



XLIX Академические чтения по космонавтике
29 января 2025 г.



Анализ чувствительности гало-орбит вокруг либрационных точек L_1 и L_2 системы Земля- Луна к навигационным ошибкам

И.Д. Забара
М.Г. Ширококов
Д.Г. Перепухов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Мотивация

Повышенный интерес к окололунному пространству и Луне обусловлен следующими планами:

- Создание орбитальной станции
- Проведение научных экспериментов и исследований
- Разработка автономной спутниковой навигационной сети вокруг Луны
- Освоение и добыча лунных материалов



Для успешного выполнения этих планов ключевыми задачами остаются гарантирование надежности миссий и эффективное реагирование на внештатные ситуации в автономных условиях.

Для этого необходимо рассматривать и изучать показатели, значение которых могло бы охарактеризовать возникшую ситуацию с динамической точки зрения. Таким показателем может быть, например, отклонение от прогнозируемой орбиты.

Навигационная неопределённость

- Определение координаты и скорости космического аппарата (КА) в любом случае будет иметь ограниченную точность, характеризующуюся, например, среднеквадратичными отклонениями σ_{pos} и σ_{vel}
- Внештатная ситуация также может проявляться в значительном отклонении от запланированного положения КА в заданный момент времени

Вышеописанные проблемы приводят к тому, что КА через определённые временные промежутки (например, периоды гало-орбит) может значительно отклоняться от прогнозируемого положения: *данные отклонения и предлагается исследовать*

К исследованию подобных явлений можно подойти с точки зрения разных подходов:

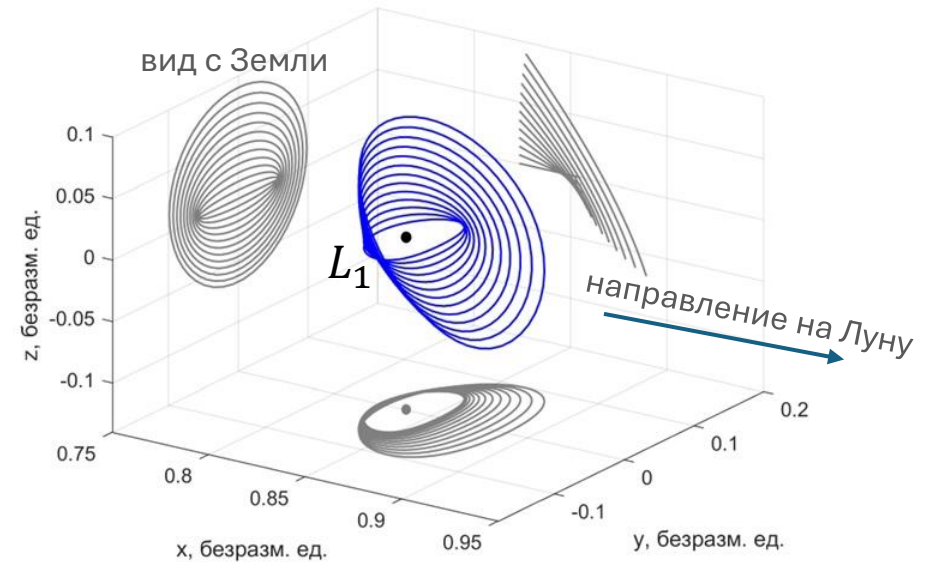
- Теория динамических систем (линейная)
- Применение специализированных алгоритмов и численных методов оптимизации

Цель работы

- **Целью данной работы** является исследование величины максимального отклонения d_{max} аппарата при движении в окрестности гало-орбит в зависимости от параметров навигационной неопределённости по положениями и скоростям σ_{pos} и σ_{vel}
- Целесообразно будет также при возможности получить удобные аналитические зависимости $d_{max}(\sigma_{pos}, \sigma_{vel})$
- Найденные аналитические зависимости позволили бы, не прибегая к трудозатратным вычислениям, сразу получать значение параметра d_{max} , значение которого могло бы охарактеризовать возникшую внештатную ситуацию с динамической точки зрения

Гало-орбиты, связанные с точками либрации в круговой ограниченной задаче трёх тел

Гало-орбиты – пространственные периодические орбиты, однопараметрическое семейство которых ответвляется от плоских решений Ляпунова, и которые делают виток (“гало”) вокруг линии, соединяющей главные тела



L_1 :

N	x_0	z_0	v_{y0}	T	J	μ
1	0.82339	0	0.12632	2.74299	3.18625	2361.15
2	0.82338	0.009	0.12766	2.74354	3.18565	2333.12
3	0.82338	0.019	0.13212	2.74543	3.18327	2239.14
...

