рассмотрим моделирование окрестностей некоторых сингулярных точек. Моделирование проводилось в программе MATLAB R2020b. Выбиралось значение кинетического момента и алгоритмами оптимизации с заданной точностью подбиралось подходящее положение. Далее из точки внутри цикла делался маленький шаг нуль-движением. И так в течение всего цикла, пока кривая углов не замкнется. В итоге, на выходе получилось многообразие, отвечающее заданному значению кинетического момента. После этого проверялись другие начальные точки, с целью выявления других многообразий. Где-то решения были, где-то нет. Результаты моделирования занесены на Рис. 7 для разных точек кинетического момента.



а) непроходимая сингулярная точка

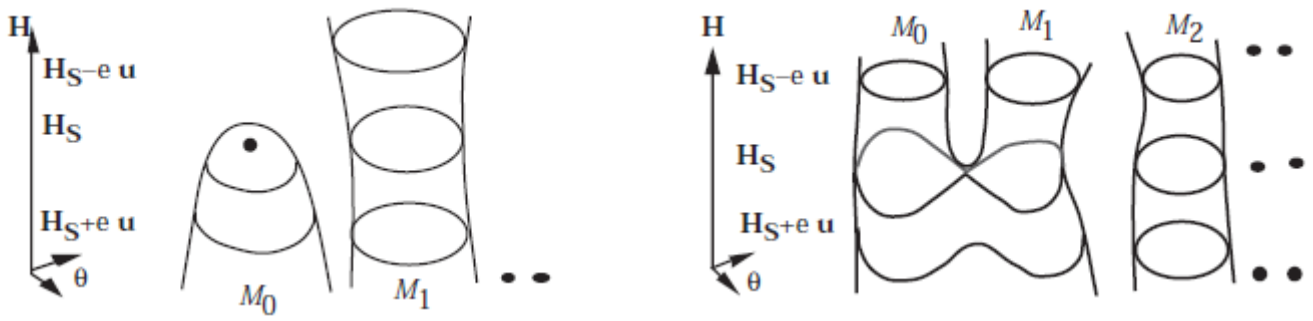


б) проходимая сингулярная точка

Рис. 7 Многообразия в окрестностях сингулярных точек

В результате были промоделированы две траектории кинетического момента, который изменялся либо по третьей (Рис. 7 а), либо по второй (Рис. 7 б) компоненте. На Рис. 7 а видно, что исходное многообразие разделилось на два, одно из которых завершилось в непроходимой сингулярной точке. А на Рис. 7 б показано разветвление многообразия на два других в проходимой сингулярной точке. И из построенных графиков видно, что формы многообразий в разных точках действительно напоминают гиперболические и эллиптические поверхности. И более того, в зависимости от траектории кинетического момента, многообразии эволюционируют по разному.

Так как \mathbf{H} меняется непрерывно, то и каждое многообразие непрерывно изменяет свою форму как показано на Рис. 8. Многообразие может деформировать свою форму в точку, если \mathbf{H} пересекает непроходимую поверхность и может раздваиваться, если \mathbf{H} пересекает проходимую поверхность. Эти непрерывные изменения многообразий могут быть упрощены как непрерывные траектории в пространстве многообразий, где каждое многообразие представляется в виде точки Рис. 9.



а) Непрерывное изменение многообразий в окрестности непроходимого H . б) Непрерывное изменение многообразий в окрестности проходимого H .

Рис. 8 Непрерывное изменение многообразий.

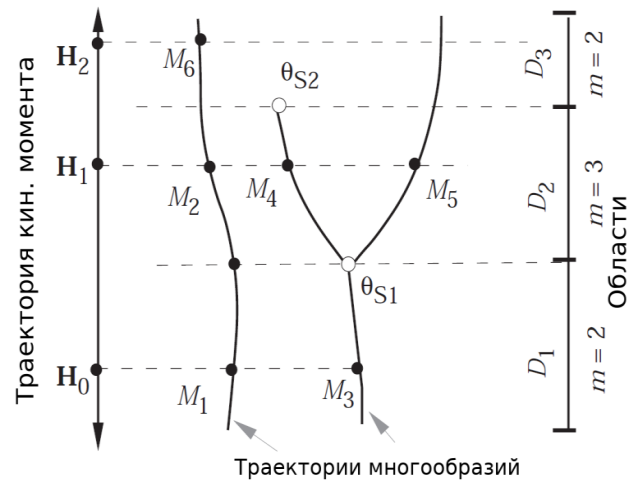


Рис. 9 Пример непрерывной траектории многообразий.

Смысл непрерывной траектории многообразий можно выразить в следующих обозначениях. Если многообразие (например, M_1 на Рис. 9), включая начальную точку θ_1 , находится на непрерывной траектории многообразий для заданной траектории вектора кинетического момента H (траектория H_0H_1 на Рис. 9), то любой вектор θ_2 многообразия, находящегося в другой части траектории (M_2 на Рис. 9), может быть достигнут с помощью некоего непрерывного закона управления, используя подходящее нуль-движение, в то время как любой θ_4 многообразия за

пределами траектории (M_4 на Рис. 9) не может быть достигнут. Если траектория многообразий раздваивается, то выбор дальнейшей траектории (M_4 или M_5 для начала в M_3) зависит от нуля-движения и, следовательно, от закона управления. Если траектория многообразий с начальным положением в θ_4 , отвечающая данной траектории \mathbf{H} , завершается, не дойдя до конечной точки кинетического момента (например, в θ_{s2} для траектории $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2$ на Рис. 9), то не существует закона управления, который смог бы реализовать данное движение.

3.3. Области в пространстве многообразий

Пространство кинетического момента состоит из нескольких областей, разделенных сингулярными поверхностями. Далее мы будем называть подобные разбитые области просто «областями». Будем считать, что у каждой области внутри отсутствуют сингулярные поверхности, а граница ее состоит из множества пересекающихся сингулярных поверхностей. Каждую область мы обозначим как D_i . Любая непрерывная траектория \mathbf{H} внутри области отвечает конечному числу непрерывных траекторий многообразий без завершающих точек и точек ветвления.

Два многообразия одной области считаются эквивалентными, если существует незамкнутая траектория многообразий, которая отвечает траектории \mathbf{H} внутри области.

Все эквивалентные многообразия формируют область в пространстве многообразий, которая изоморфна изначальной области в пространстве \mathbf{H} . Это множество эквивалентных многообразий определяет понятие «класса эквивалентности». Число классов называется порядком области. Пусть G_i и m означают класс и порядок соответственно. Порядок области определяется пошагово. Внешняя область, ближайшая к оболочке пространства \mathbf{H} имеет порядок 1. Две соседние области отличаются в порядке на 1, т.к. существует

только одна траектория многообразий, которая завершается или раздваивается. Отношения между многообразиями и классами представлены на Рис. 10.

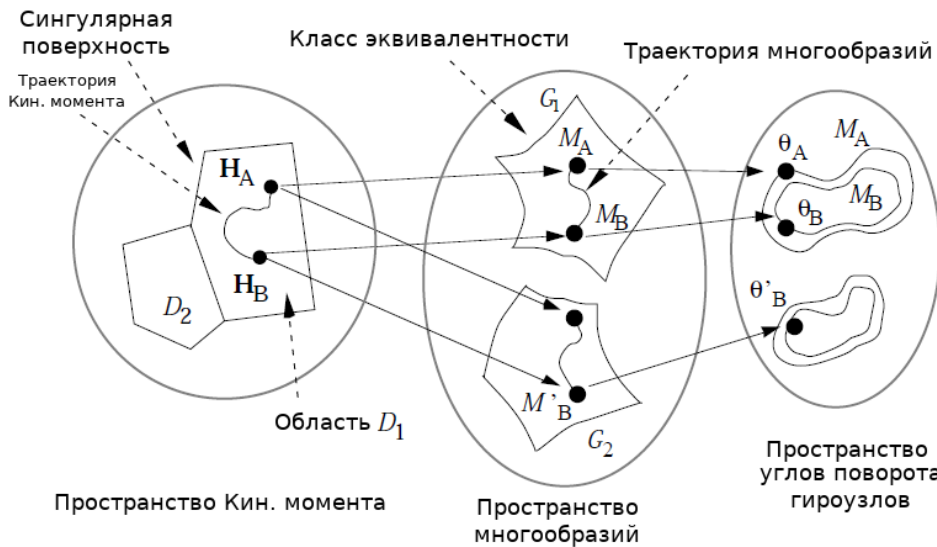


Рис. 10 Связи между пространством \mathbf{H} , пространством многообразий и пространством $\boldsymbol{\theta}$.

Понятие класса эквивалентности может быть расширено на разные области, соединенные траекторией \mathbf{H} . Классы многообразий из разных областей называются эквивалентными, если траектория \mathbf{H} , соединяющая две области отвечает траектории многообразий, соединяющей эти классы.

Эквивалентность между двумя областями говорит о том, что траектория многообразий между ними непрерывна. Если на траектории многообразий есть точка ветвления, то классы не будут эквивалентны. В таком случае классы называются связными, поскольку может быть выбрана непрерывная траектория углов гиروزлов $\boldsymbol{\theta}$.

3.4. Типы областей и правила многообразий

Для реализации непрерывного управления очень важно знать, имеет ли каждый класс эквивалентные или связанные с ним классы для любой траектории \mathbf{H} выходящей за границу области. Назовем класс многообразий

«терминальным классом»[8], если существует уходящая в соседнюю область траектория **H**, которая приводит данный класс к завершению. Исходя из этого определения класс, находящийся под оболочкой исключительно внутри ее границ, не будет терминальным, даже если он завершается на границе, поскольку выходящая за оболочку траектория **H** не имеет смысла.

Каждая область может быть классифицирована, как один из следующих типов, определяющихся порядком области и количеством ее терминальных классов k :

Первый тип: $m = k > 0$,

Второй тип: $m > k > 0$

Третий тип: $k = 0$.

Напомним, что за m здесь принят порядок области, т.е. количество классов эквивалентности в ней.

Большинство областей рядом с границей пространства имеют третий тип по определению выше. Третий тип области не имеет терминальных классов, а потому там не возникает сложностей в законе управления внутри него или в соседних с ним областях.

Из геометрического исследования данных типов областей следуют четыре следующих правила.

1. Непрерывное управление вокруг второго типа областей зависит от выбора многообразия после раздвоения. Если будет выбран любой класс кроме терминального, то гарантируется непрерывное управление.
2. Невозможен выбор многообразий кроме как из терминальных классов при входе в область первого типа.
3. Некоторые траектории **H**, которые пересекают область первого типа, не имеют связанных траекторий многообразий.

4. Начинать управление всегда из центра пространства кинетического момента.

Четвертый факт был получен из заключений о том, что в окрестности нулевого суммарного кинетического момента гиросистема всегда может быть управляема за счет выбора подходящего нуль-движения. Случай, когда вектор суммарного кинетического момента находится под внешней оболочкой тоже имеет свои преимущества – при управлении гарантировано пересечется хотя бы одна непроходимая поверхность, однако есть высокий риск уйти в насыщение в зависимости от задачи. Потому предпочтительнее быть в центре если маневры малы. Третий факт говорит о том, что не существует непрерывной траектории углов гиروزлов θ для данной траектории \mathbf{H} . Второй факт говорит о том, что даже если для каждой траектории \mathbf{H} существует непрерывная траектория θ , то управление в режиме реального времени не гарантировано, если траектория \mathbf{H} не задана наперед. Поскольку в таком случае нельзя заранее предугадать, какое многообразие из раздвоения выбрать. Следовательно, эти два факта отражают отсутствие закона управления, который мог бы обеспечить непрерывное управление вдоль рабочего пространства, содержащего области первого типа. С другой стороны непроходимая поверхность в областях второго типа не оказывает проблем, если будет выбрано соответствующее первому факту многообразие.

4. Закон управления

В данной главе сделан краткий обзор существующих законов управления. Затем сформулированы требования, налагаемые на закон управления в нашей задаче и, наконец, будет представлен алгоритм разработанного закона.

4.1. Обзор существующих методов

Рассмотрим следующую классификацию методов управления системой гиридинов [10](Рис. 11). Глобально она делится на два типа – законы управления в режиме реального времени и предварительный анализ траектории. Для начала рассмотрим первый тип.

