



Московский физико-технический институт
(государственный университет)



Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

О.В. Загидуллина, студентка 4 курса ФУПМ МФТИ

**Адаптация траекторий перелета в окрестность точек либрации
к модели бикруговой ограниченной задачи четырех тел**

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

Научный руководитель:
асп. МФТИ М.Г. Широбоков

Научный консультант:
асп. МФТИ С.П. Трофимов

Содержание

- Мотивация
- Математические модели
- Постановка задачи
- Численные методы
- Результаты

Миссии к точкам либраций

Название	Дата старта	Точка либрации
ISEE-3	12.08.1978	Солнце - Земля L_1, L_2
WIND	01.11.1994	Солнце - Земля L_1
SOHO	02.12.1995	Солнце - Земля L_1
ACE	25.08.1997	Солнце - Земля L_1
WMAP	30.06.2001	Солнце - Земля L_2
Genesis	08.08.2001	Солнце - Земля L_1
ARTEMIS	17.02.2007	Земля – Луна L_1, L_2
Herschel	14.05.2009	Солнце - Земля L_2
Planck	14.05.2009	Солнце - Земля L_2
Chang'e 2	01.10.2010	Солнце - Земля L_2
GAIA	19.12.2013	Солнце - Земля L_2
DSCOVR	11.02.2015	Солнце - Земля L_1

Российские миссии

Космический телескоп “Спектр-РГ”

Дата старта: запланирована на середину 2017 г.

Прямой перелёт на квазипериодическую орбиту малой амплитуды в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля

Научные задачи: сканирование пространства в рентгеновском и гамма диапазонах, исследование возможности навигации по рентгеновским лучам

Космический телескоп “Миллиметрон”

Дата старта: запланирована на 2019-2023 г.

Прямой перелёт на квази-гало орбиту с большим выходом из плоскости эклиптики в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля

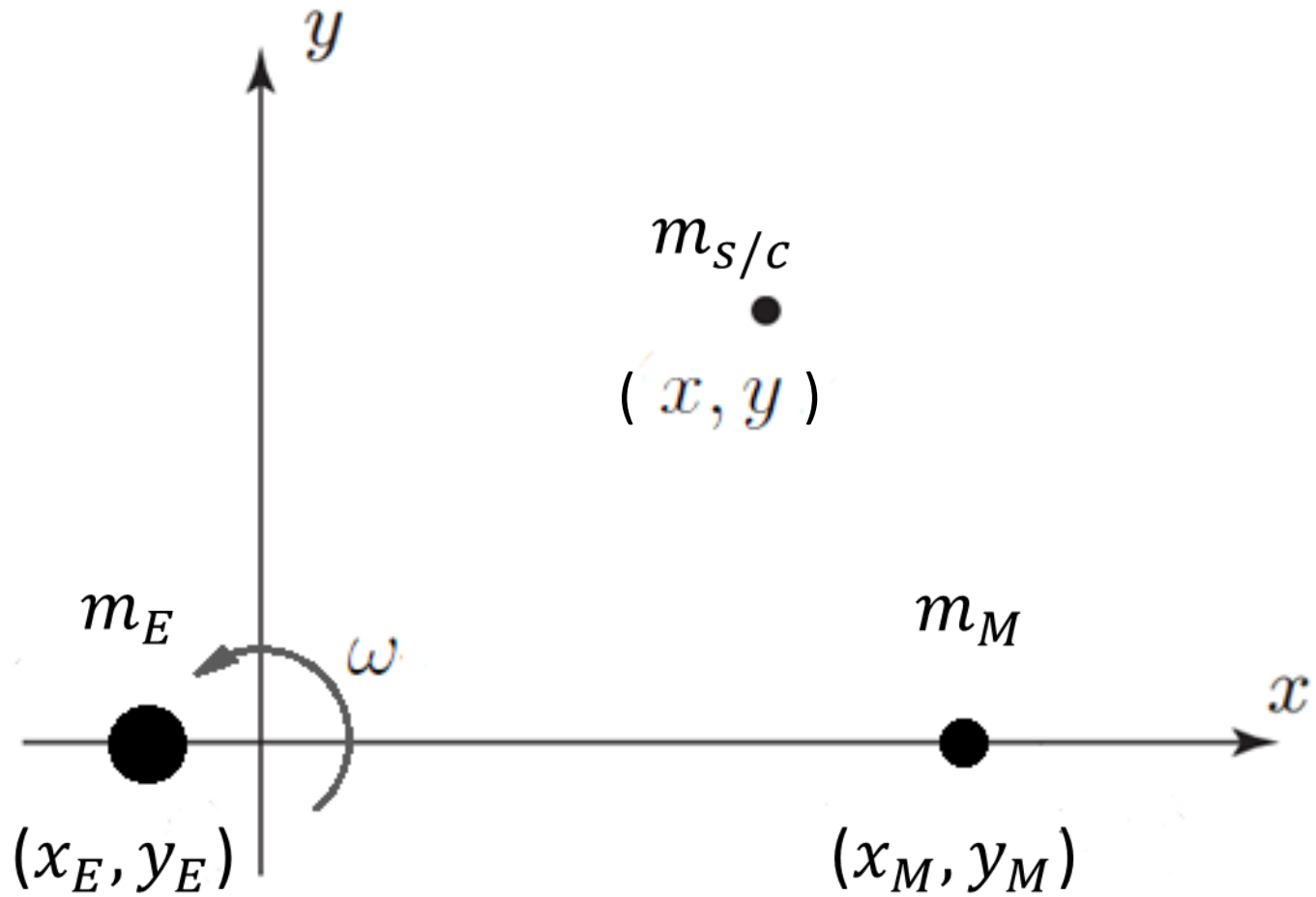
Научные задачи: сканирование пространства в миллиметровом, субмиллиметровом и инфракрасном диапазонах. Двенадцатиметровое зеркало телескопа будет охлаждаться до 4К для обеспечения уникальной чувствительности

