



GEOSCAN

# Математическое обеспечение высокоточной системы управления ориентацией

С.С.Ткачев<sup>1</sup>, Я.В.Маштаков<sup>1</sup>, Д.С.Иванов<sup>1</sup>,  
Д.Я.Капштан<sup>2</sup>, П.В.Запариванный<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН

<sup>2</sup>ООО «Геоскан»

Санкт-Петербург,  
2024

# Содержание

- Описание миссии
- Алгоритмы системы ориентации
- Бортовое математическое обеспечение
- Наземное математическое обеспечение
- Численное моделирование

# Описание миссии

## Датчики

- звёздный датчик АЗДК-1 (Азмерит)  
 $\sigma = 10''-70''$ , частота 5Гц, угловая скорость  $3^\circ/\text{с}$
- датчик угловой скорости БЧЭ400/БЧЭ500 (Оптолинк)  
дрейф нуля  $0.1^\circ/\text{час}$ ,  $\sigma = 7 \times 10^{-3}^\circ/\text{с}$

## Точность установки

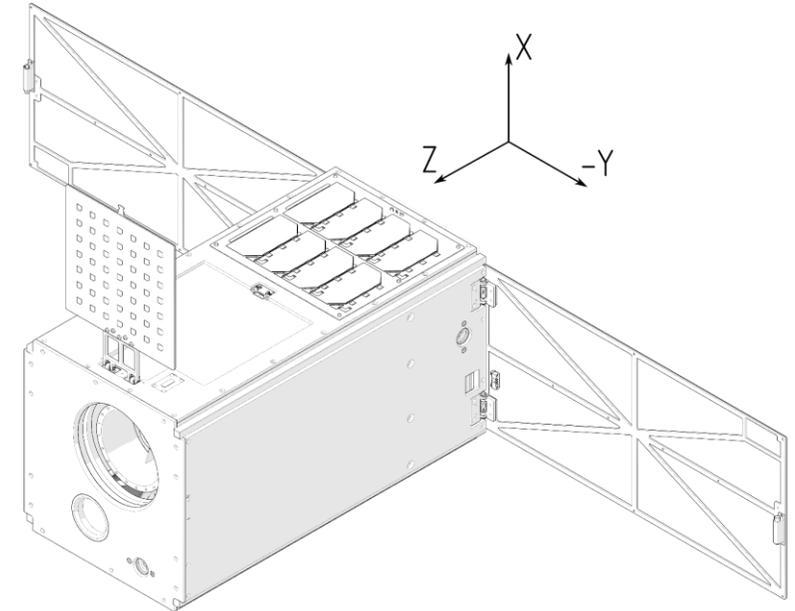
- ЗД не хуже  $0.057^\circ \approx 205''$
- ДУС не хуже  $0.029^\circ \approx 104''$
- маховики не хуже  $0.048^\circ \approx 172''$

## Требования

- точность ориентации ( $3\sigma$ ) по всем осям:  $0.2^\circ \approx 720''$
- точность стабилизации ( $3\sigma$ ) по всем осям:  $1.0 \times 10^{-2}^\circ/\text{с}$

## Требование к знанию ориентации оптической оси

- точность ( $3\sigma$ ) по всем осям:  $0.003^\circ \approx 11''$



# Алгоритмы системы ориентации I

## Управление

Ляпуновское модельное управление

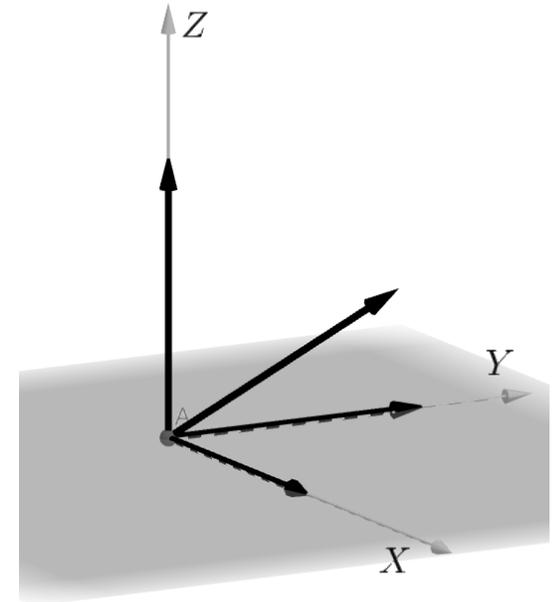
$$\mathbf{u} = \mathbf{J}\mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн} + k_q \mathbf{J}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}_{цел}) - \mathbf{J}\mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_{цел} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} + \mathbf{M}_{зр}$$