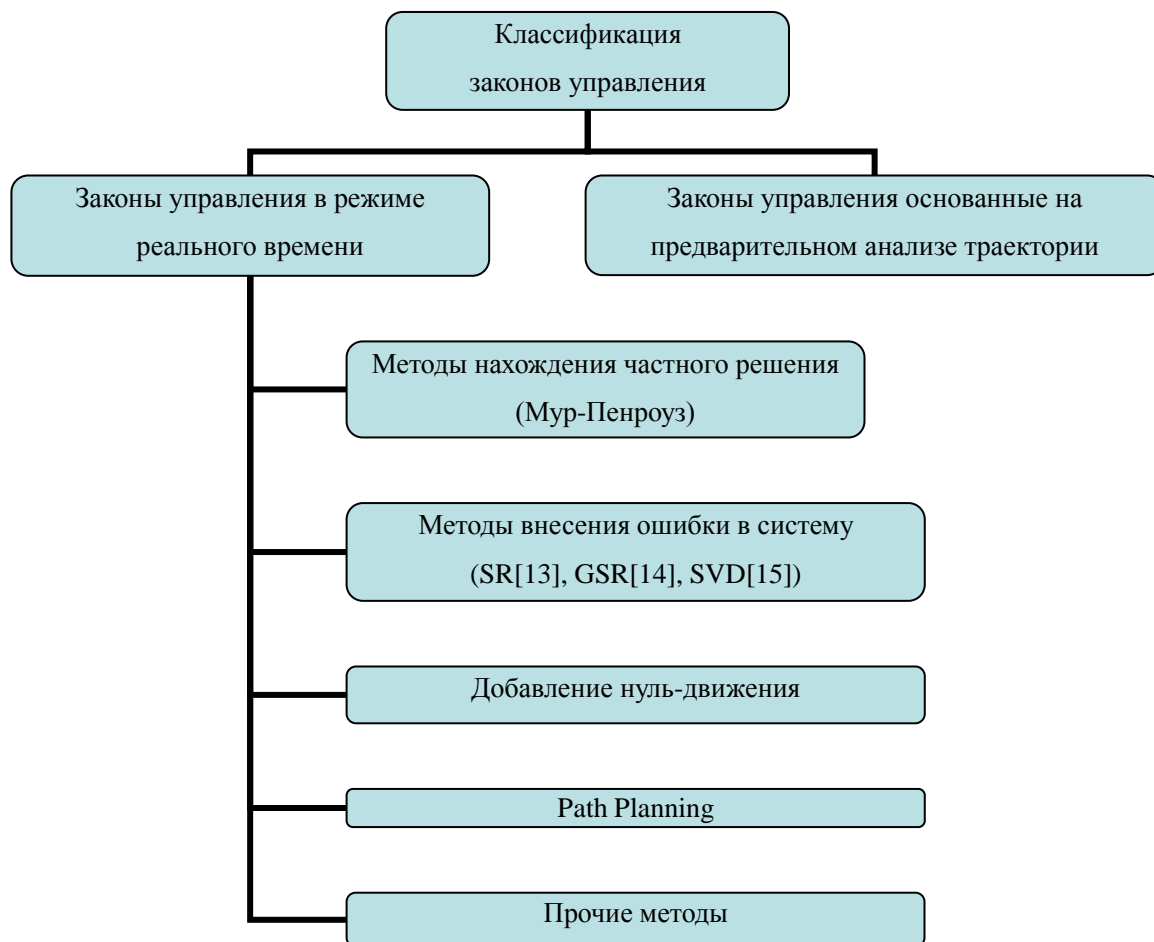


Рис. 11 Классификация законов управления

В законы управления в режиме реального времени входят следующие методы:

Метод псевдообращения Мура-Пенроуза – с ним мы уже сталкивались в начале работы. Работает только в регулярном случае. Но даже если матрица системы будет иметь размерность 3, то все равно в ходе работы алгоритма будет существовать проблема дискретности [9], которую можно нивелировать уменьшив шаг управления.

Методы внесения ошибки в системы – данные методы основываются на добавлении различных ошибок в матрицу системы, внося таким образом ошибку в итоговый управляющий момент системы. Это позволяет избежать сингулярности, ценой точности решения.

- Singular Robust Inverse[13] – метод, внесения ошибки в матрицу системы C путем добавления постоянной диагональной матрицы.
- Generalized Singular Robust Inverse[14] – вместо постоянной матрицы добавляется периодическая по времени матрица шумов.
- Singular Value Decomposition[15] – используется сингулярное разложение матрицы системы C . Ошибка добавляется в ее наименьшее сингулярное число, после чего матрица собирается обратно.

Добавление нуль-движения обычно комбинируется вместе с предыдущими двумя методами, позволяя уходить от проходимых сингулярностей.

Path planning или предварительный анализ траектории. Сюда входят методы, основанные на предварительном изучении задачи на Земле. Как если у нас есть итоговое положение гироузлов и мы движемся к нему по прямой, то можно выбирать подходящие для этого стартовые углы[16]. Другим методом является «поиск в глубину» по дереву траекторий, которые получаются из данного узла добавлением нуль-движения с разными коэффициентами[17,18].

Прочие методы используют в своей работе различные весовые функции, благодаря которым происходит оптимизация углов поворотов гироузлов.

Первые три типа методов были рассмотрены в работе [9]. Здесь подробно останавливаться на них не будем, отметив лишь, что внесение ошибки может существенно повлиять на съемку и такие методы нас не

устраивают. Поиск стартовых углов в рамках поставленной задачи не эффективен, т.к. нас интересует вся траектория углов гиروزлов, включая перенастройку. «Поиск в глубину» на каждом шаге строит большое множество узлов и выбирает из них узел с наибольшей мерой сингулярности (ее часто выбирают как $\det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)$), идет шаг интегрирования и вновь строится дерево узлов. Он может выдать подходящее решение, однако в подобной реализации занимает слишком много времени в рамках интегрирования поставленной задачи. К тому же он никак не учитывает возможность приоритетного знания возможных пересечений с сингулярными поверхностями, что было предложено в работе [19]. Таким образом, необходимо разработать закон управления, который, опираясь на знания о структуре многообразий, либо предложил бы точное решение, либо сказал бы, что его гарантированно нет. За основу была взята идея предварительного анализа опорной траектории и соответствующей ей траектории углов гиروزлов системы гиродинов.

4.2. Требования к закону управления

Ниже определен ряд требований, которые налагались на закон управления, которые смог бы осуществить поставленную задачу.

- Достоверность – закон управления должен предложить решение, если оно есть. В противном случае он должен как можно быстрее выдать ответ о его отсутствии.
- Учет опорного движения – поскольку известно орбитальное движение КА и точка съемки, можно однозначно определить опорное движение КА, при котором возможно произвести съемку.
- Высокая точность – при приближении к моменту съемки, КА должен быть с высокой точностью выведен на опорную

траекторию и поддерживать движение по ней на протяжении всей съемки, не теряя управление.

- Устойчивость при наличии неучтенных возмущений – в силу неточности модели движения на спутник могут оказываться неучтенные возмущения. Закон управления должен уметь с ними справляться.
- Высокая скорость подсчета – считается, что задача может поступить за небольшое время до начала съемки, а потому требуется подсчитать управление как можно быстрее.

4.3. Алгоритм

В качестве реализации опорного движения был взят закон управления, основанный на прямом методе Ляпунова[20]. Он записывается в следующем виде:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} - k_q\mathbf{q}. \quad (4.1)$$

Здесь введены следующие обозначения:

\mathbf{q} – векторная часть кватерниона относительной ориентации $\mathbf{Q} = (q_0 \ \mathbf{q})$,

соответствующего матрице перехода из ОСК в ССК \mathbf{D} ;

\mathbf{M}_{ctrl} – момент управления из (1.4);

\mathbf{M}_{ext} – момент внешних сил;

$\boldsymbol{\omega}_{abs}$ – абсолютная угловая скорость КА в ССК;

\mathbf{J} – тензор инерции КА;

$\boldsymbol{\omega}_{ref}$ - опорная угловая скорость в ОСК;

$\boldsymbol{\omega}_{rel} = \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}$ - относительная угловая скорость в ССК;

k_{ω}, k_q - коэффициенты управления.

С учетом этого необходимый управляющий момент будет рассчитываться следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \dot{\mathbf{H}} = & \mathbf{M}_{ext} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} + J(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}) - \\ & - \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} + k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} + k_q\mathbf{q} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь \mathbf{H} , как и в (1.3) - вектор полного кинетического момента системы гироскопов.

Такое управление гарантирует асимптотическую устойчивость требуемого движения, а значит даже в присутствии неучтенных возмущений и/или неточностей модели движения способно обеспечить требуемую точность ориентации и стабилизации аппарата[20].

Сам алгоритм разработанного закона управления представлен в виде следующей блок-схемы Рис.12.

Спутник движется по орбите и управляется в режиме реального времени с помощью метода Мура-Пенроуза (с добавлением нуль-движения в сторону от сингулярности при попадании в окрестность проходимой сингулярной точки) при формировании управляющего воздействия с помощью (4.2). Предполагается, что в центр управления полетом поступает запрос о снятии точки на поверхности Земли. От центра требуется определить необходимость переориентации спутника путем добавления нуль-движения в начале, для выхода на подходящие многообразия, способные избежать непроходимых сингулярных поверхностей.

В алгоритме используется эвристическая логика, что если мы попали на терминальный класс, то ранее по ходу движения могло произойти разветвление, которая может провести траекторию углов гироскопов через сингулярность при выборе другого класса многообразий.

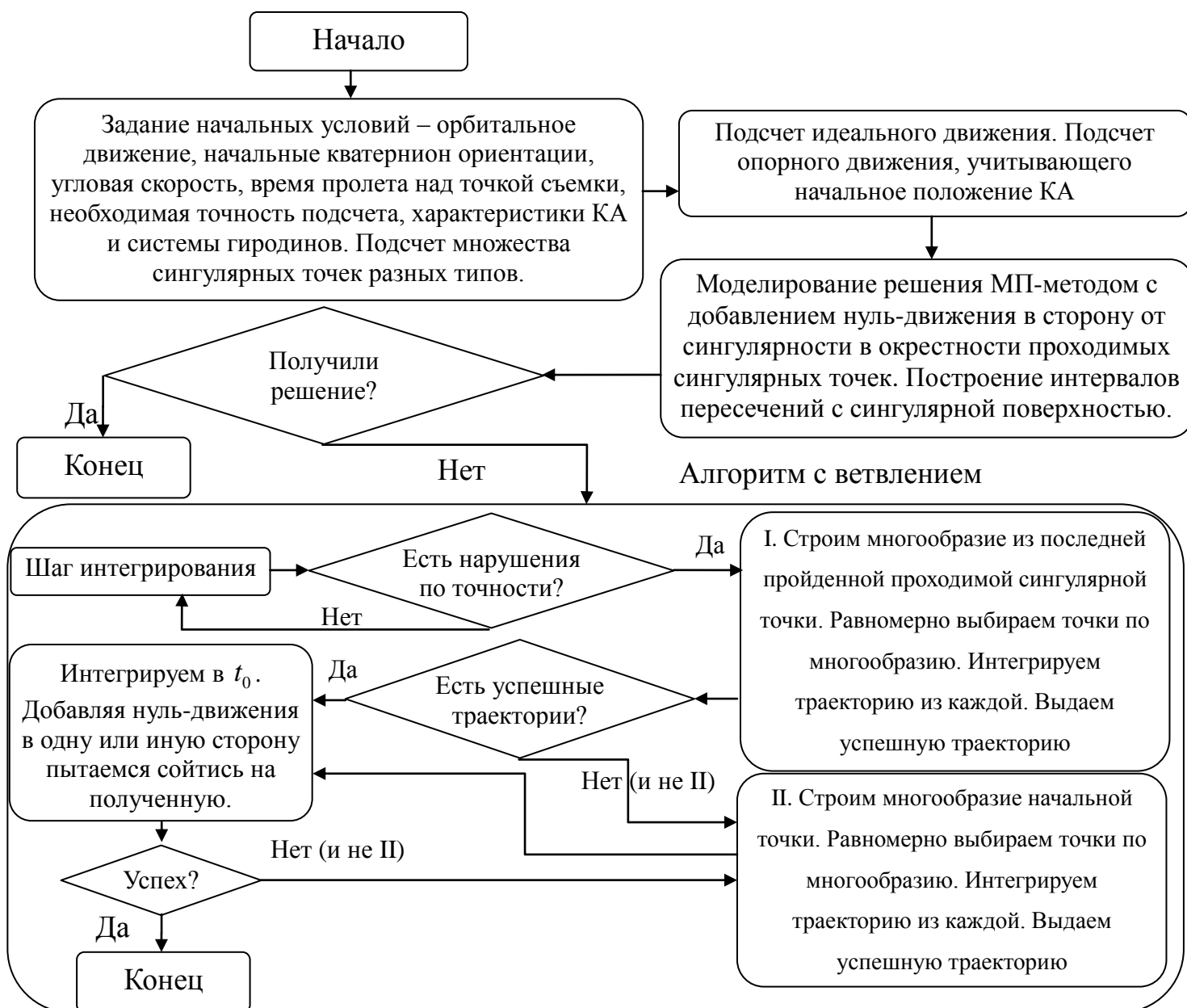


Рис. 12 Алгоритм закона управления

Опишем подробно ход действий алгоритма.