Плоская круговая ограниченная задача трех тел

- Система Земля-Луна
- КА движется в плоскости орбиты Луны вокруг Земли
- Орбита Луны – круговая
- КА не оказывает влияния на движение Земли и Луны

$$(m_{s/c} \ll m_M < m_E)$$

Система координат



Система единиц

$$M \rightarrow \frac{M}{m_E + m_M}$$

$$R \rightarrow \frac{R}{R_{EM}}$$

$$T \rightarrow \frac{T \cdot 2\pi}{T_0}$$

Уравнения движения

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y$$

где эффективный потенциал:

$$\Omega(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

и расстояния от КА до главных тел:

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2} \quad r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}$$

Точки либрации

Точки либрации (положения равновесия) находятся из уравнений:

$$\Omega_x = \Omega_y = 0$$

Коллинеарные точки либрации

$$x_{L_1} \approx 1 - r_H + \frac{1}{3} r_H^2 - \frac{26}{9} r_H^3$$

$$x_{L_2} \approx 1 + r_H + \frac{1}{3} r_H^2 - \frac{28}{9} r_H^3$$

$$x_{L_3} \approx -1 - \frac{5}{12} \mu + \frac{23 \cdot 49}{12^4} \mu^3$$

$$r_H = (\mu/3)^{1/3}$$

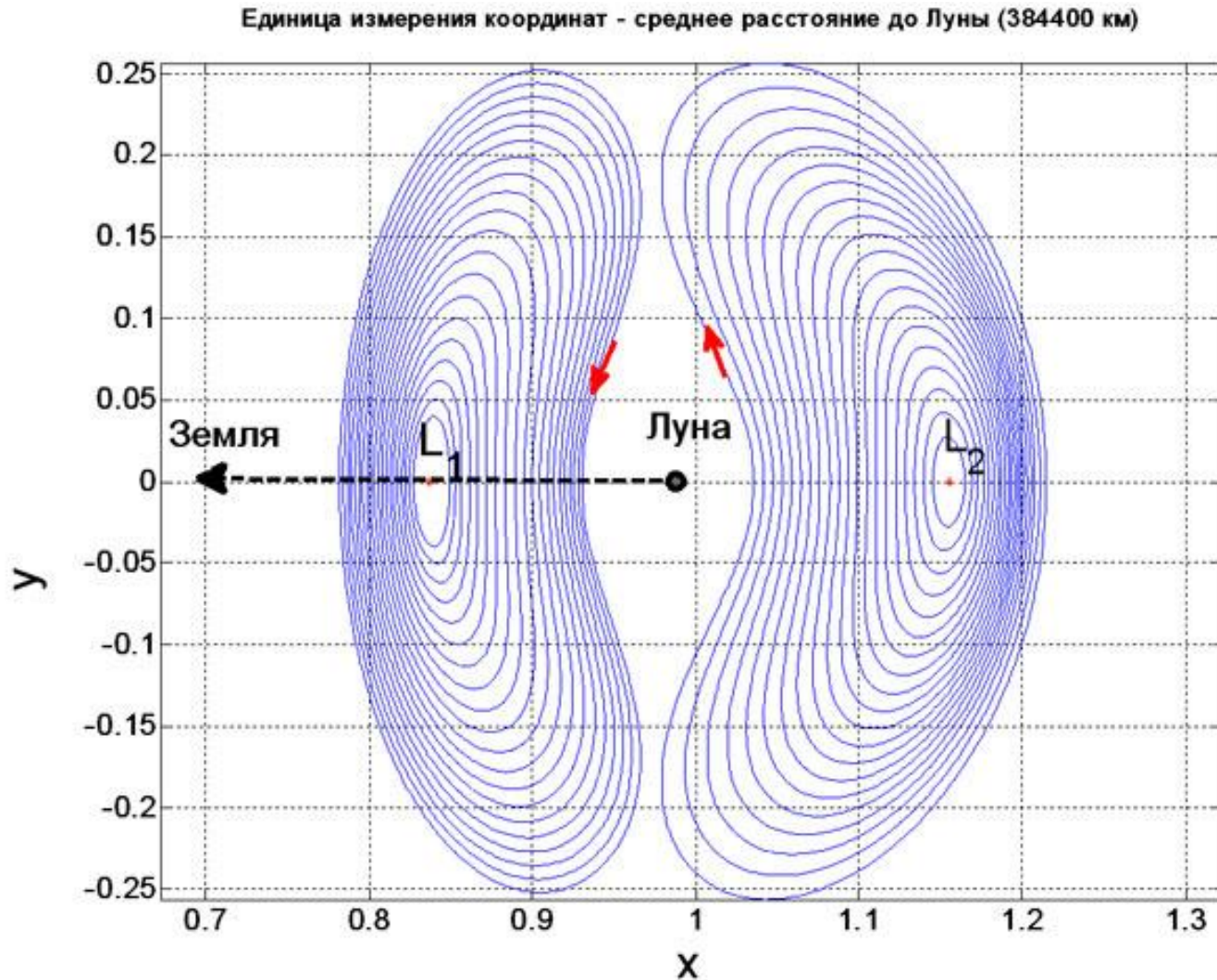
Система Земля-Луна

$$x_{L_1} \approx 0.83691$$

$$x_{L_2} \approx 1.15568$$

$$x_{L_3} \approx -1.00506$$

Периодические орбиты вокруг точек либраций



Асимптотические траектории

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_L$$

Общее решение уравнения:

$$x(t) = Ce^{\lambda t} + De^{-\lambda t} + A \cos(\omega_p t + \varphi) + x_L$$

$$y(t) = k_1 (Ce^{\lambda t} - De^{-\lambda t}) - k_2 A \sin(\omega_p t + \varphi)$$

Бикруговая плоская ограниченная задача четырех тел

- Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите
 - Плоскости орбит Земли и Луны совпадают
- + Учет давления солнечного излучения

