

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

**Адаптация траекторий перелета в окрестность точек либрации
к модели бикруговой ограниченной задачи четырех тел**

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выполнила:
студентка 172 группы _____ Загидуллина Ольга Владимировна

Научный руководитель:
аспирант _____ Ширококов Максим Геннадьевич

Научный консультант:
аспирант _____ Трофимов Сергей Павлович

Москва 2015

Оглавление

Оглавление	2
1 Введение	3
2 Круговая ограниченная задача трех тел	6
2.1 Уравнения движения.....	6
2.2 Точки либрации и динамика вокруг них	7
3 Бикруговая ограниченная задача четырех тел.....	11
4 Численные методы	13
4.1 Метод продолжения по параметру	13
4.2 Метод параллельной пристрелки.....	15
5 Модельная задача перелета на орбиту Ляпунова.....	17
5.1 Постановка задачи.....	17
5.2 Решение поставленной задачи и результаты	18
6 Заключение.....	22
Список используемой литературы	23

1 Введение

За последние два десятилетия коллинеарные точки либрации приобрели большую практическую значимость. Действительно, ассоциированные с ними периодические орбиты позволяют решать новые задачи наблюдения за Солнцем и Вселенной. На данный момент имеются множество успешно реализованных миссий, представленных в Табл. 1. Несмотря на то, что большинство планов касается вывода космических аппаратов (КА) на периодические орбиты вокруг точек L_1/L_2 системы Солнце–Земля, в последнее время намечается рост интереса к точкам либрации системы Земля–Луна. В первую очередь это связано с завершением миссии ARTEMIS – первого проекта с выходом на периодические орбиты вокруг коллинеарных точек либрации в системе Земля–Луна.

Среди отечественных миссий упомянем космический телескоп “Спектр-РГ”, совместный проект России и Германии. Дата старта запланирована на середину 2017 г. В рамках этой миссии планируется прямой перелёт на квазипериодическую орбиту малой амплитуды в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце–Земля. Научные задачи проекта – сканирование пространства в рентгеновском и гамма-диапазонах, исследование возможности навигации по рентгеновским лучам. Вторая миссия касается вывода космического телескопа “Миллиметрон”. Дата старта запланирована на 2019–2023 гг. Планируется прямой перелёт на квази-гало орбиту с большим выходом из плоскости эклиптики в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце–Земля. Среди научных задач этой миссии – сканирование пространства в миллиметровом, субмиллиметровом и инфракрасном диапазонах. Двенадцатиметровое зеркало телескопа будет охлаждаться до 4К для обеспечения уникальной чувствительности.

Название	Дата старта	Точка либрации
ISEE-3	12.08.1978	Солнце–Земля L_1, L_2
Wind	01.11.1994	Солнце–Земля L_1
SOHO	02.12.1995	Солнце–Земля L_1
ACE	25.08.1997	Солнце–Земля L_1
WMAP	30.06.2001	Солнце–Земля L_2
Genesis	08.08.2001	Солнце–Земля L_1
ARTEMIS	17.02.2007	Земля–Луна L_1, L_2
Herschel	14.05.2009	Солнце–Земля L_2
Planck	14.05.2009	Солнце–Земля L_2
Chang'e 2	01.10.2010	Солнце–Земля L_2
Gaia	19.12.2013	Солнце–Земля L_2
DSCOVR	11.02.2015	Солнце–Земля L_1

Табл. 1 Успешно реализованные миссии к точкам либрации

Предварительный анализ миссий в системе Земля–Луна невозможен без учета возмущающих факторов, главными из которых являются давление солнечного излучения, притяжение Солнца, а также эллиптичность орбиты Луны. В связи с этим возникает проблема адаптации траектории к более подробной модели. Отметим, что возмущения можно учитывать в постановке оптимизационной задачи с самого начала. На данный момент существуют несколько подходов к решению такой оптимизационной задачи. Например, в работе [1] описываются методы роя частиц, дифференциальной и кооперативной эволюции. Метод роя также рассмотрен в [2]. Возможна также генерация т.н. шумных (noisy) траекторий для исследования пространства вокруг траектории начального приближения [3].

Другим способом учета возмущений является решение краевой задачи, когда в качестве первого приближения выбирается траектория, полученная в более простой модели, а уравнения движения краевой задачи берутся для полной модели. Возникающие во время работы метода краевые задачи можно решать при помощи метода параллельной пристрелки. Такой подход используется в работе [4]. Также возможно использование метода параллельной пристрелки в сочетании с преобразованиями Пуанкаре [5] или методом коллокации [6].

Однако сходимость возникающей краевой задачи может отсутствовать. Эта проблема может быть решена с помощью метода продолжения по параметру, согласно которому в рассмотрение вводится ряд промежуточных моделей. Сходимость краевых задач в данном случае будет гарантирована близостью начальных приближений к решению. Такой подход к уточнению траектории с помощью метода параллельной пристрелки и Фурье-анализа используется в работе [7].

В настоящей работе рассматривается перелет с околоземной орбиты на периодическую орбиту вокруг коллинеарной точки либрации L_1 системы Земля–Луна. При этом траектория, полученная в рамках ограниченной круговой задачи (простая модель), считается заданной и представляет собой решение оптимизационной задачи для двухимпульсного перелета. Предложенная траектория адаптируется к бикруговой задаче четырех тел (Земля–Луна–Солнце–КА), дополненной давлением солнечного излучения. В качестве метода адаптации был выбран метод продолжения по параметру в сочетании с методом параллельной пристрелки. Такой подход использовался, в частности, для предварительного анализа миссии ARTEMIS [8].