- **Инициализация:** на вход программе подаются начальные условия. Параметры орбиты КА; характеристики КА; начальный кватернион ориентации; угловая скорость; параметры системы гиродинов; критическая мера, при достижении которой добавляется нуль-движение; время, через которое КА окажется над точкой, которую необходимо отснять; требуемая точность;

время на стабилизацию, время выполнения задачи ориентации. Помимо этого программа подгружает массив точек сингулярной поверхности, который сформирован заранее. По этим данным требуется скорректировать орбиту КА за время стабилизации так, чтобы он с максимальной точностью выполнил задачу трехосной ориентации ВСК на точку съемки на поверхности Земли.

- **Получение простого решения:** подсчитывается идеальная траектория КА с постоянным наведением его на точку съемки. Следом траектория корректируется до опорной, в которой учитывается начальное положение спутника. После этого система с гиродинами интегрируется с целью выхода на опорную траекторию. В случае если полученное решение прошло по точности, считаем, что КА в коррекции не нуждается. В противном случае запускается алгоритм ветвления решений.
- **Ветвление:** производится интегрирование системы с гиродинами методом Мура-Пенроуза с добавлением нуль-движения в окрестности проходимых сингулярных точек. Как только происходит расхождение по точности между опорной и текущей траекторией запускается первая фаза.
- **I фаза:** рассматривается последняя пройденная проходимая сингулярная точка. Для нее строится многообразие в пространстве углов гиروزлов. По этому многообразию равномерно выбираются точки (за пределами некой относительной окрестности точки, по которой прошел КА – улучшает сходимость). Из каждой из этих точек запускается интегрирование до конца времени выполнения задачи. Возвращается первая успешная траектория. Из нее интегрируем назад до начального момента времени t_0 . Это можно сделать

храня массив управляющих воздействий, поскольку в противном случае решения будут экспоненциально расходиться. Таким образом получена идеальная траектория в пространстве углов, способная выполнить поставленную задачу. На нее надо как-то выйти. Включается фаза переориентации. В случае отсутствия успешных траекторий или неудавшегося возврата происходит переход ко второй фазе.

- **II фаза:** рассматривается начальное положение КА и системы гироудинов. Для нее строится многообразие в пространстве углов гиروزлов. По этому многообразию равномерно выбираются точки (за пределами некой относительной окрестности точки, по которой прошел КА – улучшает сходимости). Из каждой из этих точек запускается интегрирование до конца времени выполнения задачи. Возвращается первая успешная траектория. На нее нужно как-то выйти. Переходим к фазе переориентации. В случае отсутствия успешных траекторий считается, что мы попали в терминальный класс в рамках решения поставленной задачи и решение не может быть получено по причине геометрических особенностей системы.
- **Переориентация:** гиروزлам в течение времени стабилизации добавляется постоянное нуль-движение в одном направлении, для проверки возможности переориентации КА на полученную траекторию. Если за время переориентации не получилось переориентировать с заданной точностью, то проверяется возможность добавления нуль-движения в другую сторону. В случае успеха в одном из двух случаев, на КА отправляются команды по которым он должен переориентироваться для успешного выполнения поставленной задачи. В противном

случае считается, что мы попали в терминальный класс в рамках решения поставленной задачи и решение не может быть получено по причине геометрических особенностей системы.

Дополнительно помимо этих фаз была добавлена еще одна, которая проверяла результаты работы алгоритма, при моделировании движения КА добавляя малые случайные шумы внешних воздействий.

5. Моделирование

В данной главе рассматривается моделирование алгоритма. Сначала рассматриваются параметры системы, в которой происходило моделирование. Следом представлены параметры модели движения КА и системы гиродинов. В последней части главы представлены результаты моделирования на двух примерах.

5.1. Параметры системы и модели

Моделирование происходило на программе MATLAB R2020b в операционной системе Linux Mint 19 Tara. Двухъядерный процессор: Intel(R) Core(TM) i5-3210M, 12ГБ оперативной памяти. Для ускорения работы использовалось распараллеливание интегрирования траекторий из многообразий на 4 потока – по 2 на ядро.

Расчеты велись для орбиты типа «Молния»[21]. Параметры орбиты:

$$\begin{aligned} a &= 6.8 \cdot 10^8 \text{ км}; & \Omega &= 1 \text{ рад}; & \omega &= \pi. \\ e &= 0.0218; & i &= 1.1071 \text{ рад}; \end{aligned}$$

Здесь a – большая полуось орбиты, e – эксцентриситет, Ω – долгота восходящего узла, i – наклонение орбиты, ω – аргумент перицентра.

Дополнительно считалось, что на спутнике установлен магнитометр, измеряющий магнитное поле Земли. Модель магнитного поля представлена в виде наклонного диполя[21]. На финальном интегрировании в уравнения

движения добавлялась нормальная 2-процентная ошибка в измерения магнитного поля, моделирующая шумы системы.

Общие для разных начальных данных параметры спутника представлены следующими величинами:

- тензор инерции в ССК $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$;

- дипольный момент спутника в ССК $\mathbf{d} = [2 \ 0 \ 0]$.

Для системы гироскопов были выбраны следующие параметры:

- модуль кинетического момента каждого гироскопа $|\mathbf{h}| = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$;

- собственная скорость раскрутки ротора гироскопа 500 рад/с;

- максимальная угловая скорость вращения гироскопов

$$\omega_{\max CMG} = 1 \text{ рад/с};$$

- максимальное угловое ускорение вращения гироскопов

$$\varepsilon_{\max CMG} = 0.5 \text{ рад/с};$$

- точность выхода на переориентируемую траекторию – 0.1 радиан по разности норм векторов углов гироскопов.

Такие ограничения на систему гироскопов позволили производить интегрирование в большем соответствии с реальными системами.

Шаг управления и интегрирования τ был выбран за 1 секунду. Общее время интегрирования составляло 1200 секунд.

Число траекторий, выбираемых на многообразии для интегрирования $n_{trees} = 400$.

Максимальное расхождение между опорным движением и реализованным по модулю угловых скоростей $\delta\omega_{sat}$ составляло $1.5 \cdot 10^{-5}$ рад/сек. Однако, поскольку в итоговом моделировании добавлялись шумы, при поиске подходящей траектории $\delta\omega_{sat}$ было уменьшена вдвое.

Отдельно хранился массив точек сингулярных поверхностей, построенный с помощью (2.5). Максимальное расстояние между точками одной поверхности в пространстве кинетического момента δ составляло $0.23 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$. Если минимальное расстояние от точки текущего вектора кинетического момента гироудинов до сингулярной поверхности было меньше $\frac{\delta}{2}$, то считалось, что система находится в окрестности сингулярного положения.

Помимо описанных выше параметров для каждого эксперимента подбирались свои начальная угловая скорость спутника, кватернион относительной ориентации, начальное положение гиروزлов гироудинов, а также время на стабилизацию и время пролета над точкой съемки.

5.2. Примеры

Рассмотрим первый пример работы алгоритма. Начальные параметры спутника были следующими.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 &= -10^{-6} \cdot [-34.6 \quad 741.2 \quad 3.34] \text{ рад/с}; & \boldsymbol{\theta}_0 &= [0 \quad 0.5 \quad 0 \quad -0.5] \text{ рад}; \\ \boldsymbol{\Lambda}_0 &= [0.42 \quad 0.76 \quad 0.29 \quad -0.4]; & t_{for\ stabil} &= 240 \text{ с}; t_{pnt} = 520 \text{ с}. \end{aligned}$$

Рассмотрим график разности опорной угловой скорости спутника и полученной при моделировании решения методом Мура-Пенроуза с добавлением нуль-движения в окрестности проходимых сингулярностей Рис. 13.

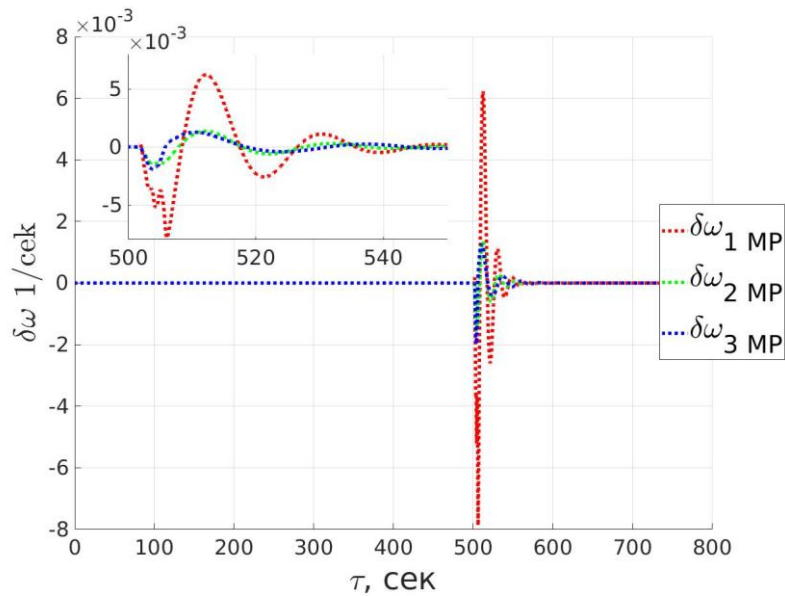


Рис. 13 Разность опорной и реализованной угловой скорости КА

Как видно из примера КА потерял управление на промежутке с 502 секунд и до 550 обратно сходил на опорную траекторию. Однако момент съемки был упущен. В таком случае запускается ветвление и вместе с ним первая фаза алгоритма – мы ищем последнюю пройденную проходимую сингулярную точку и строим для нее многообразие.

Начало прохождения окрестности сингулярной поверхности произошло в момент времени 430.4 секунд с начала моделирования. Для нее было построено многообразие, двумерную проекцию которого можно наблюдать на Рис. 14. По этому многообразию были равномерно выбраны точки за пределами некоторой относительной окрестности из 3 интервалов выбора точек.

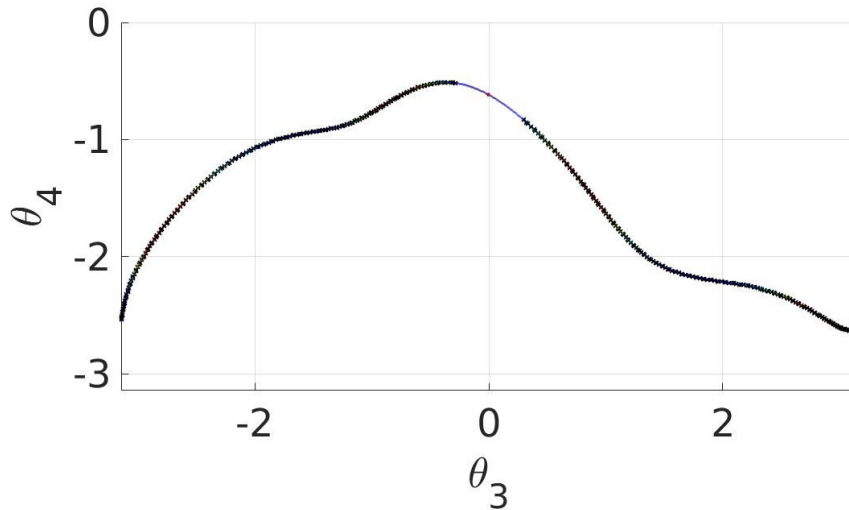


Рис. 14 Выбор точек по многообразию

По очереди производится интегрирование из этих точек вперед. Была возвращена первая успешная траектория. На Рис. 15 представлена эволюция углов гиروزлов из точки ветвления.

После этого запускается интегрирование в обратном направлении по сохраненному ранее массиву управляющих воздействий. В данном случае обратная коррекция прошла успешно, и траектория вышла в некое начальное положение, с которого поставленная задача бы выполнялась успешно – Рис. 16.