Уравнения движения в полной модели

Учитываем влияние Солнца и солнечное давление:

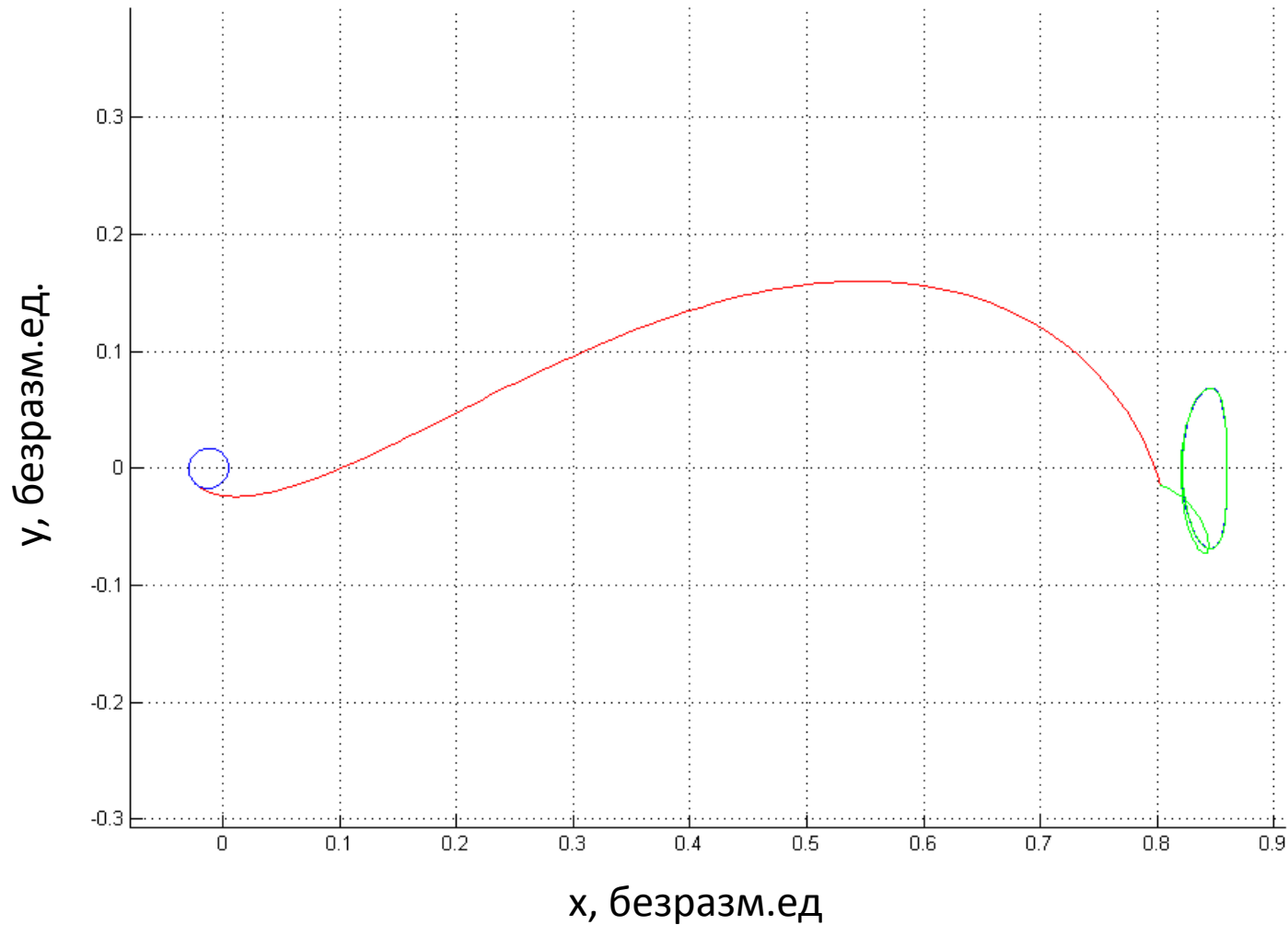
$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = & \underbrace{\begin{pmatrix} 2\dot{y} + x \\ y - 2\dot{x} \end{pmatrix}}_{\text{ускорение Кориолиса + переносное ускорение}} - \underbrace{(1 - \mu) \frac{\boldsymbol{\rho}_{s/c} - \boldsymbol{\rho}_E}{|\boldsymbol{\rho}_{s/c} - \boldsymbol{\rho}_E|^3}}_{\text{Притяжение КА к Земле}} - \underbrace{\mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{s/c} - \boldsymbol{\rho}_M}{|\boldsymbol{\rho}_{s/c} - \boldsymbol{\rho}_M|^3}}_{\text{Притяжение КА к Луне}} + \\
 + & \left[\underbrace{(\mu_2 - 1) \left(-\frac{\boldsymbol{\rho}_{s/c} - \boldsymbol{\rho}_S}{|\boldsymbol{\rho}_{s/c} - \boldsymbol{\rho}_S|^3} + (1 - \mu) \frac{\boldsymbol{\rho}_E - \boldsymbol{\rho}_S}{|\boldsymbol{\rho}_E - \boldsymbol{\rho}_S|^3} + \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_M - \boldsymbol{\rho}_S}{|\boldsymbol{\rho}_M - \boldsymbol{\rho}_S|^3} \right)}_{\text{Притяжение Солнцем Земли, Луны и КА}} + \underbrace{\frac{P}{m} \frac{S}{|\boldsymbol{\rho}_{s/c} - \boldsymbol{\rho}_S|^3}}_{\text{Давление солнечного излучения}} \right]
 \end{aligned}$$

