

# Моделирование гравитационного поля астероида сложной формы с равномерно распределенной массой

Студентка: А.С. Юдицкая, 4 курс ФПМИ

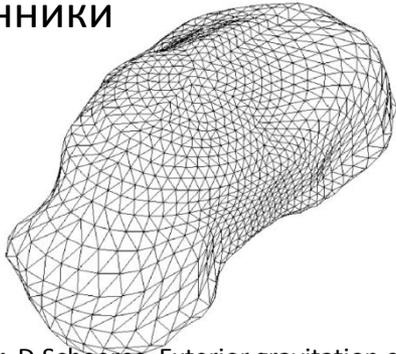
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. С.С. Ткачев

# Содержание

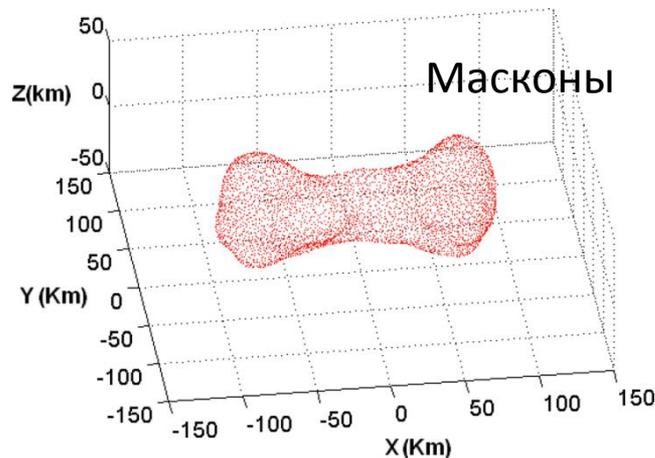
- Введение
- Постановка задачи
- Схема решения задачи
- Верификация модели
- Примеры
- Заключение

# Подходы описания гравитационного потенциала

Многогранники



R. Werner, D. Scheeres, Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia



T. G. Chanut, Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source

Представление тела  
касающимися шарами



(433) Эрос

(216) Клеопатра

Elisabet Herrera Sucarrat

THE FULL PROBLEM OF TWO AND THREE BODIES:  
APPLICATION TO ASTEROIDS AND BINARIES

Модель сферических  
гармоник

$$U = \frac{G}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} C_{l,0} + \frac{G}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} \{ C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi) \}$$

D. Vallado, Fundamentals of astrodynamics and applications.

# Постановка задачи

Требуется определить коэффициенты разложения в модели сферических гармоник гравитационного поля астероида  
Форма астероида задается поверхностной сеткой

Масса известна и полагается равномерно распределенной по объему

Все расчеты производятся в той же СК, в которой дана модель астероида

# Модель сферических гармоник гравитационного потенциала

$$U = \frac{G}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} C_{l,0} + \frac{G}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} \{ C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi) \}$$

$r$  – расстояние до "пробной точки"

$\theta, \varphi$  – зенитный и азимутальный углы для "пробной точки"

$P_{l,m}$  – присоединенный полином Лежандра

$C_{l,m}, S_{l,m}$  – коэффициенты разложения

$$P_{l,m}[x] = \frac{1}{2^l} (1-x^2)^{m/2} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^j (2l-2j)!}{j!(l-j)!(l-2j-m)} x^{l-2j-m}$$

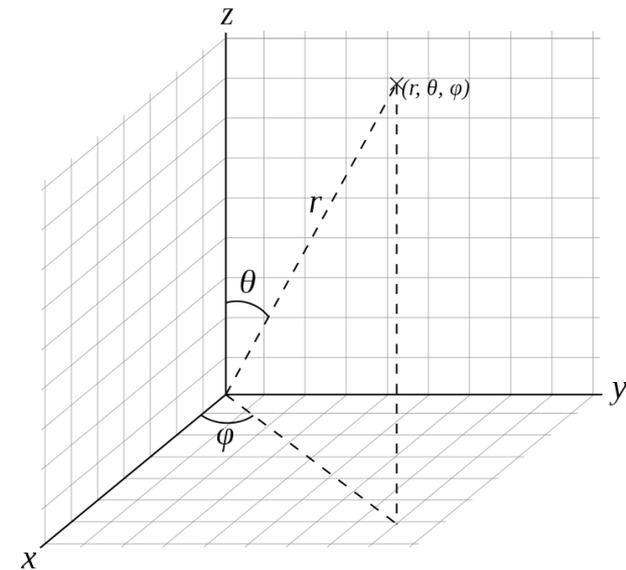
$$P_l[x] = P_{l,0}[x]$$

$$C_{l,m} = \int_{body} r_Q^l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_Q \right) \right] \cos(m\varphi_Q) dM_Q$$

$$S_{l,m} = \int_{body} r_Q^l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_Q \right) \right] \sin(m\varphi_Q) dM_Q$$