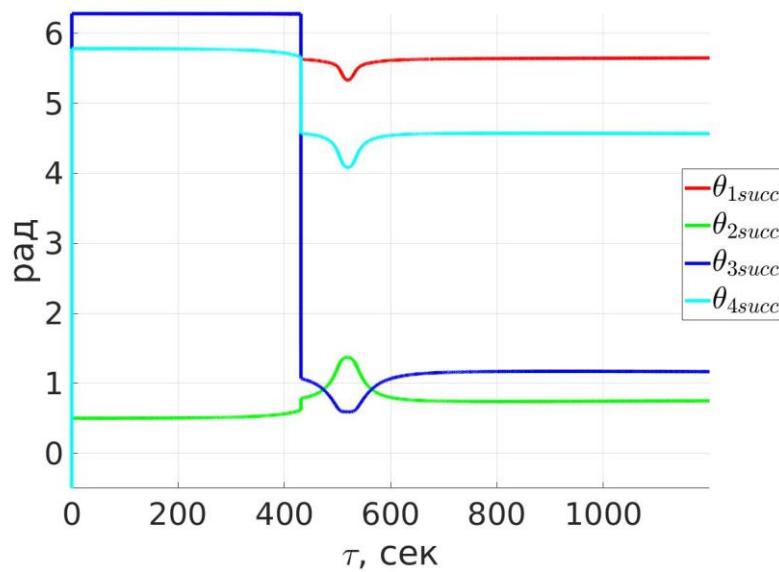


Рис. 15 Эволюция углов гиروزлов от точки ветвления

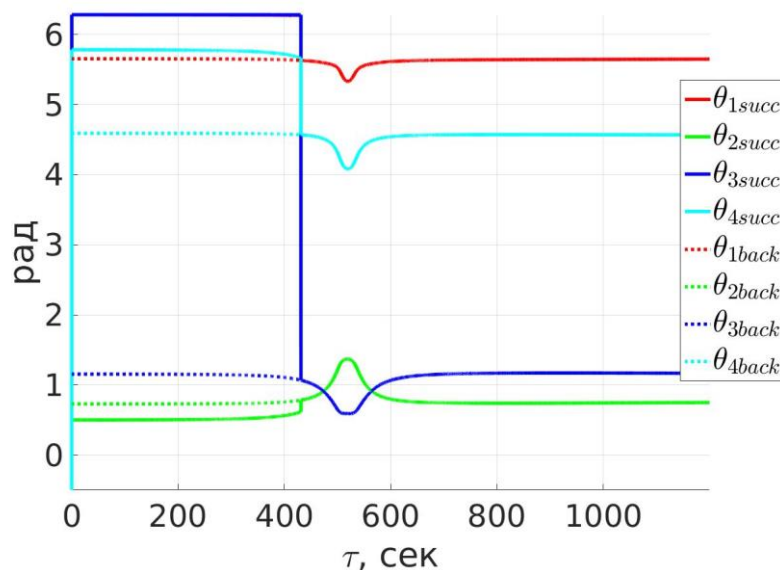


Рис. 16 Обратная коррекция углов гирослов от точки ветвления

Поскольку обратная коррекция прошла успешно, запускается фаза переориентации. С начальной точки в движение добавляется постоянное по модулю нуль-движение в одном направлении. На данном примере потребовалось всего 8 секунд для выхода в окрестность идеальной траектории, что хорошо видно на Рис. 17.

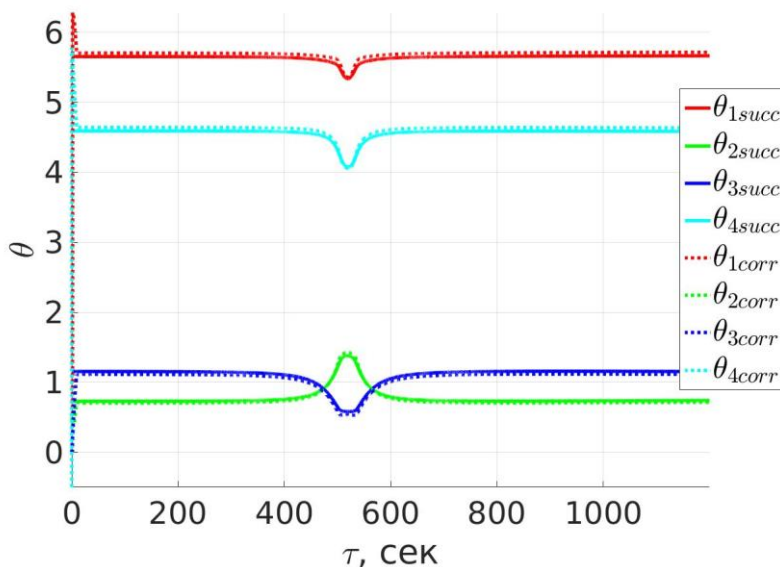


Рис. 17 Переориентация углов гирослов

Таким образом, была найдена необходимая переориентация. После этого было промоделировано движение спутника с переориентацией и

последующим использованием только метода Мура-Пенроуза с добавлением нуль-движения в окрестностях проходимых сингулярных поверхностей. На данном моделировании были добавлены шумы в магнитный момент и дополнительные шумы порядка 0.1 от модуля гравитационного момента. Сравнительные результаты продемонстрированы на Рис. 18.

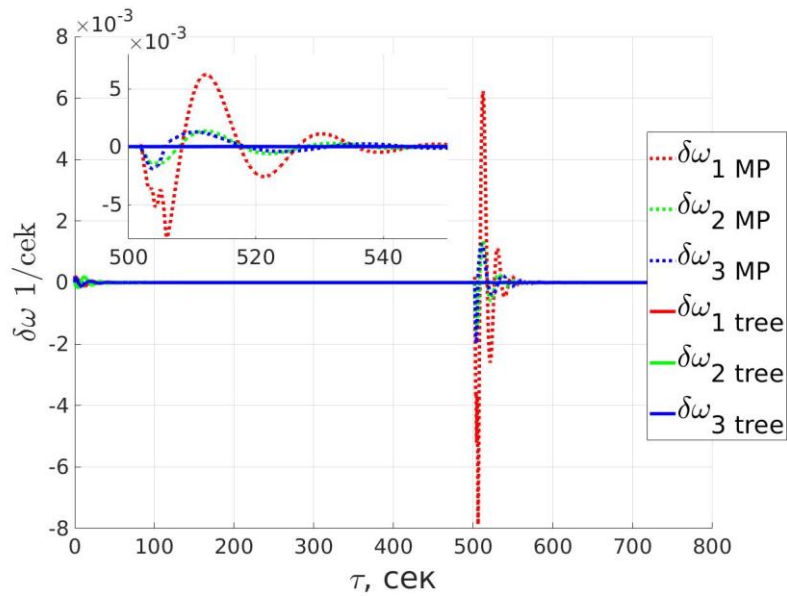


Рис.18 Разность между опорной и реализованными угловыми скоростями КА

К тому же на Рис. 19 можно посмотреть на то, как эволюционировала мера сингулярности, которая выражается как $\det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)$. Видно, что метод Мура-Пенроуза действительно провалился в сингулярность в момент съемки, в том время как предложенный алгоритм сумел ее обойти.

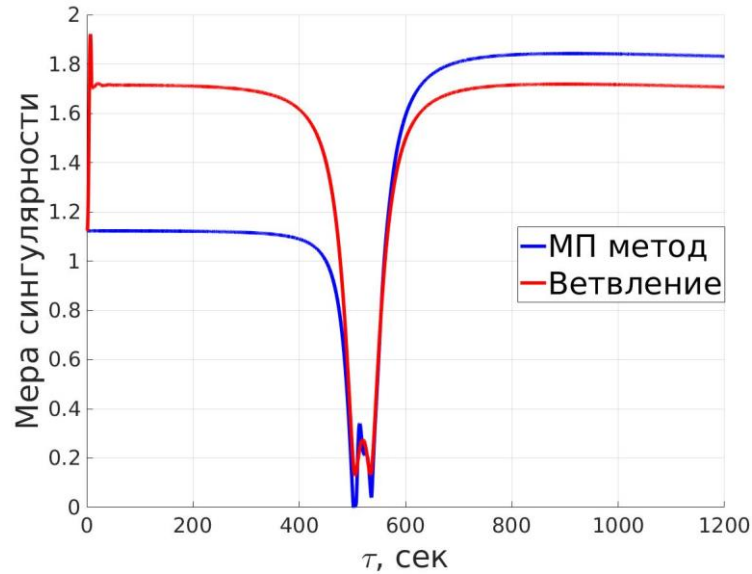


Рис. 19 Эволюция мер сингулярностей системы у обоих методов

В данном примере видно, что, несмотря на наличие возмущений, КА смог переориентироваться выполнить поставленную задачу с заданной точностью, что обеспечило точность съемки в отличие от метода Мура-Пенроуза.

Второй пример демонстрирует случай, когда не удалось найти движение при помощи последней пройденной сингулярной поверхности. Начальные параметры были следующими:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 &= -10^{-3} \cdot [1 \ 2 \ 3] \text{ рад/с}; & \boldsymbol{\theta}_0 &= [\pi / 2 \ 0.03 \ \pi / 2 \ -0.03] \text{ рад}; \\ \boldsymbol{\Lambda}_0 &= [0.89 \ 0.1 \ 0.24 \ -0.37]; & t_{for \ stabil} &= 240 \text{ с}; \ t_{pnt} = 420 \text{ с}. \end{aligned}$$

На Рис. 20 представлено решение, полученное с помощью метода Мура-Пенроуза. Скачки по скорости в начале нас не интересуют, поскольку это время отдается на переориентацию аппарата. Однако, в скором времени после пролета над основной точки съемки было потеряно управление. Таким образом, весь маневр является неудачным, поскольку съемка должна вестись на некотором интервале времени, в течение которого требуется гарантировать управляемость КА.

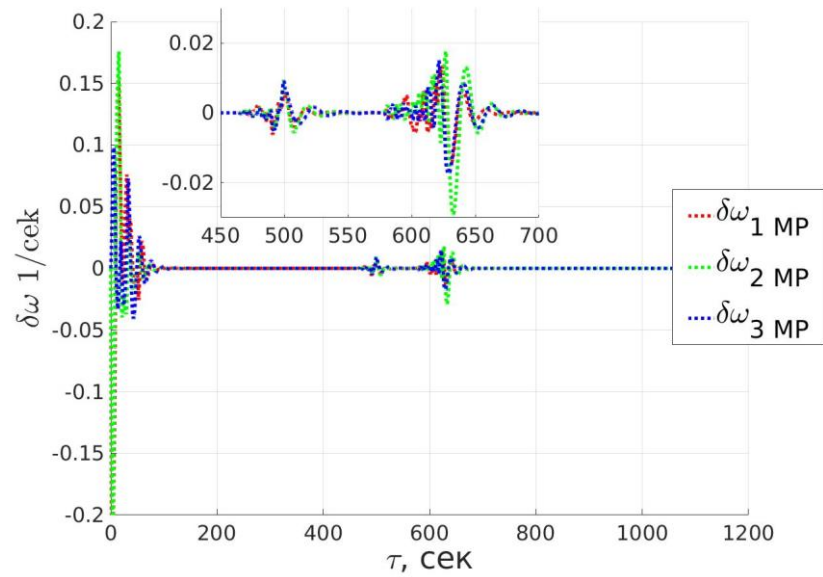


Рис. 20 Разность опорной и реализованной угловой скорости КА

В данном случае успешная траектория из последнего пройденного проходимого многообразия не сумела вернуться в начальную точку с заданной точностью. В таком случае было построено многообразие для начальной точки полета КА – Рис. 21.

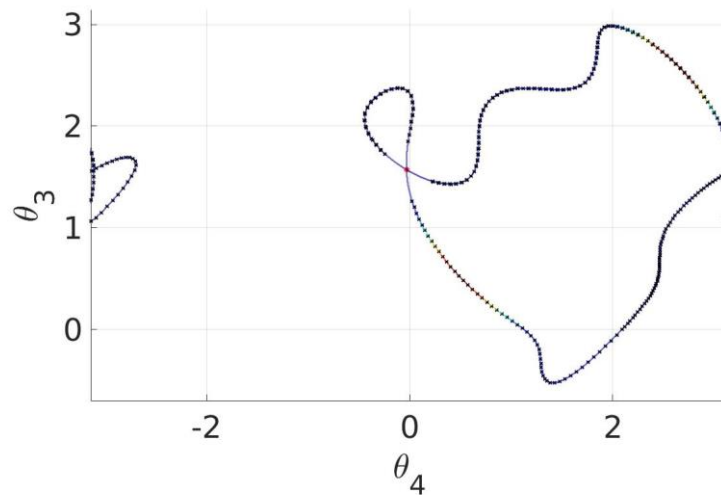


Рис. 21 Выбор точек по многообразию из начальной точки полета

После запуска параллельного интегрирования система нашла успешную траекторию. Эволюция углов гиروزлов успешной траектории

представлена на Рис. 22. Как хорошо видно на данном графике, у гиروزлов в начале были довольно высокие скорости. Это произошло в следствие

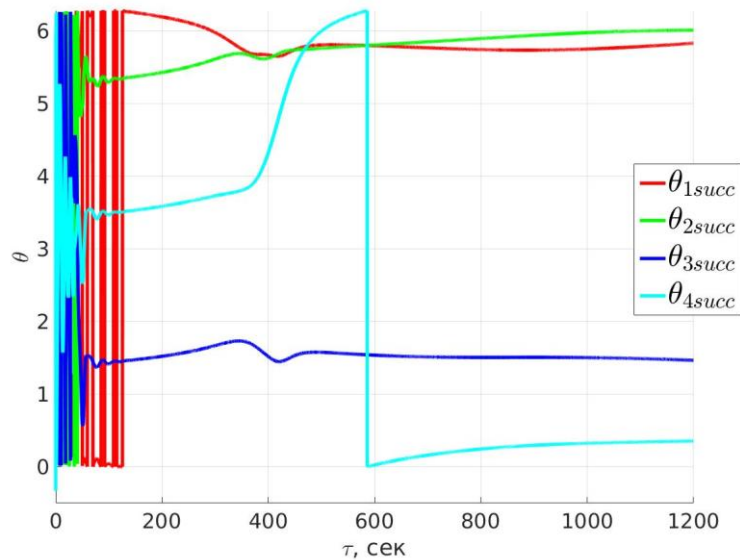


Рис. 22 Эволюция углов гиروزлов для успешной траектории попадания в окрестность непроходимой сингулярной поверхности. Однако, поскольку это происходило в рамках интервала для переориентации, нас этот факт не волнует. Далее была запущена фаза переориентации. Добавление постоянного нуль-движения в одном направлении дало результат, представленный на Рис. 23. Как можно видеть, здесь время переориентации составило около 200 секунд, что явно больше, чем в первом примере, однако меньше чем время, выделенное на эту фазу.

