

А. В. Родионов

Схемы типа Годунова
в вычислительной газовой динамике

Версия 1.2

2026

Данная монография написана по материалам цикла лекций, прочитанных автором в режиме онлайн и выложенных в интернете на сайте Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Эти лекции были ориентированы главным образом на студентов и аспирантов, уже получивших начальный объем знаний в области численных методов в целом и методов сквозного счета в частности. Они представляет собой обобщение и систематизацию в максимально простой и понятной форме многолетнего опыта автора в области вычислительной газовой динамики и нацелены на помощь молодым ученым-вычислителям в освоении основ и важных тонкостей схем типа Годунова.

По содержанию монография тесно связана с лекциями, предлагая тем самым альтернативный вариант изучения (повторения) прочитанного материала. Лекционный стиль изложения, когда периодически повествование ведется от первого лица, в монографии сохранен.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность модераторам лекций — Сергею Бахнэ и Павлу Родионову. В этой связи вспоминаются полезные обсуждения с Сергеем, состоявшиеся еще до начала работы над лекциями, и укрепившие автора в намерении взяться за этот проект. Особая признательность Павлу за то, что он взял на себя основной труд по организации онлайн-лекций, включая их запись и последующее скрупулезное редактирование.

Содержание

Введение	4
1 Схема Годунова	5
1.1 Схема Годунова для линейных уравнений	6
1.1.1 Аппроксимация и устойчивость схемы	7
1.1.2 Свойство схемы сохранять монотонность решения	8
1.1.3 О точности схемы	12
1.2 Схема Годунова для уравнений газовой динамики	13
1.2.1 Задача Римана о распаде разрыва	15
1.2.2 Некоторые особенности схемы	21
1.2.3 Обобщение схемы на многомерные задачи	23
1.2.4 Стационарный аналог схемы	27
1.2.5 Признание и широкое распространение схемы	29
Послесловие к главе 1	32
2 Схемы второго порядка точности	35
2.1 Схема Колгана	36
2.1.1 Кусочно-линейное распределение параметров	37
2.1.2 Обобщенная задача Римана	39
2.1.3 Свойство схемы сохранять монотонность решения	41
2.1.4 Аппроксимация и устойчивость схемы	42
2.1.5 Тестовые задачи для линейного уравнения переноса	44
2.2 Схемы ван Лира	48
2.2.1 Монотонизирующий ограничитель	49
2.2.2 Лагранжево-эйлерова методика	50
2.2.3 Алгоритмы реконструкции	52
2.2.4 Тестовые примеры	55
2.2.5 Схема MUSCL	56
2.2.6 Историческое упущение: Колган и его схема	57
Список литературы	62

Введение

Прежде всего надо сказать, что схемы (или методы) типа Годунова принадлежат к классу методов сквозного счета, которые ориентированы на расчет газодинамических течений с разрывами, такими как ударные волны и контактные поверхности, без их явного отслеживания. При этом разрывы размываются на расчетной сетке, превращаясь в узкие слои с большими градиентами параметров.

Особенностью схем типа Годунова является то, что это противопотоковые (противопоточные) схемы, в которых для расчета потоков между ячейками используется точное или приближенное решение задачи Римана.

Также следует сказать, что в результате более чем 60-летней эволюции схемы типа Годунова приобрели чрезвычайное разнообразие, так, что теперь составить их полное и объективное описание представляется крайне затруднительной задачей. Вместе с тем, уже существует множество обзоров, курсов лекций и монографий, каждый которых дает свой взгляд на обсуждаемый многоаспектный предмет. Можно сказать, что совокупность этих представлений и является неким приближением к полному описанию схем типа Годунова.

Таким образом, предлагаемый вашему вниманию материал есть еще один, безусловно, субъективный взгляд на обсуждаемый предмет. В нем я постараюсь в хронологическом порядке и, по возможности, кратко рассказать о наиболее значимых (на мой взгляд) публикациях и заложенных в них идеях. При этом основное внимание будет уделено ранним публикациям, определившим главные направления эволюции схем типа Годунова.

Глава 1

Схема Годунова

Начнем с Википедии. Вот что там написано в статье о методе (схеме) Годунова.

Метод Годунова — реализация схем сквозного счета, с помощью которых можно рассчитывать газодинамические течения с разрывами параметров внутри расчетной области. Эта схема предложена С. К. Годуновым в 1959 г. Метод Годунова — это вариант метода контрольного объема. Потоки через боковые грани определяются из решения задачи о распаде произвольного разрыва.

Все так, однако, строго говоря, схема была предложена до 1959-го года. В редакцию Математического сборника базовая статья поступила еще в 1956-м году [1], и пока она находилась там на рассмотрении, в 1957-м году в журнале Успехи математических наук было опубликовано ее краткое изложение [2], полностью описывающее схему.

Исходное положение и цель своей работы Сергей Константинович сформулировал во введении к статье [1]. В то время методы сквозного счета только начинали свое развитие. Первым таким методом стал метод с искусственной вязкостью, предложенный фон Нейманом и Рихтмайером в 1950-м году [3] (Рис. 1.1 слева). В нем используется схема типа "крест", а расчет ведется на разнесенной сетке — разнесенной по пространству и по времени. Плотность и внутренняя энергия газа задаются в центрах ячеек на промежуточном временном слое, а скорость газа задается в узлах сетки.

Альтернативой методу Неймана–Рихтмайера была схема типа "треугольник", предложенная Лаксом в 1954-м году [4] (Рис. 1.1 справа). Она не требует привлечения членов искусственной вязкости, однако обладает слишком большой диссипацией, приводящей к чрезмерному размыванию решения.

Сергей Константинович целью своей работы поставил выбор в некотором смысле наилучшей схемы, допускающей счет через ударные волны. Этот вы-

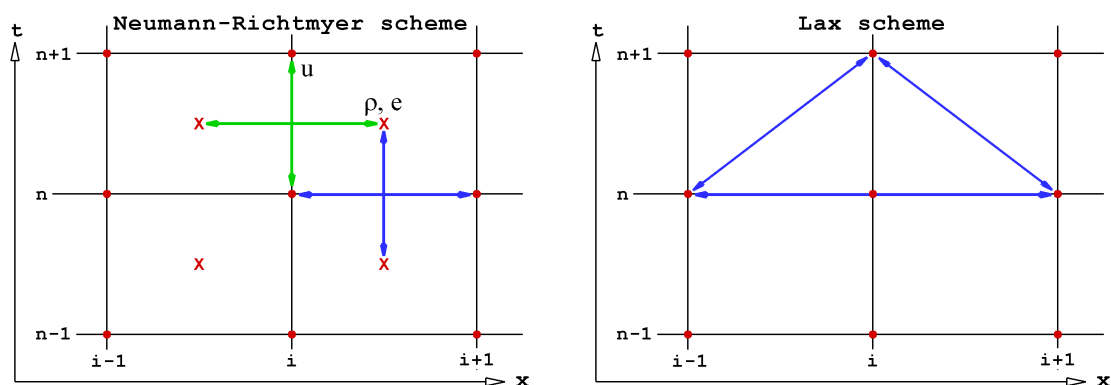


Рис. 1.1: Шаблоны метода Неймана–Рихтмайера и схемы Лакса

бор был сначала произведен для случая решения линейных уравнений, а затем схема была перенесена на общие уравнения гидродинамики.

1.1 Схема Годунова для линейных уравнений

Как осуществлялся выбор наилучшей схемы?

Сначала было выдвинуто требование к решению, полученному приближенно, чтобы качественное его поведение было аналогично поведению точного решения. Конкретно, было потребовано, чтобы схема переводила монотонные функции в монотонные. Затем было доказано, что среди схем второго порядка точности нет удовлетворяющих условию монотонности, и была предложена схема, являющаяся наилучшей (наиболее точной) среди всех схем, сохраняющих монотонность решения. Это исследование проводилось для случая решения линейных уравнений.

Опишем выбранную схему на примере решения линейного уравнения переноса вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} > 0. \quad (1.1)$$

Мы будем рассматривать только случай положительного коэффициента a ; в случае $a < 0$ картина зеркально симметрична.

Точным решением этого уравнения является сохранение параметра u вдоль характеристик $x - at = \text{const}$, что соответствует переносу вещества (носителя параметра u) вправо с постоянной скоростью a .

При описании схемы мы будем использовать равномерную дискретизацию пространства xt с шагами Δx и Δt , так, что $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ и $t^{n+1} - t^n = \Delta t$, где i и n — целочисленные индексы. Значения параметра u в точке $x = x_i$ на временном слое $t = t^n$ будем обозначать как u_i^n .

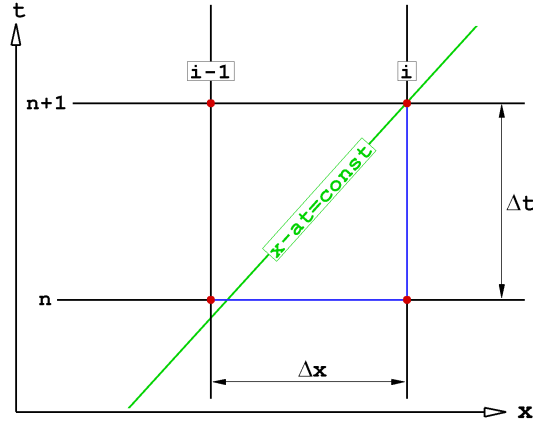


Рис. 1.2: Шаблон схемы Годунова

Теперь о выбранной схеме, аппроксимирующей уравнение (1.1). Ее можно записать в виде

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (1.2)$$

Схема (1.2) сводится к следующему простому уравнению, определяющему значение параметра u в точке i на новом (верхнем) временном слое $n+1$ в зависимости от значений u на старом (нижнем) временном слое n :

$$u_i^{n+1} = (1 - C_{CFL}) u_i^n + C_{CFL} u_{i-1}^n, \quad (1.3)$$

где $C_{CFL} = a\Delta t/\Delta x$ — так называемое число Куранта–Фридрихса–Леви или просто число Куранта.

Как можно видеть, правая часть уравнения (1.3) есть линейная интерполяция на нижнем временном слое в точку, в которую попадает характеристика, выпущенная из i -ой точки верхнего слоя (см. Рис. 1.2). Очевидно, что при $C_{CFL} = 1$ эта характеристика попадает в точку $i-1$ и $u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$; в этом случае схема является точной.

1.1.1 Аппроксимация и устойчивость схемы

Разложим разностное уравнение (1.2) в ряд Тейлора относительно точки (x_i, t^n) .

Разложение первого члена дает следующее выражение¹

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a\Delta x}{2} C_{CFL} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^2),$$

¹Здесь мы учитываем, что $\partial^2 u / \partial t^2 = \partial(-a\partial u / \partial x) / \partial t = a^2 \partial^2 u / \partial x^2$.

а разложение второго члена дает

$$a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = a \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{a\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2).$$

Суммируя, мы приходим к аппроксимационному соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a\Delta x}{2} (1 - C_{CFL}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2 + \Delta t^2), \quad (1.4)$$

которое показывает, что исходное уравнение аппроксимируется с первым порядком точности (в правой части соотношения главный член, определяющий погрешность схемы, выделен синим).

Используя спектральный признак устойчивости Неймана можно доказать, что схема устойчива при числе Куранта не превышающем единицы.

Доказательство. Представив решение в виде $u_m^n = \lambda^n \exp^{i\alpha m}$ (здесь $i = \sqrt{-1}$) и подставив его в (1.3), получаем: $\lambda = 1 - C_{CFL} + C_{CFL} \exp^{-i\alpha}$ или $\text{Re}\lambda = 1 - C_{CFL} + C_{CFL} \cos \alpha$, $\text{Im}\lambda = -C_{CFL} \sin \alpha$. Отсюда нетрудно получить, что условие устойчивости $\|\lambda\| \leq 1$ при любом α выполняется, если $C_{CFL} \leq 1$.

Из аппроксимации и устойчивости следует, что на гладких решениях схема будет обеспечивать сходимость первого порядка.

То, что схема неустойчива и не дает сходимости при $C_{CFL} > 1$ можно показать и другими способами.

Первый вариант необходимого условия. Обратим внимание на то, что характеристика, исходящая из точки (x_i, t^n) (см. Рис. 1.3) должна целиком лежать в области влияния численного решения, то есть формула (1.3) должна соответствовать интерполяции, а не экстраполяции. Иначе сходимость к точному решению будет невозможной. При $C_{CFL} > 1$ это условие не выполняется.

Второй вариант необходимого условия. В (1.4) член, выделенный красным, это диссипативный член. Он отвечает за размывание решения. Если на начальном профиле u присутствуют заметные неоднородности, то в процессе решения задачи они постепенно будут размываться; если задачу решать долго, то они станут визуально неразличимы. Так происходит, если коэффициент при второй производной положителен, то есть когда число Куранта меньше единицы. В случае, когда $C_{CFL} > 1$, этот коэффициент становится отрицательным, и мы имеем антидиффузию. То есть, если мы стартуем от гладкого решения, то по мере расчета на нем будут усиливаться неоднородности, которые изначально были невидны, например ошибки округления. В результате расчет будет неустойчив. Это, как если бы мы время повернули вспять и стали решать задачу в обратном порядке: от конечного момента времени к начальному.

1.1.2 Свойство схемы сохранять монотонность решения

Важным элементом статьи [1] было доказательство следующей теоремы.

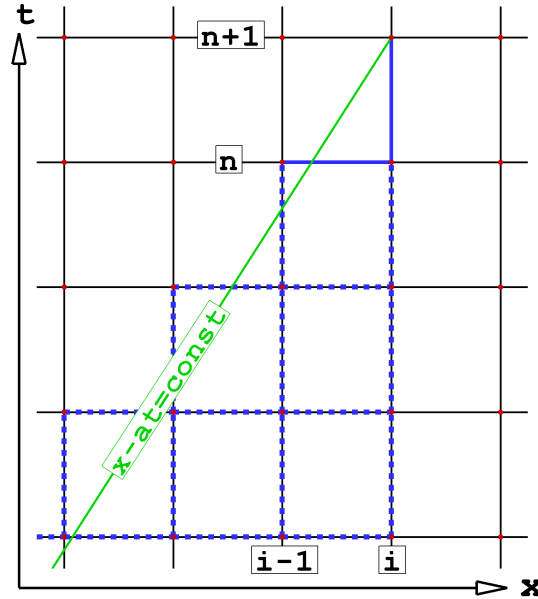


Рис. 1.3: Область влияния схемы Годунова

Теорема. Для того, чтобы схема

$$u_i^{n+1} = \sum_k C_{k-i} u_k^n \quad (1.5)$$

переводила все монотонные функции в монотонные с тем же направлением роста, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты C_m были неотрицательными.

Докажем ее. Для начала распишем сумму

$$\sum_k C_{k-i} u_k^n = \dots + C_{-2} u_{i-2}^n + C_{-1} u_{i-1}^n + C_0 u_i^n + C_1 u_{i+1}^n + C_2 u_{i+2}^n + \dots$$

и заметим, что для схемы (1.3) все коэффициенты C_m нулевые, кроме двух,

$$C_{-1} = C_{CFL}, \quad C_0 = 1 - C_{CFL},$$

которые положительные, если число Куранта $C_{CFL} < 1$.

Теперь вернемся к общему виду (1.5) и запишем это же выражение для $i-1$ -й ячейки. Вычтем одно выражение из другого и получим такое соотношение

$$u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} = \sum_k C_{k-i} (u_k^n - u_{k-1}^n). \quad (1.6)$$

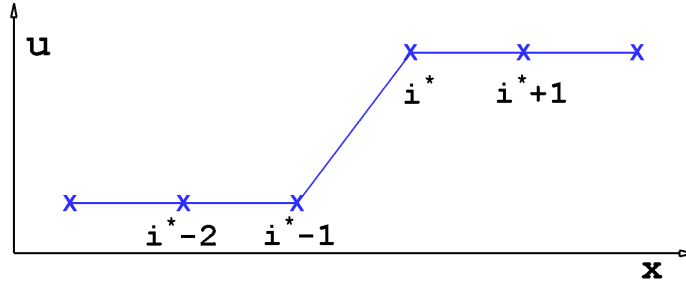


Рис. 1.4: Иллюстрация к доказательству необходимого условия монотонности

Предположим, что все коэффициенты C_m положительные. Тогда, если на n -м временном слое решение монотонно возрастает (то есть в (1.6) все разности справа положительные), то и на $n+1$ -м слое все разности будут положительными (то есть решение будет монотонно возрастать). И наоборот, монотонно убывающее решение будет переходить в монотонно убывающее решение.