$r_Q$  – расстояние до точки тела

$\theta_Q, \varphi_Q$  – зенитный и азимутальный углы



# Расчет ускорения

$$\mathbf{f} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{G}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{P_l \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} C_{l,0} - \frac{G}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l (l+1) \frac{P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} \{C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi)\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta} = & -\frac{G}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_{l,1} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} C_{l,0} + \\ & + \frac{G}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{1}{r^l} \left( -P_{l,m+1} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] + m \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] \right) \{C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi)\} \end{aligned}$$

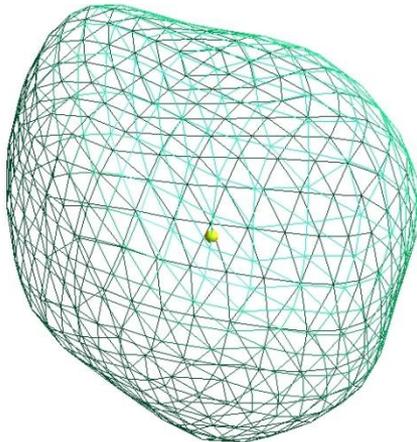
$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{G}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} \{-C_{l,m} \sin(m\varphi) + S_{l,m} \cos(m\varphi)\}$$

# Схема



# Входные данные

Поверхностная сетка<sup>1</sup> представлена в виде набора координат точек и номеров вершин треугольников



```
v -9.358130 3.765230 3.808200  
v -9.116010 3.812660 3.855230  
v -8.875540 3.864140 3.905210  
v -8.636950 3.919300 3.957680  
v -8.397120 3.970650 4.007310  
v -8.156370 4.038010 4.056320
```

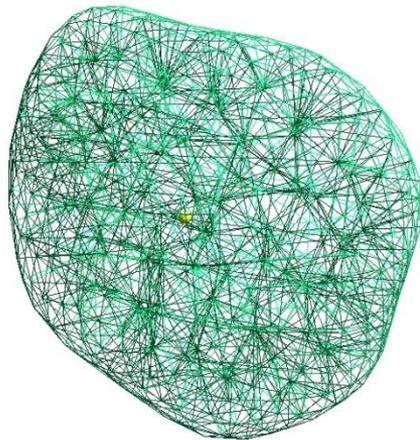
```
f 1 67 2  
f 1 66 67  
f 66 132 67  
f 66 131 132  
f 131 197 132  
f 131 196 197  
f 196 262 197
```



<sup>1</sup> <https://3d-asteroids.space/asteroids/>

# Внутренняя сетка

С помощью ПО GMSH строится внутренняя сетка астероида



Данные внутренней сетки представляются в виде набора координат точек и номеров вершин тетраэдров



# Координаты центра масс и масса

Вычисляем координаты центра масс и массы для каждого тетраэдра

$$\mathbf{r}_{tetr} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \\ \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \\ \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} \end{pmatrix}$$

$$M_{tetr} = mass \frac{V_{tetr}}{\sum_{all\_tetr} V_{tetr}}, \text{ где } V_{tetr} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}$$

# Коэффициенты $C_{l,m}$ , $S_{l,m}$

$$C_{l,m} = \sum_{all\_tetr} r_{tetr}^l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{tetr} \right) \right] \cos(m\varphi_{tetr}) M_{tetr}$$

$$S_{l,m} = \sum_{all\_tetr} r_{tetr}^l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{tetr} \right) \right] \sin(m\varphi_{tetr}) M_{tetr}$$

$$\theta_{tetr} = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} - \text{зенитный угол для цт тетраэдра}$$

$$\varphi_{tetr} = \arctg \frac{y}{x} - \text{азимутальный угол для цт тетраэдра}$$