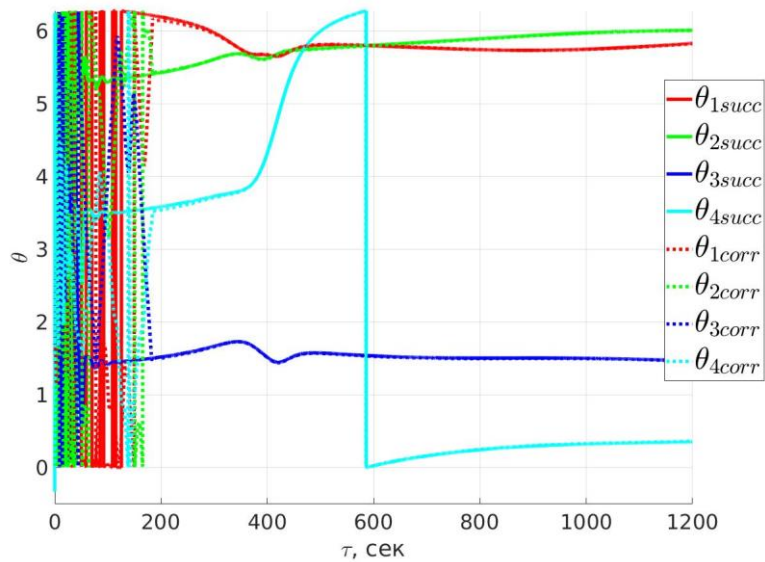


Рис. 23 Переориентация углов гиروزлов

Поскольку была найдена переориентация для КА, позволяющая выполнить поставленную задачу с заданной точностью, было запущено финальное интегрирование с дополнительными шумами, для проверки корректности работы алгоритма. Результаты представлены на Рис. 24.

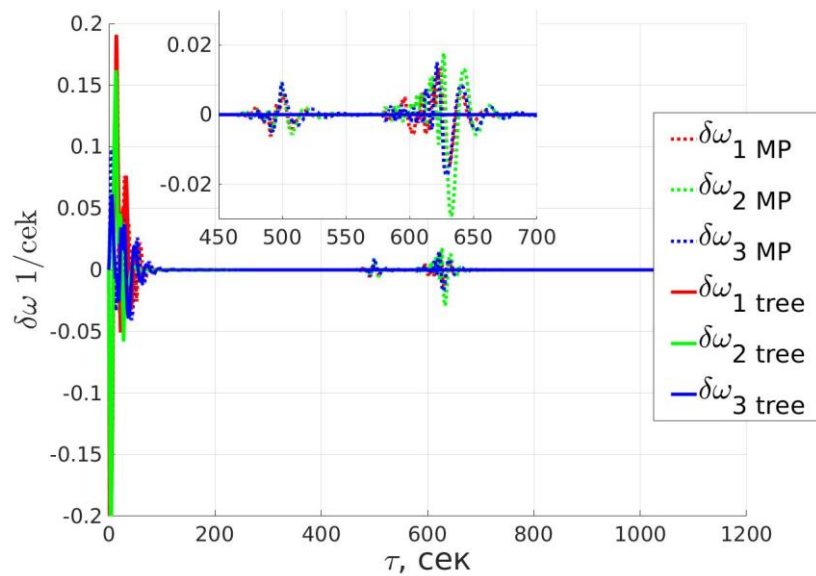


Рис. 24 Разность между опорной и реализованными угловыми скоростями КА

Видно, что, несмотря на шумы, КА успешно выполнил поставленную задачу, переориентировавшись за отведенное время. Посмотрим на меру

сингулярности данного примера Рис. 25. Видно, что в начале до конца времени переориентации и у МП метода, и у ветвления мера опускалась до нуля, что свидетельствует о пересечении непроходимых сингулярных поверхностей. Однако момент съемки был пройден успешно только для предложенного алгоритма.

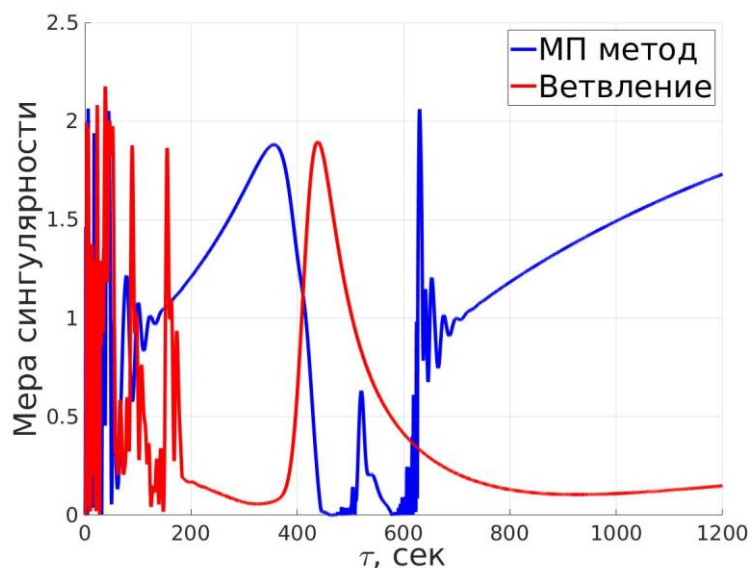


Рис. 25 Эволюция мер сингулярностей системы у обоих методов

5.3. Результаты моделирования

Из примеров видно, что предложенный алгоритм успешно справлялся с поставленной задачей, в отличие от локального метода Мура-Пенроуза, который явно проигрывал по точности. Однако не менее важной характеристикой является время вычисления данных решений, поскольку предполагается, что сразу после времени подсчета необходимо с Земли передать команду на спутник о переориентации. Поскольку переориентация использует постоянное по модулю значение нуль-движения, достаточно передать только время переориентации и направление, в котором добавлять нуль-движение.

Помимо данных примеров было промоделировано множество других положений, результаты по которым сводились данным в таблице 1 (при

включенном модуле параллелизации в MATLAB. Если модуль отключен, то необходимо добавит порядка 30-40 секунд).

Таблица 1. Результаты моделирования

Тип решения	Мур-Пенроуз	I фаза	II фаза	Нет решений
Время, сек	16-26	45-75	80-130	170-180

Поскольку начальные данные подбирались по-разному, можно было ожидать, что где-то справится и обычный Мур-Пенроуз с добавлением нуля-движения. Где-то решение остановится после первой фазы алгоритма. Где-то потребуются вторая. А где-то будут проверены обе фазы и все траектории для многообразий, но решение будет отсутствовать. Как уже говорилось ранее, в таком случае считается, что мы попали в область первого типа, либо постоянно крутимся на одном терминальном классе, с которого не можем сойти по причине отсутствия пересечений проходимых сингулярных поверхностей.

Считается, что если использовать более мощную технику, которая наверняка будет в центре управления полетами, то данный алгоритм можно еще ускорить, что будет хорошим дополнением к его практическому применению.

Заключение

В работе рассмотрена система управления ориентацией спутника из гироудинов в виде четырехугольной пирамиды. Изучена методика построения сингулярных поверхностей и определения их типа. На основании статьи [8] рассмотрена обратная связь кинематического уравнения между пространствами суммарного кинетического момента системы гироудинов и углов поворотов гироузлов. Изучены геометрически особенности пространства углов гироудинов. Рассмотрены типы областей в пространстве

кинетических моментов и на их основе сделаны выводы о возможности управления.

Произведен сравнительный анализ существующих законов управления. Сделан вывод о непригодности локальных законов управления в связи с невозможностью ими избегать непроходимых сингулярных поверхностей при решении задачи.

Разработан новый алгоритм управления, решающий поставленную задачу ДЗЗ, опираясь на геометрические особенности многообразий пространства углов гироузлов гироудинов. Произведен сравнительный анализ предложенного алгоритма с обычным методом псевдообращения Мура-Пенроуза и показано его преимущество в ряде случаев.

Приложение А: Базисы касательных пространств

Для системы гироскопов в сингулярном положении существуют хотя бы два линейно-независимых вектора управляющего момента. Без ограничения общности предположим, что это \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 . Базисы \mathbf{e}_i для касательных пространств Θ_S , Θ_N и Θ_T определяются следующим образом:

Базис Θ_S :

$$\mathbf{e}_{Si} = (p_1 q_i, p_2 q_i, \dots, p_n q_i)^T, \text{ где } i = 1, 2. \quad (0.1)$$

Базис Θ_N :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{N1} &= (q_{2,3}, q_{3,1}, q_{1,2}, 0, \dots, 0)^T; \\ \mathbf{e}_{N2} &= (q_{2,4}, q_{4,1}, 0, q_{1,2}, 0, \dots, 0)^T; \\ &\dots \\ \mathbf{e}_{Nn-2} &= (q_{2,n}, q_{n,1}, 0, \dots, 0, q_{1,2})^T. \end{aligned} \quad (0.2)$$

Базис Θ_T :

$$\mathbf{e}_{Ti} = (q_{i,1}, q_{i,2}, \dots, q_{i,n})^T, \text{ где } i = 1, 2. \quad (0.3)$$

Здесь $q_{i,j}$ выступает в роли смешанного векторного произведения трех векторов:

$$q_{i,j} = [\mathbf{c}_i \quad \mathbf{c}_j \quad \mathbf{u}]. \quad (0.4)$$

Эти результаты могут быть получены с помощью следующих рассуждений.

Вектор $d\theta_S$ определяется с помощью дифференцирования уравнения сингулярного вектора (2.2) на сингулярных векторах управляющих моментов:

$$\mathbf{c}_{Si} \cdot d\mathbf{u} = d\mathbf{c}_{Si} \cdot \mathbf{u} = d\theta_{Si} / p_i. \quad (0.5)$$

Поскольку вектор $d\mathbf{u}$ лежит в плоскости, ортогональной \mathbf{u} , то существуют два линейно-независимых вектора $d\mathbf{u}_1$ и $d\mathbf{u}_2$ формирующих эту перпендикулярную плоскость. Для них выполнено следующее соотношение:

$$d\mathbf{u}_i = \mathbf{c}_i \times \mathbf{u}, \text{ где } i = 1, 2 \quad (0.6)$$

Из уравнений (0.5) на компоненты $d\theta_s$ вместе с определением $d\mathbf{u}_i$ выше, получаем, что кандидаты в \mathbf{e}_{s_i} , задаваемые (0.1) действительно задают базис в пространстве Θ_s .

Базис для подпространства нуль-движения Θ_N получается из следующего факта для произвольных векторов в трехмерном пространстве:

$$\mathbf{a}[\mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{d}] - \mathbf{b}[\mathbf{c} \ \mathbf{d} \ \mathbf{a}] + \mathbf{c}[\mathbf{d} \ \mathbf{a} \ \mathbf{b}] - \mathbf{d}[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = 0 \quad (0.7)$$

Подставляя $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_i$ и \mathbf{u} в это уравнение, получаем следующее соотношение:

$$q_{1,2}\mathbf{c}_i + q_{2,i}\mathbf{c}_1 + q_{i,1}\mathbf{c}_2 = 0 \quad (0.8)$$

Отсюда выходит, что кандидаты в \mathbf{e}_{N_i} , задаваемые (0.2) удовлетворяют определению нуль-движения, поскольку $\mathbf{C}\mathbf{e}_{N_i} = 0$. И более того, они независимы, т.к. $q_{1,2}$ не равен нулю по определению.