Таким образом мы доказали достаточное условие. Докажем, что оно необходимо.

Пусть на нижнем временном слое решение имеет следующий вид — все разности нулевые, кроме одной, между ячейками i^*-1 и i^* (см. Рис. 1.4). Такое решение является монотонно неубывающим. Тогда запишем все разности на новом слое, они будут равны:

$$\begin{aligned} & \dots \\ u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} &= C_{i^*-i-1} (u_{i^*}^n - u_{i^*-1}^n) \\ u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} &= C_{i^*-i} (u_{i^*}^n - u_{i^*-1}^n) \\ u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1} &= C_{i^*-i+1} (u_{i^*}^n - u_{i^*-1}^n) \\ & \dots \end{aligned}$$

Единственная ненулевая разность на нижнем слое (она общая в правых частях), умножается на один из коэффициентов C_m . Таким образом, если какой-либо из коэффициентов C_m будет отрицательным, то мы будем иметь отрицательную разность на новом слое. Значит такая схема не будет монотонной и, тем самым, мы доказали, что условие неотрицательности всех C_m является необходимым условием монотонности схемы.

В работе [1] Сергей Константинович также показал, что среди схем второго порядка точности нет удовлетворяющих условию монотонности.

Действительно, для схем второго порядка разложение в ряд Тейлора будет иметь следующий вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = c_2 \Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c_3 \Delta x^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (1.7)$$

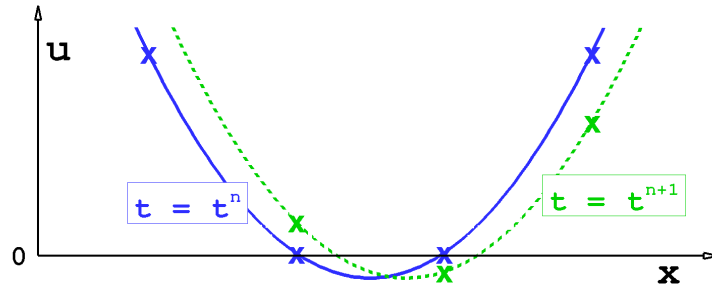


Рис. 1.5: Пример расчета по схеме второго порядка точности: функция $u(x)$ параболического вида

В правой части (1.7) содержатся только производные третьего порядка и выше. Значит, такая схема будет переводить параболу в параболу без потери точности (правая часть для параболы нулевая). Предположим, парабола на нижнем временном слое имеет вид как показано на Рис. 1.5 синим цветом. Все значения в расчетных точках (крестики) неотрицательны.

Парабола на новом слое (она показана зеленым) будет сдвинута относительно начальной и значение u в одной из расчетных точек должно стать отрицательным. Однако если схема сохраняет монотонность, то все коэффициенты C_m в формуле (1.5) неотрицательны. Поскольку значения u на n -м слое также были неотрицательны, то из формулы следует, что все значения u на $n+1$ -м слое также должны быть неотрицательными.

Получается противоречие, которое показывает невозможность построения монотонной схемы второго порядка. Кстати, для схем более высокого порядка эти рассуждения также справедливы.

Таким образом, Сергей Константинович доказал, что только схемы первого порядка могут удовлетворять условию монотонности. Сейчас мы знаем, что этот запрет (эти красные флажки) можно обойти. О том, как это было сделано будет рассказано в следующей главе.

Однако продолжим обсуждать схему, выбранную Годуновым.

То, что эта схема сохраняет монотонность решения, можно показать очень просто. Действительно, пусть на нижнем временном слое решение представляет собой монотонно неубывающую функцию, как демонстрирует эта последовательность неравенств:

$$\dots \leq u_{i-2}^n \leq u_{i-1}^n \leq u_i^n \leq u_{i+1}^n \leq \dots$$

Согласно формуле (1.3), если число Куранта меньше единицы (то есть оба коэффициента в формуле положительные и в сумме дают единицу), то значение u в каждой точке на новом временном слое будет находиться между значениями u в двух точках на старом слое. Тогда в последовательности неубывающих

значений новые значения вклиниваются следующим образом:

$$\dots \leq u_{i-2}^n \leq u_{i-1}^{n+1} \leq u_{i-1}^n \leq u_i^{n+1} \leq u_i^n \leq u_{i+1}^{n+1} \leq u_{i+1}^n \leq \dots$$

Отсюда сразу видно, что и на $n+1$ -м слое мы имеем монотонно неубывающую функцию.

1.1.3 О точности схемы

В работе [1] также было показано, что выбранная схема (1.2) является наиболее точной среди всех схем, сохраняющих монотонность решения. При этом Сергей Константинович рассматривал только класс трехточечных схем, сводимых к уравнению²

$$u_i^{n+1} = C_{-1}u_{i-1}^n + C_0u_i^n + C_1u_{i+1}^n. \quad (1.8)$$

Как доказывается такое утверждение? Для начала запишем трехточечную схему, аппроксимирующую уравнение (1.1), в общем виде:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \left[(1 - \alpha) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \right] = 0. \quad (1.9)$$

где α — свободный параметр.

Связав уравнения (1.8) и (1.9), мы получим соотношения

$$C_{-1} = (1 - \alpha)C_{CFL}, \quad C_0 = 1 - (1 - 2\alpha)C_{CFL}, \quad C_1 = -\alpha C_{CFL},$$

из которых следует условие монотонности схемы (неотрицательность всех трех коэффициентов): $-\alpha_0 \leq \alpha \leq 0$, где $\alpha_0 = (1 - C_{CFL})/(2C_{CFL})$.

В то же время разложение схемы (1.9) в ряд Тейлора дает:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a\Delta x}{2} (1 - C_{CFL} - 2\alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2 + \Delta t^2), \quad (1.10)$$

откуда становится ясно, что наиболее точный вариант монотонной схемы (минимальное значение коэффициента, выделенного синим) реализуется при $\alpha = 0$. Что и требовалось доказать.

Кстати замечу, что *схема Лакса* применительно к решению линейного уравнения (1.1) сводится к (1.8) с коэффициентами

$$C_{-1} = \frac{1 + C_{CFL}}{2}, \quad C_0 = 0, \quad C_1 = \frac{1 - C_{CFL}}{2}.$$

Как можно видеть, схема Лакса удовлетворяет условию монотонности при $C_{CFL} \leq 1$. Хотя при $C_{CFL} = 1$ она точна, как и схема (1.2), но при $C_{CFL} < 1$ она является наименее точной трехточечной схемой, удовлетворяющей условию монотонности (для нее $\alpha = -\alpha_0$).

²Это же утверждение можно доказать, рассматривая общий случай схем вида (1.5).

1.2 Схема Годунова для уравнений газовой динамики

Итак, мы обсудили отобранную Годуновым схему на примере решения линейного уравнения переноса. Это очень простая схема, к ней сводится ряд других известных схем и, потому, она имеет множество имен, таких как: схема уголок, противопотоковая (или противопоточная) схема, схема Куранта-Изаксона-Рис (сокращенно схема КИР), сеточно-характеристический метод.

Заслугой Сергея Константиновича является то, что он обобщил эту схему в наиболее универсальном виде на случай решения системы нелинейных уравнений гиперболического типа, в общем, и уравнений газовой динамики, в частности. Как проходило такое обобщение?

Сначала схема была перенесена на случай решения системы, состоящей из двух линейных уравнений. Такой перенос состоял из следующих этапов: 1) преобразование уравнений относительно исходных переменных к двум независимым уравнениям относительно характеристических переменных; 2) применение базовой схемы к этим двум уравнениям по отдельности; 3) переход от характеристических переменных к исходным переменным.

В результате была получена схема, которой Годунов дал оригинальную интерпретацию. Эта интерпретация имела наглядный физический смысл, благодаря чему схема оказалась легко переносимой как на уравнения газовой динамики, так и на другие системы уравнений гиперболического типа.

В чем заключается такая интерпретация применительно к интересующему нас случаю решения уравнений газовой динамики?

Представим себе, что точки $x = x_i$ есть центры интервалов (ячеек), на которые разбит каждый временной слой $t = t^n$ (см. Рис. 1.6). Для обозначения координат и параметров, относящихся к границам между ячейками, будем использовать полуцелые индексы, например: $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm \Delta x/2$.

Консервативная форма уравнений движения невязкого газа (уравнения Эйлера) в одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_0 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_0 + p) \end{bmatrix} = 0, \quad e_0 = \frac{u^2}{2} + e(p, \rho), \quad (1.11)$$

где u , ρ и p — скорость, плотность и давление газа, e_0 и e — полная удельная энергия и удельная энергия газа. Для совершенного газа

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho},$$

где γ — показатель адиабаты (постоянная величина).

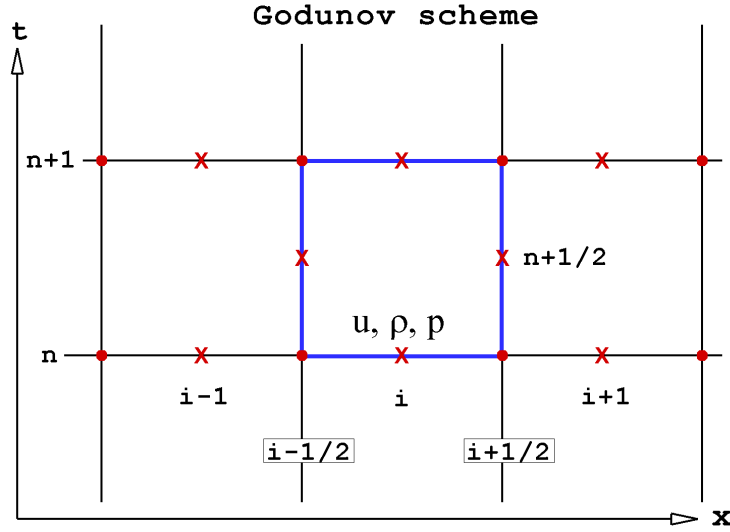


Рис. 1.6: Иллюстрация к схеме Годунова для уравнений газовой динамики

Уравнения (1.11) также принято записывать в векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{Q})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u \\ \rho \\ p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_0 + p) \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

где вектор \mathbf{Q} называют вектором примитивных переменных, вектор \mathbf{U} — вектором консервативных переменных, а вектор \mathbf{F} — вектором потока.

В интегральной форме уравнения (1.12) имеют следующий вид

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt) = 0, \quad (1.13)$$

а конечно-объемная схема (интеграл (1.13) по границе ячейки в пространстве xt ; Рис. 1.6) в общем виде записывается как

$$(\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n) \Delta x + (\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2}) \Delta t = 0$$

или

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2}). \quad (1.14)$$

Как можно видеть, конкретная схема определяется способом вычисления потоков через боковые грани ячеек — параметров \mathbf{F} с полуцелыми индексами.

Теперь о *схеме Годунова*. Она формулируется следующим образом.

Пусть на нижнем временном слое в каждой ячейке известны осредненные параметры потока (они приписываются центрам ячеек). Делается предположение, что внутри ячейки параметры постоянны (то есть имеется кусочно-постоянное распределение на временном слое n). Тогда согласно законам физики параметры на боковых гранях можно найти из решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Это автомодельная задача, поэтому на каждой боковой грани параметры постоянны, если за один шаг по времени возмущения от одной грани ячейки не доходят до соседних граней (то есть, если число Куранта меньше единицы). Далее решается уравнение (1.14), что в результате дает осредненные параметры на следующем, $n+1$ -м временном слое. Цикл расчета завершен.

Итак, задача Римана является главным элементом схемы Годунова. Рассмотрим ее подробнее.

1.2.1 Задача Римана о распаде разрыва

Задача Римана это задача Коши с начальным разрывом в точке $x = 0$ (подразумевается, что здесь расположена боковая грань ячейки). Применительно к одномерным уравнениям Эйлера она формулируется так. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ задано распределение параметров:

$$\mathbf{Q}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{Q}_L & \text{при } x < 0, \\ \mathbf{Q}_R & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

где \mathbf{Q}_L и \mathbf{Q}_R – значения вектора примитивных переменных слева и справа от разрыва. Требуется найти решение системы уравнений (1.12) в области $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, удовлетворяющее начальному распределению (1.15).

Прежде всего заметим, что задача Римана является автомодельной задачей (в ней отсутствует характерный линейный размер) и поэтому решение в ней зависит только от отношения x/t , то есть

$$\mathbf{Q}(x, t > 0) = \hat{\mathbf{Q}}(x/t)$$

Линейное приближение.

Рассмотрим сначала случай, когда интенсивность начального разрыва невелика, так что можно воспользоваться линеаризацией уравнений (1.12).

Предполагая гладкость решения, систему уравнений (1.12) для начала преобразуем к виду

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho a^2 & u \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

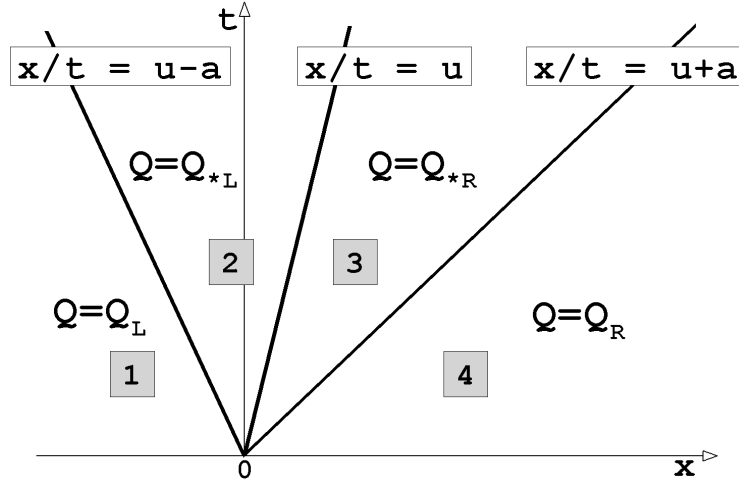


Рис. 1.7: Волновая структура течения в задаче Римана: линейное приближение

где a — скорость звука (для совершенного газа $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$).

Теперь проведем диагонализацию матрицы \mathbf{A} (то есть представим ее в виде $\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{\Lambda}\mathbf{K}^{-1}$, где $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица, $\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{I}$ — единичная матрица) и приведем систему (1.16) к виду

$$\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/\rho a \\ 1 & 0 & -1/a^2 \\ 0 & 1 & 1/\rho a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

где $\lambda_1 = u - a$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + a$ — собственные значения матрицы \mathbf{A} .

Линии $dx/dt = \lambda_1$, λ_2 и λ_3 называют *характеристиками* системы (1.16). Как следует из (1.17), вдоль характеристик выполняются соотношения

$$dz_1 \equiv du - \frac{1}{\rho a} dp = 0 \quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = u - a, \quad (1.18)$$

$$dz_2 \equiv d\rho - \frac{1}{a^2} dp = 0 \quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad (1.19)$$

$$dz_3 \equiv du + \frac{1}{\rho a} dp = 0 \quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = u + a, \quad (1.20)$$

где переменные z_1 , z_2 и z_3 , сохраняющиеся вдоль соответствующих характеристик, носят название *характеристических переменных*.