Постановка задачи

1. Дана круговая околоземная орбита и плоская периодическая орбита вокруг L_1 системы Земля-Луна
2. Дана траектория с околоземной орбиты на периодическую орбиту
3. Траектория рассчитана в модели плоской круговой ограниченной задачи трех тел

Требуется адаптировать данную траекторию к полной модели

Траектория перелета в простой модели



Метод продолжения по параметру

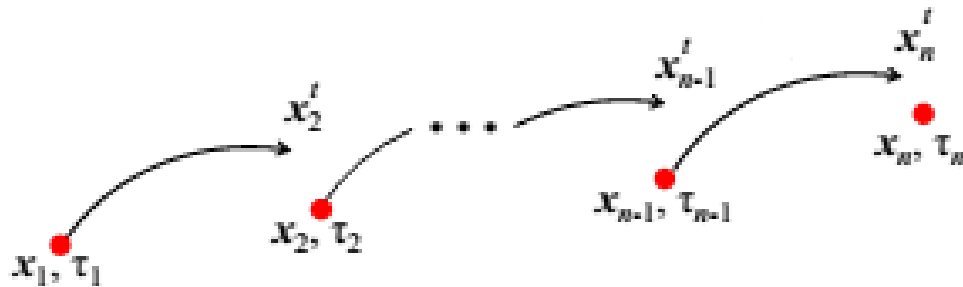
Простая модель:

$$\dot{x} = f(x)$$

Полная модель:

$$\dot{x} = f(x) + \beta \cdot g(x, t)$$

Метод параллельной пристрелки



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), t \in [0, t_f], \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t_f)) = 0, \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), t \in [\tau_j, \tau_{j+1}], \\ \mathbf{x}(\tau_j) = \mathbf{x}_j, \end{cases}$$

Метод параллельной пристрелки

$$S = \begin{cases} \mathbf{x}_1 \\ \tau_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \tau_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \tau_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-1} \\ \tau_{n-1} \end{cases} \quad F = \begin{cases} \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}_n - \mathbf{R}_n \\ \mathbf{x}_2^t - \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3^t - \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-1}^t - \mathbf{x}_{n-1} \end{cases} = 0$$