Скалярное произведение вектора нуль-движения и n -мерного вектора из уравнения (0.5) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_i d\theta_{N_i} (d\theta_{s_i} / p_i) &= \sum_i d\theta_{N_i} (\mathbf{c}_{s_i} \cdot d\mathbf{u}) = \\ (d\theta_N)^T \mathbf{C}^T d\mathbf{u} &= (\mathbf{C}d\theta_N)^T d\mathbf{u} = 0. \end{aligned} \quad (0.9)$$

Таким образом, n -мерный вектор с компонентами $d\theta_{s_i} / p_i$ ортогонален нуль-движению и потому принадлежит подпространству Θ_T . Базис (0.3) получается простой подстановкой из базиса Θ_s .

Приложение В: Обратная кинематика

В данном приложении предложен перевод геометрического исследования углов гиروزлов при игнорировании фактора времени из работы [8].

В.1 Многообразия

Закон управления – это метод получения угловых скоростей гиروزлов, которые отвечают требуемой производной кинетического момента. Если мы будем игнорировать фактор времени, то закон управления можно описать как метод получения углов гиروزлов по данному изменению кинетического момента. Это обратная связь кинематического уравнения $\mathbf{H}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$. (Прямая) кинематика – это однозначное отображение. Но обратная связь, которую будем называть обратной кинематикой, будет являться отображением один ко многим. Таким образом, возможные $\boldsymbol{\theta}$, дающие один и тот же вектор кинетического момента \mathbf{H} являются прообразами нашего отображения.

Прообраз \mathbf{H} в пространстве $\boldsymbol{\theta}$ – это множество несвязанных подпространств. Предполагая, что подпространство не имеет сингулярных положений, мы можем определить в каждой точке данного пространства $n-3$ мерное касательное пространство как линейное пространство нуль-движения. Таким образом, это подпространство является $n-3$ мерным многообразием. Если же это подпространство имеет сингулярные точки, то мы не можем определить там касательных векторов. Но даже в этом случае мы можем определить касательные пространства во всех других точках данного пространства. Таким образом, это подпространство будем почти тем же самым, что и многообразие и в данной работе будет обозначаться как «сингулярное многообразие». Прообраз \mathbf{H} – это сумма многообразий и сингулярных многообразий, которые мы будем обозначать как M_i и M_{sj} соответственно.

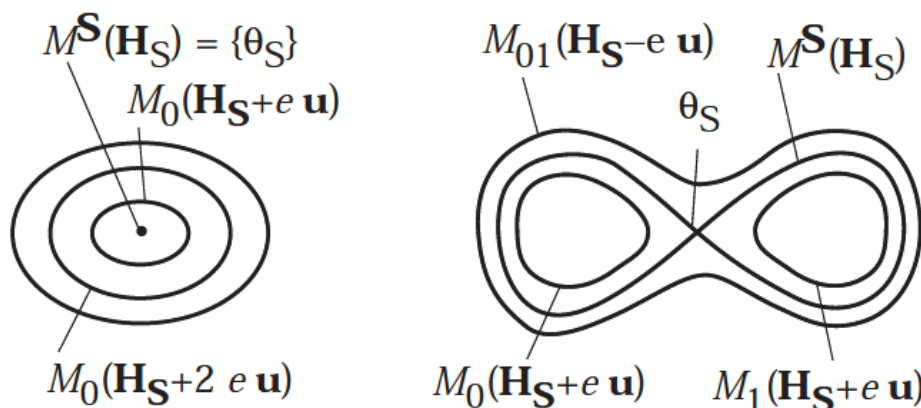
Форма этих многообразий в окрестности сингулярной точки характеризуется квадратичной формой уравнения (2.11). Предположим, что \mathbf{H} находится в окрестности сингулярной поверхности, где $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \epsilon \mathbf{u}$. По той же самой логике рассуждений, что в уравнениях от (2.9) до (2.14), возможные

θ в окрестности сингулярной точки θ_S , удовлетворяют следующей квадратичной записи:

$$-1/2 \sum_i (d\theta_{Ni})^2 / p_i \approx e,$$

где $\theta = \theta_S + d\theta_N$

В этом уравнении движения $d\theta_N$ являются касательными векторами сингулярной точки θ_S . В случае непроходимого сингулярного положения эта квадратичная форма будет определенной, таким образом, многообразие похоже на многомерный эллипсоид. Квадратичная форма проходимой сингулярной точки не определена, так что форма многообразия напоминает многомерную гиперболическую поверхность в окрестности сингулярной точки. Это продемонстрировано на Рис. В1 для 4-модульной системы, в которой многообразия являются петлями на 4-мерном торе.



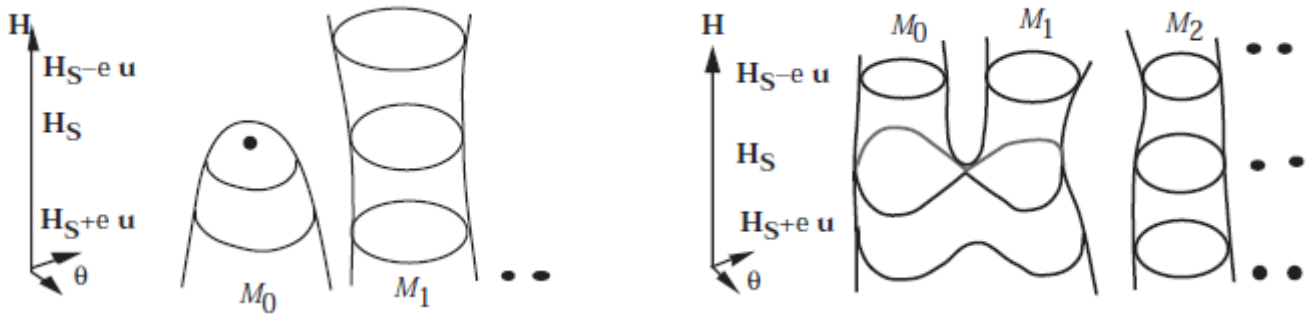
а) эллиптическое многообразие вокруг непроходимой сингулярной точки б) многообразие, пересекающееся около проходимой сингулярной точки

Рис. В1 Многообразия в окрестности сингулярной точки.

В.2 Траектории многообразий

Так как \mathbf{H} меняется непрерывно, то и каждое многообразие непрерывно изменяет свою форму как показано на Рис. В2. Многообразие может деформировать свою форму в точку, если \mathbf{H} пересекает непроходимую

поверхность и может раздваиваться, если \mathbf{H} пересекает проходимую поверхность. Эти непрерывные изменения многообразий могут быть упрощены как непрерывные траектории в пространстве многообразий, где каждое многообразие представляется в виде точки Рис. В3.



а) Непрерывное изменение многообразий в окрестности непроходимого \mathbf{H} . б) Непрерывное изменение многообразий в окрестности проходимого \mathbf{H} .

Рис. В2 Непрерывное изменение многообразий соответствующих траектории \mathbf{H} , проходящей через сингулярную точку

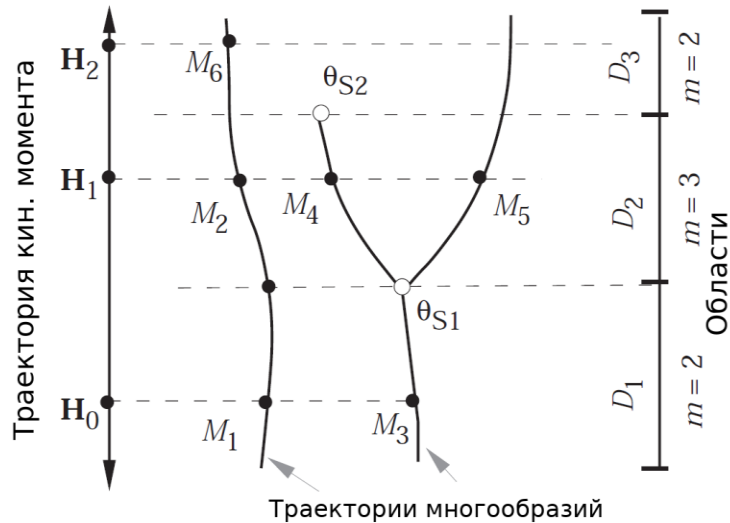


Рис. В3 Пример непрерывной траектории многообразий. Проходимая сингулярная точка θ_{S1} является точкой ветвления, а непроходимая θ_{S2} является окончанием траектории.

Если нам нужно точное определение непрерывности многообразий, то мы можем его задать, опираясь на расстояние d между многообразиями, которое определим, как:

$$d(M_A, M_B) = \max(\min(|\theta - \varphi|; \forall \theta \in M_A); \forall \varphi \in M_B), \quad (0.10)$$

где M_A и M_B это два многообразия, а норма $|\theta - \varphi|$ определяется надлежащим образом в пространстве углов гироузлов гироудинов. По этому определению многообразия становятся разрывными в точке ветвления.

Смысл непрерывной траектории многообразий можно выразить в следующих обозначениях. Если многообразие (например, M_1 на Рис. В3), включая начальную точку θ_1 , находится на непрерывной траектории многообразий для заданной траектории вектора кинетического момента \mathbf{H} (траектория $\mathbf{H}_0\mathbf{H}_1$ на Рис. В3), то любой вектор θ_2 многообразия, находящегося в другой части траектории (M_2 на Рис. В3), может быть достигнут с помощью некоего непрерывного закона управления, используя подходящее нуль-движение, в то время как любой θ_4 многообразия за пределами траектории (M_4 на Рис. В3) не может быть достигнут. Если траектория многообразий раздваивается, то выбор дальнейшей траектории (M_4 или M_5 для начала в M_3) зависит от нуль-движения и, следовательно, от закона управления. Если траектория многообразий с начальным положением в θ_4 , отвечающая данной траектории \mathbf{H} , завершается, не дойдя до конечной точки кинетического момента (например, в θ_{s2} для траектории $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2$ на Рис. В3), то не существует закона управления, который смог бы реализовать данное движение.

В.3 Области и классы эквивалентности

Пространство кинетического момента состоит из нескольких областей, разделенных сингулярными поверхностями. Далее мы будем называть

подобные разбитые области просто «областями». Будем считать, что у каждой области внутри отсутствуют сингулярные поверхности, а граница ее состоит из множества пересекающихся сингулярных поверхностей. Каждую область мы обозначим как D_i . Любая непрерывная траектория \mathbf{H} внутри области отвечает конечному числу непрерывных траекторий многообразий без завершающих точек и точек ветвления. Таким образом, число многообразий для каждой точки в области постоянно.

Определим отношение эквивалентности многообразий следующим образом[8]:

Два многообразия одной области считаются эквивалентными, если существует незамкнутая траектория многообразий, которая отвечает траектории \mathbf{H} внутри области.

Все эквивалентные многообразия формируют область в пространстве многообразий, которая изоморфна изначальной области в пространстве \mathbf{H} . Это множество эквивалентных многообразий определяет понятие «класса эквивалентности». Число классов назовем порядком области. Пусть G_i и m означают класс и порядок соответственно. Порядок области определяется пошагово. Внешняя область, ближайшая к оболочке пространства \mathbf{H} имеет порядок 1. Две соседние области отличаются в порядке на 1, т.к. существует только одна траектория многообразий, которая завершается или раздваивается.

Понятие класса эквивалентности может быть расширено на разные области, соединенные траекторией \mathbf{H} . Классы многообразий из разных областей называются эквивалентными, если траектория \mathbf{H} , соединяющая две области отвечает траектории многообразий, соединяющей эти классы. Например, на Рис. В3 траектория многообразий $M_1 - M_2 - M_6$ непрерывно идет через области D_1, D_2 и D_3 , так что эти многообразия и классы на

траектории являются эквивалентными. С другой стороны M_3 в области D_1 не эквивалентно никакому многообразию в области D_2 . Отношения между многообразиями и классами представлены на Рис. В4.