(однозначно параметризуются z_0)

L_2 :

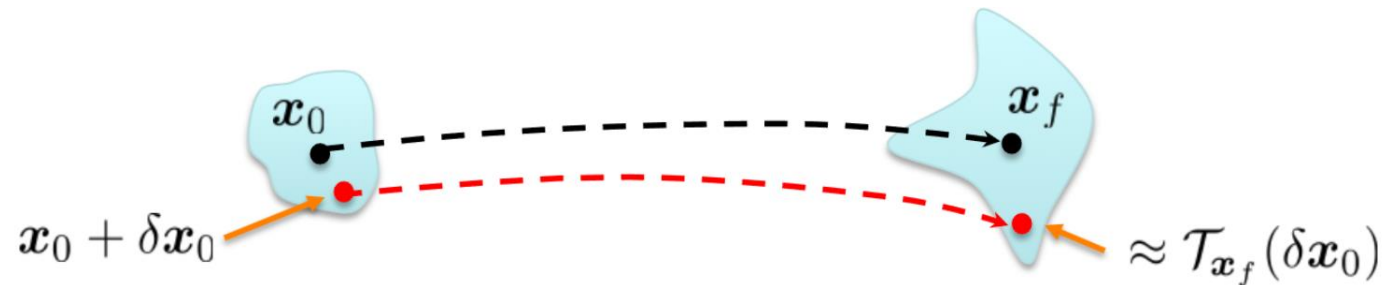
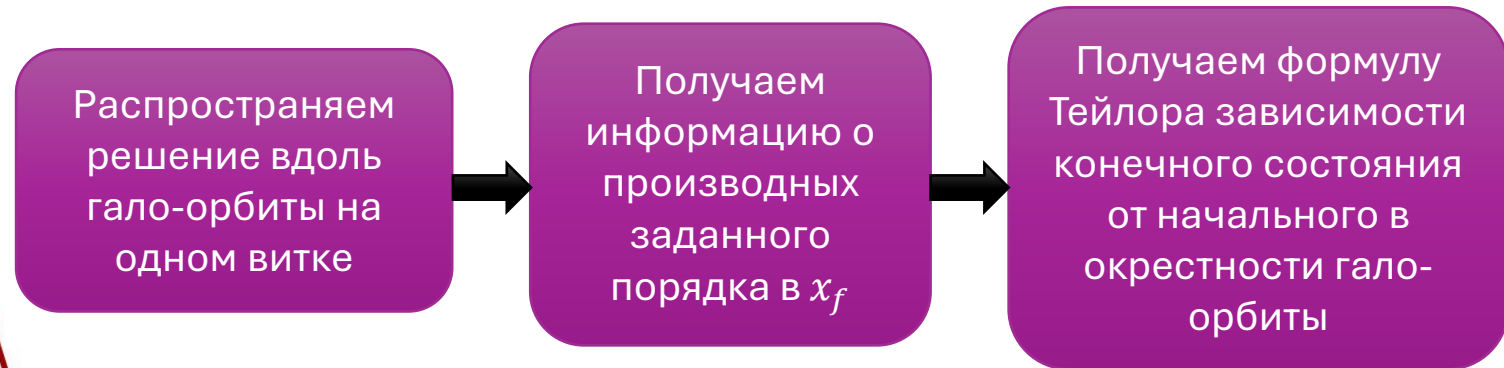
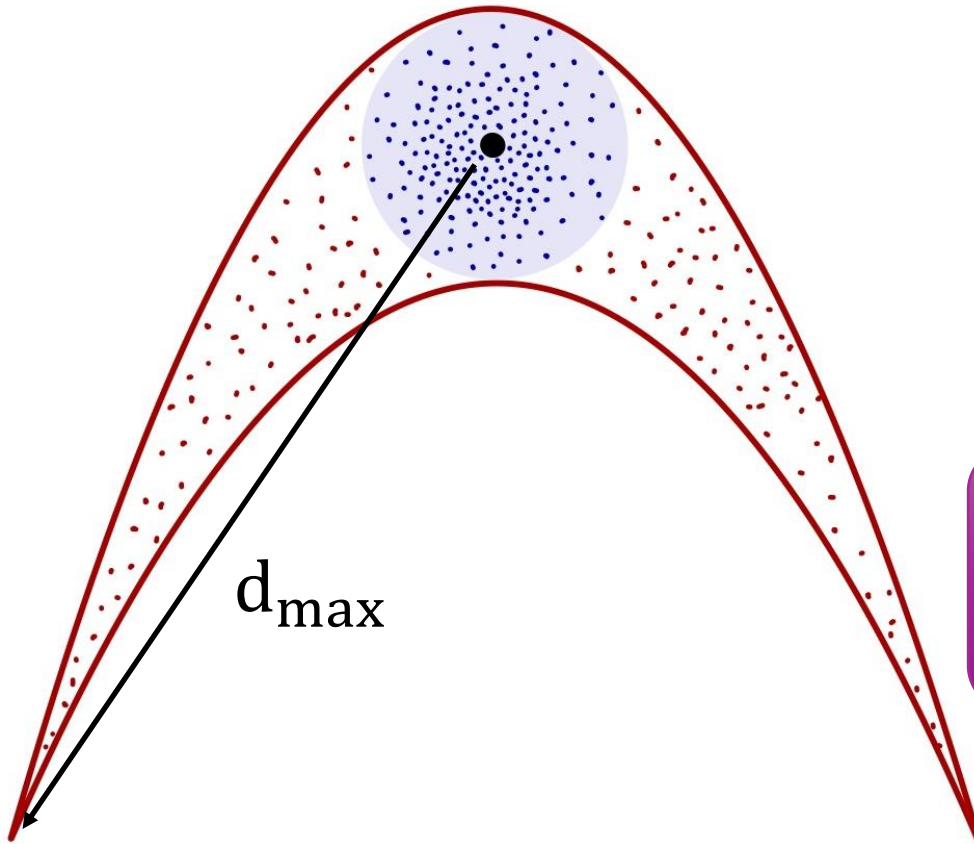
N	x_0	z_0	v_{y0}	T	J	μ
1	1.18089	0.0015	-0.15606	3.41566	3.16406	1211.59
2	1.18065	0.0156	-0.15726	3.41302	3.16304	1189.85
3	1.17873	0.0156	-0.16675	3.39851	3.15527	1037.36
...