# Верификация модели

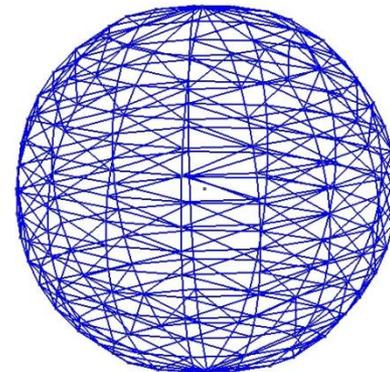
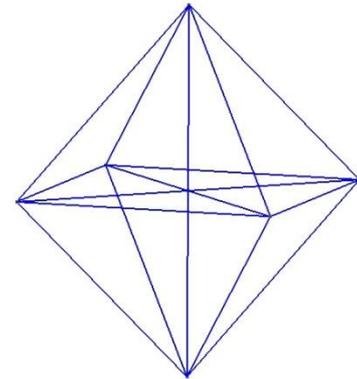
Рассматривается сфера:

$$R = 20\text{м}$$

$$m = 10\text{кг}$$

В точке  $T = [21, 23, 25]$  м

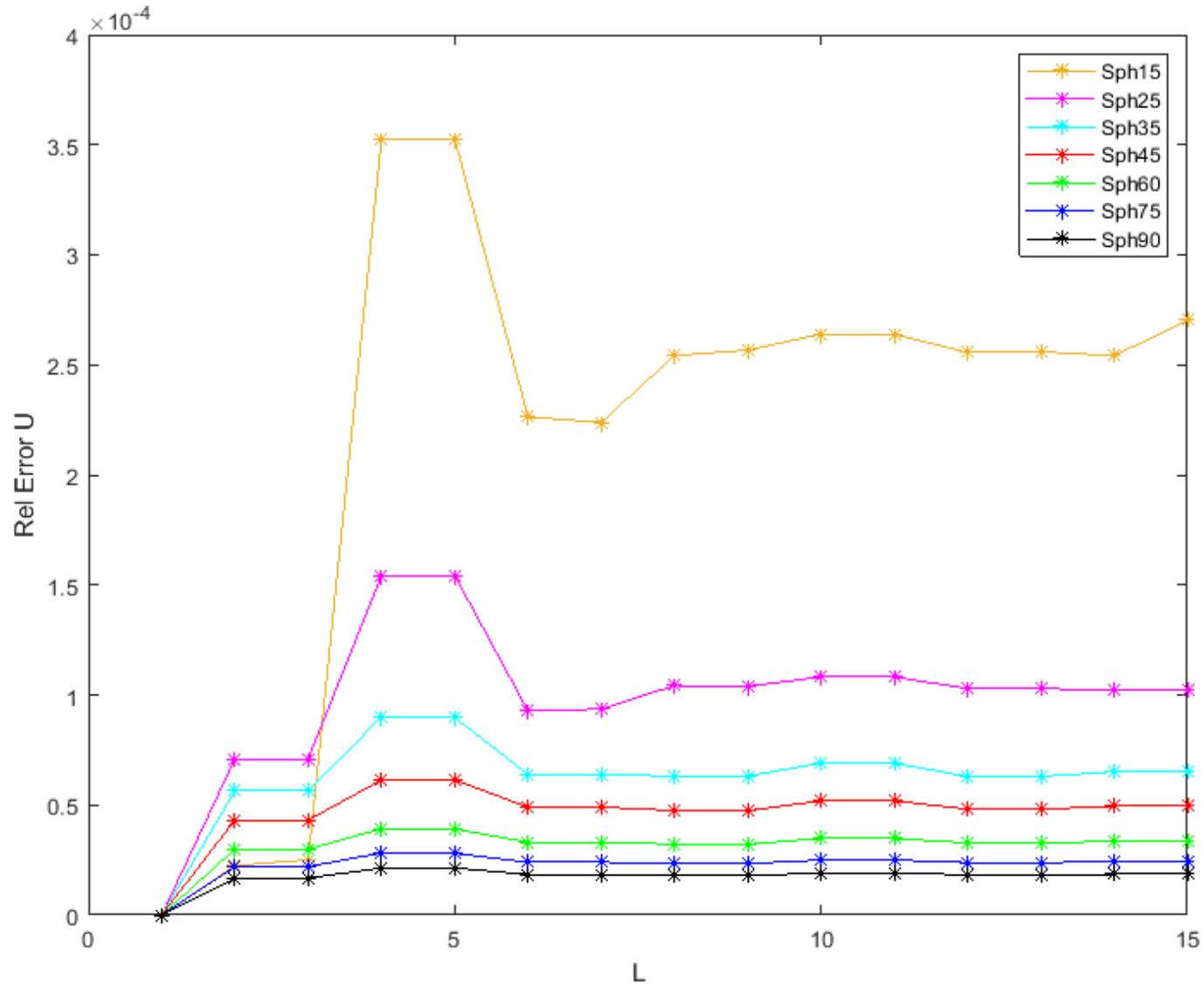
$$U = G \frac{m}{|T|} = 1.671188\text{e-}11 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$$



