Международная научная конференция по
механике «Десятые Поляховские чтения»
23—27 сентября 2024.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЁТОВ С МАЛОЙ ТЯГОЙ

Суслов К.С., *Широбоков М.Г.* (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)

Мотивация: оптимизация многовитковых перелётов с малой тягой

В настоящее время в отечественной космонавтике большое внимание уделяется миссиям на базе **малых космических аппаратов и двигателей малой тяги**

Использование малых аппаратов накладывает ряд **ограничений**:

- размер и масса аппарата **ограничивают запас топлива**, который можно потратить на управление
- низкое значение тяги приводит к **увеличению времени перелёта** и **спиральному виду траекторий**

Чтобы удовлетворить требованиям миссии и ограничениям, траекторию перелёта необходимо **оптимизировать**

Методы оптимизации перелётов с малой тягой

Непрямые методы: выполнение **необходимым условиям оптимальности**, принцип максимума Понтрягина, сведение **к решению краевой задачи**

В.Г. Петухов. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. 2008.

Прямые методы: параметризация траектории и/или управления, сведение к задаче **математического программирования**

- дискретизация управления на мелкой временной сетке

F. Topputo, C. Zhang. Survey of Direct Transcription for Low-Thrust Space Trajectory Optimization with Applications // Abstract and Applied Analysis. 2014.

- методы последовательной выпуклой оптимизации

Ю.П. Улыбышев. Оптимизация межорбитальных перелетов с малой тягой при ограничениях // Космические исследования. 2012.

- полиномиальная и Фурье-параметризация управления

Hudson, J.S.; Scheeres, D.J. Orbital targeting using reduced eccentric anomaly low-thrust coefficients // JGCD. 2011.

Основные предположения методики

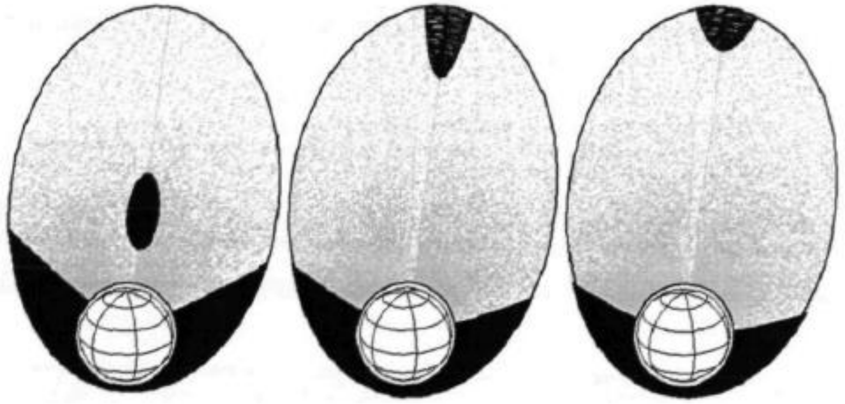
Уравнения движения:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{M}(\boldsymbol{x}, \lambda)\frac{\boldsymbol{F}}{m}; \quad \dot{\lambda} = n(\boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, \lambda) \cdot \boldsymbol{F}}{m}; \quad \dot{m} = -\frac{F}{I g_0}$$

$\boldsymbol{x}$ − равноденственные элементы орбиты, $\lambda = M + \omega + \Omega$ − средняя долгота, m − масса аппарата

Предположения об искомом управлении:

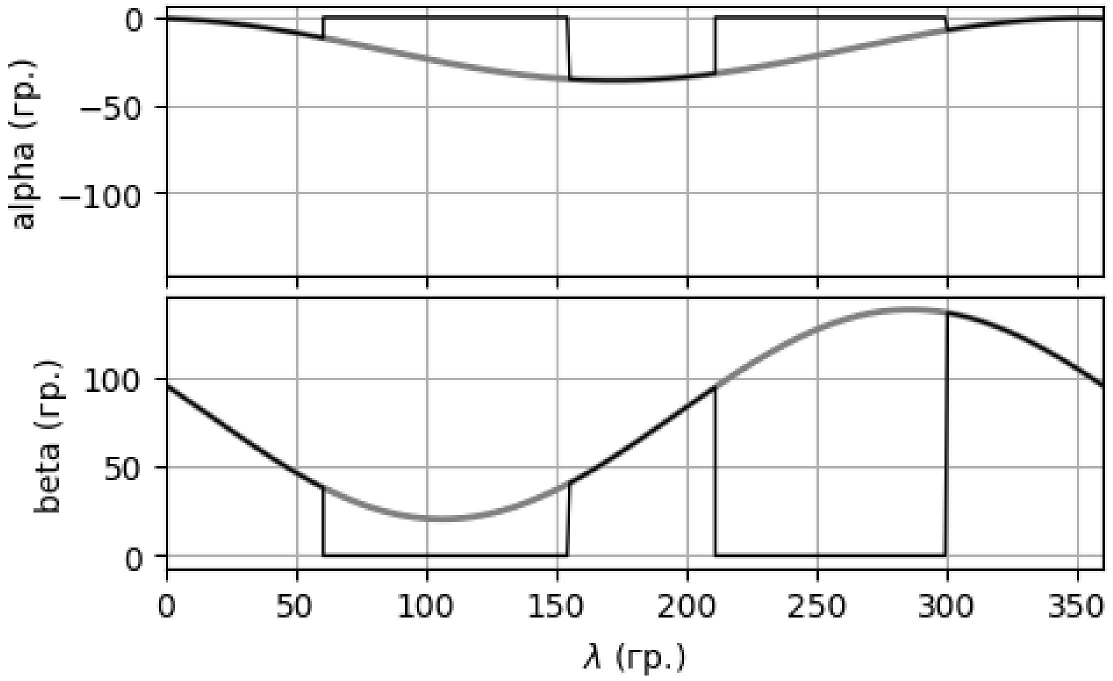
- Оптимальное по топливу управление – **релейное** (согласно принципу максимума Понтрягина)
- Управления на соседних витках **близки друг к другу**



Петухов В.Г. – Оптимизация траекторий космических аппаратов с электрореактивными двигательными установками методом продолжения

Параметризация управления: быстрое движение

- На отдельно взятом витке ($2\pi n \le \lambda < 2\pi(n+1)$):
  - λ_k – моменты включения и выключения двигателя, $k = 1, \dots, r$
  - $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ – углы, задающие направление тяги на активных участках
    $\alpha(\lambda) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_{i,1}\cos i\lambda + \alpha_{i,2}\sin i\lambda)$
    $\beta(\lambda) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p}(\beta_{i,1}\cos i\lambda + \beta_{i,2}\sin i\lambda)$
  - Итого: $\boldsymbol{r + 2(1 + 2p)}$ параметров



Параметризация управления: медленное движение

- Медленное изменение параметров управления от витка к витку **аппроксимируется полиномами** степени $\boldsymbol{q-1}$:

$$\lambda_k(n) = \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_{k,j}\, n^j\,,$$

$$\alpha_0(t) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_{0,j}\left(\frac{t}{T}\right)^j, \qquad \alpha_{i,1}(t) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_{i,1,j}\left(\frac{t}{T}\right)^j, \qquad \alpha_{i,2}(t) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_{i,2,j}\left(\frac{t}{T}\right)^j,$$

$$\beta_0(t) = \sum_{j=0}^{q-1} \beta_{0,j}\left(\frac{t}{T}\right)^j, \qquad \beta_{i,1}(t) = \sum_{j=0}^{q-1} \beta_{i,1,j}\left(\frac{t}{T}\right)^j, \qquad \beta_{i,2}(t) = \sum_{j=0}^{q-1} \beta_{i,2,j}\left(\frac{t}{T}\right)^j$$

Итого: $\boldsymbol{\big(r + 2(1 + 2p)\big)\, q}$ параметров

Задача оптимизации

- Оптимизируемые параметры:

$$\boldsymbol{a}_0 = (\alpha_{0,0}, \dots \alpha_{0,q-1}), \mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1,0} & \cdots & \alpha_{p,1,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,1,q-1} & \cdots & \alpha_{p,1,q-1} \end{pmatrix}, \mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2,0} & \cdots & \alpha_{p,2,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,2,q-1} & \cdots & \alpha_{p,2,q-1} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_0 = (\beta_{0,0}, \dots \beta_{0,q-1}), \mathrm{B}_1 = \begin{pmatrix} \beta_{1,1,0} & \cdots & \beta_{p,1,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1,1,q-1} & \cdots & \beta_{p,1,q-1} \end{pmatrix}, \mathrm{B}_2 = \begin{pmatrix} \beta_{1,2,0} & \cdots & \beta_{p,2,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1,2,q-1} & \cdots & \beta_{p,2,q-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,0} & \cdots & \lambda_{1,q-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{r,0} & \cdots & \lambda_{r,q-1} \end{pmatrix}$$