Решение уравнений

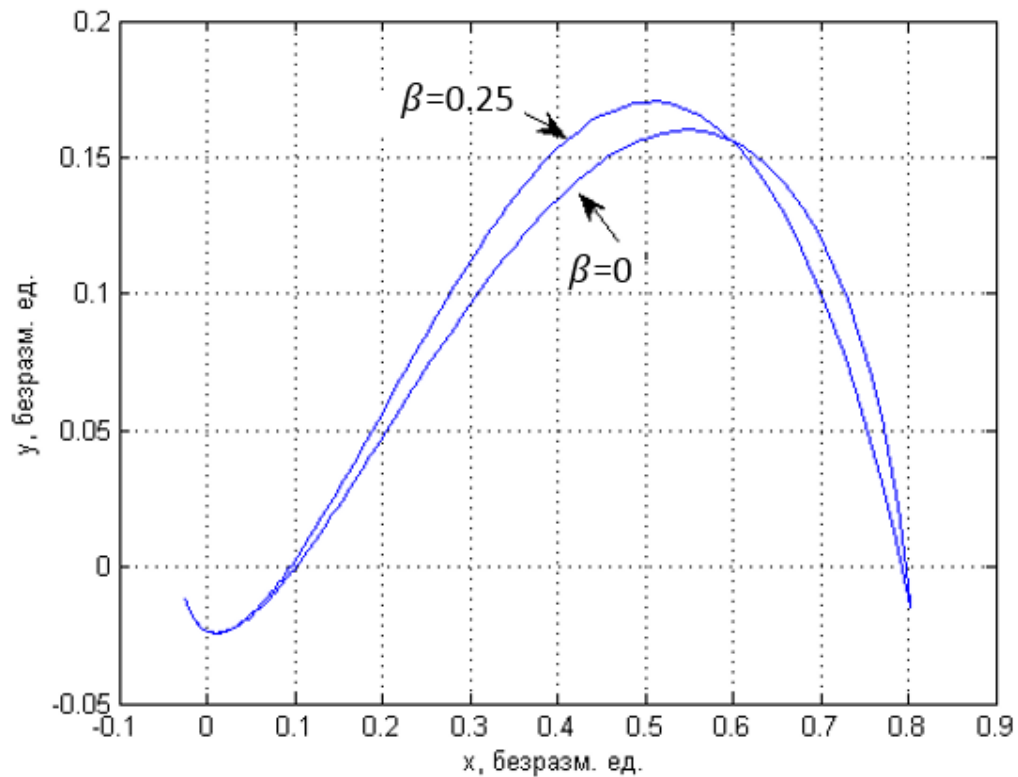
Количество неизвестных: $5(n - 1)$

Количество уравнений: $4(n - 1)$

Ищем решение по формуле:

$$\mathbf{s}^{j+1} = \mathbf{s}^i - DF(\mathbf{s}^j)^T \left[DF(\mathbf{s}^j)DF(\mathbf{s}^j)^T \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{s}^j)$$