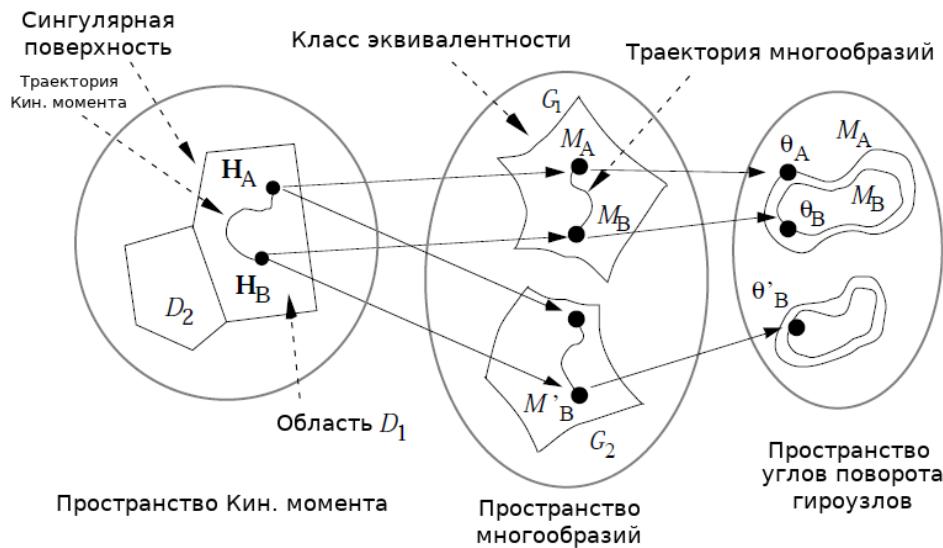


Рис. В4 Связи между пространством \mathbf{H} , пространством многообразий и пространством $\boldsymbol{\theta}$.

Эквивалентность между двумя областями говорит о том, что траектория многообразий между ними непрерывна. Если на траектории многообразий есть точка ветвления, то классы не будут эквивалентны. В таком случае классы называются связными, поскольку может быть выбрана непрерывная траектория углов гиروزлов $\boldsymbol{\theta}$.

В.4 Терминальные классы и типы областей

Для реализации непрерывного управления очень важно знать, имеет ли каждый класс эквивалентные или связанные с ним классы для любой траектории \mathbf{H} выходящей за границу области. Назовем класс многообразий «терминальным классом»[8], если существует уходящая в соседнюю область траектория \mathbf{H} , которая приводит данный класс к завершению. Исходя из этого определения класс, находящийся под оболочкой исключительно внутри ее

границ, не будет терминальным, даже если он завершается на границе, поскольку выходящая за оболочку траектория \mathbf{H} не имеет смысла.

Каждая область может быть классифицирована, как один из следующих типов, определяющихся порядком области и количеством ее терминальных классов k :

Первый тип: $m = k > 0$,

Второй тип: $m > k > 0$

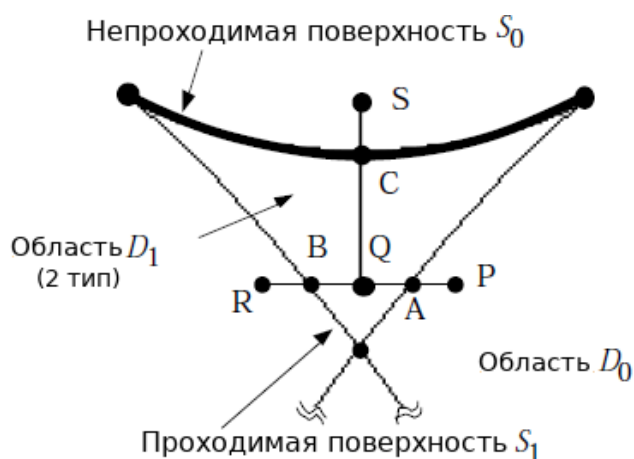
Третий тип: $k = 0$.

Большинство областей рядом с границей пространства имеют третий тип по определению выше. Третий тип области не имеет терминальных классов, а потому там не возникает сложностей в законе управления внутри него или в соседних с ним областях.

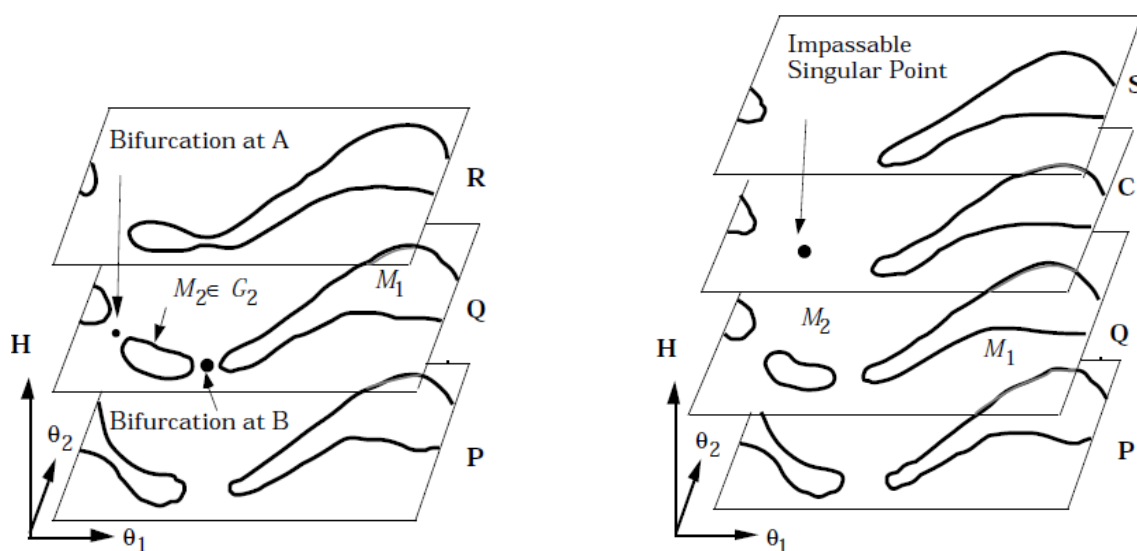
В.5 Классы связности

Следующие примеры были получены с помощью компьютерного моделирования[8]. На Рис. В5 представлено сечение сингулярной поверхности около границы пространства кинетического момента. Криволинейный треугольник является границей поверхности по которой прошло сечение, а жирная линия указывает непроходимое ребро. Этот треугольник делит пространство \mathbf{H} на две части. Область снаружи назовем D_0 , а внутри D_1 . Область D_0 находится под внешней оболочкой пространства кинетического момента и имеет третий тип. Область D_1 же является вторым типом с порядком $m = 2$. На Рис. В5 (б) и (в) показаны некоторые точки этих двух областей. Многообразия были нанесены с использованием двумерной проекции на косые координаты. В то время как реальное пространство $\mathbf{\Theta}$ представляет собой четырехмерный тор, иллюстрация была выполнена в виде четырехугольника, края которого параллельны друг другу и являются одними и теми же точками.

Рассмотрим траекторию кинетического момента PAQBR, которая пересекает область D_1 на Рис. В5(а). Не существует эквивалентных друг другу классов в разных областях для этой траектории, которая проходит по трем областям из D_0 в D_0 через D_1 . Путь многообразий раздваивается в



а) сечение внутренней сингулярной поверхности и траектории **H**



б) многообразия для траектории PQR б) многообразия для траектории QCS

Рис. В5 Области и многообразия для 4-угольной пирамидальной системы.

точках А и В. Таким образом классы являются не эквивалентными, а связанными и становится возможным реализовать непрерывный закон управления, основанный на добавлении нуль-движения, поскольку эти точки ветвления (проходимые сингулярные точки) легко обходимы.

Рассмотрим теперь траекторию кинетического момента PAQCS, пересекающую непроходимую поверхность. На Рис. В5 (в) видно, что многообразие M_2 принадлежит терминальному классу этой области. Если этот класс будет выбран при прохождении в D_1 из точки Р через А, то не будет существовать непрерывного пути для достижения другого многообразия, такого как M_1 , что приводит к потере управляемости. С другой стороны, если будет выбран класс M_1 , то гарантируется существование непрерывного управления без каких-либо специальных методов, выходящего из этой области через QCS. В таком случае основным вопросом становится выбор подходящего класса.

Рассуждения выше могут быть представлены также с помощью графа классов связности[8] на Рис. В6(а). Зигзагообразные линии отвечают сечению сингулярной поверхности, полученной с помощью численного моделирования. Многочисленные круги внутри областей отражают классы эквивалентности областей, и цвет этих кругов (серый и белый) говорит о том являются эти классы терминальными или нет. Круги, находящиеся на ребрах, отделяющих области друг от друга означают классы многообразий. Кривые линии, соединяющие круги, отражают связи между классами. Граф связности формирует легкое понимание того, что все классы будут связаны даже с после пропуска терминального класса. Таким образом необходимый выбор класса единственен для каждой траектории **Н**, пересекающей эту область.

На В6(б) изображено другое сечение сингулярной поверхности и его граф классов связности. Треугольная область D_3 имеет первый тип. В этом случае после исключения терминальных классов у нас не останется других классов в этой области. Таким образом, не существует непрерывной связи классов для траекторий **Н**, таких как FG. Это говорит о том, что не существует закона управления способного реализовать эту траекторию кинетического момента. С другой стороны с помощью выбора подходящего класса из раздвоения

возможно непрерывное движение вдоль траектории DE. Этот выбор, к сожалению, не всегда эффективен. Если мы будем двигаться по другой траектории, например по DE', то нужно будет выбрать другой класс из раздвоения. Это говорит о том, что не существует единственного правила выбора при пересечении первого типа областей. На Рис.В6 (в) показан другой пример области первого типа вместе с множеством связанных классов. Рассуждения выше можно применить и для этого случая.

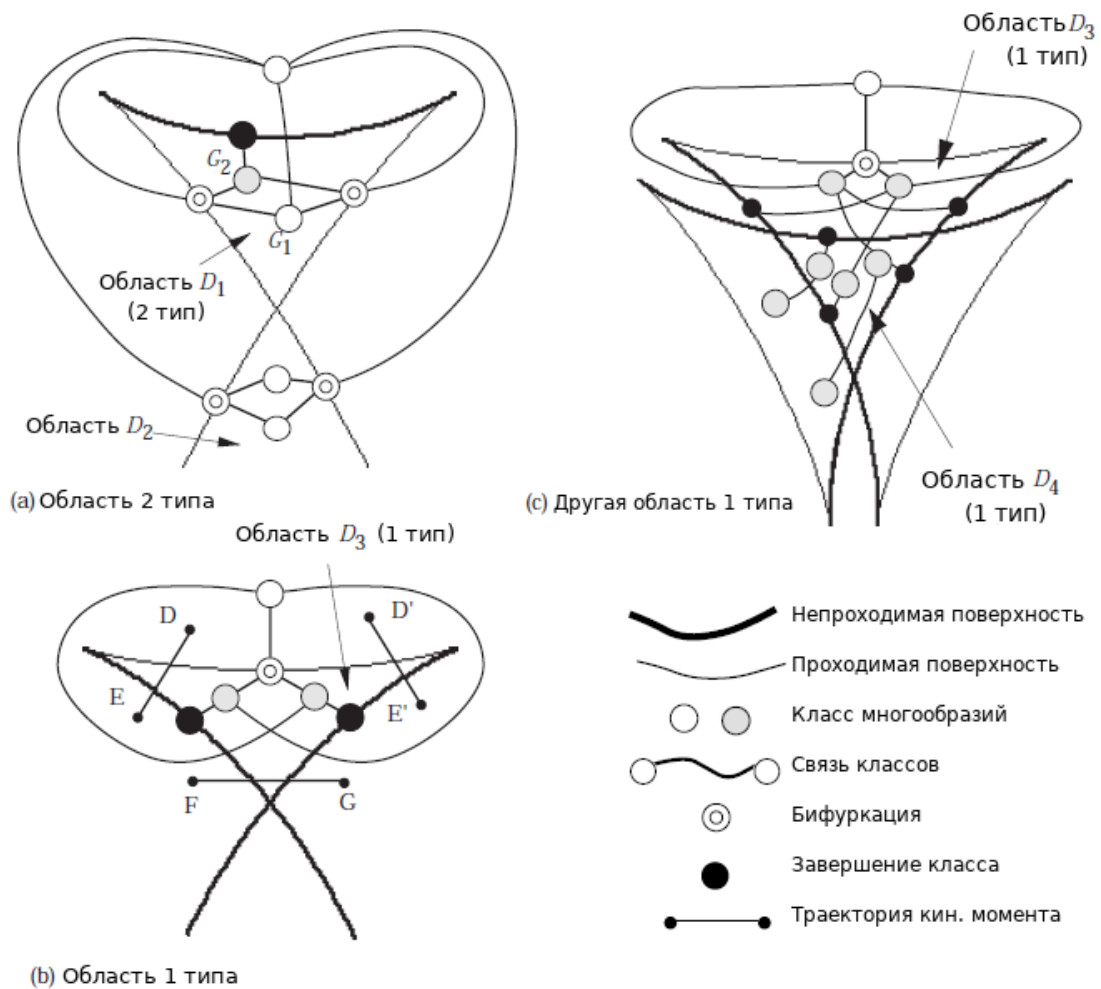
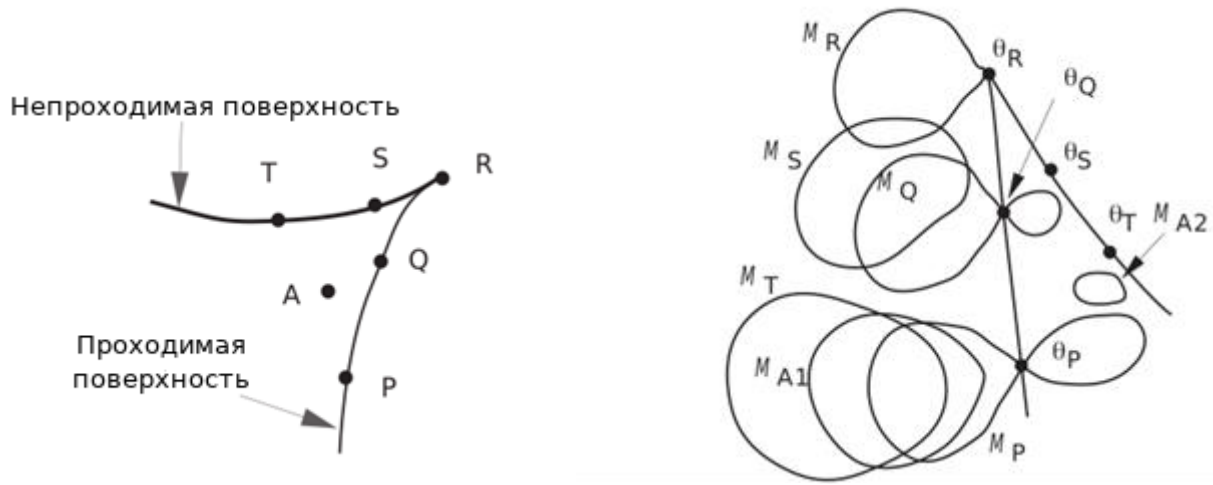


