

Десятые Поляховские чтения
Санкт-Петербург, 23–27 сентября 2024 г.

Быстрый баллистический анализ траекторий перелета к Луне с малой тягой на основе управления с обратной связью

Широбоков М.Г.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН



Высокий интерес к окололунному пространству и Луне вызван планами

1. строительства орбитальной окололунной станции
2. развертывания спутниковой навигационной сети
3. добычи полезных ресурсов на Луне
4. проведения научных исследований

Как следствие возникает необходимость в баллистическом анализе траекторий перелета к Луне. Два важных случая миссий: буксиры для доставки грузов на окололунные станции и малые аппараты для отработки новых технологий и научных исследований.

Электрореактивные двигательные установки (ЭРДУ) с высоким удельным импульсом и малой тягой можно использовать для минимизации используемых ресурсов и максимизации массы полезной нагрузки.

Проектирование многовитковых траекторий перелета с малой тягой

Прямые методы: параметризация функции управления и траектории аппарата, сведение задачи оптимального управления к задаче нелинейного программирования. Легко адаптировать траектории полета к высокоточным моделям движения и разнообразным ограничениям. Большое число переменных оптимизации, узкая область сходимости.

Непрямые методы: удовлетворение необходимым условиям оптимальности. Основываются на вариационных принципах, принципе максимума Понтрягина. Позволяют получить решение в широком и практически значимом множестве функций управления. Малое число переменных оптимизации, но очень узкая область сходимости.

Методы управления с обратной связью: стабилизирующее управление на основе прямого метода Ляпунова. Имеет явный вид, доказуемые условия сходимости, не требуют оптимизации. Как правило не приводит к оптимальным решениям, но допускает параметризацию и последующую оптимизацию.

Цель работы: создать методику проектирования траекторий перелета к Луне на базе методов управления с обратной связью для быстрого анализа траекторий перелета.

Управление, стабилизирующее орбитальные элементы

Уравнения движения в орбитальных элементах $h = \sqrt{p/\mu}$, $e_x = e \cos(\Omega + \omega)$, $e_y = e \sin(\Omega + \omega)$, $i_x = \operatorname{tg}(i/2) \cos \Omega$, $i_y = \operatorname{tg}(i/2) \sin \Omega$, $L = \vartheta + \Omega + \omega$ имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, L)\mathbf{f}, \quad \dot{L} = \mathbf{b}^T(\mathbf{x}, L)\mathbf{f} + c(\mathbf{x}, L),$$

где \mathbf{f} – вектор возмущающего ускорения (тяга + возмущения), \mathbf{A} , \mathbf{b} , c – известные функции орбитальных элементов и истинной долготы, $\mathbf{x} = [h, e_x, e_y, i_x, i_y]$. Пусть \mathbf{x}^t – целевые значения элементов. Тогда управление

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} F_{\max}, \quad \mathbf{u} = -\mathbf{A}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^t)$$

при $|\mathbf{u}| > 0$ обеспечивает $\dot{V} < 0$ в силу уравнений движения для $V = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^t)^T \mathbf{K} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^t)$. Вырождение $|\mathbf{u}| = 0$ возможно при $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^t$.

Способы борьбы с вырождением

1. Используется управление

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} F_{\max} \min(1, |\mathbf{u}|/\varepsilon), \quad \mathbf{u} = -\mathbf{A}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^t), \quad \varepsilon \ll 1,$$

чтобы исключить вырождение. При $|\mathbf{u}| < \varepsilon$ управление $\mathbf{F} \propto \mathbf{u}$ и может быть нерелейным. Эксперименты показали, что это происходит на непродолжительных участках времени.

2. Пока $|\mathbf{u}| > \varepsilon_1$, управление считается равным $\mathbf{F} = F_{\max} \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$, уравнения интегрируются до ограничения $|\mathbf{u}| = \varepsilon_1$. Далее управление считается равным $\mathbf{F} = 0$, уравнения интегрируются до ограничения $|\mathbf{u}| = \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$, после чего вновь $\mathbf{F} = F_{\max} \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$.

3. Вводится параметр $\eta \in [0, 1)$. Тяга включена тогда и только тогда, когда

$$\frac{\dot{V}}{\min_{L \in [0, 2\pi]} \dot{V}} = \frac{|\mathbf{u}|}{\max_{L \in [0, 2\pi]} |\mathbf{u}|} \geq \eta.$$

Ставится задача определения траектории перелета космического аппарата, оснащенного ЭРДУ, между околоземной и окололунной орбитами.