Теперь рассмотрим Рис. 1.7, на котором схематично изображена волновая структура в задаче Римана. В первую область (цифра 1 на рисунке) приходят все характеристики из левой части начальных данных, поэтому здесь $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_L$; аналогично, в четвертой области $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_R$ (в эти две области возмущения от

начального разрыва не доходят). Теперь рассмотрим вторую и третью области; сюда приходят $(u + a)$ -характеристики из \mathbf{Q}_L и $(u - a)$ -характеристики из \mathbf{Q}_R . На этих двух характеристиках выполняются соотношения (1.20) и (1.18), связывающие два параметра — u и p . Записав их в разностном виде

$$(u_* - u_L) + \frac{1}{\rho_L a_L} (p_* - p_L) = 0, \quad (u_* - u_R) - \frac{1}{\rho_R a_R} (p_* - p_R) = 0,$$

мы получаем скорость и давление, которые в областях 2 и 3 едины:

$$u_* \equiv u_{*L} = u_{*R} = \frac{u_L \rho_L a_L + u_R \rho_R a_R + p_L - p_R}{\rho_L a_L + \rho_R a_R},$$

$$p_* \equiv p_{*L} = p_{*R} = \frac{p_L \rho_R a_R + p_R \rho_L a_L + (u_L - u_R) \rho_L a_L \rho_R a_R}{\rho_L a_L + \rho_R a_R},$$

Линии тока (u -характеристики) приходят в области 2 и 3, соответственно, из \mathbf{Q}_L и \mathbf{Q}_R . Записанное в разностном виде соотношение (1.19) дает нам плотность, которая различна в областях 2 и 3 (здесь мы используем уже известное p_*):

$$\rho_{*L} = \rho_L + \frac{1}{a_L^2} (p_* - p_L), \quad \rho_{*R} = \rho_R + \frac{1}{a_R^2} (p_* - p_R).$$

Таким образом, на линии $dx/dt = \lambda_2$ располагается контактный разрыв, отделяющий два газовых потока: первый берет свое начало от отрезка $x < 0$, $t = 0$, а второй — от отрезка $x > 0$, $t = 0$. Значения скорости и давления по обе стороны от контактного разрыва одинаковы, а значения плотности могут различаться. Линии $dx/dt = \lambda_1$ и $dx/dt = \lambda_3$ представляют собой акустические волны.

Нелинейное решение.

В нелинейном случае также реализуется трехволновая структура течения, но теперь она состоит из контактного разрыва и двух нелинейных волн, каждая из которых может быть либо волной сжатия, либо волной разрежения. На Рис. 1.8 показана структура одного из возможных вариантов решения задачи Римана: справа от контактного разрыва (надпись "cd" = contact discontinuity) располагается ударная волна ("sw" = shock wave), слева — волна разрежения ("rw" = rarefaction wave). Как и в линейном случае, здесь также присутствуют четыре области с постоянными наборами параметров \mathbf{Q}_L , \mathbf{Q}_{*L} , \mathbf{Q}_{*R} и \mathbf{Q}_R , причем на контактном разрыве выполняются те же условия: $u_{*L} = u_{*R} \equiv u_*$ и $p_{*L} = p_{*R} \equiv p_*$.

Алгоритм решения задачи Римана следующий. Первый, наиболее трудоемкий этап решения задачи заключается в определении величин u_* и p_* . Для

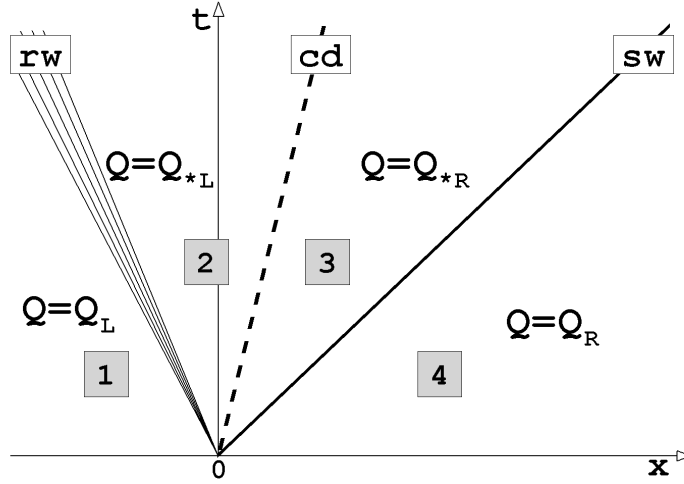


Рис. 1.8: Волновая структура течения в задаче Римана: нелинейное решение

этого ищется решение двух нелинейных уравнений, записанных относительно двух искомых величин:

$$u_* = u_L - f(p_*, \mathbf{Q}_L), \quad u_* = u_R + f(p_*, \mathbf{Q}_R), \quad (1.21)$$

Здесь функция f определяет связь между приращениями давления и скорости на нелинейной волне (сжатия или разрежения). Она удовлетворяет условию $f(p_* = p_L, \mathbf{Q}_L) = f(p_* = p_R, \mathbf{Q}_R) = 0$ и имеет следующий вид

$$f(p_*, \mathbf{Q}_{L(R)}) = \begin{cases} \frac{p_* - p_{L(R)}}{m_{L(R)}}, & \text{если } p_* > p_{L(R)}, \\ \frac{2a_{L(R)}}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_*}{p_{L(R)}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right], & \text{если } p_* \leq p_{L(R)}, \end{cases}$$

где $m_{L(R)} = \sqrt{\rho_{L(R)}[(\gamma + 1)p_* + (\gamma - 1)p_{L(R)}]}/2$. Случай $p_* < p_L$ (или $p_* < p_R$) соответствует волне разрежения слева (или справа) от контактного разрыва. Если $p_* > p_L$ (или $p_* > p_R$), то слева (или справа) от контактного разрыва реализуется ударная волна. В этом случае используемая в расчетах величина m_L (или m_R) есть поток массы через данную ударную волну.

На Рис. 1.9 приведены графики, иллюстрирующие уравнения (1.21) для варианта решения задачи Римана, показанного на Рис. 1.8 (ударная волна справа и контактной разрыв слева).

Поиск решения уравнений (1.21) в общем случае является итерационным процессом. К настоящему времени предложено несколько эффективных стратегий получения такого решения с заданной точностью. Их подробное описание

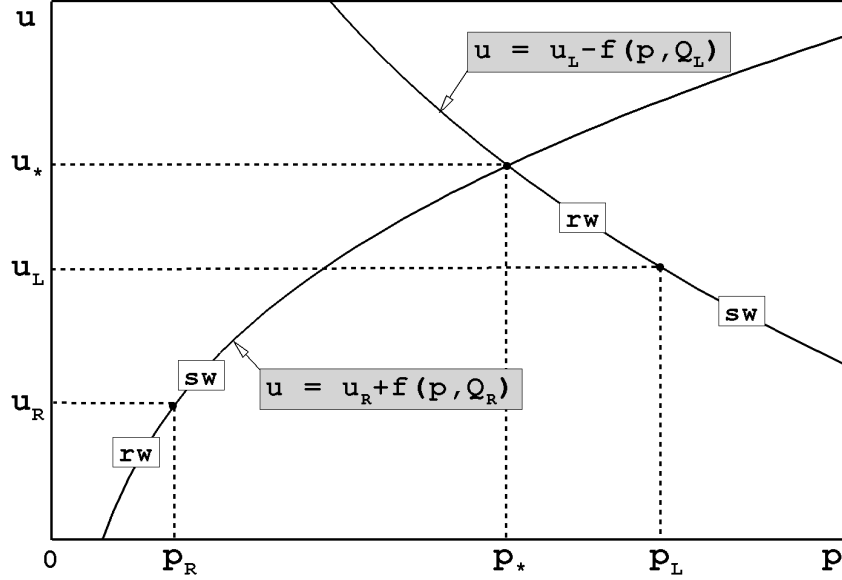


Рис. 1.9: Поведение функций, входящих в уравнения (1.21), для варианта задачи Римана с ударной волной справа и контактным разрывом слева

можно найти в книгах [5] и [6]. Здесь мы не будем останавливаться на этой хотя и важной, но рутинной процедуре.

После того, как величины u_* и p_* найдены, вычисляются остальные параметры решения задачи Римана. Прежде всего, находятся значения плотности во второй и третьей областях:

$$\rho_{*L(R)} = \begin{cases} \rho_{L(R)} \frac{(\gamma + 1)p_* + (\gamma - 1)p_{L(R)}}{(\gamma - 1)p_* + (\gamma + 1)p_{L(R)}}, & \text{если } p_* > p_{L(R)}, \\ \rho_{L(R)} \left(\frac{p_*}{p_{L(R)}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, & \text{если } p_* \leq p_{L(R)}. \end{cases}$$

На заключительном этапе вычисляются параметры ударных волн и/или волн разрежения.

В случае $p_* < p_L$ характеристики семейства $u - a$, вычисленные по параметрам Q_L и Q_{*L} , расходятся (случай, показанный на Рис. 1.8). Поэтому в области $u_* - a_{*L} < x/t < u_*$ у нас имеются постоянные параметры Q_{*L} , а в области $u_L - a_L < x/t < u_* - a_{*L}$ реализуется волна разрежения в виде веера характеристик. Распределение параметров внутри волны разрежения определяется соотношениями

$$\rho = \rho_L \left(\frac{a}{a_L} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad u = (1 - \xi)u_L + \xi u_*, \quad p = p_L \left(\frac{\rho}{\rho_L} \right)^\gamma, \quad (1.22)$$

где

$$a = (1 - \xi)a_L + \xi a_{*L}, \quad \xi = \frac{x/t - (u_L - a_L)}{(u_* - a_{*L}) - (u_L - a_L)}, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

В случае $p_* > p_L$ характеристики семейства $u - a$, вычисленные по параметрам \mathbf{Q}_L и \mathbf{Q}_{*L} , сходятся, и слева от контактного разрыва реализуется ударная волна, скорость распространения которой $D_L = u_L - m_L/\rho_L$, где m_L – вычисленный ранее (при решении уравнений (1.21)) поток массы через ударную волну.

Аналогично, в случае $p_* < p_R$ характеристики семейства $u + a$, вычисленные по параметрам \mathbf{Q}_R и \mathbf{Q}_{*R} , расходятся, и в области $u_* < x/t < u_* + a_{*R}$ мы имеем постоянные параметры \mathbf{Q}_{*R} , а в области $u_* + a_{*R} < x/t < u_R + a_R$ реализуется волна разрежения с распределением параметров

$$\rho = \rho_R \left(\frac{a}{a_R} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad u = (1 - \xi)u_R + \xi u_*, \quad p = p_R \left(\frac{\rho}{\rho_R} \right)^\gamma, \quad (1.23)$$

где

$$a = (1 - \xi)a_R + \xi a_{*R}, \quad \xi = \frac{(u_R + a_R) - x/t}{(u_R + a_R) - (u_* + a_{*R})}, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

В случае $p_* > p_R$ характеристики семейства $u + a$, вычисленные по параметрам \mathbf{Q}_R и \mathbf{Q}_{*R} , сходятся (случай, показанный на Рис. 1.8). Поэтому справа от контактного разрыва реализуется ударная волна, скорость распространения которой $D_R = u_R + m_R/\rho_R$, где m_R – вычисленный ранее поток массы через ударную волну.

Замечание. Можно показать, что соотношения (1.22) обеспечивают выполнение условия $u - a = x/t$ внутри веера характеристик, расположенного слева от контактного разрыва. Аналогично, соотношения (1.23) обеспечивают выполнение условия $u + a = x/t$ внутри "правого" веера характеристик.

Вакуумный случай. Существует предельный случай задачи Римана, когда правый и левый потоки газа разлетаются друг от друга настолько сильно, что между ними образуется область вакуума.

Условие возникновения вакуумного случая следующее

$$u_{*L}^{\lim} < u_{*R}^{\lim},$$

где

$$u_{*L}^{\lim} = u_L + 2a_L/(\gamma - 1), \quad u_{*R}^{\lim} = u_R - 2a_R/(\gamma - 1).$$

В этом случае область $u_{*L}^{\lim} < x/t < u_{*R}^{\lim}$ представляет собой область вакуума, а при использовании соотношений (1.22) и (1.23) следует полагать $a_{*L} = 0$, $u_* = u_{*L}^{\lim}$ и $a_{*R} = 0$, $u_* = u_{*R}^{\lim}$.

Стоит подчеркнуть, что вакуумный случай практически не встречается. Он возможен только при гиперзвуковом режиме разлета потоков. Так, в совершенном газе с $\gamma = 1.4$ он реализуется, если $u_R - u_L > 10\bar{a}$, где $\bar{a} = (a_L + a_R)/2$ – средняя скорость звука.

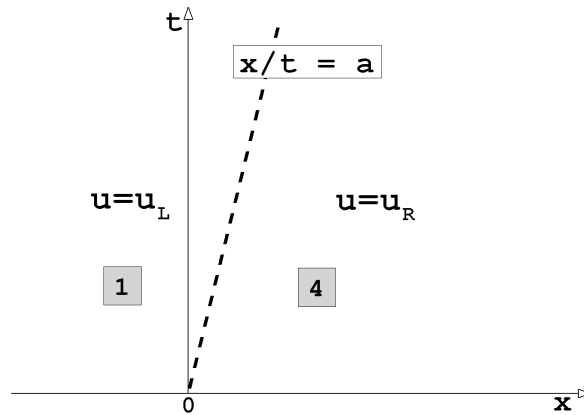


Рис. 1.10: Структура течения в задаче Римана для линейного уравнения переноса

1.2.2 Некоторые особенности схемы

Итак, мы рассмотрели задачу Римана — главный элемент схемы Годунова. К этому надо добавить, что первая версия схемы Годунова была описана для случая решения уравнений газовой динамики на лагранжевой сетке, когда узлы сетки движутся вместе с веществом, и поэтому перетекания вещества между ячейками нет. В этом случае из решения задачи о распаде разрыва нам нужны только параметры на контактной поверхности, u_* и p_* (они используются при вычислении координат сетки на новом, $n+1$ -м слое и при интегрировании уравнения (1.13) по ячейке); поэтому алгоритм решения задачи Римана заканчивается после завершения итерационного процесса решения уравнений (1.21).

Надо сказать, что метод Неймана-Рихтмайера также был предложен для расчета на лагранжевой сетке. В то далекое время задачи были простые, одномерные, а машинные ресурсы слабыми. Поэтому более рационально было использовать лагранжеву сетку, поскольку на неподвижной эйлеровой сетке перетекание вещества между ячейками увеличивает размывание решения. Однако в последующем метод Неймана-Рихтмайера и схема Годунова были обобщены на случай расчета на эйлеровой, неподвижной сетке. В методе Неймана-Рихтмайера для этого пришлось добавить еще один этап — пересчет параметров с лагранжевой сетки на эйлерову сетку.

Схема Годунова обобщается на эйлерову сетку естественным образом, без разбиения расчета на лагранжевы и эйлеровы этапы. В этом случае для вычисления потоков \mathbf{F} мы берем только те значения параметров, которые приходятся на ось $0t$ (для варианта, показанного на Рис. 1.8, это параметры \mathbf{Q}_{*L}).

Здесь нам будет полезно вернуться к случаю, рассматриваемому в предыдущем параграфе, и дать несколько пояснений.

В случае решения *линейного уравнения переноса*, на котором, как правило, и исследуются свойства схем, мы имеем только одно семейство характеристик $x - at = \text{const}$ и области 2 и 3 отсутствуют (см. Рис. 1.10). Поэтому решение задачи Римана здесь очень простое: грань ячейки попадает либо в область с u_L , либо в область с u_R (в зависимости от знака параметра a в уравнении (1.1)). При $a > 0$ это всегда u_L .

Перепишем уравнение (1.14) в виде

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+1/2}^{n+1/2} - f_{i-1/2}^{n+1/2} \right), \quad (1.24)$$

где $f = au$.

Подставив в (1.24) решение задачи Римана на гранях ячейки ($f_{i+1/2}^{n+1/2} = au_i^n$, $f_{i-1/2}^{n+1/2} = au_{i-1}^n$) мы приходим к уравнению

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C_{CFL} (u_i^n - u_{i-1}^n),$$

фактически совпадающему с уравнением (1.3).