# Сфера

	<b>Sphere 4</b>	<b>Sphere 15</b>	<b>Sphere 25</b>	<b>Sphere 35</b>	<b>Sphere 45</b>	<b>Sphere 60</b>	<b>Sphere 75</b>	<b>Sphere 90</b>
<b>Число тетр L</b>	<b>8 тетраэдров</b>	<b>21'679 тетраэдров</b>	<b>103'039 тетраэдров</b>	<b>276'835 тетраэдров</b>	<b>609'545 тетраэдров</b>	<b>1'456'329 тетраэдров</b>	<b>2'848'267 тетраэдров</b>	<b>4'865'154 тетраэдров</b>
1	0	1,4524E-15	3,6902E-14	1,0965E-13	2,7401E-14	2,234E-13	9,0773E-14	5,5025E-13
2	0	2,5429E-05	7,1016E-05	5,6401E-05	4,3185E-05	2,9982E-05	2,1965E-05	1,6799E-05
3	0	2,5846E-05	7,1016E-05	5,6401E-05	4,3185E-05	2,9982E-05	2,1965E-05	1,6799E-05
4	0,001532	0,00035275	0,00015423	9,0061E-05	6,1354E-05	3,9203E-05	2,826E-05	2,1377E-05
5	0,001532	0,00035278	0,00015424	8,976E-05	6,1453E-05	3,9112E-05	2,8096E-05	2,1394E-05
6	0,001587	0,00022626	9,286E-05	6,3947E-05	4,8992E-05	3,316E-05	2,3988E-05	1,8397E-05
7	0,001587	0,00022387	9,3584E-05	6,404E-05	4,9062E-05	3,3167E-05	2,4009E-05	1,8395E-05
8	0,001586	0,00025421	0,00010426	6,2956E-05	4,7455E-05	3,2182E-05	2,3338E-05	1,7914E-05
9	0,001586	0,00025674	0,00010392	6,3127E-05	4,7459E-05	3,2177E-05	2,3337E-05	1,7914E-05
10	0,001585	0,00026395	0,00010819	6,9057E-05	5,19E-05	3,4798E-05	2,503E-05	1,9051E-05
11	0,001585	0,00026382	0,0001082	6,8966E-05	5,193E-05	3,4777E-05	2,5029E-05	1,9052E-05
12	0,001585	0,00025566	0,00010292	6,2962E-05	4,8117E-05	3,279E-05	2,3822E-05	1,8275E-05
13	0,001585	0,00025602	0,00010292	6,3004E-05	4,8083E-05	3,2781E-05	2,3817E-05	1,8275E-05
14	0,001585	0,00025411	0,00010208	6,5102E-05	4,9483E-05	3,3509E-05	2,4232E-05	1,8541E-05
15	0,001585	0,00027034	0,00010201	6,5047E-05	4,948E-05	3,3511E-05	2,4229E-05	1,8535E-05

# Сфера



# Верификация модели

Рассматривается эллипсоид вращения IERS96 с параметрами :

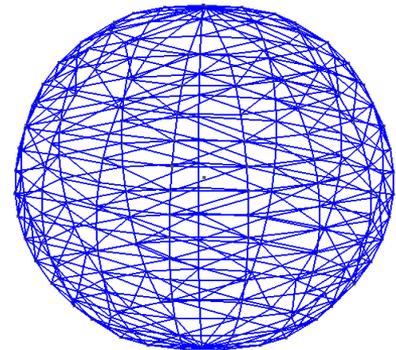
$$a = 6378.13649 \text{ км}$$

$$1/f = 298.25645$$

$$G \times M = 3.986004418 \times 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$$