Траектория перелета разбивается на три участка:

Первый участок: раскрутка с околоземной орбиты, пока аппарат не выйдет за пределы радиационных поясов

Второй участок: перелет в окрестность точки либрации L_1 системы Земля–Луна

Третий участок: скрутка на целевую окололунную орбиту

Расчет траектории на первом этапе

Интегрируются уравнения орбитального движения аппарата:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\mu_E \mathbf{r} / r^3 + \mathbf{F} / m + \mathbf{a}_{J_2} + \mathbf{a}_{\text{atm}}, \quad \dot{m} = -F / v_{\text{ex}},$$

где

\mathbf{a}_{J_2} – ускорение, вызванное зональной гармоникой J_2 ,

\mathbf{a}_{atm} – ускорение силы сопротивления атмосферы (кусочно-экспоненциальная модель),

$\mathbf{F} = F_{\text{max}} \mathbf{v} / v$ на свету и $\mathbf{F} = 0$ в тени – реактивная сила тяги

пока перицентр не достигнет 40 тыс. км. Считаем, что долгота восходящего узла в момент старта определена таким образом, чтобы аппарат пребывал в тени наименьшее время (вектор нормали к орбите «смотрит» в сторону Солнца).

Расчет траектории на втором этапе

Уравнения движения аппарата записываются в равноденственных элементах орбиты относительно геоцентрической небесной системы координат, учитывается только возмущение от Луны. Конец первого этапа определяет начальный момент времени t_1 и начальное состояние $[\mathbf{x}_1, L_1]$ второго этапа.

Пусть T_2^p – прогнозируемое время полета на втором этапе. На момент времени $t_2^p = t_1 + T_2^p$ рассчитывается радиус-вектор $\mathbf{r}_M(t_2^p)$ и вектор скорости $\mathbf{v}_M(t_2^p)$ Луны. Фазовое состояние $[0.84\mathbf{r}_M(t_2^p), 0.84\mathbf{v}_M(t_2^p)]$ назначается целевой точкой перелета второго этапа (условная «точка либрации L_1 »). Этой точке соответствуют некоторые элементы орбиты и истинная долгота $[\mathbf{x}^t(t_2^p), L^t(t_2^p)]$.

Уравнения движения численно интегрируются сначала пассивно время τ_2 , а затем со стабилизирующим управлением время $T_2^p - \tau_2$ с начальными условиями t_1 , $[\mathbf{x}_1, L_1]$ и единичной матрицей \mathbf{K} до выполнения условий $\max_i |x_i - x_i^t(t_2^p)| < 10^{-2}$, $|\cos L - \cos L^t(t_2^p)| < 10^{-2}$, $|\sin L - \sin L^t(t_2^p)| < 10^{-2}$. Время перелета обозначим за T_2 .

Подбор параметров для перелета

На втором этапе определяемыми параметрами перелета являются время пассивного движения τ и общее прогнозируемое время полета T . Эффективным оказался следующий алгоритм их подбора, состоящий из двух циклов:

1. **Внешний цикл:** *По возрастанию* перебираются времена полета T .
2. **Внутренний цикл:** Для каждого времени полета T *по убыванию* перебираются времена пассивного движения τ .

Расчеты продолжаются до тех пор, пока невязка между прогнозируемым T^p и реальным временем T полета не будет достаточно малой, это обеспечит попадание в окрестность точки L_1 . Таким образом теоретически можно найти минимальное время полета (а значит и минимальные затраты на перелет).

Расчет траектории на третьем этапе

Уравнения движения записываются в равноденственных элементах орбиты относительно селеноцентрической небесной системы координат, учитывается только возмущение от Земли.

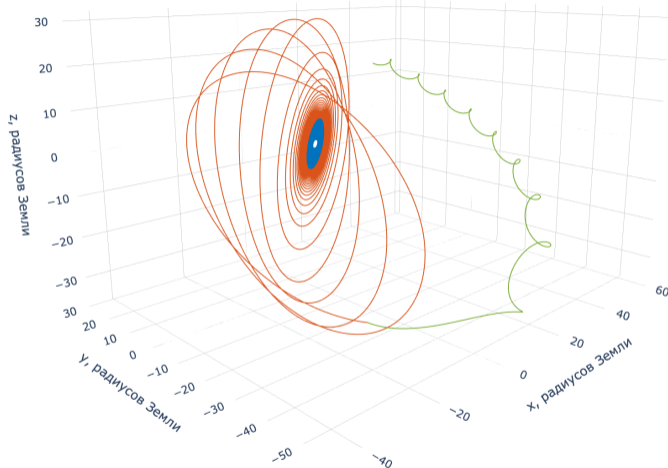
Начальными условиями третьего этапа считаются условия, соответствующие концу второго этапа в прогнозный момент времени t_2^p , $[\mathbf{x}_2(t_2^p), L_2(t_2^p)]$. Пусть \mathbf{x}_3 определяют целевые орбитальные элементы окологлунной орбиты.