(однозначно параметризуются T)

Постановка задачи, методика расчёта d_{max}

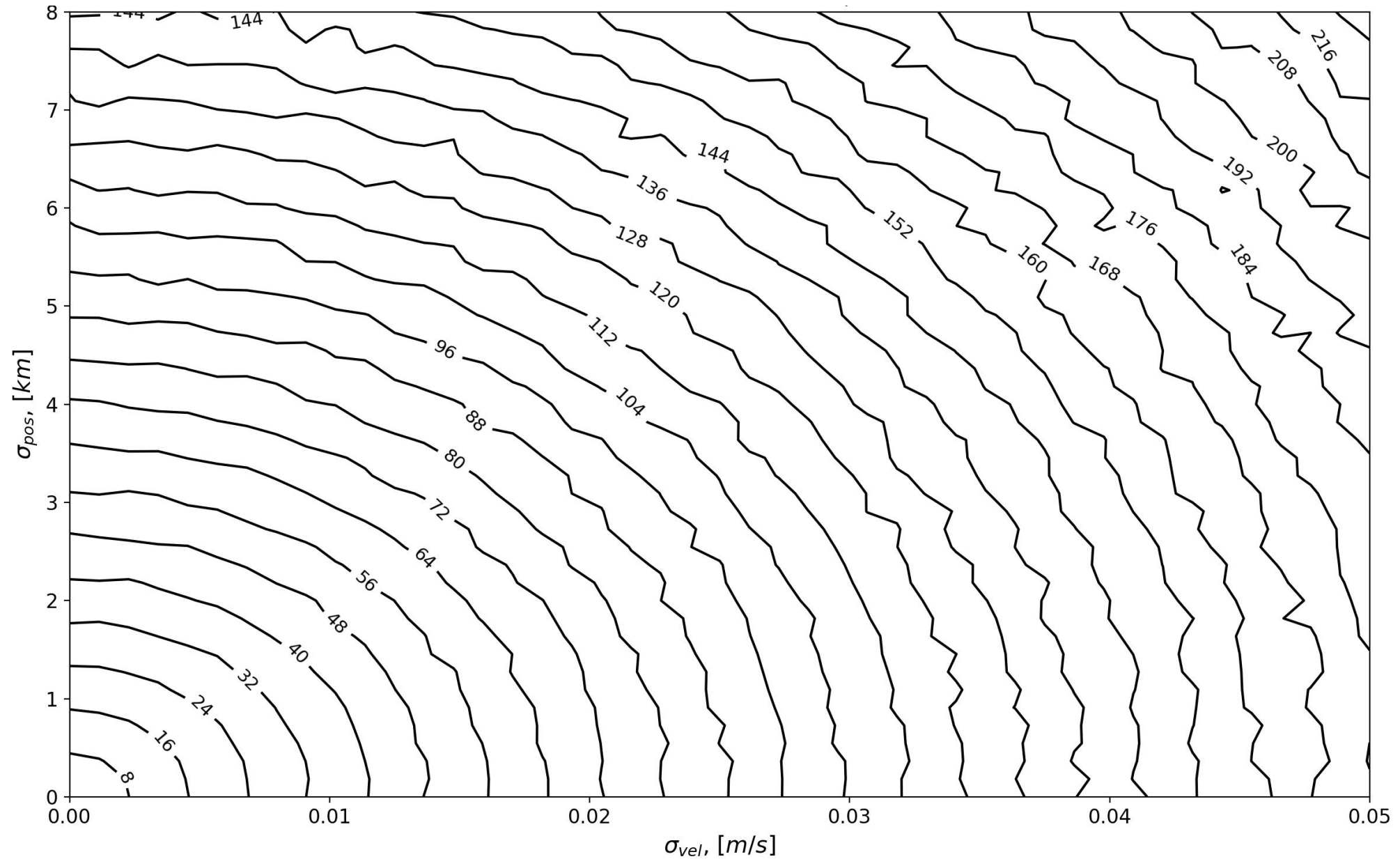
$$d_{max}(\sigma_{pos}, \sigma_{vel}) = ?$$