Распределение модельного управления по маховикам

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{G}^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1} \dot{\mathbf{H}} - \frac{\max_i(\mathbf{G}^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1} \dot{\mathbf{H}}) + \min_i(\mathbf{G}^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1} \dot{\mathbf{H}})}{2} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n} = (1/\sqrt{6} \quad 1/\sqrt{6} \quad 1/\sqrt{6} \quad -1/\sqrt{2})^T$$



## Расчет целевого движения

$$\boldsymbol{\omega}_{цел} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \times \dot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_2 \times \dot{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{e}}_3)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{цел} = 2\dot{\mathbf{q}}_{цел} \circ \mathbf{q}_{цел}^{-1}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}}{\rho}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_v - \mathbf{e}(\mathbf{e}_v, \mathbf{e}) \quad \mathbf{e}_v = \frac{\boldsymbol{\Omega}_3 \times \mathbf{r}_3 - \dot{\mathbf{V}}}{\rho}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{цел} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \times \ddot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_2 \times \ddot{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_3 \times \ddot{\mathbf{e}}_3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{цел} = 2\dot{\mathbf{q}}_{цел} \circ \mathbf{q}_{цел}^{-1} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{цел} \circ \boldsymbol{\omega}_{цел}$$

$$\ddot{\mathbf{e}}_3 = \dot{\mathbf{e}}_v - \dot{\mathbf{e}}_3(\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3(\dot{\mathbf{e}}_v, \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_v, \dot{\mathbf{e}}_3) \quad \dot{\mathbf{e}}_v = \frac{\boldsymbol{\Omega}_3 \times \boldsymbol{\Omega}_3 \times \mathbf{r}_3 - \dot{\mathbf{V}}}{\rho} - \mathbf{e}_v(\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_3)$$

# Алгоритмы системы ориентации II

## Кинематический ФК:

Вектор состояния:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^T & \Delta\boldsymbol{\omega}^T \end{bmatrix}^T$$

Линеаризованная модель движения:

$$\frac{d}{dt} \delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{w}$$

## Динамический ФК:

Вектор состояния:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\omega} \\ \Delta\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$

Матрица динамики

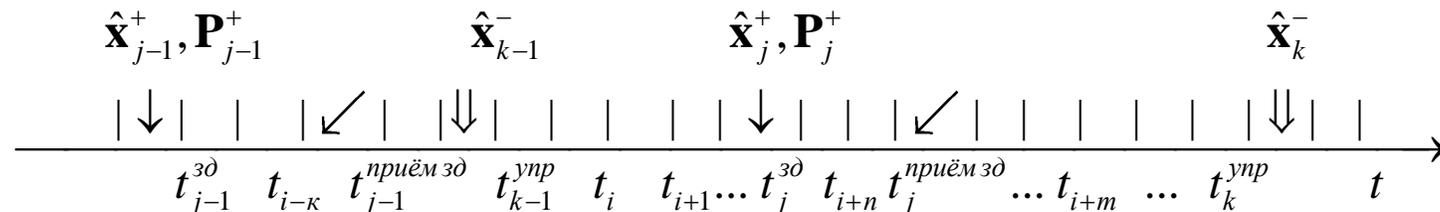
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\frac{1}{2}\mathbf{E}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

Матрица влияния возмущений

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

Матрица измерений

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$



# Бортовое математическое обеспечение

## Движение центра масс

$$\dot{\mathbf{V}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\delta_{J_2}}{r^5} \left[ \left( 5 \left( \frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right) \mathbf{r} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} \right],$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}.$$