2 Круговая ограниченная задача трех тел

При анализе движения естественных и искусственных небесных тел приходится строить математическую модель, в той или иной степени адекватную истинной природе движения. В этой и последующей главе будут описаны модели, которые будут использоваться в настоящей работе.

2.1 Уравнения движения

В качестве первой модели рассмотрим плоскую круговую ограниченную задачу трех тел, а в качестве системы выберем систему Земля–Луна. В этой работе такую модель будем называться простой. По определению будем считать, что движение всех трех тел происходит в одной плоскости – орбитальной плоскости Луны вокруг Земли, движение КА не влияет на движение Земли и Луны, а движение Луны вокруг Земли круговое.

Записывать уравнения движения задачи трех тел удобно во вращающейся системе координат (см. Рис.1).

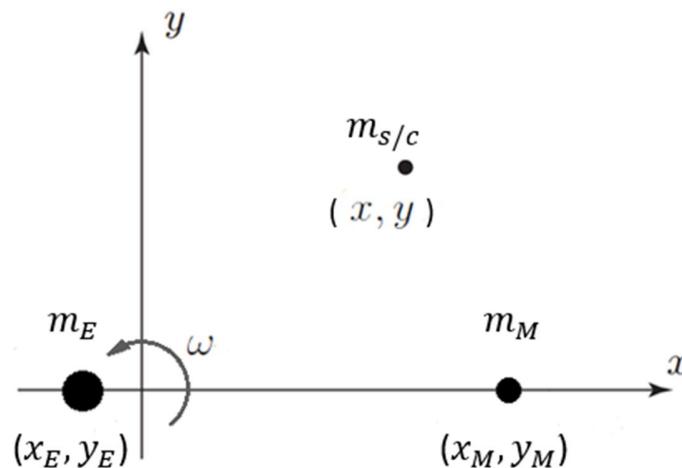


Рис.1 Система координат

Начало координат поместим в барицентр системы Земля–Луна. Ось x направлена по направлению к центру масс Луны. Ось y перпендикулярна оси x и направлена таким образом, чтобы кратчайший поворот от оси x к оси y по направлению совпадал с угловой скоростью ω орбитального движения Луны вокруг Земли.

Кроме того, введем безразмерную систему единиц. За единицу длины примем расстояние от центра масс Земли до центра масс Луны, за единицу массы примем суммарную массу Земли m_E и Луны m_M , а за единицу времени примем $T_{EM}/2\pi$, где T_{EM} – орбитальный период движения Луны вокруг Земли.

Введем массовый параметр $\mu = m_M / (m_E + m_M) \approx 0.0122$. Тогда уравнения движения запишутся в виде[9]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y \end{cases}, \quad (1)$$

где функция $\Omega = \Omega(x, y)$ называется эффективным потенциалом и вычисляется по формуле:

$$\Omega(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

и расстояния от КА до Земли и Луны, соответственно:

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}.$$

2.2 Точки либрации и динамика вокруг них

В рамках круговой ограниченной задачи трех тел во вращающейся системе координат существует пять точек равновесия, которые также называются точками либрации, см. Рис. 2.

Точки либрации можно находить из уравнений $\Omega_x = \Omega_y = 0$. Три из них лежат на прямой, соединяющей центры масс Земли и Луны. Эти точки называются коллинеарными точками либрации. Две другие располагаются на орбите Луны и называются треугольными точками либрации. Коллинеарные точки либрации L_i , $i=1,2,3$, расположены в точках с координатами $x_{L_1} = 0.8369147$, $x_{L_2} = 1.1556825$, $x_{L_3} = -1.0050627$.

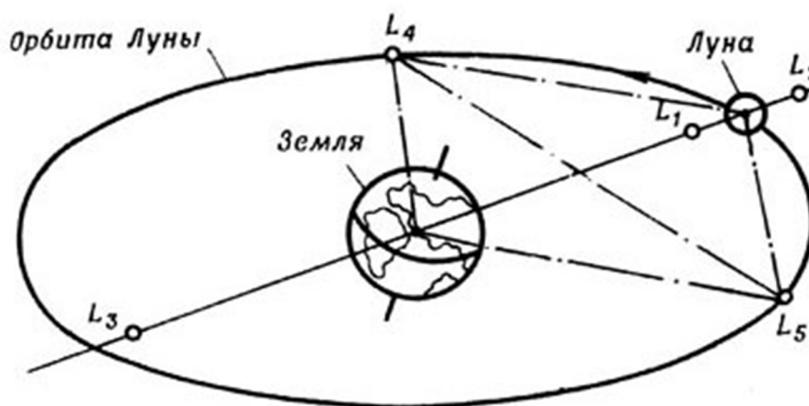


Рис.2 Расположение точек либраций в системе Земля–Луна

Про коллинеарные точки либрации известно [10], что они не устойчивы по Ляпунову, вокруг них существует однопараметрическое семейство периодических плоских орбит (см. Рис.3), которые также называются плоскими орбитами Ляпунова. С периодическими орбитами связаны устойчивые и неустойчивые многообразия – семейства асимптотических траекторий. Проекция многообразий на координатную плоскость $x - y$ показаны на Рис. 4. Если поместить КА на траекторию устойчивого многообразия, то он будет бесконечно приближаться к периодической орбите, если время $t \rightarrow +\infty$. Если же поместить КА на траекторию неустойчивого многообразия, то КА будет удаляться от периодической орбиты при $t \rightarrow +\infty$, и бесконечно приближаться к ней при условии $t \rightarrow -\infty$.