Быстро решить большое количество задач Коши с различными возмущёнными начальными условиями позволит метод *автоматического дифференцирования*¹

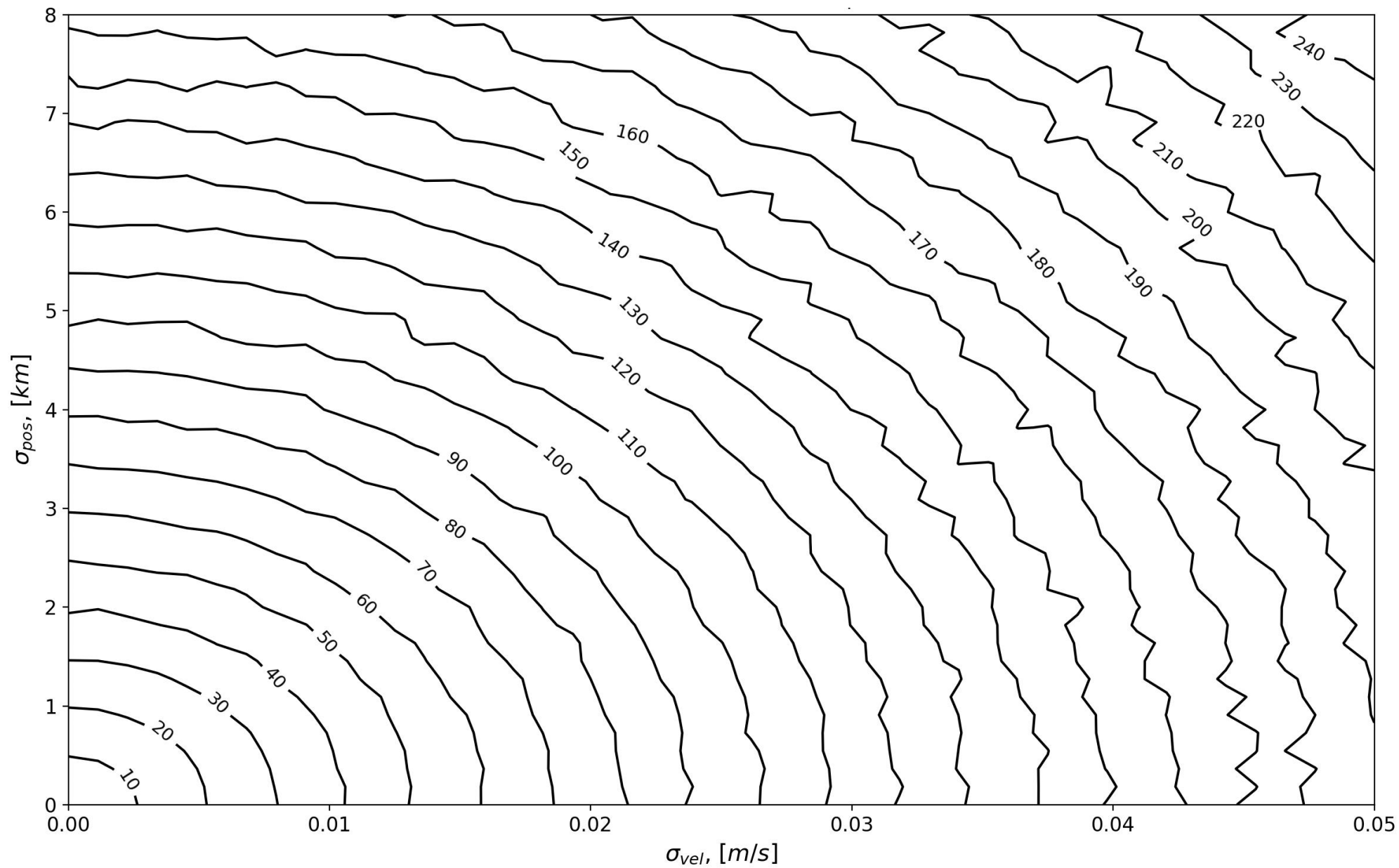


[1] daceyry // URL: <https://github.com/giovannipurpura/daceyry>

Изолинии $d_{\max}(\sigma_{pos}, \sigma_{vel})$ [км] для орбиты в окрестности L_1 с $z_0 = 69.9$ [тыс. км]



Изолинии $d_{max}(\sigma_{pos}, \sigma_{vel})$ [км] для орбиты в окрестности L_2 с $T = 11.3$ [дня]



Определение аналитических зависимостей

Из вида изолиний можно предположить, что $d_{\max} = \sqrt[n]{\alpha_1 \sigma_{pos}^n + \alpha_2 \sigma_{vel}^n}$, $n \in \mathbb{R}_+$

Задача линейной регрессии (МНК) для фиксированного n :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_{\max}^n - \alpha_1 \sigma_{pos}^n - \alpha_2 \sigma_{vel}^n)^2 \rightarrow \min_{\alpha_1, \alpha_2} \Leftrightarrow \mathcal{J} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mathbf{a}_i^T \boldsymbol{\alpha})^2 \rightarrow \min_{\boldsymbol{\alpha}}$$