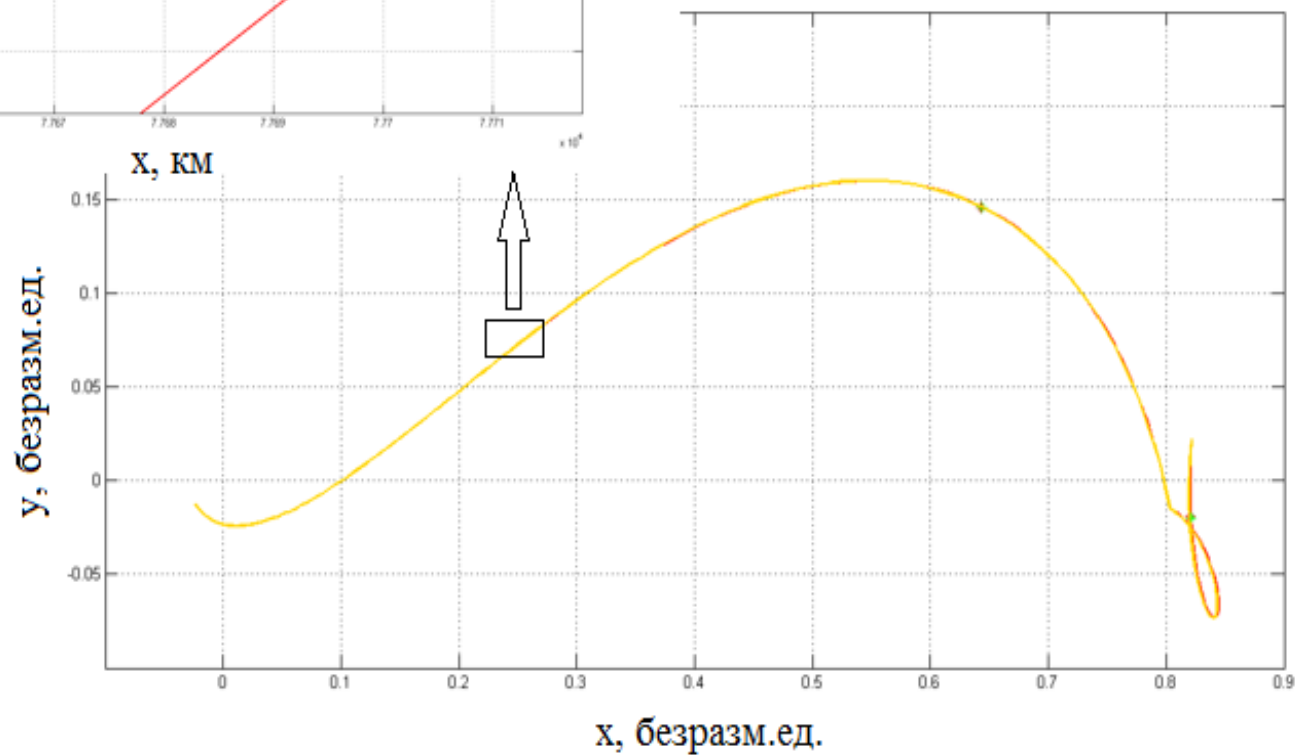
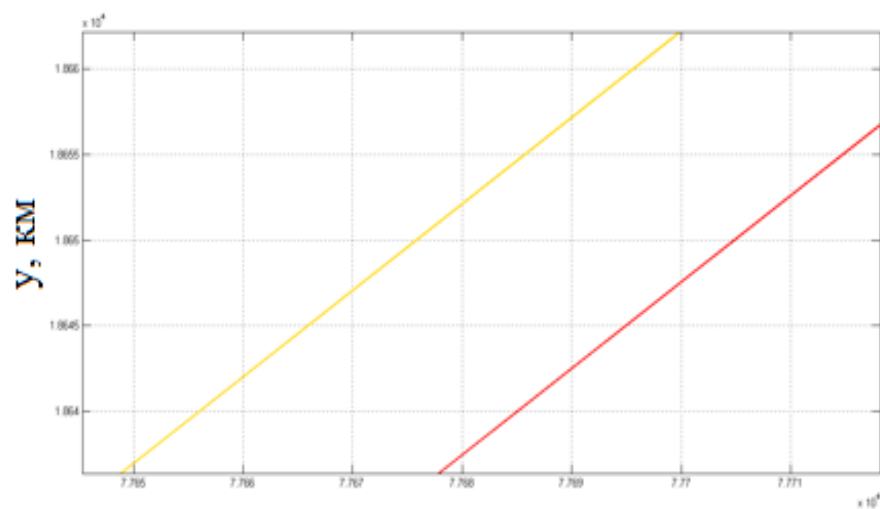
Метод параллельной пристрелки