$$J_2 = 1,0826359 \times 10^{-3}$$

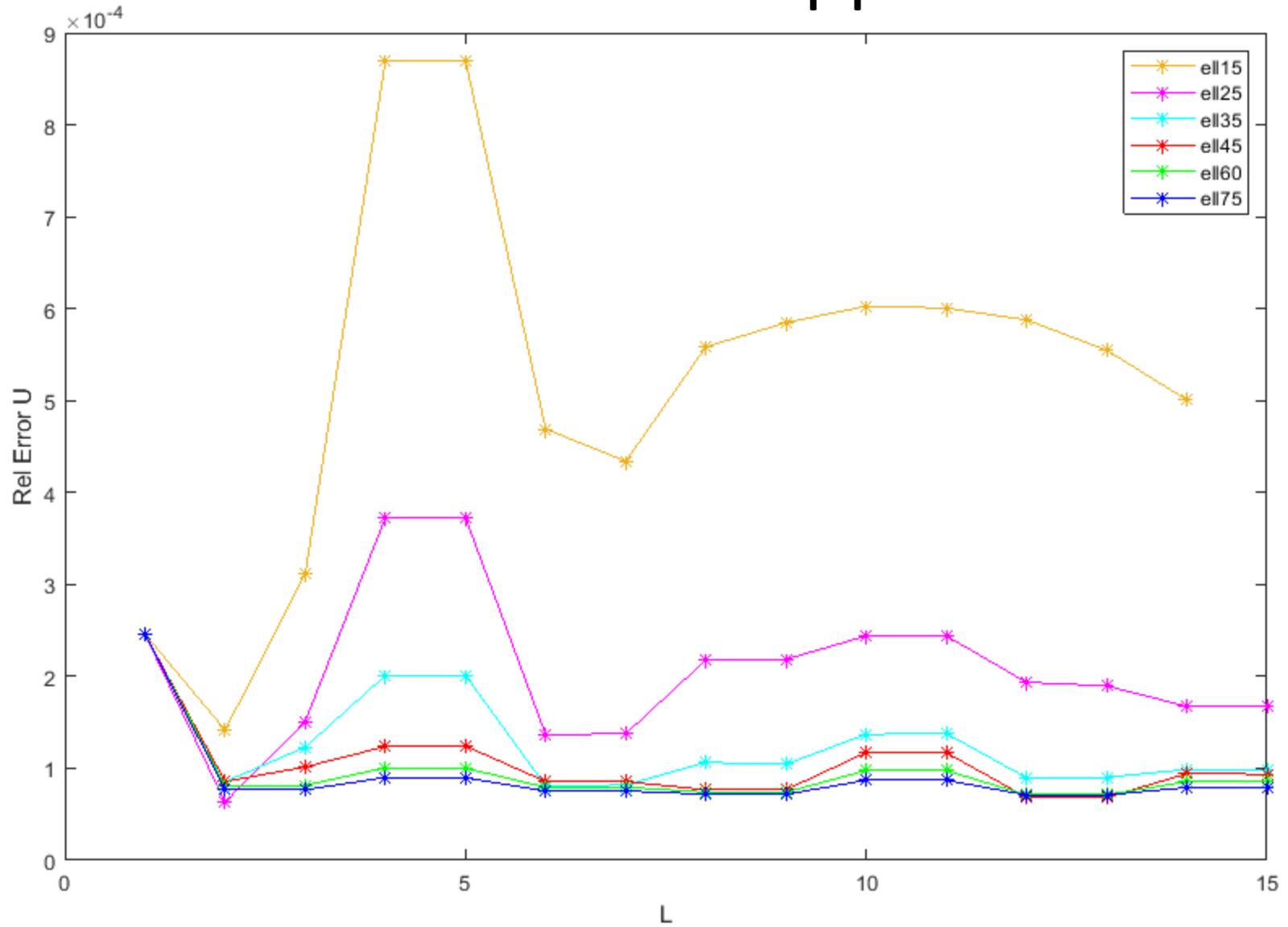
$$U = G \frac{M}{r} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 J_2 P_2(\cos \theta) \right]$$