Формула Маркова–Гаусса: $\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha}^*(n) = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}$

Далее оптимизируем по n для найденного $\boldsymbol{\alpha}^*(n)$:

$$n^* = \arg \min_{n \geq 0} \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}^*(n))$$

Данную оптимизационную задачу нахождения n^* решаем методом сопряжённых направлений Пауэлла

Итоговое значение: $\boldsymbol{\alpha}^{**} = \boldsymbol{\alpha}^*(n^*)$

Формула для орбиты в окрестности L_1 с $z_0 = 69.9$ [тыс. км] :

$$d_{max} = \sqrt{0.41 \cdot (\widehat{\sigma_{pos}})^2 + 0.59 \cdot (\widehat{\sigma_{vel}})^2} \cdot 227.8 \text{ км}$$

Пробная точка $(\sigma_{pos}, \sigma_{vel}) = (4 \text{ км}, 0.03 \frac{\text{м}}{\text{с}})$

- Значение d_{max} по численной процедуре: 127.9 км
- Значение d_{max} по выведенной формуле: 126.9 км

Формула для орбиты в окрестности L_2 с $T = 11.3$ [дня] :

$$d_{max} = \sqrt{0.43 \cdot (\widehat{\sigma_{pos}})^2 + 0.57 \cdot (\widehat{\sigma_{vel}})^2} \cdot 247.3 \text{ км}$$

Пробная точка $(\sigma_{pos}, \sigma_{vel}) = (4 \text{ км}, 0.03 \frac{\text{м}}{\text{с}})$