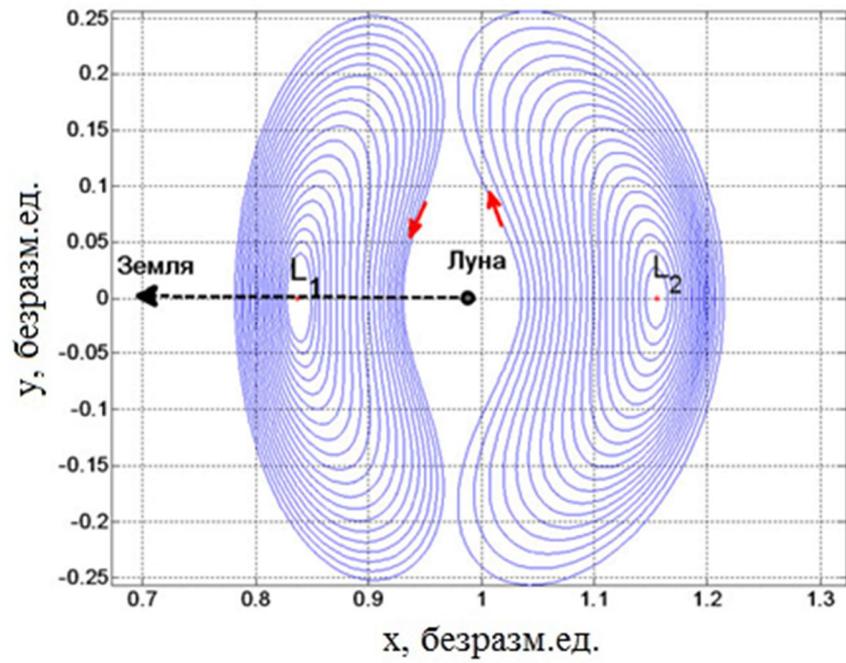


Рис.3 Периодические орбиты вокруг точек либрации

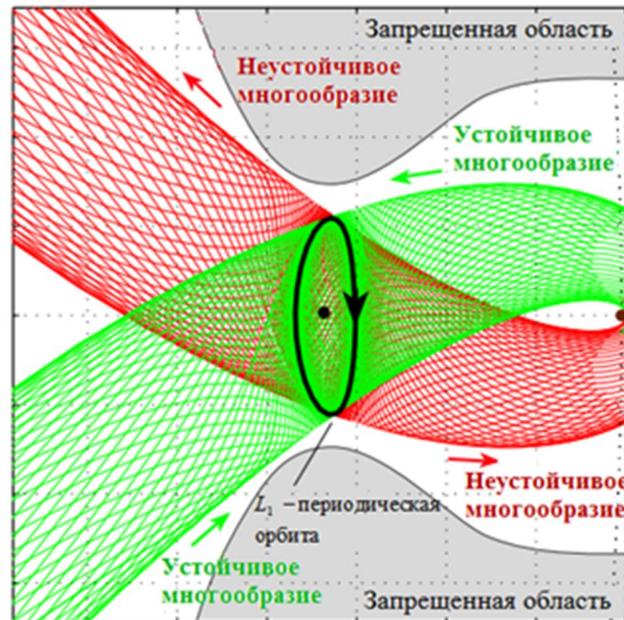


Рис. 4. Асимптотические траектории, связанные с орбитами Ляпунова

Легко показать наличие периодических траекторий и связанных с ними многообразий среди решений линеаризованной около точек либрации системы уравнений. Представим уравнения (1) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – некоторая функция фазового состояния $\mathbf{x} = (x, y, \dot{x}, \dot{y})^T$. Пусть \mathbf{x}_0 – фазовый вектор коллинеарной точки либрации, тогда $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$. Введем приращение $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, тогда

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \cdot \delta\mathbf{x} + \dots$$

откуда линеаризованная система уравнений:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{x}, \quad (2)$$

где матрица $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1+2c & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-c & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c = \mu|x_L - 1 + \mu|^{-3} + (1 - \mu)|x_L + \mu|^{-3}$, x_L – координата коллинеарной точки L .

Решение системы уравнений (2) записывается в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{\lambda t} + De^{-\lambda t} + A\cos(\omega_p t + \varphi) + x_L, \\ y(t) &= k_1(Ce^{\lambda t} - De^{-\lambda t}) - k_2 A\sin(\omega_p t + \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь A, C, D, φ – константы интегрирования, которые определяются начальными условиями,

$$\lambda = \sqrt{(c - 2 + \sqrt{9c^2 - 8c})/2}, \quad \omega_p = \sqrt{(2 - c + \sqrt{9c^2 - 8c})/2},$$

$$k_1 = \frac{\lambda^2 - 2c + 1}{2\lambda}, \quad k_2 = \frac{\omega_p^2 + 2c + 1}{2\omega_p}.$$

Из решений (3) видно, что периодические траектории отвечают условиям $C = D = 0$. Если же $C = 0$, $D \neq 0$, то получаем асимптотическое решение, стремящееся к периодической орбите.

Отметим, наконец, что согласно центральной теореме Ляпунова [11] периодические решения существуют также и в нелинейном случае (1), а согласно более общей теореме Мозера [12], поведение решений нелинейной системы уравнений (1) вблизи точек либрации качественно не отличается от поведения решений линейной системы уравнений (3).