# Эллипсоид

	<b>Ellipse 15</b>	<b>Ellipse 25</b>	<b>Ellipse 35</b>	<b>Ellipse 45</b>	<b>Ellipse 60</b>	<b>Ellipse 75</b>
<b>Число тетр L</b>	<b>20'616</b> <b>тетраэдров</b>	<b>97'894</b> <b>тетраэдров</b>	<b>270'736</b> <b>тетраэдров</b>	<b>580'342</b> <b>тетраэдров</b>	<b>1'381'234</b> <b>тетраэдров</b>	<b>2'705'257</b> <b>тетраэдров</b>
1	0,00024584	0,00024584	0,00024584	0,00024584	0,00024584	0,00024584
2	0,00014168	6,3129E-05	8,5406E-05	8,5687E-05	8,097E-05	7,6694E-05
3	0,00031161	0,00015112	0,00012296	0,00010146	8,1575E-05	7,6694E-05
4	0,00086962	0,0003726	0,00020109	0,00012376	0,00010066	9,0092E-05
5	0,00086998	0,00037267	0,00020114	0,00012427	0,00010023	8,9705E-05
6	0,00046903	0,00013637	8,0761E-05	8,5696E-05	7,9449E-05	7,5383E-05
7	0,00043403	0,00013761	8,1898E-05	8,5581E-05	7,9512E-05	7,5469E-05
8	0,00055331	0,00021778	0,00010636	7,6674E-05	7,4097E-05	7,1794E-05
9	0,00058474	0,00021849	0,00010458	7,6693E-05	7,4066E-05	7,1793E-05
10	0,00060271	0,00024405	0,00013705	0,00011722	9,7705E-05	8,7059E-05
11	0,00060061	0,00024411	0,00013794	0,00011707	9,7454E-05	8,7053E-05
12	0,00058685	0,00019356	8,9692E-05	6,841E-05	7,1327E-05	7,1023E-05
13	0,00055308	0,00018967	9,0103E-05	6,8231E-05	7,1461E-05	7,1018E-05
14	0,00050071	0,00016742	9,8803E-05	9,4103E-05	8,5451E-05	7,9172E-05
15	0,00113228	0,00016682	9,7583E-05	9,3716E-05	8,5571E-05	7,9064E-05

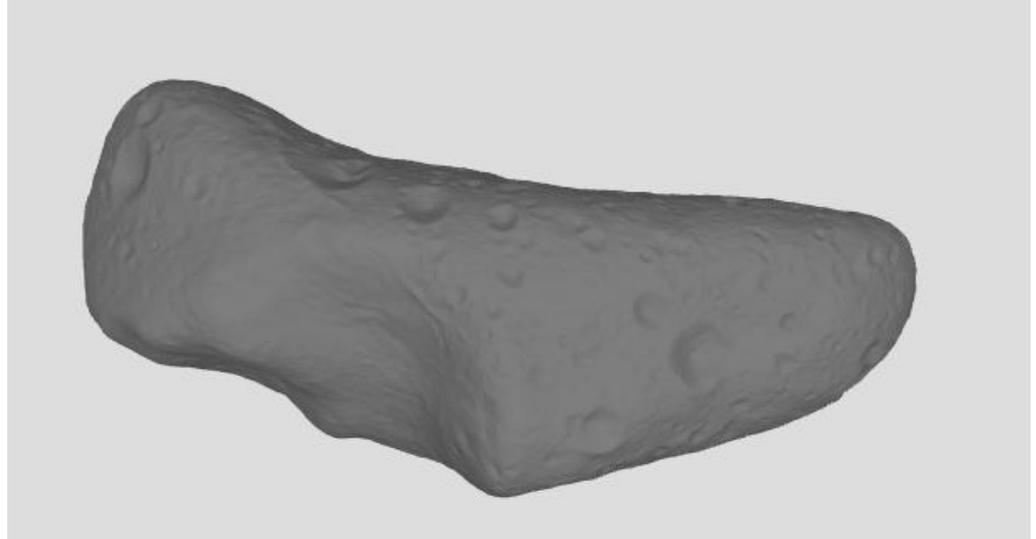
# Эллипсоид



# Эрос

Астероид (433) Эрос

- Масса  $6,69 \cdot 10^{19}$  кг
- Размеры  $34,4 \times 11,2 \times 11,2$  км



# Эрос

Известные гармоники до 4 порядка

Посчитанные гармоники до 4 порядка

C Im	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4
l=0	1				
l=1	0	0			
l=2	-0,11731	-2,11E-06	0,053189		
l=3	-0,00374	0,004384	0,000607	-0,00145	
l=4	0,038794	-9,52E-05	-0,00391	-1,79E-05	0,000369

C Im	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4
l=0	1				
l=1	7,25E-05	-1,8E-05			
l=2	-0,11809	7,12E-05	0,053548		
l=3	-0,00379	0,004308	0,000609	-0,00145	
l=4	0,039121	-0,00014	-0,00393	-1,6E-05	0,000371

S Im	m=1	m=2	m=3	m=4
l=1	0			
l=2	-1,81E-07	-0,01814		
l=3	0,003638	-0,00024	-0,00168	
l=4	0,00013	0,001035	-7,12E-06	-0,00019