Теперь мы видим, что исследуемую в предыдущем параграфе схему можно рассматривать как конечно-объемную схему, в которой для вычисления потоков ($f = au$) используется решение задачи Римана. Таким образом мы имеем простую физическую интерпретацию схемы (1.2). А именно, за один расчетный шаг через грань $i+1/2$ между i -й и $i+1$ -ой ячейками перетекает вещество в количестве $\Delta \tau u_i^n$ (здесь a — постоянная скорость движения вещества, u — его параметр, например, это может быть температура или концентрация примеси).

Теперь можно дать еще один вариант необходимого условия устойчивости схемы.

Третий вариант необходимого условия. Заметим, что при числе Куранта равном единице все вещество из i -ой ячейки за один шаг целиком перетекает в $i+1$ -ю ячейку, а на его место приходит все вещество из $i-1$ -й ячейки. То есть решение не размывается, а происходит его сдвиг на один сеточный интервал. В этом случае схема точно воспроизводит исходное уравнение. Однако при числе Куранта больше единицы за один расчетный шаг из ячейки перетечет в соседнюю ячейку справа больше вещества, чем в ней находится. Это противоречит физике и устойчивый счет в этом случае невозможен.

Хочу также заметить, что в линейном случае разрывы ведут себя как контактные поверхности в газовой динамике (см. Рис. 1.11). По мере продвижения по сетке они размываются, причем в случае использования схемы Годунова ширина их размытия растет как $D/\Delta x \sim n^{1/2} \sim (t/\Delta x)^{1/2}$, где n — количество шагов по времени, $t = n\Delta t$.

Забегая вперед скажу, что в случае использования модификаций схемы Годунова второго порядка аппроксимации (о них речь пойдет в следующей главе)

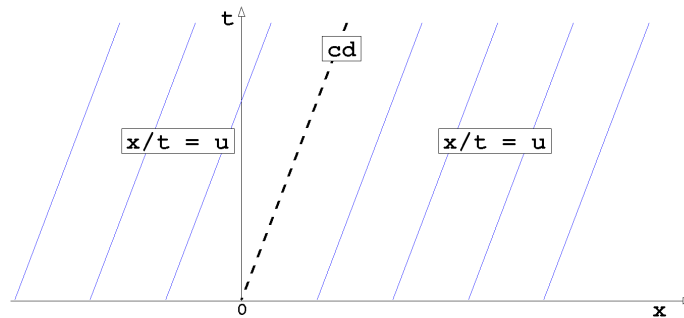


Рис. 1.11: Одиночный контактный разрыв

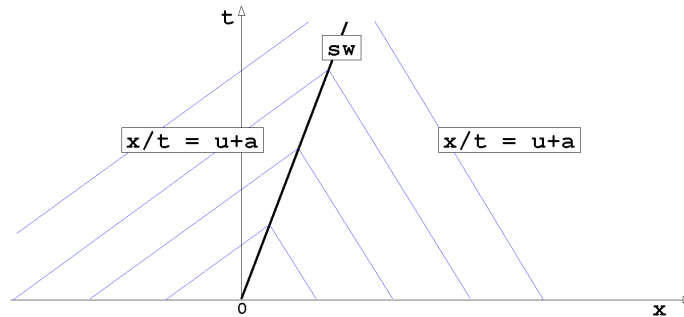


Рис. 1.12: Одиночная ударная волна

ширина размытия обычно растет как $D/\Delta x \sim n^{1/3}$. То есть контактный разрыв размывается меньше при переходе на более точные схемы.

С ударной волной ситуация иная (см. Рис. 1.12). При использовании любой схемы сквозного счета ширина размывания ударной волны практически не зависит от n (то есть она не растет по мере счета). Это связано с тем, что характеристики семейства $u + a$ (или $u - a$, если ударная волна движется в обратном направлении), пересекаются на скачке, в отличие от характеристик u , соответствующих контактной поверхности.

Поэтому тестирование схем на линейном уравнении переноса позволяет проверить, во-первых, их точность на гладких решениях и, во-вторых, отсутствие осцилляций в окрестности контактных разрывов и степень их размывания.

1.2.3 Обобщение схемы на многомерные задачи

Теперь я перехожу к следующей важной публикации по схеме Годунова, которая вышла в 1961 году [7]. Авторы — Годунов, Забродин и Прокопов, все сотрудники Института прикладной математики, тогда (до 1966 г.) это было подразделение Математического института им. В. А. Стеклова.

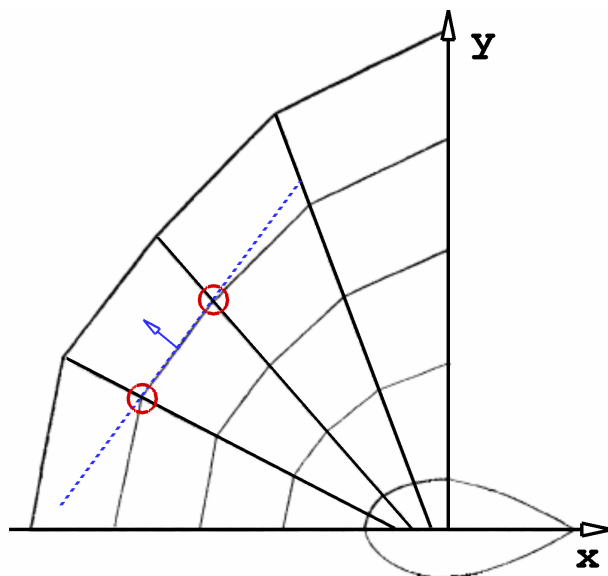


Рис. 1.13: Расчетная сетка в двумерном случае

В статье был описан вариант схемы в эйлеровых координатах, и было проведено его обобщение на двумерный случай. Более того, схема была распространена на случай расчета на подвижной сетке, граница которой, в частности, может быть связана с ударной волной. В таком случае из решения задачи Римана на границе нужно использовать скорость распространения ударной волны.

В двумерном случае для определения параметров на боковой грани предлагалось использовать решение одномерной задачи Римана, в которой ось x совмещена с нормалью к боковой грани. Тогда векторы примитивных переменных слева и справа от разрыва (\mathbf{Q}_L и \mathbf{Q}_R) содержат дополнительно тангенциальную составляющую вектора скорости (выделена красным цветом): $\mathbf{Q} = [u, v, \rho, p]^T$. В этом случае решение одномерной задачи Римана дополняется условием сохранения тангенциальной составляющей скорости при переходе, как через ударную волну, так и через веер разрежения: $v_{*L} = v_L, v_{*R} = v_R$. Кстати сказать, в трехмерном случае задача Римана решается аналогично, с учетом того, что здесь имеются уже две тангенциальных составляющих.

Скажу также о двух проблемах, связанных с обобщением одномерной схемы Годунова на двумерный случай.

Во-первых, в работе рассматриваются не только плоские, но и осесимметричные течения. В этом случае задача Римана становится неавтомодельной, поскольку имеется характерный размер — расстояние от центра грани до оси x . По умолчанию, авторы и в этом случае используют решение автомодельной задачи Римана для плоского случая.

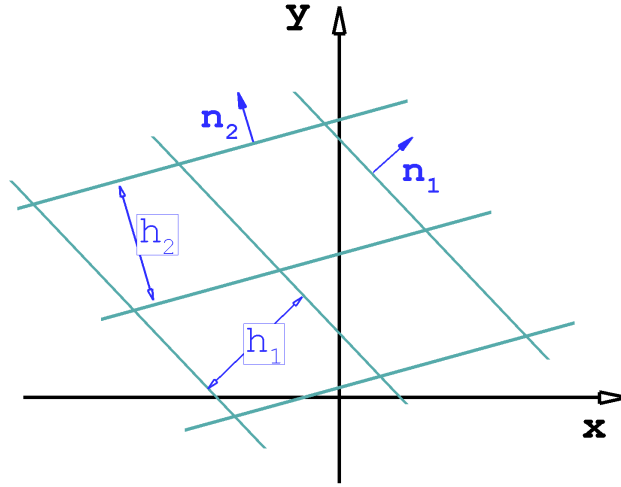


Рис. 1.14: Параметры расчетной сетки в двумерном случае

Во-вторых, в двумерном случае задача Римана предполагает бесконечный размер боковой грани (как показано штриховой линией на Рис. 1.13. В реальности, из-за конечности размера грани параметры на ней не будут постоянными из-за краевого эффекта (то есть из-за возмущений, приходящих с границ грани; на рисунке они обозначены красными кружками). Хотя в статье просто предлагается не обращать на это внимания, на самом деле такой выбор имел обоснование. О нем авторы рассказали позднее, и к этому вопросу я еще вернусь. А пока расскажу еще об одном пункте статьи.

В статье было получено соотношение, ограничивающее шаг по времени в двумерных расчетах. Его можно переписать следующим образом³

$$\Delta t \leq \frac{\Delta t_1 \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}, \quad \Delta t_1 \equiv \frac{h_1}{|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1)| + a}, \quad \Delta t_2 \equiv \frac{h_2}{|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2)| + a}. \quad (1.25)$$

где h_1 , h_2 и \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 — размеры ячеек и нормали к боковым граням в двух сеточных направлениях (см. Рис. 1.14), \mathbf{u} — вектор скорости газа, a — скорость звука.

Здесь может возникнуть вопрос: почему именно это выражение, а не, скажем, такое

$$\Delta t \leq (\Delta t_1, \Delta t_2), \quad (1.26)$$

которое говорит, что за один расчетный шаг возмущение от одной грани ячейки не должно доходить до противоположной грани? Иногда такое выражение

³Здесь приведено выражение для локального ограничения на шаг. В общем случае оно принимает вид $\Delta t \leq \min_{i,j} (\Delta t_{i,j})$, где i и j — индексы ячеек в двух сеточных направлениях.

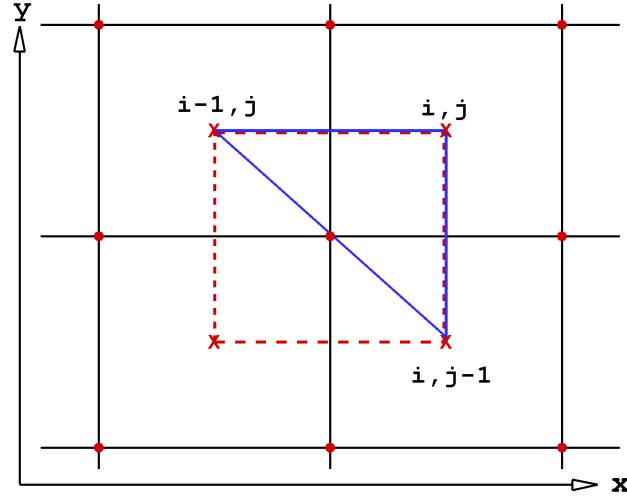


Рис. 1.15: Иллюстрация к схеме Годунова в двумерном случае

встречается, например, оно приводится в одной из статей Колгана, о работах которого мы будем говорить в следующей главе.

Чтобы понять, какой за этими двумя альтернативными выражениями скрывается смысл и какое из них верно, перепишем сначала выражение (1.25) в таком виде

$$C_{CFL} \equiv \frac{\Delta t}{\Delta t_1} + \frac{\Delta t}{\Delta t_2} \leq 1,$$

где левый член есть число Куранта, которое не должно превышать единицы.

Теперь рассмотрим линейное уравнение переноса для случая двух пространственных переменных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad a_1, a_2 = \text{const} > 0.$$

Точное решение этого уравнения есть сохранение u вдоль характеристик вида $x/a_1 + y/a_2 - t = \text{const}$.

Схема Годунова в этом случае записывается следующим образом (см. Рис. 1.15)

$$u_{i,j}^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_1} - \frac{\Delta t}{\Delta t_2}\right) u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta t_1} u_{i-1,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta t_2} u_{i,j-1}^n, \quad (1.27)$$

где $\Delta t_1 = \Delta x/a_1$, $\Delta t_2 = \Delta y/a_2$.

Как мы видим, значение u в точке (i, j) на $n+1$ -м временном слое есть линейная комбинация значений u в трех точках на n -м слое.

Ограничение вида (1.25) означает, что характеристика, выпущенная из точки верхнего временного слоя на нижний слой должна попадать внутрь синего

треугольника, показанного на Рис. 1.15. Это соответствует интерполяции — все коэффициенты в правой части уравнения (1.27) положительные.

Альтернативная формула (1.26) дает ограничение, показанное на Рис. 1.15 красной штриховой линией. Половинка этой области, лежащая вне синего треугольника, соответствует экстраполяции, что, как мы знаем, не может обеспечить устойчивый счет.

Еще одно физическое соображение заключается в том, что полученная авторами работы [7] формула запрещает вытекание из ячейки через боковые грани вещества в сумме больше, чем там его имеется, тогда, как альтернативная формула не разрешает этого по каждому сеточному направлению, то есть в сумме может вытечь больше содержимого ячейки, что противоречит физическим представлениям.

1.2.4 Стационарный аналог схемы

Рассмотрим теперь две статьи по развитию схемы Годунова, опубликованные в Журнале вычислительной математики и математической физики в 1972 году [8, 9]. Авторы первой статьи — Иванов, Крайко и Михайлов, второй статьи — Иванов и Крайко; все сотрудники ЦИАМ. В этих работах был предложен стационарный аналог схемы Годунова для расчета двумерных [8] и пространственных [9] сверхзвуковых течений. В чем смысл такого метода, который называют методом маршрутки по пространству.

Рассмотрим для примера плоское течение, описываемое системой уравнений Эйлера вида

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{Q})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y(\mathbf{Q})}{\partial y} = 0, \quad (1.28)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \rho \\ p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho e_0 + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho e_0 + p) \end{bmatrix},$$

где u и v — компоненты вектора скорости газа, $e_0 = (u^2 + v^2)/2 + e$ — полная удельная энергия газа.

Если интересующее нас течение стационарное и сверхзвуковое в направлении оси x (то есть всюду выполняется условие $u > a$), то, отбросив в (1.28) член $d\mathbf{U}/dt$, мы в результате все равно будем иметь систему уравнений гиперболического типа, решать которую можно с помощью стационарного аналога схемы Годунова. При этом ось x будет выступать в качестве аналога времени, а вектор \mathbf{F}_x станет вектором консервативных переменных. Соответственно, решение (1.28) будет находится путем последовательного перехода от одного сечения $x = const$ к другому сечению в направлении потока.

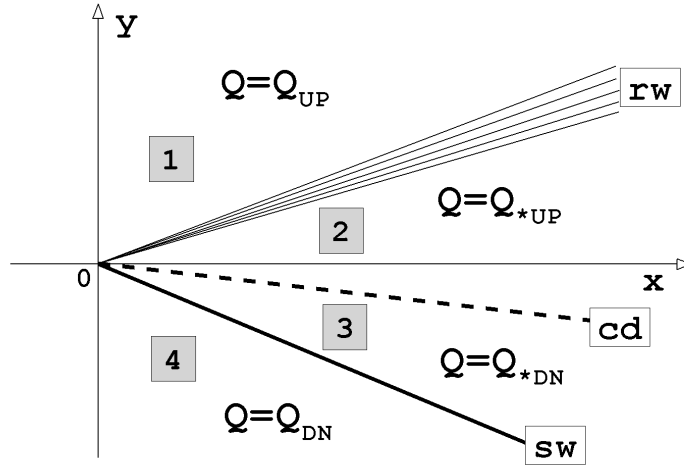


Рис. 1.16: Волновая структура течения в стационарном аналоге задачи Римана

Стационарный аналог задачи Римана формулируется так. Пусть в начальном сечении $x = 0$ задано распределение параметров:

$$\mathbf{Q}(y, x = 0) = \begin{cases} \mathbf{Q}_{DN} & \text{при } y < 0, \\ \mathbf{Q}_{UP} & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

где \mathbf{Q}_{DN} и \mathbf{Q}_{UP} – значения вектора примитивных переменных снизу и сверху от разрыва. Требуется найти решение системы уравнений (1.28) в области $-\infty < y < \infty$, $x > 0$, удовлетворяющее начальному распределению (1.29).