3 Бикруговая ограниченная задача четырех тел

Предварительный анализ миссий в системе Земля–Луна требует учета влияния других тел солнечной системы. В первую очередь это касается влияния Солнца, т.е. его гравитационное притяжение и давление солнечного излучения. Действительно, в окрестности точек либрации притяжение к Луне имеет порядок 10^{-3} , к Земле – 10^{-4} , к Солнцу – 10^{-6} , а ускорение, вызванное силами светового давления имеет порядок 10^{-7} . Влияние же других тел солнечной системы мало по сравнению с влиянием Солнца. В связи с этим возникает необходимость ввести более полную модель. В данной работе в качестве такой модели выбирается плоская бикруговая ограниченная задача четырех тел. При этом будем считать, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите, Луна движется вокруг Земли по круговой орбите, движением всех тел происходит в одной плоскости (плоскости орбитального движения Луны вокруг Земли), и что движение КА не влияет на движение Земли, Луны и Солнца.

В произвольной инерциальной системе координат, связанной с Солнцем, уравнения движения в рамках плоской бикруговой ограниченной задачи четырех тел записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}}_{s/c} &= -m_E G \frac{\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_E}{|\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_E|^3} - m_M G \frac{\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_M}{|\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_M|^3} - m_S G \frac{\mathbf{p}_{s/c}}{|\mathbf{p}_{s/c}|^3}, \\ \ddot{\mathbf{p}}_E &= -m_M G \frac{\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_M}{|\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_M|^3} - m_S G \frac{\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_S}{|\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_S|^3} \\ \ddot{\mathbf{p}}_M &= -m_E G \frac{\mathbf{p}_M - \mathbf{p}_E}{|\mathbf{p}_M - \mathbf{p}_E|^3} - m_S G \frac{\mathbf{p}_M - \mathbf{p}_S}{|\mathbf{p}_M - \mathbf{p}_S|^3}.\end{aligned}$$

где $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравитационная постоянная, m_E, m_M, m_S – массы Земли, Луны и Солнца, соответственно; $\mathbf{p}_{s/c}$ – радиус-вектор КА, \mathbf{p}_E – радиус-вектор Земли, \mathbf{p}_M – радиус-вектор Луны. Для последующих расчетов, удобно записать уравнения движения КА во вращающейся системе координат, введенной в предыдущем разделе. Для этого запишем радиус-вектор барицентра системы Земля–Луна

$$\mathbf{p}_C = \frac{m_E \mathbf{p}_E + m_M \mathbf{p}_M}{m_E + m_M},$$

и положение КА относительно барицентра: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_C$. Тогда уравнения движения во вращающейся системе координат запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2\dot{y} + x \\ y - 2\dot{x} \end{pmatrix}}_{\text{ускорение Кориолиса + переносное ускорение}} - \underbrace{(1-\mu) \frac{\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_E}{|\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_E|^3}}_{\text{Притяжение КА к Земле}} - \underbrace{\mu \frac{\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_M}{|\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_M|^3}}_{\text{Притяжение КА к Луне}} + \\ &+ \left[\underbrace{(\mu_2 - 1) \left(-\frac{\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_S}{|\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_S|^3} + (1-\mu) \frac{\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_S}{|\mathbf{p}_E - \mathbf{p}_S|^3} + \mu \frac{\mathbf{p}_M - \mathbf{p}_S}{|\mathbf{p}_M - \mathbf{p}_S|^3} \right)}_{\text{Притяжение Солнцем Земли, Луны и КА}} + \underbrace{\frac{P S}{m} \frac{\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_S}{|\mathbf{p}_{s/c} - \mathbf{p}_S|^3}}_{\text{Давление солнечного излучения}} \right]\end{aligned}$$

Здесь $\mu_2 = \frac{m_S + m_E + m_M}{m_E + m_M}$. Первая строчка отвечает за движение в простой модели. Во второй строчке показан учет влияния возмущающих факторов. Представленные в такой форме уравнения движения, оказываются удобными для использования их в методе продолжения по параметру. Действительно, их можно записать в форме $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$, где $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – правая часть уравнений движения, отвечающая простой модели, а $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ – возмущение, такое, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ отвечает полной модели.

Теперь, когда введены используемые в дальнейшем модели и записаны уравнения движения, перейдем к описанию используемых в данной работе численных методов.

4 Численные методы

Как уже говорилось выше, адаптация траекторий будет проводиться с помощью метода продолжения по параметру. Возникающие при этом краевые задачи будут решаться методом параллельной пристрелки. Оба этих численных метода будут описаны в данном разделе.

4.1 Метод продолжения по параметру

Пусть уравнения движения в простой модели записываются в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

а уравнения движения в полной модели можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}),$$

причем решение задачи $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ известно, обозначим его $\mathbf{x}_0(t)$. Пусть требуется получить решение задачи $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$. Тогда можно поставить краевую задачу

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), t \in [0, t_f], \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t_f)) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

с краевыми условиями $\mathbf{G}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t_f)) = 0$, t_f – время окончания перелета. Эта краевая задача может решаться численно, причем в качестве начального приближения может быть выбрано решение $\mathbf{x}_0(t)$. Однако, если возмущение $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ достаточно велико по сравнению с $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, то начальное приближение $\mathbf{x}_0(t)$ может оказаться далеко от решения задачи (4). Поэтому предлагается использовать метод продолжения по параметру. Для этого, вместо уравнений (4) рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), t \in [0, t_f], \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t_f)) = 0, \end{cases}$$

где β – параметр из промежутка $[0, 1]$. При $\beta = 0$ решение известно и равно $\mathbf{x}_0(t)$, а при $\beta = 1$ решение требуется найти. Разобьем промежуток $[0, 1]$ на N частей: $\beta_j = j/N$, при $j = 1, \dots, N$, и поставим N краевых задач:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta_j \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), t \in [0, t_f], \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t_f)) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

причем в качестве начального приближения $(j+1)$ -ой задачи будем выбирать решение j -краевой задачи, которое обозначим $\mathbf{x}_j(t)$. В силу того, что возмущение $(\beta_{j+1} - \beta_j) \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ для $(j+1)$ -ой задачи мало по сравнению с $\mathbf{f}(\mathbf{x})$,

то начальное приближение $\mathbf{x}_j(t)$ будет близко к решению $\mathbf{x}_{j+1}(t)$, при достаточно больших N . Таким образом, гарантируется сходимость используемой итерационной процедуры решения краевых задач.