*Назначение*  
 фильтр Калмана на  
 навигационном датчике

## Кинематика

$$\mathbf{q}(t_n) = \mathbf{q}(t_{n-1}) \circ \begin{pmatrix} \cos \frac{|\boldsymbol{\omega}_{n-1}|(t_n - t_{n-1})}{2} \\ \frac{\boldsymbol{\omega}_{n-1}}{|\boldsymbol{\omega}_{n-1}|} \sin \frac{|\boldsymbol{\omega}_{n-1}|(t_n - t_{n-1})}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_0 \cos \frac{|\boldsymbol{\omega}_{n-1}|(t_n - t_{n-1})}{2} - \frac{\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\omega}_{n-1}}{|\boldsymbol{\omega}_{n-1}|} \sin \frac{|\boldsymbol{\omega}_{n-1}|(t_n - t_{n-1})}{2} \\ \boldsymbol{\lambda} \cos \frac{|\boldsymbol{\omega}_{n-1}|(t_n - t_{n-1})}{2} + \left( \lambda_0 \frac{\boldsymbol{\omega}_{n-1}}{|\boldsymbol{\omega}_{n-1}|} + \boldsymbol{\lambda} \times \frac{\boldsymbol{\omega}_{n-1}}{|\boldsymbol{\omega}_{n-1}|} \right) \sin \frac{|\boldsymbol{\omega}_{n-1}|(t_n - t_{n-1})}{2} \end{pmatrix}$$

*Назначение*  
 кинематический фильтр  
 Калмана ЗД+ДУС

## Общая модель

$$\dot{\mathbf{V}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\delta_{J_2}}{r^5} \left[ \left( 5 \left( \frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right) \mathbf{r} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} \right],$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V},$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1} \left( 3 \frac{\mu}{r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{J} \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) - \mathbf{u} \right),$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{u},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\omega} \\ \lambda_0 \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}.$$

*Назначение*  
 динамический фильтр  
 Калмана ЗД+ДУС

+Реализация математической модели вращения Земли (IAU80)

# Наземное математическое обеспечение

$$\dot{\mathbf{V}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{f},$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V},$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{M}_{\text{возм}} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) - \mathbf{u}),$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{u},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\omega} \\ \lambda_0 \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}.$$

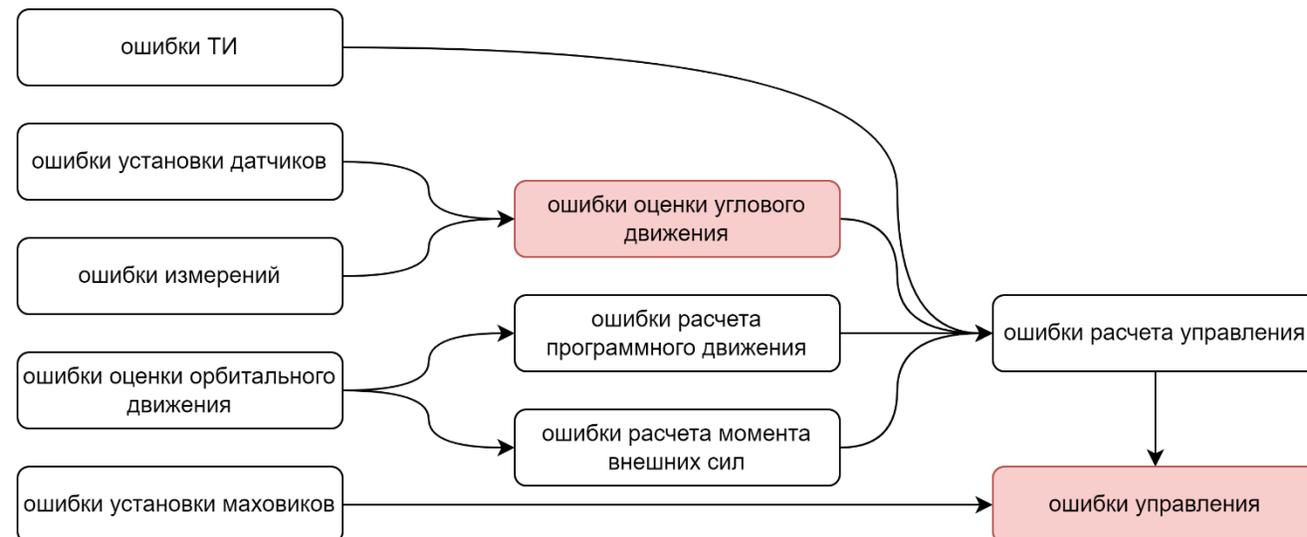
Моделирование на коротких интервалах времени 10-20 минут