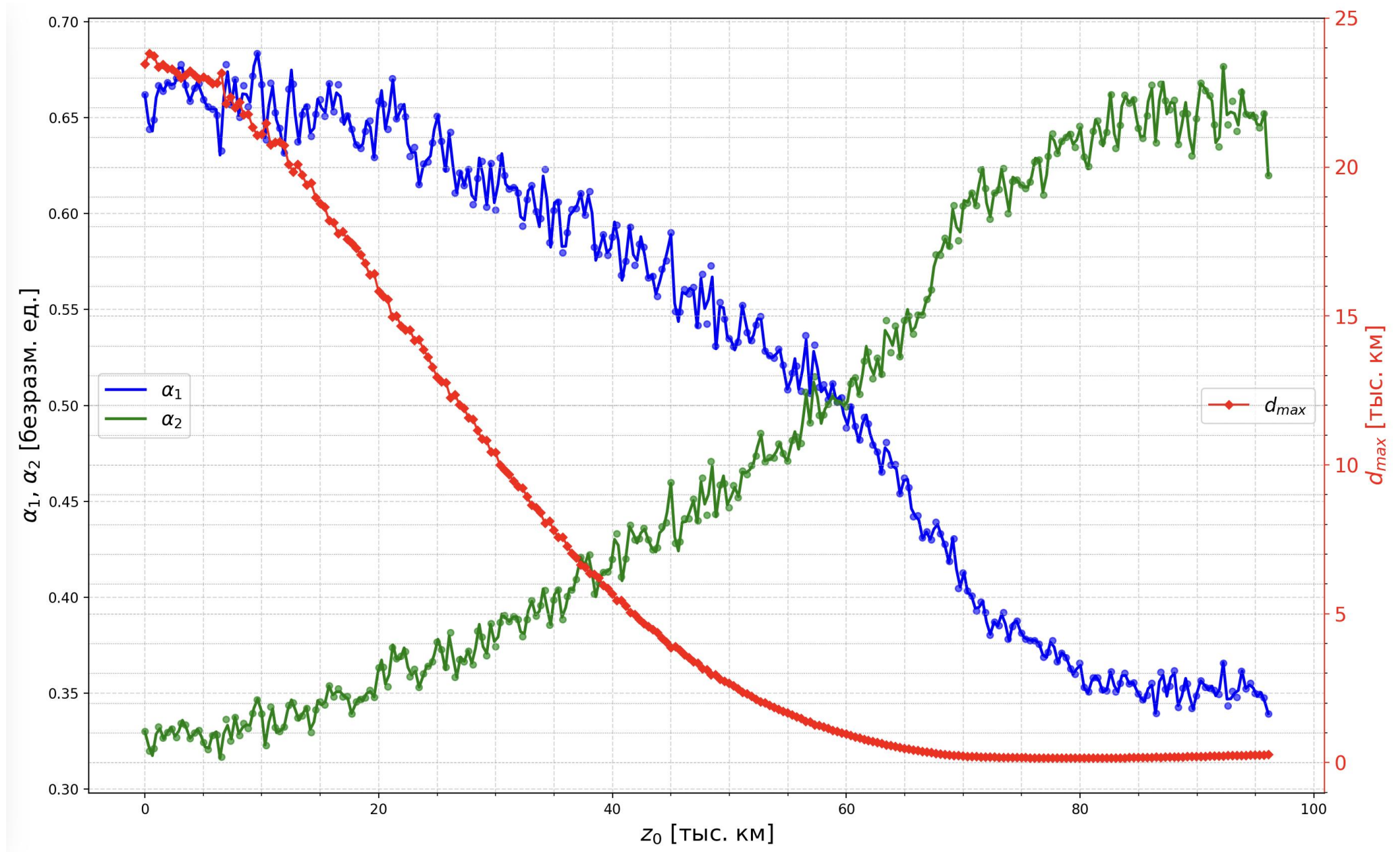
- Значение d_{max} по численной процедуре: 139.8 км
- Значение d_{max} по выведенной формуле: 139.3 км

Практически для всех орбит метод Пауэлла при решении задачи $n^* = \underset{n \geq 0}{\operatorname{argmin}} J(\alpha^*(n))$ сходится к