4.2 Метод параллельной пристрелки

Теперь перейдем к описанию метода решения краевых задач вида (5). Без потери общности, будем считать, что поставлена краевая задача в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), t \in [0, t_f], \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t_f)) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

с краевыми условиями $\mathbf{G}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t_f)) = 0$. Краевую задачу (6) будем решать методом параллельной пристрелки. Разобьем интервал $[0, t_f]$ на n частей:

$$0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = t_f.$$

Будем обозначать \mathbf{x}_j^t решение в момент τ_{j+1} задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), t \in [\tau_j, \tau_{j+1}], \\ \mathbf{x}(\tau_j) = \mathbf{x}_j, \end{cases}$$

где \mathbf{x}_j – пока неизвестный фазовый вектор в момент τ_j , см. Рис. 5.

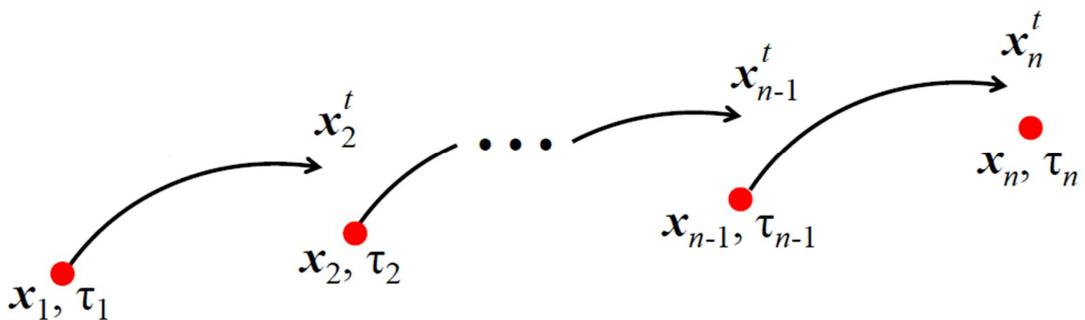


Рис.5 Одна итерация метода параллельной пристрелки

Сформируем вектор искомых переменных:

$$\mathbf{s} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \tau_2, \dots, \tau_n)^T.$$

Обратим внимание на то, что конечный момент времени $\tau_n = t_f$ будет варьироваться. Теперь сформируем вектор невязок:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{x}_1^t - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2^t - \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{n-2}^t - \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_1, \mathbf{r}_n - \mathbf{R}_n)^T,$$

где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_n$ – радиус-векторы КА в начальный и конечный моменты времени, соответственно (варьируются), а $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_n$ – заданные, фиксированные значения требуемых радиус-векторов КА в начальный и конечный моменты времени, соответственно. Таким образом, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 0$, где $5(n-1)$ неизвестных и $4(n-1)$ уравнений. Уравнение $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 0$ решается итерационно, при этом шаг $\Delta \mathbf{s}_j$ на j -ой итерации ищется из системы линейных уравнений:

$$\mathbf{J} \Delta \mathbf{s}_j = -\mathbf{H}(\mathbf{s}_j), \quad \mathbf{J} = \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{s}} \right)_{\mathbf{s}=\mathbf{s}_j}. \quad (7)$$

Но так как количество неизвестных превышает число уравнений, матрица частных производных \mathbf{J} прямоугольная. Поэтому число решений уравнения (7), вообще говоря, бесконечно много. Поэтому предлагается искать решение минимальной нормы. Можно показать, что оно имеет вид [8]:

$$\Delta \mathbf{s}_j = -\mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{s}_j).$$

Так как размерность матрицы \mathbf{J} равна $4(n-1) \times 5(n-1)$, то при больших n ее точный расчет становится ресурсозатратным. Поэтому ее элементы J_{ij} рассчитывались по формулам конечной разности второго порядка

$$J_{ij} = \frac{H_i(s_1, s_2, \dots, s_{j-1}, s_j + \Delta_j, s_{j+1}, \dots, s_{5(n-1)}) - H_i(s_1, s_2, \dots, s_{j-1}, s_j - \Delta_j, s_{j+1}, \dots, s_{5(n-1)})}{2\Delta_j}.$$

5 Модельная задача перелета на орбиту Ляпунова

Рассмотренные ранее методы продолжения по параметру и параллельной пристрелки используются в данном разделе для адаптации траектории перелета на плоскую орбиту Ляпунова вокруг точки либрации L_1 . При этом в качестве простой модели была выбрана плоская круговая ограниченная задача трех тел, а в качестве полной модели выбрана плоская бикруговая ограниченная задача четырех тел, дополненная силами светового давления.

5.1 Постановка задачи

Итак, дана круговая околоземная орбита высотой 200 км и плоская орбита Ляпунова вокруг L_1 с y -амплитудой 26000 км. Траектория перелета с околоземной орбиты на орбиту Ляпунова считается заданной и рассчитанной в рамках простой модели. Ставится задача адаптации предложенной траектории в рамках полной модели.