Центр масс

- геопотенциал 10x10
- атмосфера ГОСТ
- модель вращения Земли

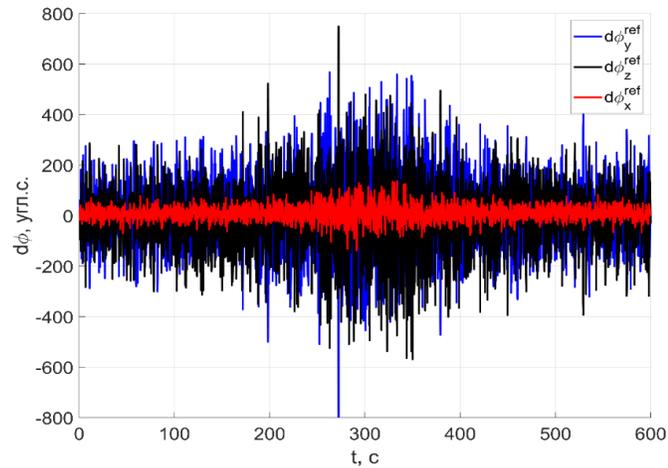
Относительно центра масс

- гравитационный момент
- ошибки знания ТИ
- ошибки установки датчиков и маховиков
- ошибки оценки вектора состояния