Таким образом, в данном варианте задачи Римана мы имеем в начальном сечении $x = 0$ два равномерных сверхзвуковых потока, которые сталкиваются в точке $y = 0$. В плоском случае эта задача является автомодельной. Ее решение включает в себя контактный разрыв, разделяющий два потока, и две волны, каждая из которых может быть либо ударной волной, либо веером разрежения. На Рис. 1.16 показан случай, когда в нижнем потоке образуется ударная волна, а в верхнем потоке веер разрежения. Хотя формулы, описывающие такое течение, отличаются от формул в базовой, нестационарной задаче Римана, они также имеют неявный вид и решаются итерационно.

Важно подчеркнуть, что в стационарном аналоге задачи Римана течение должно оставаться сверхзвуковым и после взаимодействия потоков: $u_{*DN} > a_{*DN}$, $u_{*UP} > a_{*UP}$. Иначе метод маршировки будет не применим. И еще одно отличие от базовой, нестационарной задачи Римана. Здесь на контактной поверхности кроме условия $p_{*DN} = p_{*UP}$ должно выполняться условие равенства не скоростей, но наклонов потоков: $(v/u)_{*DN} = (v/u)_{*UP}$.

Чем интересен стационарный аналог схемы Годунова. Там, где он применим (а это стационарные сверхзвуковые течения в каналах и струях, а также

задачи сверхзвуковой аэродинамики), там достигается существенная экономия вычислительных ресурсов (оперативной памяти и времени счета требуется на порядки величин меньше). В результате, скажем в 90-х годах прошлого века на персональных компьютерах того времени в однопроцессорном режиме можно было рассчитывать струи с учетом множества химических компонент и десятков протекающих между ними (причем, неравновесно) реакциями.

Или можно было проводить большие серии расчетов с целью оптимизации контуров обтекания сверхзвуковым потоком в широком диапазоне чисел Маха. Если такого рода задачи рассчитывать методом установления по времени, то потребовались бы существенно большие вычислительные ресурсы, и такие расчеты по современным понятиям можно было бы считать суперкомпьютерным моделированием.

1.2.5 Признание и широкое распространение схемы

Говоря о главных публикациях по схеме Годунова нельзя не упомянуть о книге [5], изданной в 1976 году в результате объединения усилий двух коллективов: С.К. Годунов, А.В. Забродин, Г.П. Прокопов из ИПМ, и М.Я. Иванов, А.Н. Крайко из ЦИАМ.

Книга в 400 страниц разбита на две части: (1) теоретические основы метода и (2) иллюстрация возможностей метода. Она состоит в общей сложности из 7 глав или 55 параграфов. В первой части книги подробно рассмотрены практически все аспекты построения и применения схемы Годунова. Во второй части приведены результаты решения десятков задач, иллюстрирующие универсальность и надежность метода Годунова. В книгу вошло много новых материалов, а те, что публиковались ранее, были описаны более подробно.

Например, был пролит свет на проблему, о которой я упоминал ранее — краевой эффект в многомерном варианте схемы Годунова. Вот что по этому поводу было написано.

Выдержка из книги [5], стр. 56.

В 1956 г.⁴ К.В. Брушлинский выполнил построение схемы для уравнений акустики с точным расчетом решений в углах по функционально-инвариантным решениям С.Л. Соболева. По этой схеме были проведены модельные расчеты, сравнение которых с расчетами по описываемой "грубой" схеме показало, что они практически совпадают. Только после этого было решено пользоваться той "грубой" схемой, которую мы описываем.

⁴то есть до первой публикации с описанием схемы Годунова

Итак, появление этой книги, получившей в научных кругах название "Желтая книга" (по цвету обложки), оказало большое влияние на популяризацию схемы Годунова в Советском Союзе. Многие вычислители (и я в их числе) знакомы в полном объеме со схемой Годунова именно по этой книге.

Мне показались интересными воспоминания одного из главных участников тех событий, Александра Николаевича Крайко, которыми он поделился в местной газете в 2010 году. С любезного согласия автора привожу их ниже полностью.

Экономическая и философская газета, N46(834), ноябрь 2010.

Как схема Годунова стала ключевым инструментом газодинамиков ЦИАМ и СССР

Разностная схема Годунова (СГ), о которой пойдет речь, была предложена С.К. Годуновым, ныне академиком РАН, когда он вместе с другими учеными теперь Института прикладной математики им. М.В. Келдыша участвовал в атомном проекте. Первую его статью "Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики", отклоненную журналом "Прикладная математика и механика", академик Г.И. Петровский опубликовал в редактируемом им "Математическом сборнике" в 1959 году. В одном из первых номеров начавшего выходить в 1961 году "Журнала вычислительной математики и математической физики" появилась статья С.К. Годунова, А.В. Забродина и Г.П. Прокопова "Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной". Эта публикация, однако, не продемонстрировала достоинств СГ.

В 1967 году поступившему в аспирантуру М.Я. Иванову (тогда "Мише") была поставлена задача построения всего контура сопла Лавалья максимальной тяги. Для этого следовало научиться считать смешанные (до-, транс- и сверхзвуковые) течения, чего в то время мы не умели. Понимая, что решать такие задачи нужно методом установления, я обратился к И.Ю. Браиловской (тогда сотруднице ВЦ МГУ) за советом о выборе разностной схемы. Она предложила взять СГ, известную к тому времени лишь по двум упомянутым выше статьям. Первые же расчеты смешанных течений в соплах (М.Я. Иванов и А.Н. Крайко, 1969 г.) оказались столь удачными, что в 1970 г. они были отмечены 1-й премией и Золотой медалью им. Н.Е. Жуковского. Приобретенный опыт нашел применение при решении ряда задач о смешанных и нестационарных течениях. В создании программ для их решения в полную меру раскрылись программистские способности Миши. Во многом благодаря им тогда же

начали устанавливаться неформальные творческие связи с сотрудниками иных отделов нашей лаборатории No 4, ряда подразделений ЦИАМ и авиационных ОКБ.

В начале 1970-х гг. автору пришла в голову мысль о построении стационарного аналога СГ для расчета "маршем" сверхзвуковых течений. Его реализация была поручена дипломнику МГУ, у которого, однако, дело не спорилось. Когда до защиты оставались две-три недели, пришлось "вводить в бой тяжелую артиллерию", и Миша, отложив свои расчеты, срочно занялся стационарным аналогом. Возможности заработавших вскоре двумерной и трехмерной программ превзошли самые оптимистические ожидания. На ЭВМ тех лет небольшой группе газодинамиков нашего отдела за немыслимо малый отрезок времени удалось насчитать множество сверхзвуковых течений, расчет каждого из которых (например, обтекания конусов под углами атаки или истечения недорасширенных струй) другими методами требовал многолетних усилий целых коллективов. При этом каждый новый результат привлекал заинтересованных участников из разных лабораторий ЦИАМ, вузов, авиакосмических НИИ и ОКБ.

В условиях стимулируемого "ливнем" успехов "вычислительного бума" стали профессионалами В.И. Копченков, В.И. Милешин и В.Е. Макаров - тогда молодые специалисты лаборатории No 4, а позднее, как и М.Я. Иванов, руководители других подразделений ЦИАМ. Студенты и буквально осаждавшие нас сотрудники ЦИАМ и ОКБ защищали на нужных, но не решаемых ранее задачах десятки дипломов и диссертаций (М.Я. Иванов - две).

После одного из докладов, на котором был С.К. Годунов, мне позвонил Алексей Валериевич Забродин. "Ваш доклад произвел на нас и на Сергея Константиновича такое впечатление, что надо писать книгу", — сказал он. Вышедшая в 1976 году монография С.К. Годунова, А.В. Забродина, М.Я. Иванова, А.Н. Крайко и Г.П. Проконова "Численное решение многомерных задач газовой динамики" стала настольной книгой многих газодинамиков, обеспечив триумфальное шествие СГ и ее модификаций вслед за ЦИАМ по всей стране. Из развивавших, применявших и применяющих СГ, кроме уже упомянутых, назову В.П. Колгана из ЦАГИ, А.В. Родионова из ЦНИИ-МАШ и Н.И. Тилляеву, И.А. Браилко, К.С. Пьянкова, В.Г. Крупу, Р.З. Нигматуллина, О.В. Гуськова и В.Г. Александрова из ЦИАМ.

Достижения перечисленных выше ученых ЦИАМ, их коллег и руководимых ими коллективов показатель ключевой роли СГ в ин-

ституте, особенно в трудные 90-е и 2000-е годы. За рубежом достоинства СГ были поняты много позже. Однако теперь разные ее модификации стали и там основным инструментом газодинамиков.

А.Н. КРАЙКО

Итак, в то время за рубежом схема Годунова хотя и была известна, но не была настолько популярна как в Советском Союзе. Например, она упоминалась в книге Рихтмайера и Мортонна 1967 года [10]. Эта книга у нас была переиздана в переводе в 1972 году [11]. В ней схеме Годунова посвящен отдельный параграф, где она подробно описана и проанализирована.

Однако в последующие годы, после появления ее модификаций повышенного порядка аппроксимации, схема Годунова за рубежом приобрела очень большую популярность и получила широкое развитие. Как результат, в 1997 году, спустя 40 лет после первой публикации схемы Годунова, в США в Мичиганском университете был организован симпозиум в честь Сергея Константиновича, куда его пригласили и он прочитал лекцию "Воспоминание о разностных схемах" (текст лекции можно найти в интернете, как в русском [12], так и в английском [13] вариантах).

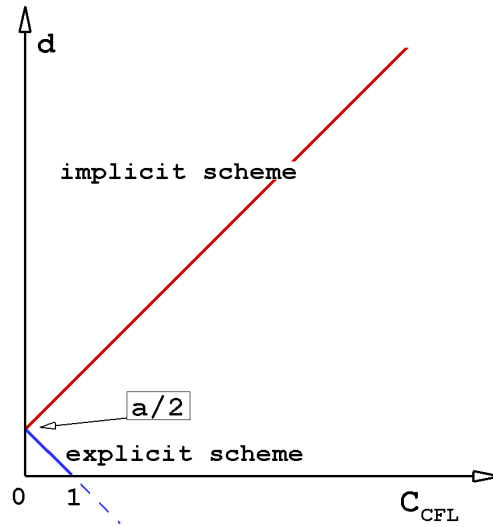
В рамках этого мероприятия Годунову было присуждено звание почетного доктора Мичиганского университета. Добавлю, что симпозиум был организован группой ведущих специалистов, при активном участии Брам ван Лира, о работах которого я буду рассказывать в следующей главе.

Послесловие к главе 1

Итак, заканчивая эту главу, хочу сказать следующее. Дальнейшее развитие схемы Годунова проходило, главным образом, по двум направлениям, связанными с двумя недостатками базовой схемы. Это первый порядок аппроксимации и затратный итерационный алгоритм решения задачи Римана.

В последующих главах будет рассказано об этих направлениях развития. Правда, сразу оговорюсь, в них не будет затрагиваться такой класс схем, как неявные схемы, поскольку у меня не было опыта работы с ними.

Могу лишь сказать, что неявные схемы более сложные и затратные. Их преимущество заключается в возможности проводить расчеты с шагом по времени, значительно большим, чем это позволяет ограничение Куранта-Фридрихса-Леви. Поэтому они эффективны при решении стационарных задач методом установления по времени или же в тех областях нестационарных задач, где течение меняется медленно. В существенно нестационарных задачах, например при расчете ударных волн, распространяющихся по неподвижной среде, их применение малоэффективно.

Рис. 1.17: Зависимость параметра d от числа Куранта для явной и неявной схем

Поясню, почему так происходит на примере решения линейного уравнения переноса.

Неявная схема Годунова, аппроксимирующая уравнение (1.1), записывается следующим образом

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0.$$

Как можно видеть, в отличие от явной схемы (1.2), в неявной схеме пространственная разность берется на $n+1$ -м временном слое. Разложение в ряд Тейлора обеих схем имеет следующий вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = d \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2 + \Delta t^2),$$

Схемы различаются только выражением для параметра d , входящего в эту формулу. В явной схеме $d = (a/2)(1 - C_{CFL})$, в неявной — $d = (a/2)(1 + C_{CFL})$.

На Рис. 1.17 показаны обе зависимости d от числа Куранта. Про явную схему мы уже знаем, что ее можно применять только при числах Куранта меньше единицы, причем с его ростом точность схемы растет. При $C_{CFL} = 1$ схема точна, а дальше мы попадаем в область, где параметр d меньше нуля и устойчивый счет невозможен.

С неявной схемой ситуация иная. С ростом числа Куранта ее точность падает, параметр d растет, но он всегда положителен, и схема безусловно устойчива. Однако надо понимать, что, увеличивая шаг по времени (то есть число Куранта) на порядок, мы увеличиваем погрешность расчета также на порядок. Таким

образом, рассчитывать нестационарную ударную волну по неявной схеме можно, но она будет сильно размазана по сетке, и чем больше число Куранта, тем сильнее будет ее размывание.

Глава 2

Схемы второго порядка точности

В предыдущей главе мы говорили о базовых элементах схемы Годунова первого порядка точности, о предположениях, положенных в ее основу, и об уникальных свойствах схемы, благодаря которым она приобрела большую популярность. В частности, было рассказано о свойстве схемы сохранять монотонность решения и о доказанной Годуновым теореме, фактически налагающей табу на построение схем второго порядка и выше с этим замечательным свойством. Это обстоятельство какое-то время сдерживало развитие схемы Годунова.

Сейчас, когда схемы типа Годунова приобрели широкое распространение и определяют, пожалуй, главное направление развития методов сквозного счета, не просто будет мысленно перенестись в то время, когда схема Годунова большинством вычислителей, и в том числе ее автором, считалась уникальной схемой, не предполагающей возможности дальнейшего развития. И у такого мнения были веские основания.

Действительно, главный элемент схемы Годунова, задача Римана, предполагает, что в начальный момент времени имеется разрыв, с каждой стороны от которого параметры газа постоянны. Поэтому, чтобы использовать решение задачи о распаде разрыва при вычислении потоков между ячейками необходимо предположить, что параметры газа внутри ячейки постоянны. А это и есть главное допущение схемы Годунова. Кажется, здесь ничего нельзя изменить, не нарушив при этом всей конструкции схемы. К тому же Сергей Константинович доказал, что построить монотонную схему с порядком аппроксимации выше первого нельзя.

Как мы теперь знаем, выход из этой, казалось бы, тупиковой ситуации все же был найден. Но сначала это были далеко не идеальные модификации схемы Годунова. Главная заслуга их авторов состоит в том, что они показали возможность и выбрали правильное направление развития схемы Годунова, проложив тем самым первые тропинки в неисследованной ранее области, тропинки, которые в последующем получили как значительное расширение, так и разветвлен-

ное продолжение.

Итак, в данной главе мы будем говорить о монотонных схемах второго порядка точности, и начнем ее с рассказа о схемах Колгана и Ван Лира. Но прежде чем начать, хочу упомянуть первые работы с описанием схем сквозного счета с порядком аппроксимации выше первого. Было известно, что такие схемы склонны порождать осцилляции решения в окрестности разрывов, например, ударных волн, что делало проблематичным получение приемлемых для практики результатов.

В прошлой главе уже упоминалась работа фон Неймана и Рихтмайера 1950-го года [3]. Предложенный ими метод есть метод второго порядка аппроксимации, в котором осцилляции за ударной волной подавляются за счет добавления искусственной вязкости.

Другим направлением было построение так называемых гибридных схем с переменным порядком точности, когда осцилляции подавляются за счет переключения между схемами второго и первого порядков. Здесь можно сослаться на подробный обзор таких схем в известной отечественной книге по численным методам 2001 года [14]; авторы — Куликовский, Погорелов и Семенов.