Результаты

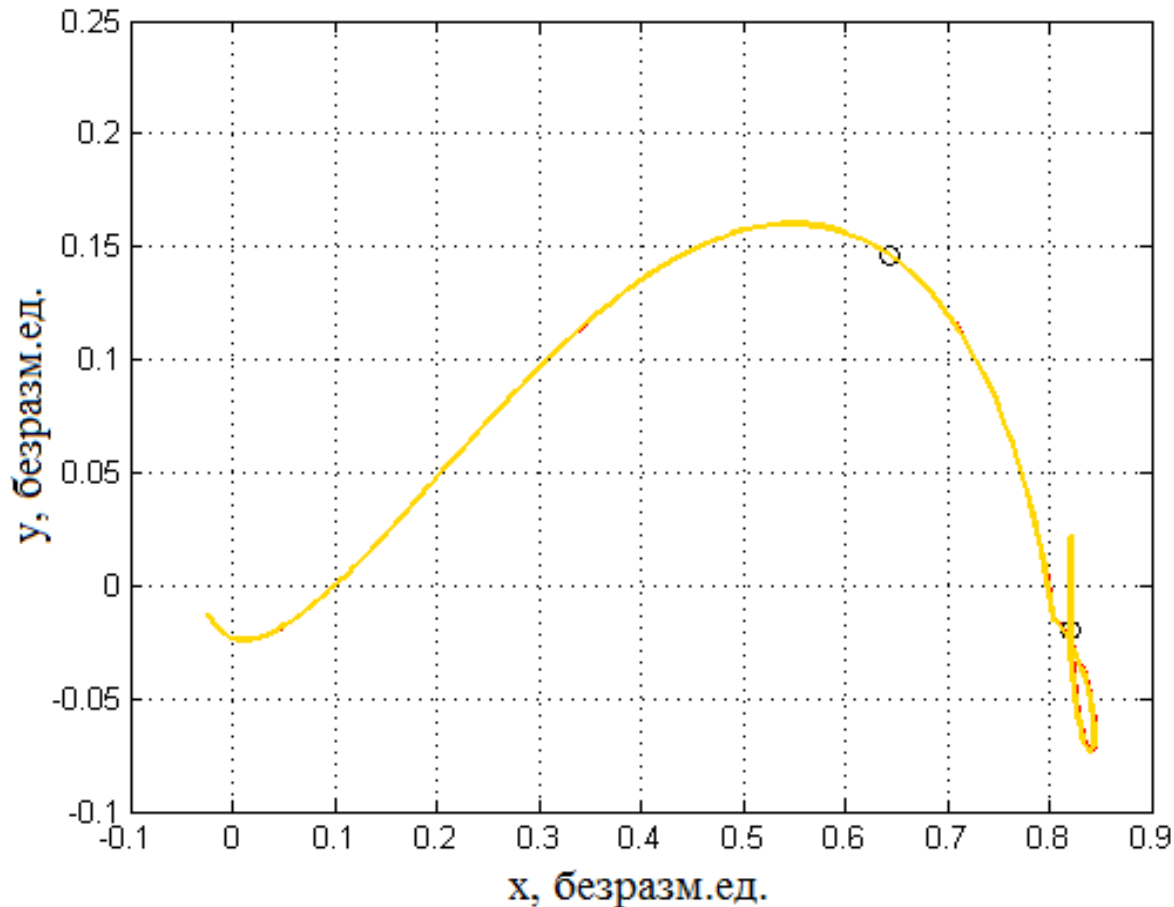
- Все расчеты были проведены в среде MATLAB R2013a
- $N = 5, n = 5$
- Интегрирование уравнений движения производилось методом Дормана–Принса 5(4) с адаптивным шагом и требуемой относительной точностью 10^{-6}
- Расчеты занимают 4 с

Результаты



Результаты

$$\Delta R = \max_t \left(\sqrt{(x_{ref}(t) - x_0(t))^2 + (y_{ref}(t) - y_0(t))^2} \right)$$



$$\Delta R_1 = 139.2637 \text{ км.}$$

$$\Delta R_2 = 455.1661 \text{ км.}$$

Заключение

- Успешно реализованы методы продолжения по параметру и параллельной пристрелки
- Выполнено уточнение траектории перелета с околоземной орбиты к периодической орбите точки либрации L_1 системы Земля-Луна