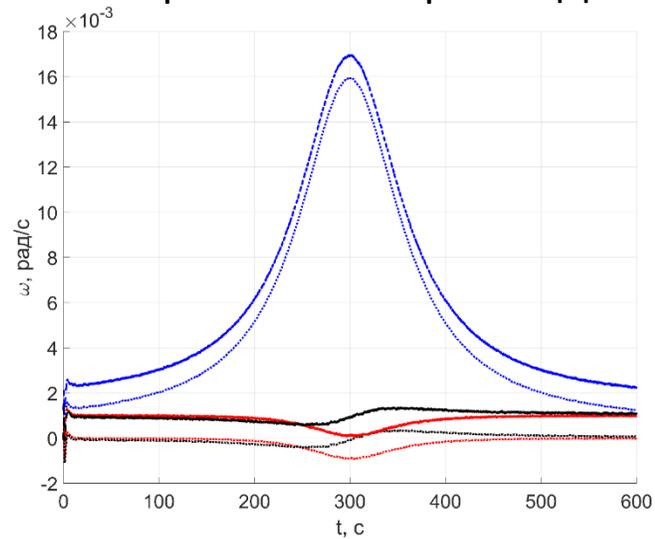


# Численное моделирование I

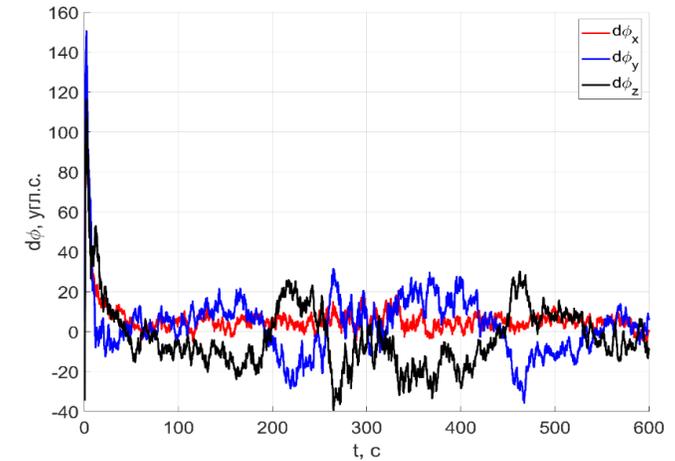
Ошибки измерений звёздного датчика



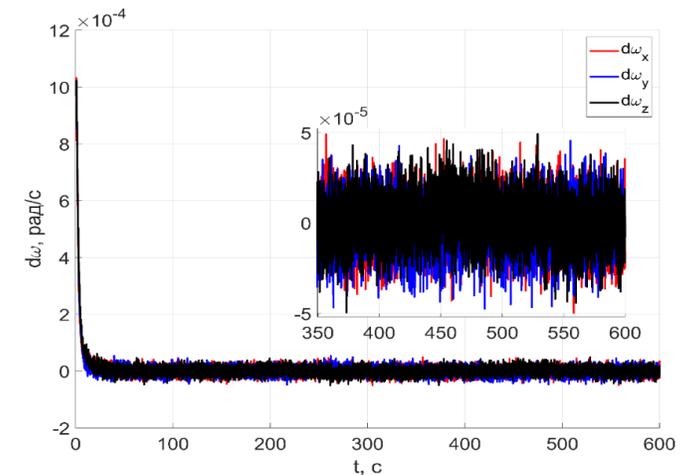
Угловая скорость и измерения ДУСа



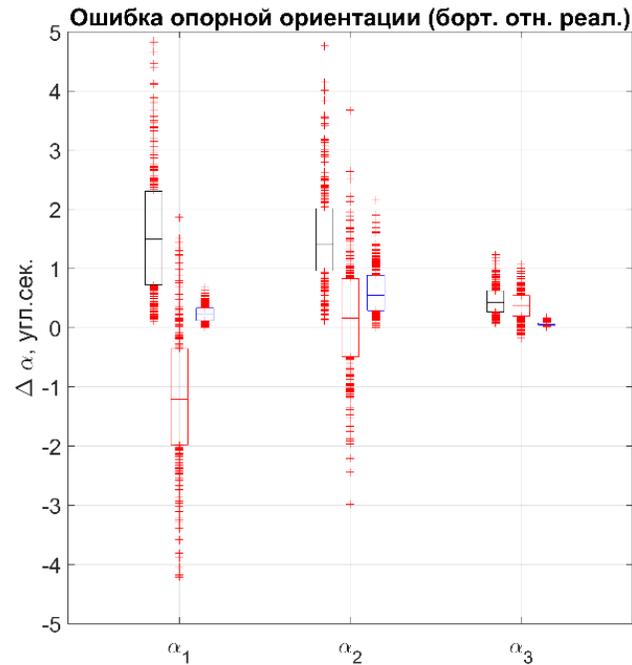
Ошибки оценки ориентации



Ошибки оценки угловой скорости

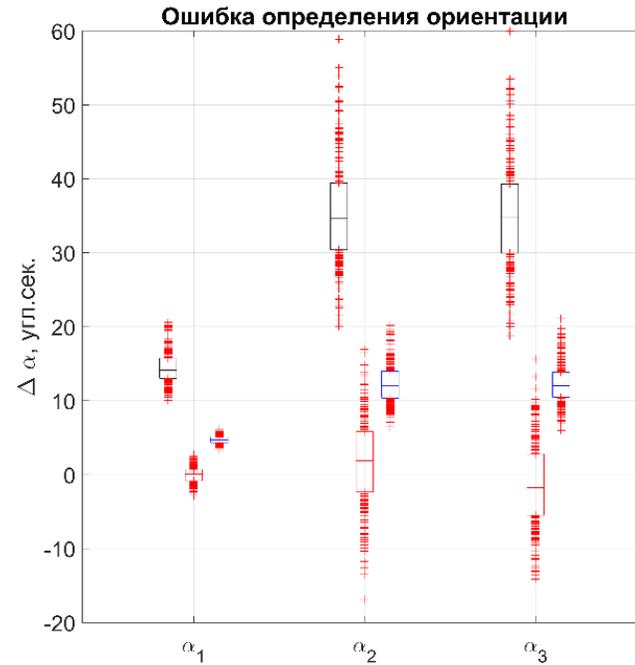


# Влияние ошибок



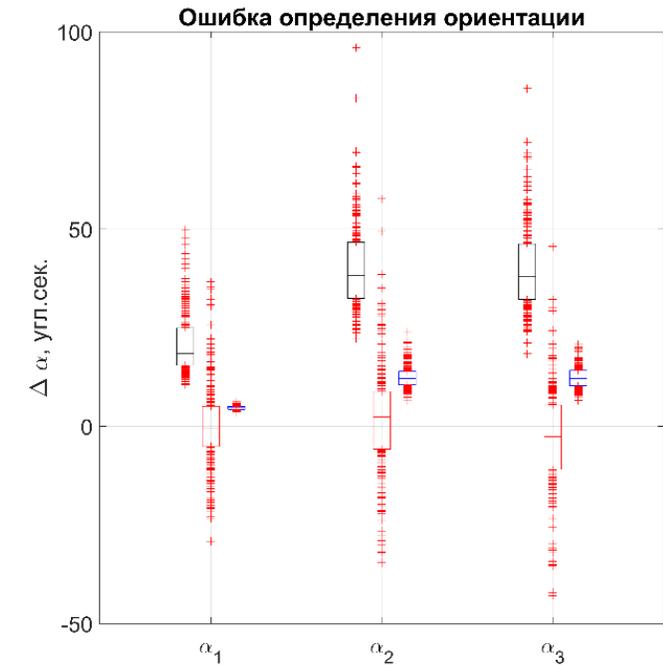
Ошибка оценки  
орбитального  
движения