- Целевой функционал: $J_m = -\int_0^T \dot{m}\, dt$ – минимизация затраченного топлива
- Ограничения типа «равенство»: $\boldsymbol{x}(T) - \boldsymbol{x}_1 = 0$ – выход на целевую орбиту
- Метод решения задачи мат. программирования: симплекс—метод Нелдера — Мида
- Объединённый функционал: $J = J_m + |\boldsymbol{x}(T) - \boldsymbol{x}_1|$

Пример: вывод малого спутника на высокоапогейную орбиту

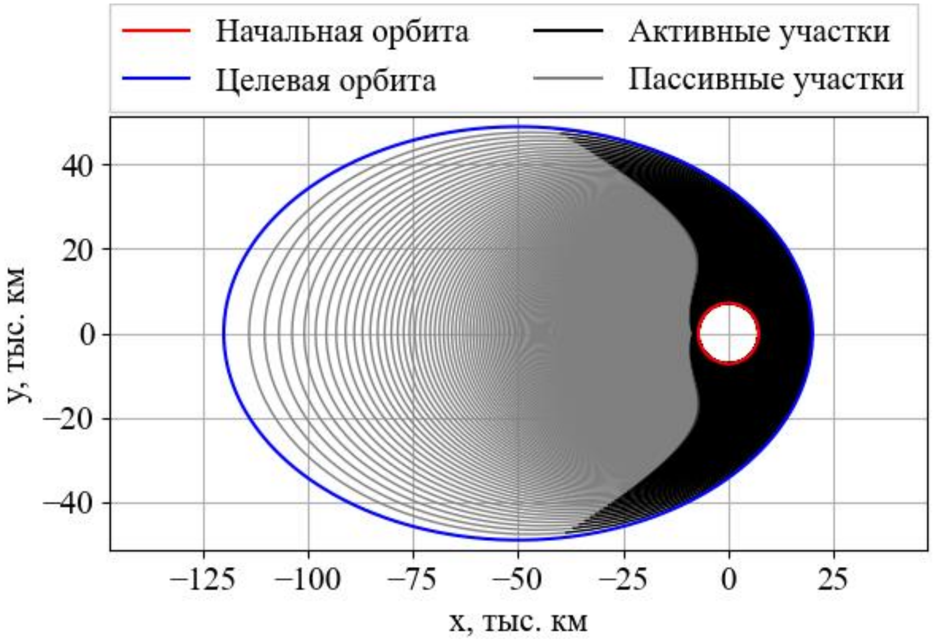
Характеристики перелёта:

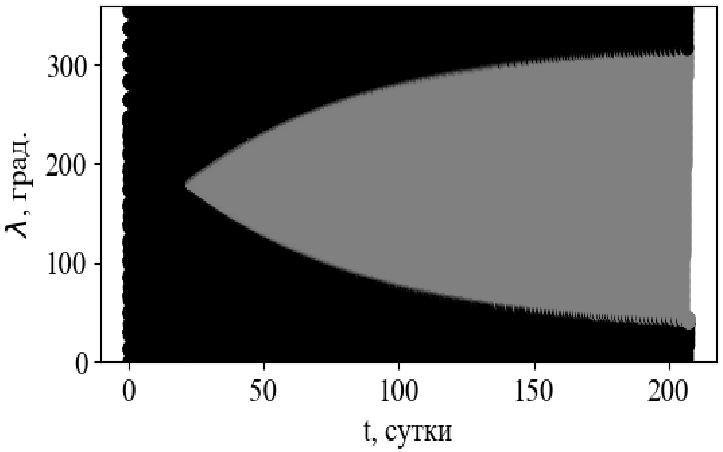
- Стартовые орбиты: низкая солнечно-синхронная орбита с $r = 7200$ км, $i = 99°$
- Целевая орбита: приполярная с $r_\pi = 20$ тыс. км, $r_\alpha = 120$ тыс. км, $i = 99°$
- Начальная масса аппарата: $m = 46$ кг
- Модель двигательной установки: $F_{\max} = 18.0$ мН, $I = 1200$ с
- Модель движения: задача 2 тел + реактивное ускорение
- Время перелёта: 207 суток