S Im	m=1	m=2	m=3	m=4
l=1	-0,01309			
l=2	9,41E-05	-0,01246		
l=3	0,002704	-0,00017	-0,00122	
l=4	4,3E-05	0,000606	-4,5E-06	-0,00012

Gravity Field Characterization around Small Bodies  
by Yu Takahashi

# Возмущающее ускорение

$$\delta f_r = -\frac{G}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{P_l \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} \delta C_{l,0} - \frac{G}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l (l+1) \frac{P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} (\delta C_{l,m} \cos(m\varphi) + \delta S_{l,m} \sin(m\varphi)),$$

$$\delta f_\theta = -\frac{G}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_{l,1} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} \delta C_{l,0} +$$

$$+\frac{G}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{1}{r^l} \left( -P_{l,m+1} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] + m \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] \right) \times (\delta C_{l,m} \cos(m\varphi) + \delta S_{l,m} \sin(m\varphi)),$$

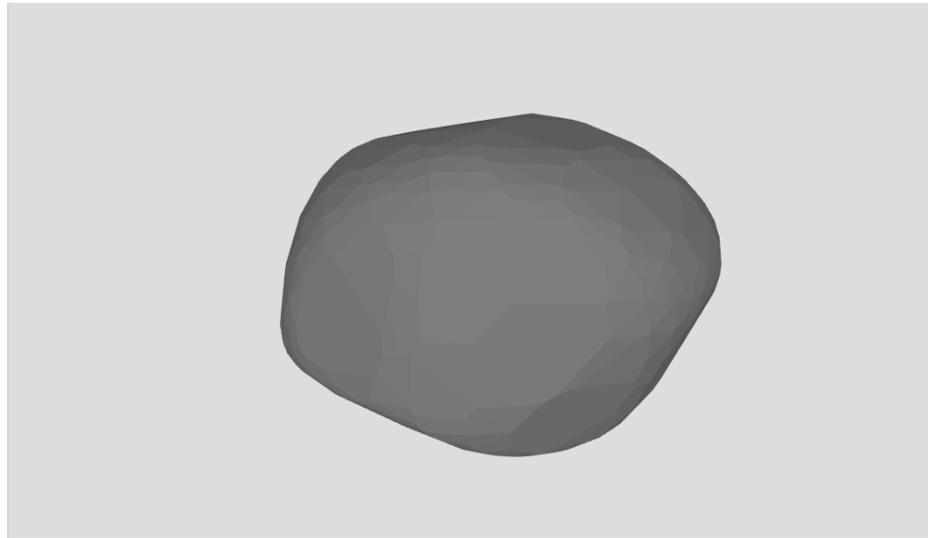
$$\delta f_\varphi = \frac{G}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} (-\delta C_{l,m} \sin(m\varphi) + \delta S_{l,m} \cos(m\varphi)).$$

Возмущающее ускорение:  $\delta \mathbf{f} = (1.6497e-08; 1.6279-07; 35284e-07)_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi}$

# Пример

Астероид (532) Геркулина

- Масса  $2,29 \cdot 10^{19}$  кг
- Размеры  $260 \times 220 \times 215$  км



# Геркулина

<b>C_lm</b>	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
l=0	2,29E+19					
l=1	-5,297E+12	2,2155E+12				
l=2	-2,283E+22	1,3008E+20	4,3776E+21			
l=3	-2,635E+23	1,2472E+23	-1,551E+22	-1,113E+22		
l=4	5,6903E+25	1,9397E+25	-4,487E+24	-3,015E+23	-4,56E+22	
l=5	1,886E+27	-2,164E+26	-4,752E+25	9,4845E+24	4,4651E+23	-5,137E+23

<b>S_lm</b>	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
l=1	2,2444E+19				
l=2	1,7187E+20	-3,758E+19			
l=3	-4,406E+22	1,409E+22	1,8614E+22		
l=4	-4,935E+23	4,5242E+23	6,7105E+22	-1,204E+23	
l=5	1,4528E+26	-9,559E+24	-1,476E+25	8,5945E+23	1,6169E+24

# Геркулина

Зависимость точности  
гравитационного потенциала от  
мелкости разбиения внутренней  
сетки

L	$\Delta U = U_{refined} - U$
2	-3,24531E-16
3	-3,24531E-16
4	-2,36013E-16
5	7,76451E-17
6	1,41284E-16
7	1,06115E-16
8	9,19506E-17
9	8,42728E-17
10	1,97529E-16