Траектория перелета, рассчитанная в рамках простой модели, показана на Рис.6. Траектория представляет собой двухимпульсный перелет: первый импульс совершается на околоземной орбите (синий цвет, слева), второй импульс прилагается в точке на многообразии орбиты Ляпунова (синий цвет, справа). Асимптотическая траектория многообразия изображена зеленым цветом, а перелет с околоземной орбиты на многообразие показан красным цветом.

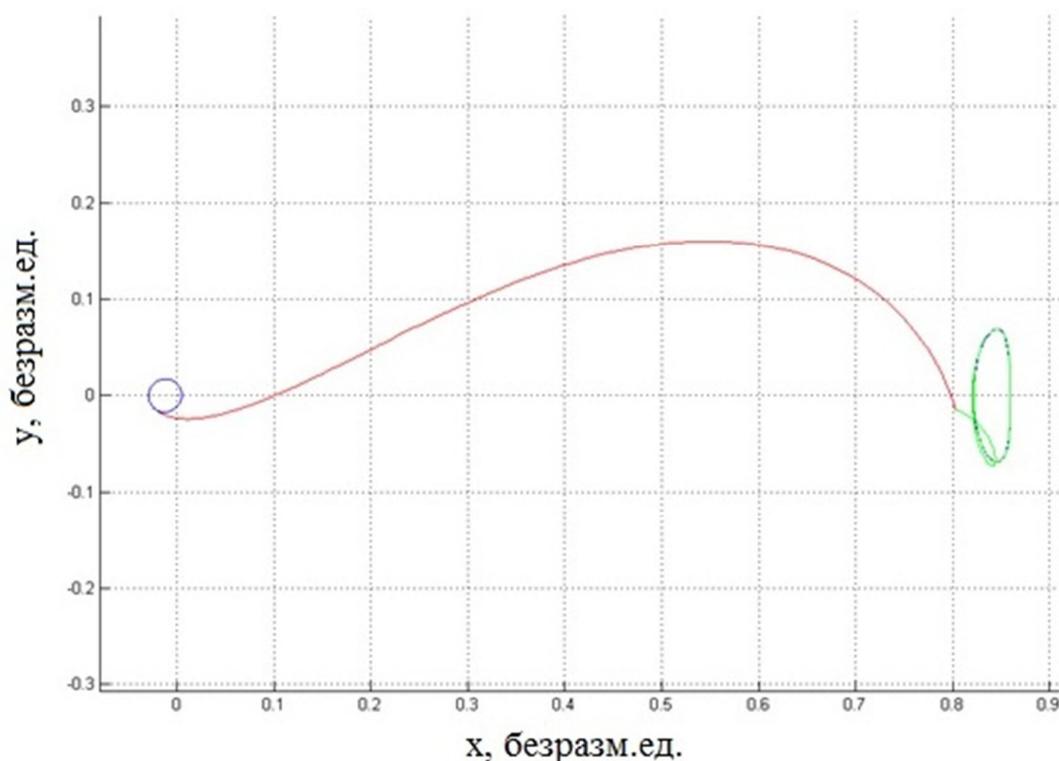


Рис.6 Траектория в простой модели

5.2 Решение поставленной задачи и результаты

Так как траектория представляет собой двухимпульсный перелет, то удобно разбить ее на две части: до второго импульса и после. Метод продолжения по параметру был применен отдельно для каждой из частей. Промежуток $[0,1]$ в методе продолжения разбивался на пять частей, $N = 5$. Траектория перелета на каждом из двух участков разбивался также на пять частей, $n = 5$. Все расчеты были проведены в среде MATLAB R2013a. Интегрирование уравнений движения производилось методом Дормана–Принса 5(4) с адаптивным шагом и требуемой относительной точностью 10^{-6} . Этот метод реализуется функцией с открытым кодом ode45.

Расчеты занимают 4 с процессорного времени, размер программы 10.6 Кб. От значений N и n время расчетов зависит линейно. Треть времени расчетов уходит на интегрирование дифференциальных уравнений движения. С целью ускорения расчетов был также реализован метод Дормана–Принса 8(7). Однако, как оказалось, использование метода Дормана–Принса 8(7) почти не отражается на скорости расчетов при относительной точности 10^{-6} . Но при повышении точности (например, 10^{-8}), число шагов этого метода заметно ниже, чем число шагов метода Дормана–Принса 5(4). Эти выводы подтверждают похожие наблюдения, рассмотренные и исследованные в классической работе [13].

Результаты адаптации траектории показан на Рис.7.

Максимальное изохронное отклонение от изначальной траектории рассчитывалось по формуле

$$\Delta R = \max_t \left(\sqrt{(x_{ref}(t) - x_0(t))^2 + (y_{ref}(t) - y_0(t))^2} \right),$$

где $x_0(t), y_0(t)$ – координаты точек траектории простой модели, а $x_{ref}(t), y_{ref}(t)$ – координаты точек траектории полной модели. Моменты максимального отклонения для обеих частей траектории перелета показаны на Рис.8. На первой части траектории $\Delta R_1 = 139.2637$ км. На второй части $\Delta R_2 = 455.1661$ км.