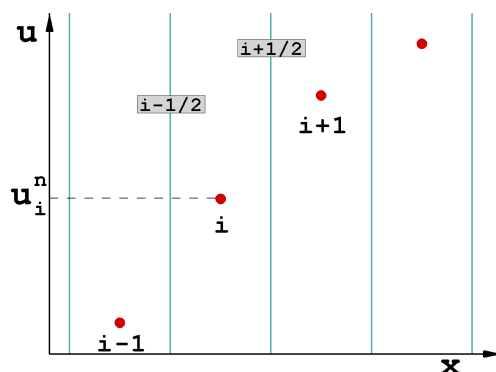
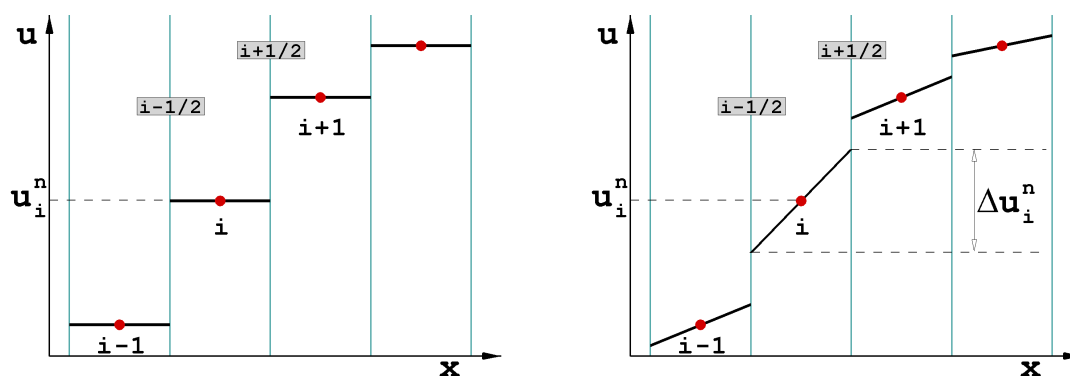
Посмотрим на список первых работ по гибридным схемам, которые перечисляются во введении к этой книге. Он начинается с работы Федоренко 1962 года [15], далее идут: Гольдин, Калиткин, Шишова (1965)[16], Harten, Zwas (1972) [17], Колган (1972) [18], Kutler, Lomax, Warming (1972) [19], van Leer (1973–1979) [20, 21, 22, 23, 24], Boris, Book (1973–1976) [25, 26, 27], Beam, Warming (1976) [28] ...

Как можно видеть, в этот список попали также и первые работы по развитию схемы Годунова, предложенные Колганом у нас в Советском Союзе, и Ван Лиром за рубежом. С одной стороны, эти схемы формально можно отнести к гибридным схемам, но с другой стороны, они базируются на схеме Годунова (то есть используют решение задачи Римана при вычислении потоков между ячейками) и поэтому по праву считаются родоначальниками семейства схем типа Годунова повышенного порядка аппроксимации.

Теперь пришло время поговорить об этих схемах.

2.1 Схема Колгана

Итак, в 1972 году в журнале Ученые записки ЦАГИ была опубликована пионерская работа Колгана [18]. В ней Владимир Павлович предложил отказаться от базового постулата схемы Годунова, постоянного распределения параметров внутри ячейки, в пользу линейного распределения параметров.

Рис. 2.1: Средние по ячейкам значения параметра u Рис. 2.2: Кусочно-постоянное (слева) и кусочно-линейное (справа) распределения параметра u

2.1.1 Кусочно-линейное распределение параметров

По Колгану, изначально имея осредненные по ячейкам значения параметров (см. Рис. 2.1), необходимо реконструировать линейные распределения параметров внутри каждой ячейки, то есть заменить кусочно-постоянное распределение параметров в схеме Годунова (Рис. 2.2 слева),

$$u(x, t^n) = u_i^n \quad \text{при} \quad x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}],$$

на кусочно-линейное распределение (Рис. 2.2 справа),

$$u(x, t^n) = u_i^n + \Delta u_i^n \frac{(x - x_i)}{\Delta x} \quad \text{при} \quad x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}].$$

Первый вопрос, который при этом возникает: как вычислять приращения Δu_i^n внутри ячейки? И здесь Колган предложил оригинальный способ.

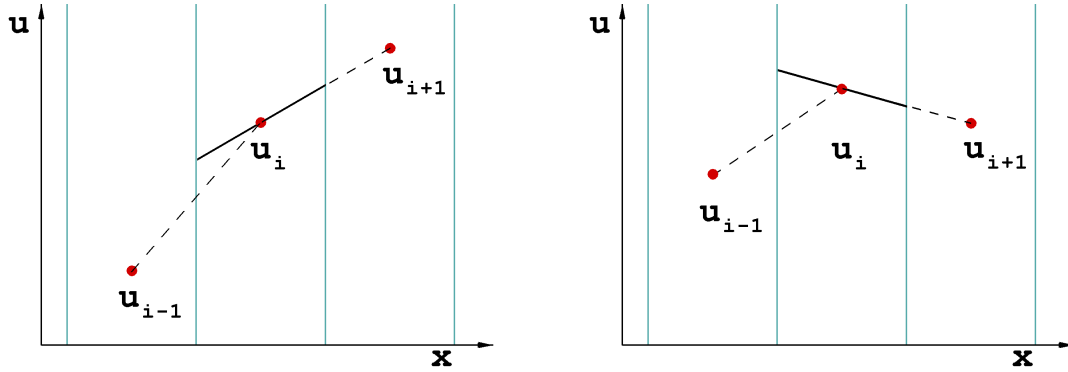


Рис. 2.3: Выбор односторонней разности в функции minmod (по Колгану): слева — обе разности одного знака, справа — разности имеют разные знаки

Для вычисления приращений Колган сформулировал принцип минимальных значений производной, согласно которому из двух односторонних разностей, правой и левой, нужно выбрать минимальную по модулю:

$$\Delta u_i^n = \begin{cases} u_i^n - u_{i-1}^n & \text{при } |u_i^n - u_{i-1}^n| < |u_{i+1}^n - u_i^n|, \\ u_{i+1}^n - u_i^n & \text{при } |u_i^n - u_{i-1}^n| \geq |u_{i+1}^n - u_i^n|. \end{cases} \quad (2.1)$$

Сейчас реконструкцию такого вида обозначают функцией minmod и вместо (2.1) пишут

$$\Delta u_i^n = \text{minmod}(u_i^n - u_{i-1}^n, u_{i+1}^n - u_i^n),$$

имея в виду, что в первоначальном варианте (по Колгану) эта функция определяется как

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{при } |a| < |b|, \\ b & \text{при } |a| \geq |b|. \end{cases} \quad (2.2)$$

Можно заметить, что когда в (2.1) обе разности имеют одинаковый знак (как на Рис. 2.3 слева), то переключение с одной разности на другую происходит плавно: в момент переключения обе разности (правая и левая) сравниваются по величине, и это происходит в окрестности точки, где вторая производная функции равна нулю.

Если же разности имеют разные знаки (как на Рис. 2.3 справа), то переключение происходит скачком, и поэтому в окрестности экстремумов функция minmod по Колгану терпит разрыв.

В одной из своих последующих работ Колган видоизменяет формулировку принципа минимальных значений производной [29]. К двум разностям, правой и левой, он добавляет их полусумму, то есть центральную разность. В этом

случае функция minmod принимает вид

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{при } |a| < \min(|b|, |c|), \\ b & \text{при } |b| < \min(|a|, |c|), \\ c & \text{при } |c| \leq \min(|a|, |b|), \end{cases}$$

где $c = (a + b)/2$. Хотя такой вариант и уменьшает разрыв функции minmod в окрестности экстремумов, но все же не делает ее непрерывной.

В настоящее время чаще используют другое, более современное определение minmod :

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{при } a^2 < ab, \\ b & \text{при } b^2 < ab, \\ 0 & \text{при } ab \leq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

которое обеспечивает непрерывность функции относительно ее аргументов. В этом случае приращение Δu_i^n обнуляется, если односторонние разности имеют противоположный знак.

Здесь нам важно понимать, что эти разновидности функции minmod отличаются только в районе экстремумов. Поэтому при доказательстве свойства схемы сохранять монотонность решения (когда экстремумы отсутствуют) все они работают идентично.

Итак, Колган предложил в схеме Годунова перейти на кусочно-линейное представление функций и сформулировал принцип минимальных значений производной в качестве способа вычисления приращения функций внутри ячейки. В случае решения уравнений газовой динамики этот способ применялся им независимо к величинам u , ρ и p , то есть к каждой компоненте вектора примитивных переменных. Таким образом, согласно Колгану внутри каждой ячейки мы имеем

$$\mathbf{Q}(x, t^n) = \mathbf{Q}_i^n + \Delta \mathbf{Q}_i^n \frac{(x - x_i)}{\Delta x} \quad \text{при } x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}].$$

2.1.2 Обобщенная задача Римана

После перехода на кусочно-линейное представление функции Колган столкнулся с еще одной проблемой: при расчете потоков между ячейками стало необходимым решать более сложную задачу.

Если раньше, в схеме Годунова, с каждой стороны от боковой грани $i+1/2$ мы имели постоянные параметры $\mathbf{Q}_L = \mathbf{Q}_i^n$ и $\mathbf{Q}_R = \mathbf{Q}_{i+1}^n$, то теперь с каждой стороны от боковой грани у нас имеются линейные зависимости параметров:

$$\mathbf{Q}_L(x') = \mathbf{Q}_i^n + \Delta \mathbf{Q}_i^n \left(\frac{x'}{\Delta x} + \frac{1}{2} \right),$$

$$\mathbf{Q}_R(x') = \mathbf{Q}_{i+1}^n + \Delta \mathbf{Q}_{i+1}^n \left(\frac{x'}{\Delta x} - \frac{1}{2} \right),$$

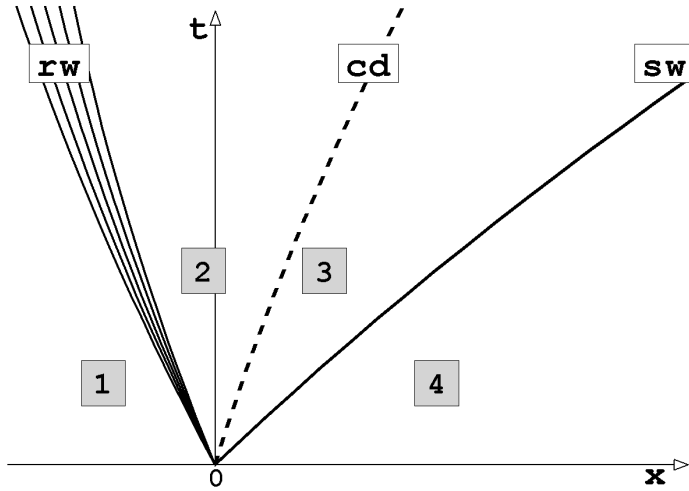


Рис. 2.4: Волновая структура течения в обобщенной задаче Римана

где $x' = x - x_{i+1/2}$ — координата относительно боковой грани.

Сейчас такой вариант задачи Римана называют *обобщенной задачей Римана* (generalized Riemann problem). В общем случае в обобщенной задаче Римана с каждой стороны от начального разрыва параметры являются гладкими функциями от x , в частности это могут быть линейные функции, как в рассматриваемом случае.

Напомним, что классическая задача Римана является автомодельной задачей с постоянными параметрами в каждой из четырех областей на Рис. 1.8. Обобщенная задача Римана является неавтомодельной задачей с переменными параметрами в этих областях (см. Рис. 2.4). А значит, искомые параметры на боковой грани будут функциями от времени.

Решение такой задачи применительно к нелинейным газодинамическим уравнениям справедливо представлялось Колгану крайне громоздким. Поэтому он предложил ограничиться только начальной стадией решения, при бесконечно малом t (то есть при $t \rightarrow +0$). В этом случае из двух функций $Q_L(x')$ и $Q_R(x')$ мы берем только те их значения, которые примыкают к разрыву,

$$Q_L = Q_i^n + \frac{1}{2} \Delta Q_i^n, \quad Q_R = Q_{i+1}^n - \frac{1}{2} \Delta Q_{i+1}^n,$$

и используем их в качестве исходных данных к классической задаче Римана, решив которую, находим параметры, соответствующие боковой грани. По ним и вычисляется поток.

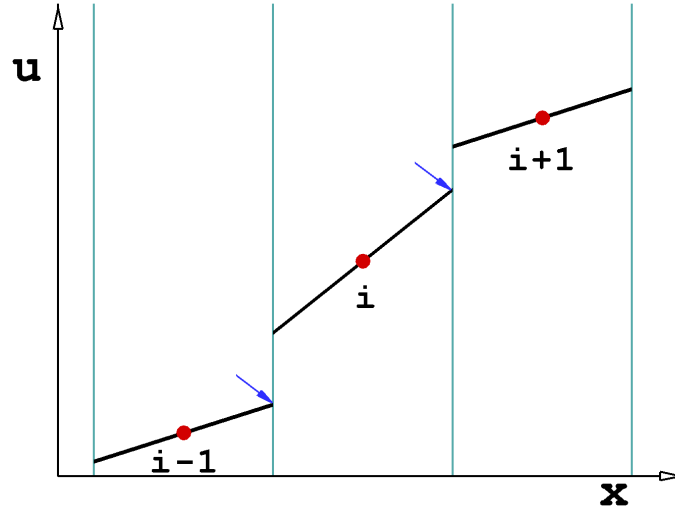


Рис. 2.5: Кусочно-линейное распределение и параметры потоков через боковые грани в схеме Колгана

2.1.3 Свойство схемы сохранять монотонность решения

Давайте теперь запишем полученную Колганом схему применительно к решению линейного уравнения переноса, как мы это делали раньше для схемы Годунова.

Еще раз перепишем в общем виде уравнение, аппроксимирующее уравнение переноса:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^{n+1/2} - f_{i-1/2}^{n+1/2}), \quad (2.4)$$

где $f = au$, $a = \text{const} > 0$.

Параметры f с полуцелыми индексами есть потоки через боковые грани ячейки. В схеме Годунова они равны: $f_{i+1/2}^{n+1/2} = au_i^n$, $f_{i-1/2}^{n+1/2} = au_{i-1}^n$. В схеме Колгана эти параметры определяются крайне правыми значениями линейных функций внутри ячеек (на Рис. 2.5 они показаны стрелками), поэтому здесь

$$f_{i+1/2}^{n+1/2} = a(u_i^n + \frac{1}{2}\Delta u_i^n), \quad f_{i-1/2}^{n+1/2} = a(u_{i-1}^n + \frac{1}{2}\Delta u_{i-1}^n).$$

Подставив эти значения в (2.4) мы получаем следующее выражение

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C_{CFL} \left[u_i^n - u_{i-1}^n + \frac{1}{2} (\Delta u_i^n - \Delta u_{i-1}^n) \right], \quad (2.5)$$

где, как и раньше, $C_{CFL} = a\Delta t/\Delta x$ — число Куранта.

Колган в своей работе доказал, что его схема устойчива при $C_{CFL} < 1/2$. Также он написал, что более детальный анализ показывает, что схема сохраняет монотонность решения при $C_{CFL} < 2/3$.¹ Давайте докажем это утверждение.

Предположим, что на n -м временном слое функция $u(x)$ монотонно возрастает, или, говоря точнее, монотонно не убывает. Заметим, что в формуле (2.5) разность, выделенная синим, не отрицательная. Это базовая разность из схемы Годунова. Выражение, выделенное красным, есть добавка, превращающая схему Годунова в схему Колгана.

Выпишем формулы для двух приращений, входящих в эту добавку:

$$\Delta u_i^n = \text{minmod}(u_i^n - u_{i-1}^n, u_{i+1}^n - u_i^n), \quad \Delta u_{i-1}^n = \text{minmod}(u_{i-1}^n - u_{i-2}^n, u_i^n - u_{i-1}^n).$$

Как можно видеть, в них присутствует выделенная синим базовая разность. Поэтому, по определению функции minmod и с учетом неотрицательности других разностей, для каждого из этих приращений можно записать:

$$0 \leq \Delta u_i^n, \Delta u_{i-1}^n \leq u_i^n - u_{i-1}^n.$$

В формулу (2.5) приращения входят с разными знаками. Поэтому максимальное значение всей добавки будет в случае, когда первый член в круглых скобках максимален, а второй равен нулю. И наоборот, минимальное значение будет, когда первый член равен нулю, а второй максимален, но уже со знаком минус. Поэтому вся добавка (выделена красным) находится в диапазоне между $\pm 0.5(u_i^n - u_{i-1}^n)$.