$$\sigma_r = 10 \text{ м}, \sigma_v = 0.01 \text{ м/с}$$



Тензор инерции

$$\sigma_{J_\varphi} = 5^\circ, \sigma_J = 0.05$$



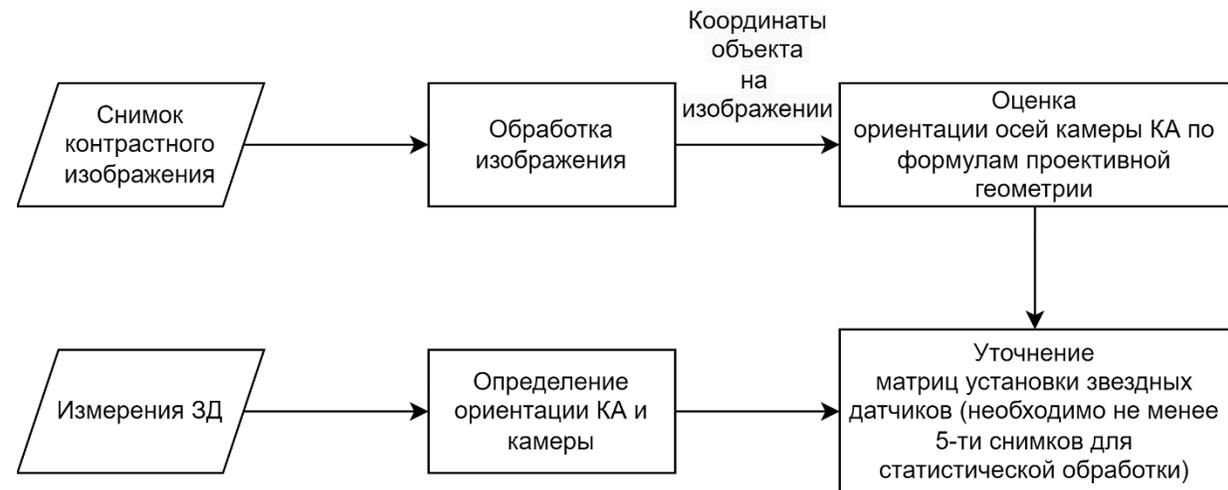
Ошибки установки

$$\sigma_{\text{sensor}} = 20 \text{ угл.сек}$$

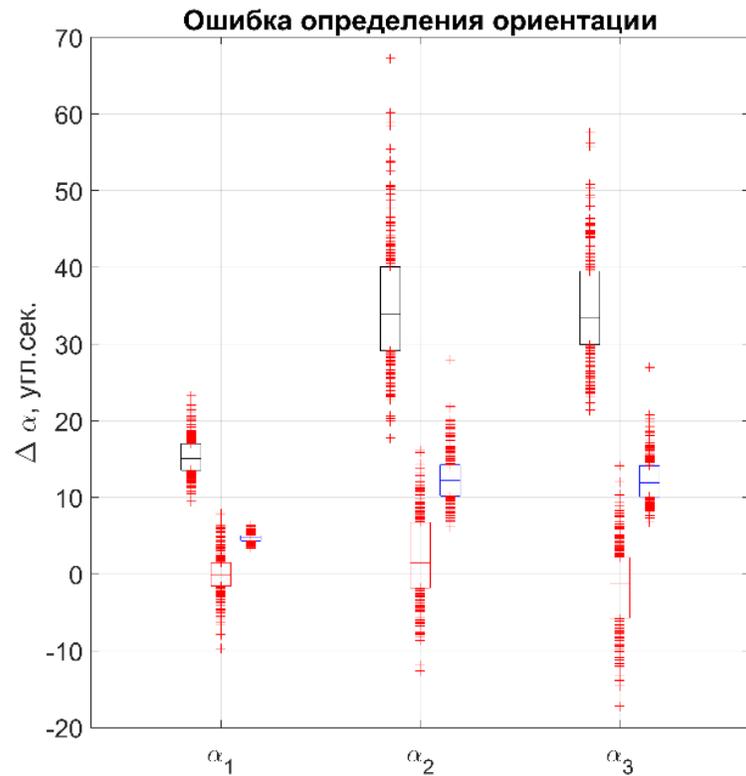
# +Наземное математическое обеспечение

Программные модули, уточняющие параметры системы:

- взаимная ориентация датчиков и камеры
- ориентация маховиков
- тензор инерции КА

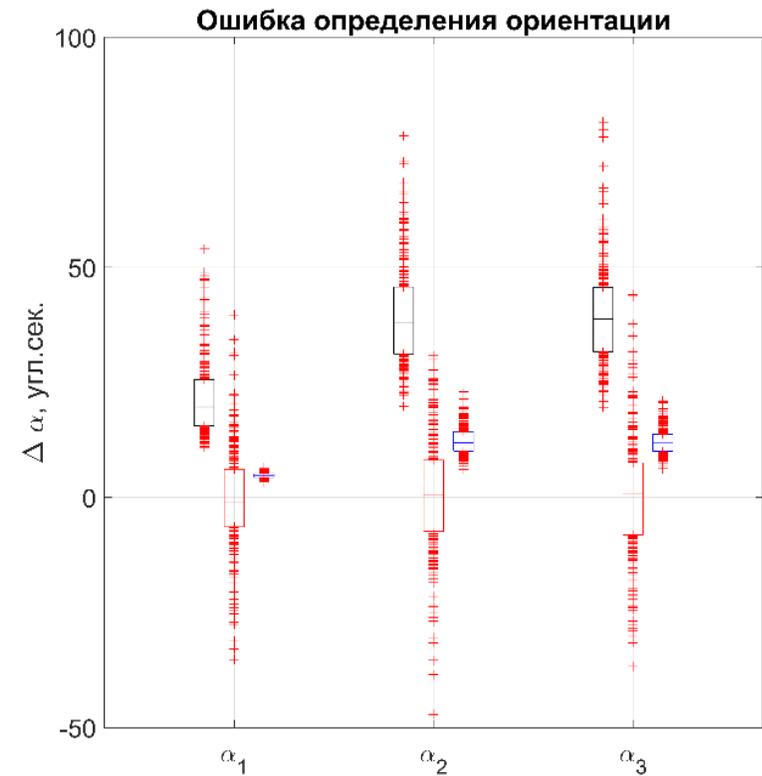


# Численное моделирование II



$$\sigma_{RW} = 100 \text{ угл.сек.} \quad \sigma_{sensor} = 5 \text{ угл.сек} \quad \sigma_{J_\varphi} = 5^\circ, \sigma_J = 0.05$$

$$\sigma_r = 5 \text{ м,} \quad \sigma_v = 0.005 \text{ м/с} \quad \sigma_{ext} = 10^{-5}$$



$$\sigma_{RW} = 600 \text{ угл.сек.} \quad \sigma_{sensor} = 20 \text{ угл.сек} \quad \sigma_{J_\varphi} = 10^\circ, \sigma_J = 0.1$$

$$\sigma_r = 10 \text{ м,} \quad \sigma_v = 0.01 \text{ м/с} \quad \sigma_{ext} = 10^{-4}$$