Рис. В6 Граф классов связности вокруг областей

Граф связности на Рис. В6 может быть получен без вычисления многообразий, но из условий непрерывности. В сечении на Рис. В7 острый

угол R отражает границу между проходимой и непроходимой частями сингулярной поверхности.



а) пространство кинетического момента \mathbf{H}

б) пространство углов гиروزлово θ

Рис. В7 Иллюстрация первого правила связности классов

Так как сингулярная точка θ на поверхности непрерывна, то проходимые точки θ_P и θ_Q гладко переходят в непроходимые сингулярные точки θ_S и θ_T . Это говорит о том, что после разветвления на проходимой поверхности одна из двух траекторий многообразий, в какую, например, входит многообразие M_{A2} , должна завершиться на непроходимой поверхности. Таким образом, класс связности, такой как на Рис. В6(а), является общим для данного типа областей, даже если их порядок не равен 2.

Рассмотрим теперь две пересекающиеся непроходимые сингулярные поверхности (Рис. В8). Сингулярные точки непрерывны вдоль каждой поверхности. Терминальные многообразия M_P и M_Q на каждой поверхности эквивалентны друг другу также как и M_R и M_S . Следовательно, не существует связи между двумя многообразиями разных групп, например M_P и M_R , в противном случае нельзя было бы перейти через непроходимую поверхность, идя по терминальному классу второй. Таким образом,

определен класс связности как на Рис. В6 (б). Однако с возрастанием сложности пересечений в пространстве, нахождение класса связности становится более трудной задачей.

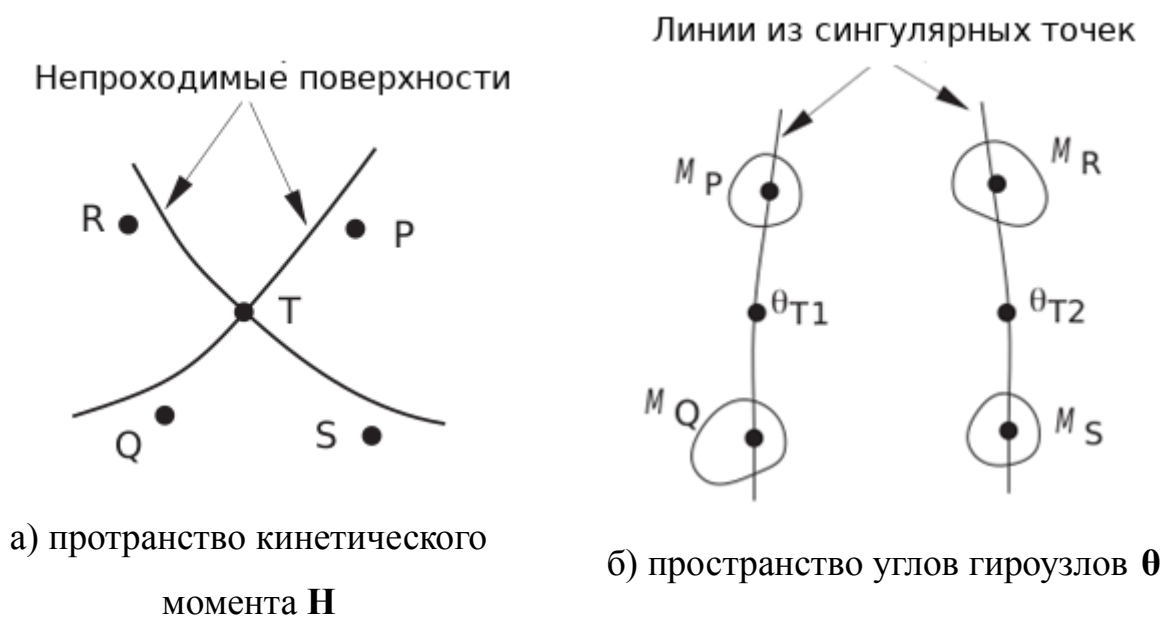


Рис. В8 Иллюстрация второго правила класса связности. Если две непроходимые поверхности пересекают друг друга, оба терминальных класса различаются.

Из двух примеров выше можно сформулировать следующие общие факты.

1. Непрерывное управление вокруг второго типа областей зависит от выбора многообразия после раздвоения. Если будет выбран любой класс кроме терминального, то гарантируется непрерывное управление.
2. Невозможен выбор многообразий кроме как из терминальных классов при входе в область первого типа.
3. Некоторые траектории \mathbf{H} , которые пересекают область первого типа, не имеют связанных траекторий многообразий.

Третий факт говорит о том, что не существует непрерывной траектории углов гироузлов θ для данной траектории H . Второй факт говорит о том, что даже если для каждой траектории H существует непрерывная траектория θ , то управление в режиме реального времени не гарантировано, если траектория H не задана наперед. Поскольку в таком случае нельзя заранее предугадать, какое многообразие из раздвоения выбрать. Следовательно, эти два факта отражают отсутствие закона управления, который мог бы обеспечить непрерывное управление вдоль рабочего пространства, содержащего области первого типа. С другой стороны непроходимая поверхность в областях второго типа не оказывает проблем, если будет выбрано соответствующее первому факту многообразию.

В.6 Выбор многообразия

Выбор многообразия в точке ветвления вызывает свои трудности. Хотя существует градиентный метод, основанный на нуль-движении, который обходит проходимые сингулярные точки, итоговый выбор многообразия зависит от контрольных значений θ перед раздвоением. Градиентный метод в таком случае является неподходящим.

Весовая функция градиентного метода принимает нулевые значения в сингулярной точке, а в других она положительна. Таким образом, сингулярная точка является минимумом весовой функции на многообразии. Тогда должен существовать максимум весовой функции с двух сторон от сингулярной точки, например точки A и B на Рис. В9. Зная, что весовая функция непрерывна, то многообразие до и после раздвоения имеет локальные максимумы в точках A', B', A'' и B'' в окрестностях точек A и B . Градиентный метод содержит только локальные максимумы, а потому его траектория может быть как $A'AA''$, так и $B'BB''$. Даже если одно из многообразий после раздвоения принадлежит терминальному классу, этот метод не может сдвинуть θ из одного локального максимума в другой.

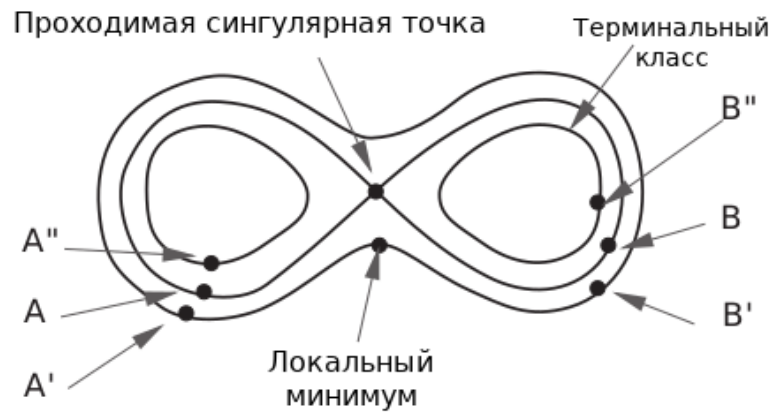


Рис. В9 Иллюстрация движения градиентного метода.

Таким образом, можно однозначно заключить, что управление в режиме реального времени без предварительного знания траектории **H** невозможно. Это подводит нас к проблеме выбора подходящего закона управления для выполнения поставленной задачи.

Список используемой литературы

1. Votel R., Sinclair D. Comparison of control moment gyros and reaction wheels for small Earth-orbiting satellites // Proc. 26th Annu. AIAA/USU Conf. Small Satell. 2012. P. 1–7.
2. Bedrossian N.S. et al. Zero-Propellant Maneuver Guidance: Rotating the international space station with computational dynamic optimization // IEEE Control Syst. 2009. Vol. 29, № 5. P. 53–73.
3. Margulies G., Aubrun J.N. Geometric Theory of Single-Gimbal Control Moment Gyro Systems. // J. Astronaut. Sci. 1978. Vol. 26, № 2. P. 159–191.
4. Meffe M., Stocking G. Momentum Envelope Topology of Single-Gimbal CMG Arrays for Space Vehicle Control // Proc. AAS Guid. Control Conf. CO. 1987. Vol. Jan-Feb.
5. Токарь Е.Н. О рациональном построении систем гиросиловых стабилизаторов.
6. Kojima H., Matsuda N., Yamaguchi S. Singularity visualization and steering control law of adaptive skew pyramid type CMGs // AIAA Guid. Navig. Control Conf. 2011. 2011. № August 2011.
7. Mony A., Hablani H. Control Moment Gyro (CMG) Sizing and Cluster Configuration Selection for Agile Spacecraft Control Moment Gyro (CMG) Sizing and Cluster Configuration Selection for Agile Spacecraft 1 Introduction India has one of the largest fleet of remote sensing spa. 2016. № November.
8. Kurokawa H. A Geometric Study of Single Gimbal Control Moment Gyros A Geometric Study of Single Gimbal Control Moment Gyros // Rep. Mech. Eng. Lab. 1998. № 175.
9. Ткачев С.С., Вознюк Д.А. Методы обхода сингулярностей при управлении угловой ориентацией спутника с помощью гиродинов. 2019.
10. Yavuzoglu E. Steering Laws for Control Moment Gyroscope Systems Used.

2003. № November.

11. Tokar E.N., Platonov V.N. Singular Surfaces in Unsupported Gyrodyne Systems. 1978.
12. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейно алгебры. 2015.
13. Nakamura Y., Hanafusa H. Inverse Kinematic Solutions With Singularity Robustness for Robot Manipulator Control // Dyn. Syst. Meas. Control. 2009.
14. Wie B., Bailey D., Heiberg C. Singularity robust steering logic for redundant single-gimbal control moment gyros // J. Guid. Control. Dyn. 2001.
15. Ford K.A., Hall C.D. Singular direction avoidance steering for control-moment gyros // J. Guid. Control. Dyn. 2000. Vol. 23, № 4. P. 648–656.
16. Vadali S.R., Oh H.S., Walker S.R. Preferred gimbal angles for single gimbal control moment gyros // J. Guid. Control. Dyn. 1990. Vol. 13, № 6. P. 1090–1095.
17. Paradiso J. A Search-based approach to steering single-gimbaled CMGs // Charles Stark Draper Lab. TR CSDLR-2261, 1991. № July.
18. Paradiso J.A. Global steering of single gimbaled control moment gyroscopes using a directed search // J. Guid. Control. Dyn. 1992. Vol. 15, № 5. P. 1236–1244.
19. Kurokawa H., Yajima N., Usui S. New Steering Law of a Single-Gimbal Cmg System of Pyramid Configuration. // Autom. Control Sp. 1986. № 1. P. 251–257.
20. Маштаков Я.В. Использование прямого метода Ляпунова в задачах управления ориентацией космических аппаратов. 2019.
21. Овчинников М.Ю. Введение в динамику космического полёта. МФТИ, 2016. 208 p.