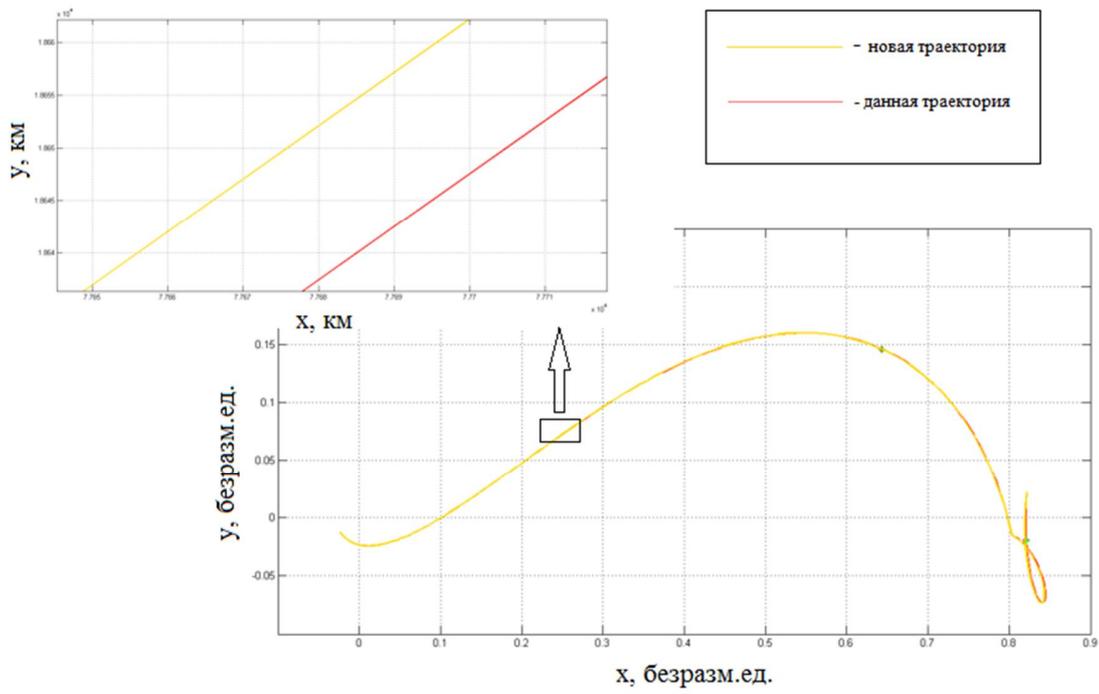


Рис.7 Данная и уточненная траектории

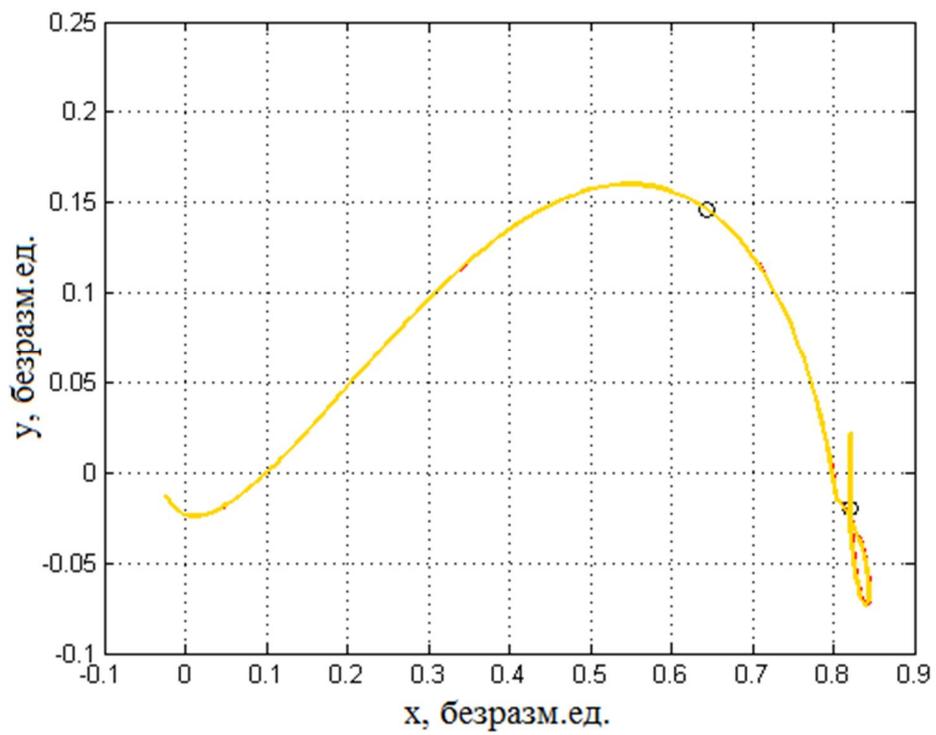


Рис. 8 Моменты наибольшего отклонения от начальной траектории

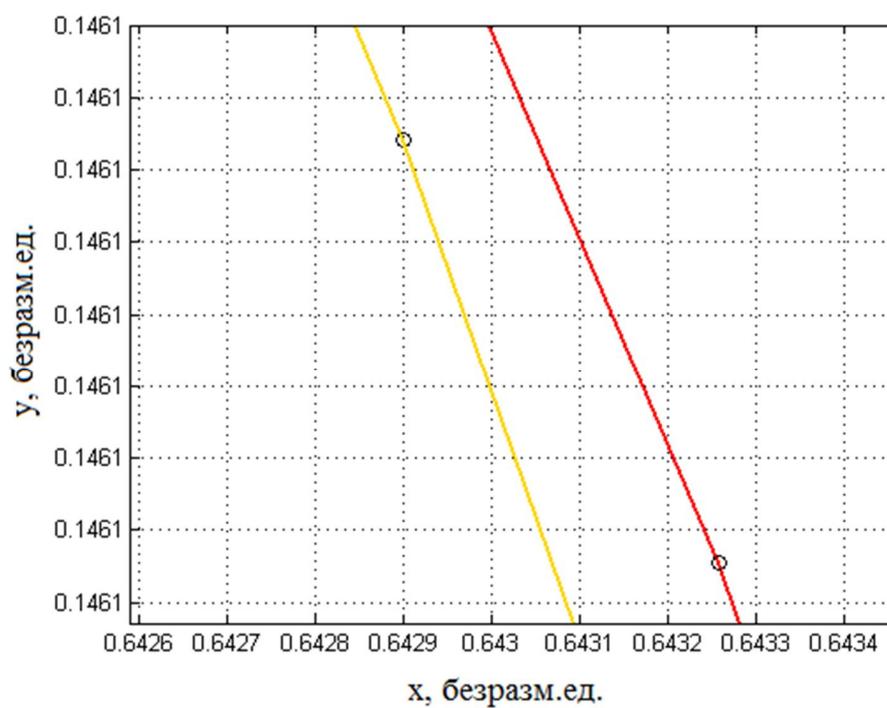


Рис. 9 Момент наибольшего отклонения от начальной траектории до второго импульса

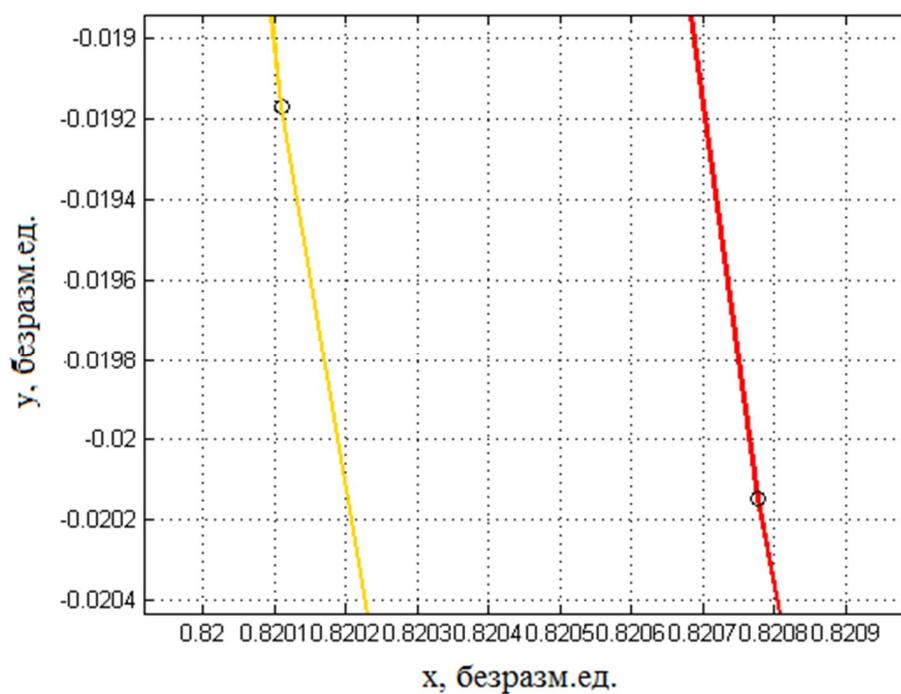


Рис. 9 Момент наибольшего отклонения от начальной траектории после второго импульса

6 Заключение

В данной работе описывается применение методов продолжения по параметру и параллельной пристрелки к задаче адаптации к полной модели траектории перелета на периодическую орбиту вокруг точки L_1 . Описываемые методы были успешно применены на модельной задаче двухимпульсного перелета. В будущем планируется реализовать метод продолжения в задаче адаптации к полной, эфемеридной модели движения тел Солнечной системы.

Список используемой литературы

1. Lei H., Xu B., Sun Y. *Earth–Moon low energy trajectory optimization in the real system* // *Advances in Space Research*. – 2013. – Т. 51. – №. 5. – С. 917-929.
2. Chen Y., Baoyin H. X., Li J. F. *Trajectory design for the Moon departure libration point mission in full ephemeris model* // *Science China Technological Sciences*. – 2011. – Т. 54. – №. 11. – С. 2924-2934.
3. Kalakrishnan M. et al. *STOMP: Stochastic trajectory optimization for motion planning* // *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*. – IEEE, 2011. – С. 4569-4574.