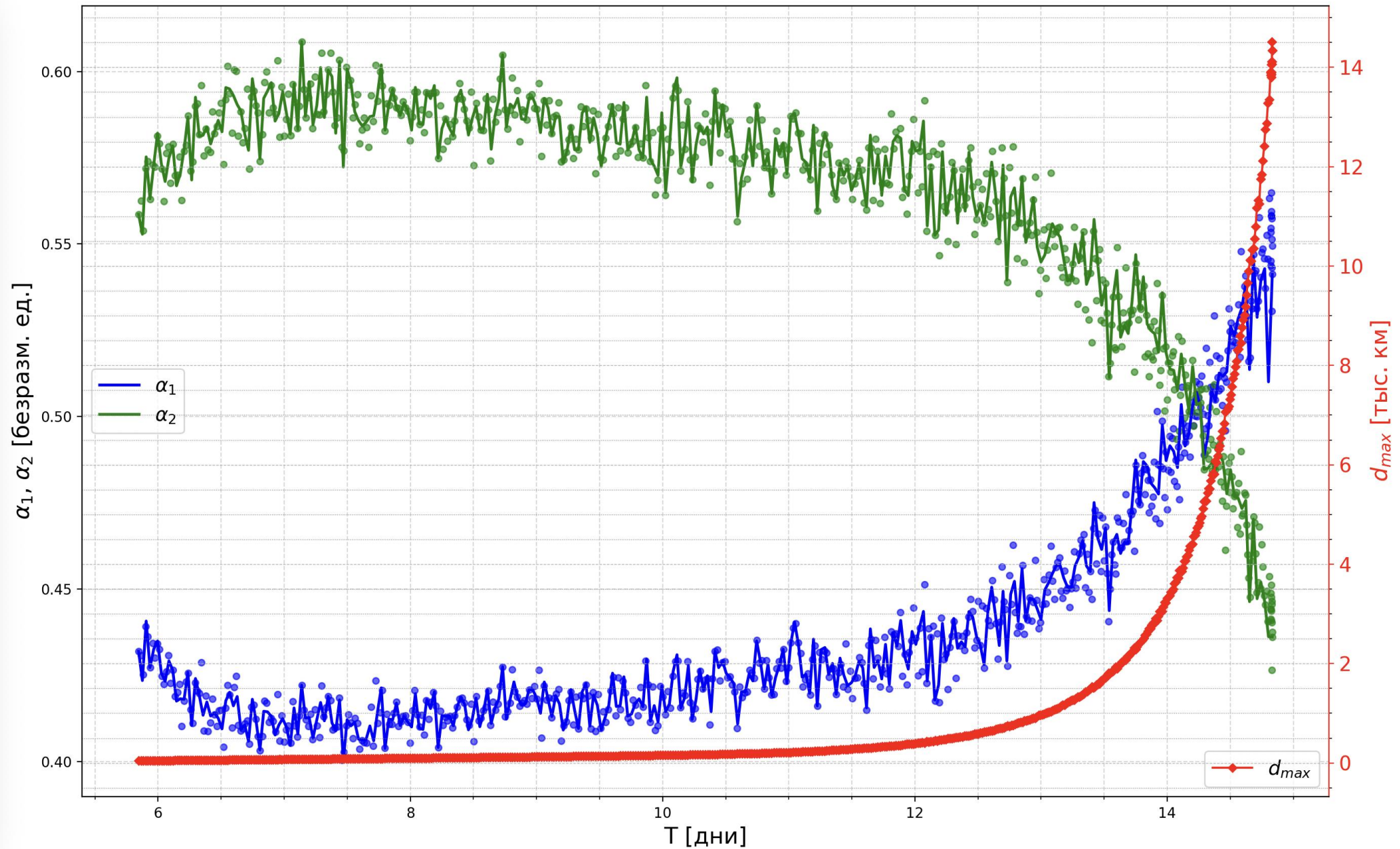
значению $n^* \approx 2$ в среднем за $N_{iter} = 2$ итерации

Теперь определим, как эти коэффициенты зависят от орбиты в семействе

α_1, α_2 и d_{max} [км] для гало-орбит в окрестности L_1



α_1, α_2 и d_{max} [км] для гало-орбит в окрестности L_2



Выводы

- Предложена и реализована методика расчёта величины максимального возможного отклонения d_{max} аппарата при движении по гало-орбите в зависимости от параметров навигационной неопределённости
- Предложена и реализована методика получения удобных полуаналитических зависимостей величины d_{max} , которая в итоге была применена для всех гало-орбит из сформированной базы данных

*Работа поддержана грантом Российского научного фонда
(проект №24-71-00032)*