Уравнения движения численно интегрируются со стабилизирующим управлением, начальными условиями t_2^p , $[\mathbf{x}_2(t_2^p), L_2(t_2^p)]$ и единичной матрицей \mathbf{K} до тех пор, пока не будет выполнено $\max_i |x_i - x_{3,i}| < 10^{-2}$.

1. **Лунный буксир**¹: начальная масса 6 т, стартовая орбита – околоземная круговая высотой 325 км и наклонением 97.5° (орбита планируемой РОС), целевая орбита – окололунная круговая высотой 10 тыс. км и наклонением 90° (орбита потенциальной лунной станции), три двигателя СПД-230.
2. **Малый аппарат**: начальная масса 20 кг, стартовая орбита – геопереходная орбита $200 \text{ км} \times 35786 \text{ км}$ с наклонением 51.6° , целевая орбита – окололунная почти прямолинейная гало-орбита с высотой периселения 1000 км, один двигатель на 13 мН.

¹Широбоков М.Г. и др. Анализ траекторий легкого лунного буксира с электрореактивной двигательной установкой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 28. 23 с.

Пример траектории перелета лунного буксира



Двигательная установка + (3 бака + топливо) + (ПН + служ.):
1030 кг + 1851 кг + 3119 кг = 6000 кг

Первый этап:
78.78 дней, 918.32 кг

Второй этап:
54.37 дней, 622.16 кг

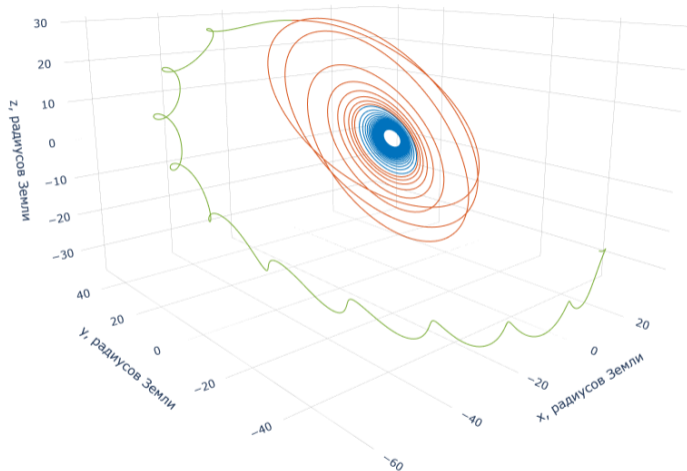
Третий этап:
10.90 дней, 127.03 кг

Время полета:
144.05 дней

Моторное время:
143.05 дней

Затраты топлива:
1667.51 кг

Пример траектории перелета малого аппарата



Двигательная установка + (1 бак + топливо) + (ПН + служ.):

$$1 \text{ кг} + 12 \text{ кг} + 7 \text{ кг} = 20 \text{ кг}$$

Первый этап:
31.35 дней, 3.81 кг

Второй этап:
27.28 дней, 3.27 кг

Третий этап:
16.90 дней, 2.02 кг

Время полета:
75.53 дней

Моторное время:
75.13 дней

Затраты топлива:
9.10 кг

Сравнение с теоретически оптимальными решениями

Пусть на втором этапе была получена траектория, соединяющая фазовые состояния аппарата x_1 и x_2 за время T_2 и пусть $F_L(t)$ – найденное управление. На фиксированном участке времени $[0, T_2]$ поставим задачу поиска оптимального управления, минимизирующего

$$\int_0^{T_2} (F/m)^2 dt \rightarrow \min_F$$

при ограничениях $x(0) = x_1$, $x(T_2) = x_2$. Эта задача может быть эффективно решена с помощью метода продолжения². Число витков подбирается исходя из критерия минимизации функционала выше. Полученное решение в модели идеально регулируемой тяги дает оптимальное по затратам топлива управление.

В задаче полета лунного буксира затраты топлива во всех случаях снизились на 5.4%–8.1% относительно массы аппарата в начале первого этапа.

²Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. 2008. Т. 46, №3. С. 224–237.

1. Описана методика проектирования траекторий перелета с малой тягой между околоземными и окологрунтовыми орбитами.
2. Методика не подразумевает решение задач оптимального управления малой тягой и может быть использована для быстрого предварительного анализа миссий к Луне.
3. Методика продемонстрирована на примерах задач полета лунного буксира на высокую круговую окологрунтовую орбиту и кубсата на почти прямолинейную гало-орбиту.
4. При фиксированном времени полета на этапе полета до точки либрации полученные решения отличаются от оптимальных по затратам топлива на несколько процентов относительно начальной массы аппарата.