4. Betts J. T. *Survey of numerical methods for trajectory optimization* // *Journal of guidance, control, and dynamics*. – 1998. – Т. 21. – №. 2. – С. 193-207.
5. Gómez G., Mondelo J. M. *The dynamics around the collinear equilibrium points of the RTBP* // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2001. – Т. 157. – №. 4. – С. 283-321.
6. Von Stryk O., Bulirsch R. *Direct and indirect methods for trajectory optimization* // *Annals of operations research*. – 1992. – Т. 37. – №. 1. – С. 357-373.
7. Lian Y. et al. *A note on the dynamics around the Lagrange collinear points of the Earth–Moon system in a complete Solar System model* // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 2013. – Т. 115. – №. 2. – С. 185-211.
8. Pavlak T. A. *Mission Design Applications in the Earth-Moon System*: дис. – Purdue University West Lafayette, 2010.
9. Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г. *Основы механики космического полета: Учеб. пособие*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 448 с.

10. Koon W. S. et al. *Dynamical systems, the three-body problem and space mission design* – 2011. – T. 21. – C. 9.
11. Meyer K., Hall G., Offin D. *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*. – Springer Science & Business Media, 2008. – T. 90.
12. Moser J. *On the generalization of a theorem of A. Liapounoff* // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. – 1958. – T. 11. – №. 2. – C. 257-271.
13. Prince P. J., Dormand J. R. *High order embedded Runge-Kutta formulae* // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 1981. – T. 7. – №. 1. – C. 67-75