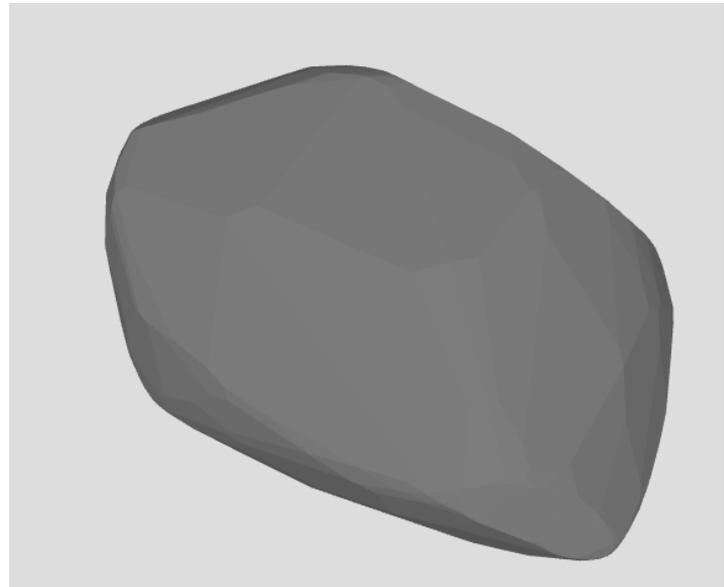
Изменение точности расчета  
потенциала последовательных  
порядков разложения

U(L=2)-U(L=1)	-1,64081E-13
U(L=3)-U(L=2)	1,07706E-28
U(L=4)-U(L=3)	6,33021E-15
U(L=5)-U(L=4)	3,97027E-15
U(L=6)-U(L=5)	2,14813E-15
U(L=7)-U(L=6)	-1,16211E-17
U(L=8)-U(L=7)	-1,12726E-16
U(L=9)-U(L=8)	2,34822E-17
U(L=10)-U(L=9)	2,66946E-16

# Пример

Астероид (321) Флорентина

- Масса  $2,11 \cdot 10^{16}$  кг
- Средний диаметр 27,23 км



# Флорентина

<b>C_Im</b>	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
l=0	2,11E+16					
l=1	-1,705E+09	-366125129				
l=2	-1,952E+15	7,7706E+12	-2,124E+14			
l=3	-1,398E+13	-3,863E+13	1,1711E+13	-3,757E+12		
l=4	4,2789E+14	3,3839E+12	1,1378E+13	-4,406E+11	-3,03E+11	
l=5	1,0692E+13	1,0296E+13	-2,245E+12	2,522E+11	-1,208E+11	-3,542E+10

<b>S_Im</b>	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
l=1	-6,606E+13				
l=2	1,3821E+12	-2,011E+14			
l=3	5,8657E+12	-5,875E+12	-2,269E+11		
l=4	-1,073E+12	7,4251E+12	1,8394E+11	-9,03E+11	
l=5	-9,889E+11	7,1971E+11	3,6065E+10	-3,514E+10	8,61094E+9

# Флорентина

Зависимость точности  
гравитационного потенциала от  
мелкости разбиения внутренней  
сетки

L	$\Delta U = U_{refined} - U$
2	7,15751E-17
3	7,15751E-17
4	5,42436E-17
5	-9,26997E-17
6	-9,91868E-17
7	-1,09366E-16
8	-1,07883E-16
9	-1,08859E-16
10	-1,11509E-16

Изменение точности расчета  
потенциала последовательных  
порядков разложения

U(L=2)-U(L=1)	-2,11127E-14
U(L=3)-U(L=2)	3,36581E-29
U(L=4)-U(L=3)	1,09414E-15
U(L=5)-U(L=4)	7,99649E-16
U(L=6)-U(L=5)	5,10046E-16
U(L=7)-U(L=6)	-9,94072E-17
U(L=8)-U(L=7)	-6,75408E-17
U(L=9)-U(L=8)	-4,04864E-18
U(L=10)-U(L=9)	-9,99456E-17

# Заключение

- Разработана и реализована методика нахождения коэффициентов разложения гравитационного потенциала астероида в модели сферических гармоник
- Точность коэффициентов зависит от мелкости разбиения внутренней сетки астероида
- Точность гравитационного потенциала зависит от точности коэффициентов и порядка разложения

# Продолжение работы

- Построить модель расчета гравитационного потенциала астероида содержащего полости
- Научится самостоятельно строить сетку, контролируя процесс

**Спасибо за внимание!**