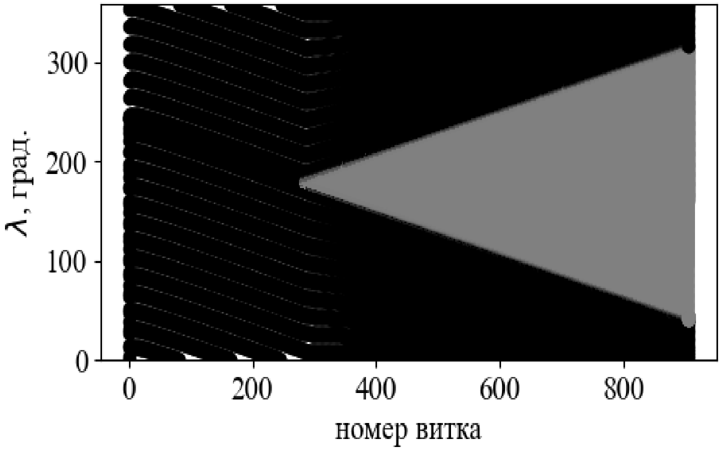
- Параметры оптимизации:
  - $r = 4, p = 2, q = 2 \to 28$ величин, параметризующих управление

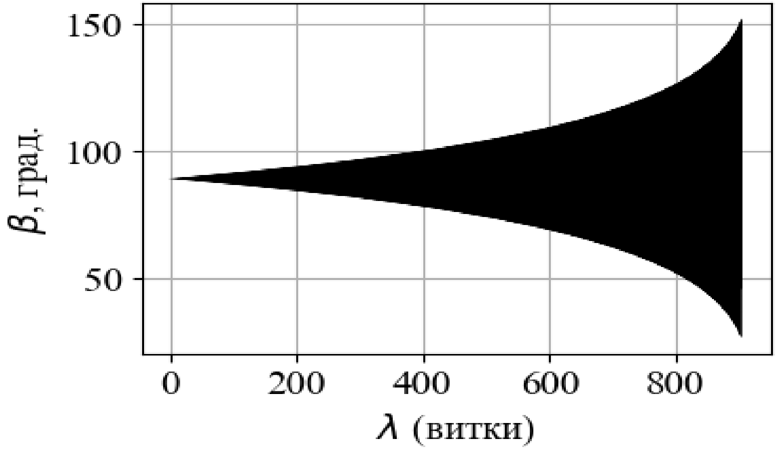
Результат оптимизации

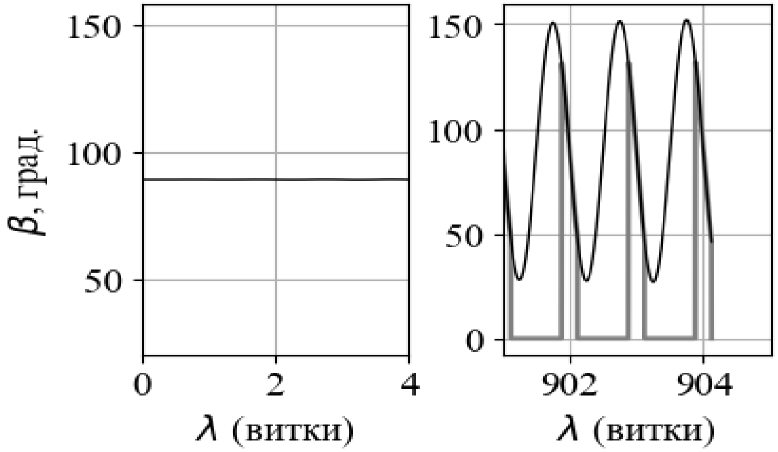
Время перелёта:	207 суток
Число витков:	905
Масса топлива:	14.2 кг
Моторное время:	107.8 суток











Выводы

- **Методика показала работоспособность** на примере рассмотренной задачи, теперь её необходимо **протестировать на более широком спектре задач**
- **Большое число переменных** параметризации ограничивает класс методов, которые можно использовать в решении задачи математического программирования
- **Большая длительность перелёта** подсказывает использовать **методы усреднения** для ускорения интегрирования траекторий на каждой итерации оптимизатора
- Аппроксимация рядами Фурье – **не единственный возможный выбор**, нужно рассмотреть **другие способы параметризации** периодических функций

Спасибо за внимание!