Теперь выражение (2.5) можно переписать как

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \alpha C_{CFL} (u_i^n - u_{i-1}^n),$$

где параметр $\alpha \in [1/2, 3/2]$.

В схеме Годунова $\alpha = 1$ и мы знаем, что она сохраняет монотонность при $C_{CFL} < 1$. Для схемы Колгана максимальное значение α равно $3/2$, поэтому она будет сохранять монотонность решения, если число Куранта $C_{CFL} < 2/3$. Что и требовалось доказать.

2.1.4 Аппроксимация и устойчивость схемы

Теперь давайте обсудим аппроксимацию схемы Колгана.

Сначала перепишем схему в виде уравнения

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + a \frac{\Delta u_i^n - \Delta u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (2.6)$$

¹Замечу, что эти два условия отличаются только при использовании в схеме функции minmod по Колгану (2.2). В случае использования общепринятого определения (2.3) условия устойчивости и монотонности схемы совпадают: $C_{CFL} < 2/3$.

и разложим в ряд Тейлора каждый из его членов.

Для разложения первых двух членов в разделе 1.1.1 мы получили следующие выражения:

$$\text{I: } \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a\Delta x}{2} C_{CFL} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^2),$$

$$\text{II: } a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = a \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{a\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2),$$

где выделенные синим члены имеют первый порядок малости.

Результат разложения третьего члена уравнения (2.6) в ряд Тейлора будет зависеть от работы функции `minmod`. В той части решения, где при вычислении приращений Δu используются только правые разности или только левые разности мы будем иметь

$$\text{III: } a \frac{\Delta u_i^n - \Delta u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{a\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2),$$

а значит второй и третий члены уравнения (2.6) в сумме будут аппроксимировать пространственную производную $\partial u/\partial x$ со вторым порядком точности (члены первого порядка малости в II и III взаимно уничтожаются).

В случае, когда при вычислении двух приращений Δu используются различные разности (правая и левая), члены первого порядка малости взаимно не уничтожаются и мы будем иметь аппроксимацию пространственной производной только с первым порядком точности.

Это безусловно так, когда мы находимся вблизи локального экстремума. Однако, если переключение между правой и левой разностями происходит на монотонной части решения, то значит мы находимся вблизи точки перегиба, где вторая производная равна нулю. Поэтому члены вида $\Delta x \partial^2 u/\partial x^2$ становятся членами второго порядка малости.

Таким образом, исключая отдельные расчетные ячейки вблизи локальных экстремумов, у нас пространственная производная $\partial u/\partial x$ аппроксимируется со вторым порядком точности, а производная по времени $\partial u/\partial t$ всегда аппроксимируется с первым порядком точности.

Итак, разложение в ряд Тейлора всех членов уравнения (2.6) в подавляющем большинстве расчетных точек в сумме дает выражение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a\Delta x}{2} C_{CFL} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2 + \Delta t^2), \quad (2.7)$$

Как можно видеть, в правой части аппроксимационного уравнения (2.7) член при $\partial^2 u/\partial x^2$ стоит со знаком минус, то есть мы имеем антидиффузию. Отсюда вроде бы должно следовать, что схема Колгана не устойчива, а значит, численное решение при измельчении сетки не будет сходиться к точному

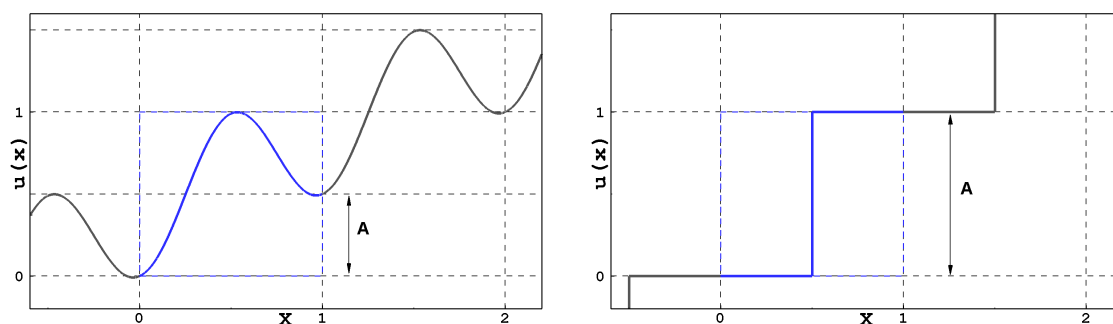


Рис. 2.6: Примеры ступенчато-периодических функций $u(x)$: с гладким профилем (слева) и с разрывом профиля (справа)

решению. Однако здесь нас выручает свойство схемы Колгана сохранять монотонность решения.

Неустойчивое решение будет "раскачиваться" до тех пор, пока не произойдет переключение с одного способа вычисления приращений (правая или левая разность) на другой. Тогда раскачивание сменит знак.

Давайте теперь посмотрим на тестовых примерах, как это работает.

2.1.5 Тестовые задачи для линейного уравнения переноса

Сначала немного общей информации о тестовых примерах, которые мы будем использовать как здесь, так и в дальнейшем для демонстрации свойств схем применительно к решению линейного уравнения переноса (1.1).

Все тестовые примеры такого типа будут отличаться только профилями функции $u(x)$, которые будут либо периодическими, как, например, синусоида, либо ступенчато-периодические, как два профиля, показанные на Рис. 2.6.

Уравнение (1.1) при $a = 1$ будет решаться численно на отрезке $0 \leq x \leq 1$, на краях которого ставится либо периодическое, либо ступенчато-периодическое граничное условие. В последнем случае при передаче данных от одной границы к другой учитывается известная высота ступеньки A .

Точное решение задачи на фиксированный момент времени, например, $t = 10$, будет соответствовать начальному профилю, поднятому вверх на величину $10A$. Поскольку эта величина в каждом случае может быть разная (для периодических функций она нулевая), то для упрощения задачи обработки данных мы будем опускать результаты расчета на эту величину и сравнивать их с начальным профилем. Поэтому на приводимых далее графиках все расчетные данные будут находиться в тех же пределах по оси ординат, что и начальные профили.

На Рис. 2.7 показано численное решение линейного уравнения переноса по схеме Колгана для случая ступенчато-периодической функции с гладким на-

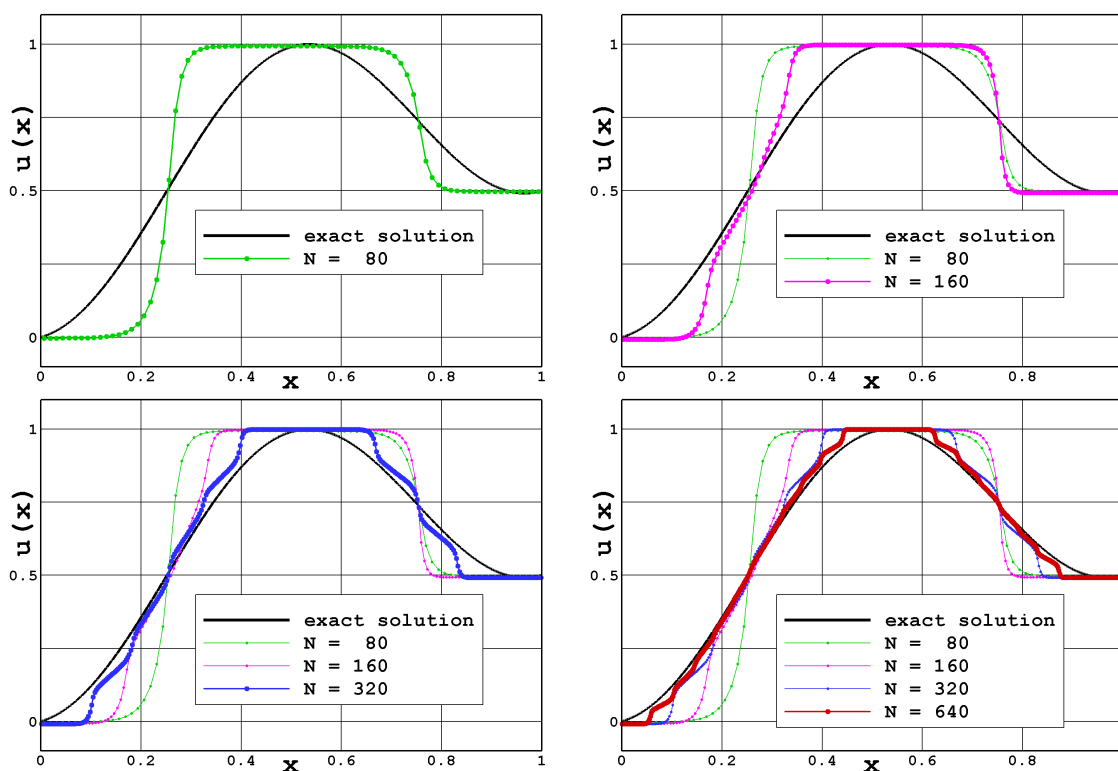


Рис. 2.7: Решение уравнения переноса по схеме Колгана в случае ступенчато-периодической функции $u(x)$ с гладким профилем

чальным профилем: $u(x) = 0.5x + 0.74 \sin^2(\pi x)$. Задача рассчитывалась до момента времени $t = 10$ с числом Куранта $C_{CFL} = 0.25$. На каждом из четырех рисунков черная линия это точное решение, цветные линии с точками — численные решения на сетке с $N = 80 - 640$, где $N = 1/\Delta x$ — общее количество ячеек в расчетной области.

Рассмотрим сначала верхний левый рисунок с численным решением при $N = 80$. Обычно действие схемной вязкости приводит к размыванию решения, но здесь мы видим противоположное, как будто время течет в обратном направлении: мы стартуем от размытого решения, а приходим к решению в виде ступенек с большими градиентами.

Увеличив сеточное разрешение вдвое (верхний правый рисунок), мы замечаем, что ступеньки начинают раздваиваться; при этом решение немного приблизилось к точному. Еще удвоив количество ячеек (нижний рисунок слева), мы еще приблизимся к точному решению. Наконец при $N = 640$ (нижний рисунок справа) численное решение еще ближе "подвинулось" к точному решению.

Если рассчитать эту задачу по схеме Годунова с сеточным разрешением $N = 640$, то такие данные будут отстоять от точного решения дальше, чем

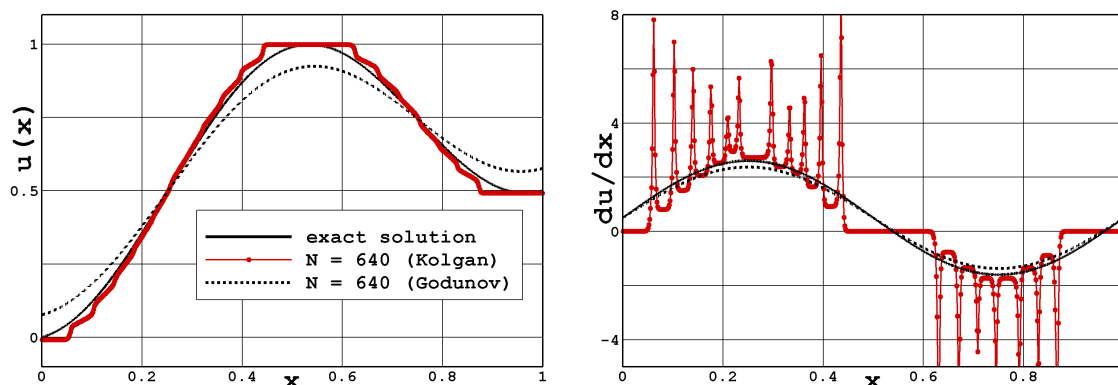


Рис. 2.8: Сравнение решений, полученных по схеме Колгана и схеме Годунова: функции $u(x)$ (слева) и функции $\partial u/\partial x$ (справа)

данные, полученное по схеме Колгана (см. Рис. 2.8 слева). Однако последнее имеет ступенчатый вид. В случае, когда нас интересует не функция $u(x)$, а ее производная, то, как видно из Рис. 2.8 справа, предпочтение следует отдать схеме Годунова: схема Колгана демонстрирует неприемлемо высокие осцилляции относительно точного решения.

А теперь рассмотрим свойства схемы Колгана на примере расчета ступенчатой функции с разрывом профиля (Рис. 2.9). В этом случае схема Колгана хорошо "держит" разрыв. Даже на грубой сетке (зеленые линии с точками) она его размывает существенно меньше, чем схема Годунова на подробной сетке (черные штриховые линии). При этом оказывается, что ширина размывания разрыва схемой Колгана ограничена: она растет только при малых n (начальное размывание), а затем фиксируется. По этому свойству схема Колгана принципиально отличается от схемы Годунова, которая размывает разрыв как $D/\Delta x \sim n^{1/2}$.

Таким образом, мы видим, что при решении линейного уравнения переноса свойства схемы Колгана противоречивы: от очень хороших при расчете разрывов, до очень плохих на гладких решениях. В случае решения уравнений газовой динамики качество расчетных данных, полученных по схеме Колгана, также может оказаться плохим. В последующих разделах данной главы будут приведены примеры таких расчетов, сейчас же заметим следующее.

Схема Колгана может представлять практической интерес только в одном случае, а именно, при решении стационарных задач методом установления по времени. В таких задачах порядок аппроксимации по времени не играет существенной роли, как только удастся получить решение, близкое к стационарному. При этом точность решения будет существенно выше, чем в случае использования схемы Годунова.

Поэтому не случайно, что Колган в своих последующих статьях демонстри-

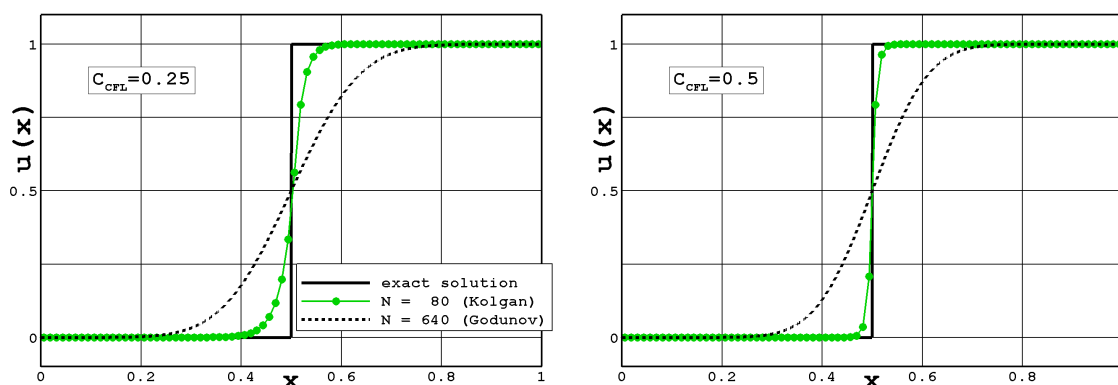


Рис. 2.9: Решение уравнения переноса в случае разрывной функции $u(x)$. Данные, полученные по схеме Колгана ($N = 80$) и схеме Годунова ($N = 640$) при $t = 10$ и двух числах Куранта: $C_{CFL} = 0.25$ (слева) и 0.5 (справа)

ровал эффективность схемы именно на задачах о стационарном обтекании тел сверхзвуковым потоком. Эти статьи были опубликованы в 1975 году в *Ученых записках ЦАГИ* [29, 30]. В первой статье Колган обобщает свою схему на случай расчета двумерных течений, а во второй статье уже на случай решения пространственных задач.

Мне показалось интересным упомянуть здесь данные из его статьи по вычислительным затратам. Колган проводил расчеты на самом мощном в то время в СССР компьютере БЭСМ-6 (первая советская супер-ЭВМ на транзисторах). Тогда трехмерные расчеты с использованием примерно 10 тыс. ячеек и 800 шагов по времени у него занимали около 12 часов. Сейчас такой расчет занял бы всего несколько секунд на персональном компьютере, имеющемся в нашем личном распоряжении на рабочем месте.

Добавлю к этому, что ввод-вывод тогда осуществлялся с помощью перфокарт и АЦПУ (алфавитно-цифровых печатающих устройств), а графики для отчетов и статей рисовались вручную. Мне кажется, об этом тоже надо помнить, оценивая работы тех лет.

Но вернемся к Владимиру Павловичу Колгану. К сожалению, в 1978 году из-за скоротечной болезни он ушел из жизни. Теперь мы можем только гадать, смог бы он продолжить развитие схемы Годунова, не оборвись его жизнь так рано (на 38-м году жизни).

Однако нам известно, что в 1978 году в *Журнале вычислительной математики и математической физики* вышла его посмертная статья, в которой он исследовал возможность применения операторов сглаживания в разностных схемах четвертого порядка точности [31]. Статья поступила в редакцию в конце 1976 года, то есть вскоре после его последних публикаций в *Ученых записках*. Похоже, что в то время Колган отошел от работ по развитию схемы Годунова.

2.2 Схемы ван Лира

Как уже говорилось, за рубежом схема Годунова приобрела большую популярность уже после появления ее модификаций повышенного порядка аппроксимации. Работа Колгана там была неизвестна, и это направление исследований получило свое независимое развитие после появления серии публикаций Брам ван Лира под общим заголовком "Towards the ultimate conservative difference scheme" [20, 21, 22, 23, 24].

Ван Лир подошел к построению своей "наилучшей" схемы по-академически основательно. Он, также как Годунов, поставил во главу угла свойство схемы сохранять монотонность решения. В своей первой статье данной серии с подзаголовком "The quest of monotonicity" [20] он повторил утверждение Годунова о невозможности построения монотонной схемы со вторым порядком или выше, подчеркнув при этом, что это утверждение касается *класса линейных схем*. Поэтому в своих последующих многолетних изысканиях он экспериментировал с нелинейными алгоритмами.

Как результат, в 1979 году, в пятой (финальной) статье серии [24] он описал и протестировал метод второго порядка точности для уравнений движения идеального сжимаемого газа, метод, пригодный для расчета ударных волн. Эта статья вышла с подзаголовком "A second-order sequel to Godunov's method". Сердцевиной метода стал алгоритм расчета одномерных течений в лагранжевых координатах, дополненный пересчетом результатов на эйлерову сетку. Полученная схема была названа MUSCL (аббревиатура от Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws).

Прежде чем перейти к ее рассмотрению, остановимся подробнее на четвертой работе данной серии публикаций [23], так как в ней на примере решения линейного уравнения переноса был проведен отбор наилучшей схемы, положенной в основу схемы MUSCL.

Какие базовые предположения и алгоритмы были положены в основу схемы?

Прежде всего, ван Лир заменил кусочно-постоянное распределение параметров на временном слое (как в базовой схеме Годунова) на кусочно-полиномиальные распределения и рассмотрел два их вида: кусочно-линейное распределение (как в схеме Колгана) и кусочно-параболическое распределение. Поскольку для использования в схеме MUSCL было отобрано кусочно-линейное распределение, далее мы будем обсуждать именно этот случай.

Следующий важный пункт. Для достижения монотонности схемы ван Лир предложил использовать прием, отличный от принципа минимальных значений производной Колгана. Он предложил ограничивать линейную функцию внутри ячейки, что переводило его схему в класс нелинейных схем, на которые не распространяется запрет теоремы Годунова.

Далее, для решения обобщенной задачи Римана ван Лир предложил мето-

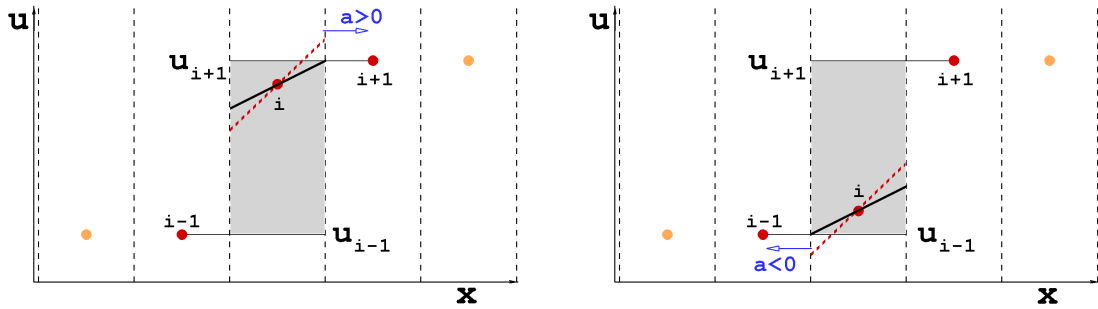


Рис. 2.10: Иллюстрация к работе ограничителя ван Лира

дику расчета с разделением на лагранжевы и эйлеровы этапы, а для вычисления приращений функции внутри ячейки он рассмотрел три варианта и проанализировал свойства трех схем, которые у него при этом получились.

Рассмотрим подробнее эти базовые идеи ван Лира.

2.2.1 Монотонизирующий ограничитель

Начнем с ограничения функции внутри ячейки. Прежде всего ван Лир сформулировал условие, гарантирующее сохранение монотонности решения (если в решении экстремумы изначально отсутствуют, то они и не появляются в процессе счета). Он потребовал (см. Рис. 2.10), чтобы функция $u(x)$ внутри ячейки не выходила за пределы средних значений в соседних ячейках²:

$$\min(u_{i-1}, u_{i+1}) \leq u(x) \leq \max(u_{i-1}, u_{i+1}). \quad (2.8)$$

$x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$

Применительно к линейной функции это значит, что на величину приращения Δu должно быть наложено следующее ограничение

$$|\Delta u_i| \leq 2 \min(|u_i - u_{i-1}|, |u_{i+1} - u_i|),$$

Поясню, как работает такой ограничитель.

Пусть мы имеем монотонно неубывающую последовательность u_i (средних значений u по ячейкам). Такой случай показан на Рис. 2.10 слева и справа; области, соответствующие ограничителю, выделены серым.

Рассмотрим сначала левый рисунок. Допустим, что функция выходит за пределы серой области, как показано красной штриховой линией. Тогда в случае $a > 0$ вещество, носитель параметра u , перетекает из i -й ячейки в ячейку $i+1$, справа от которой все значения u могут быть одинаковы (это крайний случай монотонно неубывающей функции).

²Здесь и далее где можно верхний индекс n для краткости будет опускаться

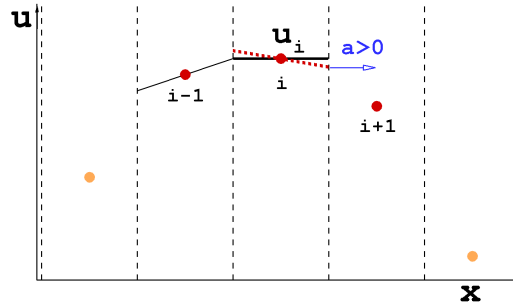


Рис. 2.11: Иллюстрация к работе ограничителя ван Лира

В этом случае в $i+1$ -ю ячейку будет поступать величина u в большем количестве, чем выходит из нее (через границу $i+3/2$), а значит u_{i+1} на следующем временном слое подрастет, и монотонность функции будет нарушена. Ограничение функции в пределах области, выделенной серым (как показано черной сплошной линией), позволяет избежать нарушения монотонности.

Аналогично, если функция выходит за пределы слева (как показано на правом рисунке красной штриховой линией), то в случае $a < 0$ вещество из i -й ячейки перетекает в $i-1$ -ю ячейку, и в ней на следующем слое может образоваться локальный минимум. Опять же, ограничение функции в обозначенных пределах (черная сплошная линия) позволяет этого избежать.

В дополнение к (2.8) ван Лир сформулировал еще одно условие, гарантирующее не усиление уже существующих экстремумов (условие, при котором максимальные значения u_i не будут увеличиваться, а минимальные уменьшаться). Для этого нужно обнулять приращение Δu_i , если правая и левая разности имеют разный знак.

Действительно, рассмотрим Рис. 2.11. Если обнуления не делать, то, как показывает красная штриховая линия, при $a > 0$ в потоке, вытекающем из i -ой ячейки, величина параметра u будет меньше, чем во втекающем потоке слева. А значит, этот локальный максимум начнет расти.

Суммируя эти два условия, ограничитель ван Лира можно записать в виде следующей функции, в которой ограничитель `minmod` в версии (2.3) используется дважды:

$$(\Delta u_i)^{\text{limited}} = \text{minmod} [\Delta u_i, 2 \text{minmod} (u_i - u_{i-1}, u_{i+1} - u_i)]. \quad (2.9)$$

2.2.2 Лагранжево-эйлерова методика

Теперь опишем методику расчета с разделением на лагранжевы и эйлеровы этапы. При этом для наглядности будем использовать иллюстрации, приведенные на Рис. 2.12.

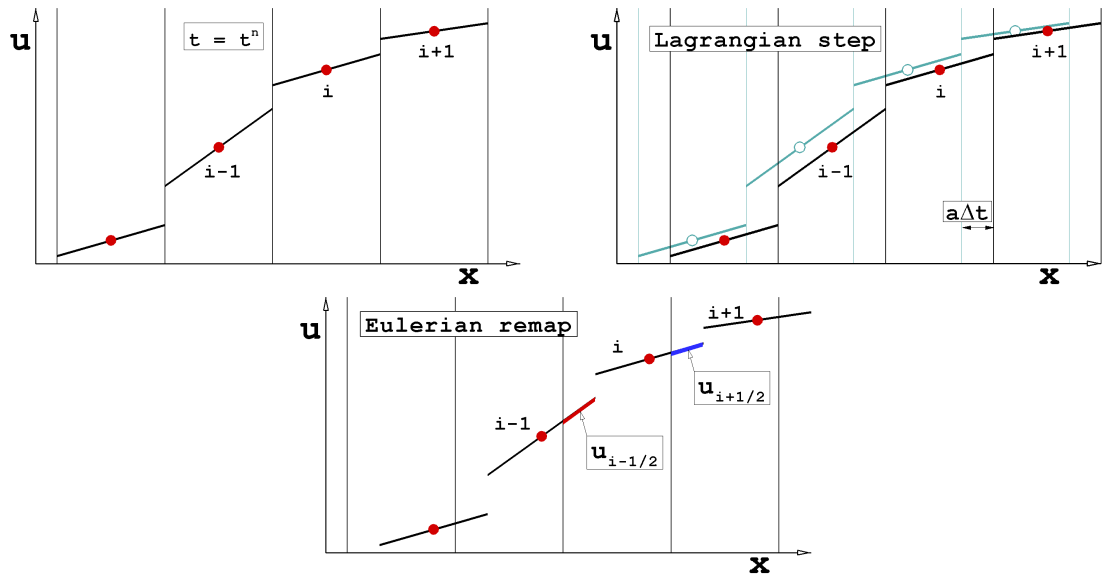


Рис. 2.12: Иллюстрации к лагранжево-эйлеровой методике

Пусть на нижнем временном слое задано кусочно-линейное распределение, как показано на верхнем левом рисунке. В случае решения линейного уравнения переноса лагранжев этап — это простое перемещение вещества вместе с сеткой на расстояние $a\Delta t$, как показано на верхнем правом рисунке (здесь серые линии с точками показывают начальное распределение).

Финальный этап — это пересчет с лагранжевой сетки на неподвижную эйлерову сетку путем осреднения. Его иллюстрирует нижний рисунок, где вертикальные линии показывают границы ячеек эйлеровой сетки. Следуя этому рисунку можно прийти к формуле

$$u_i^{n+1} \Delta x = u_i^n \Delta x - u_{i+1/2} a \Delta t + u_{i-1/2} a \Delta t,$$

которая отражает закон сохранения вещества при пересчете с лагранжевой сетки на эйлерову: интеграл величины u на новом временном слое есть ее интеграл на нижнем слое, минус тот участок функции, который оказался за пределами ячейки (на рисунке он показан синим цветом), и плюс тот участок функции, который пришел в ячейку слева (он показан красным цветом).

Теперь рассмотрим эти средние по участкам величины на примере $u_{i+1/2}$, средней по участку, вышедшему из i -ой ячейки. Как видно из Рис. 2.13, этот участок переместился из аналогичного участка на нижнем временном слое (оба участка расположены между двумя характеристиками, показанными на рисунке зеленым цветом). Очевидно, что все вещество, находящиеся на нижнем участке за время Δt пересекло неподвижную границу между i -й и $i+1$ -й ячейками.

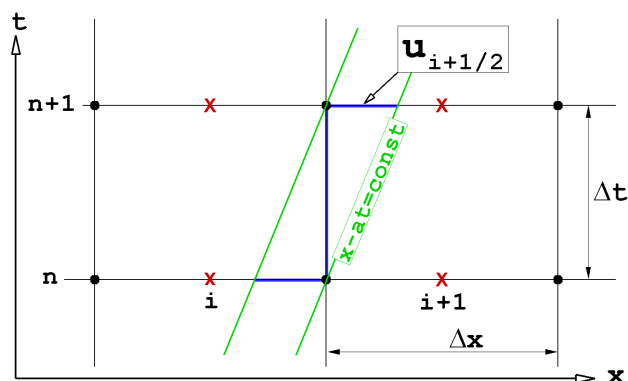


Рис. 2.13: Иллюстрация к лагранжево-эйлеровой методике

Отсюда следует, что $u_{i+1/2}$ есть также среднее значение u на границе эйлеровой сетки. Оно соответствует величине, которая получится, если поток между ячейками брать из решения обобщенной задачи Римана, задачи, когда справа и слева от начального разрыва параметры есть линейные функции от x .

Поэтому, если предыдущую формулу переписать в таком виде

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta x} = 0,$$

то получается формула расчета на эйлеровой сетке.

Таким образом, методика расчета с разделением на лагранжев и эйлеров этапы в случае решения линейного уравнения переноса эквивалентна расчету на эйлеровой сетке с использованием решения обобщенной задачи Римана. При этом значение $u_{i+1/2}$ вычисляется по следующей формуле

$$u_{i+1/2} = u_i^n + \frac{1}{2} (1 - C_{CFL}) \Delta u_i^n.$$

Заметим теперь, что при числе Куранта равно единице мы имеем: $u_{i+1/2} = u_i^n$, то есть за один расчетный шаг все вещество из i -й ячейки перетекает в ячейку $i+1$, как и в схеме Годунова.

2.2.3 Алгоритмы реконструкции

Теперь об алгоритмах реконструкции функции. В отличие от Колгана, Ван Лир процедурой реконструкции завершал переход на новый $n+1$ -й временной слой. Он рассмотрел три способа расчета приращений Δu и получил в результате три схемы, которые назвал: схема I, схема II и схема III.

Схема I. Первый способ заключается в реконструкции линейной функции на новом $n+1$ -м слое по уже вычисленным средним значениям. Принципиально,

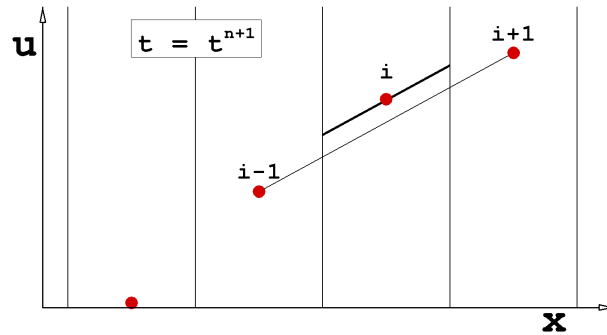


Рис. 2.14: Иллюстрация к схеме I

этот способ близок к тому, что использовал Колган, но ван Лир предложил более точную формулу для вычисления приращения Δu , а именно он остановил свой выбор на центральной разности (то есть на полусумме правой и левой разностей; см. Рис. 2.14):

$$\Delta u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) \equiv \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{2} + \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2}.$$

Применительно к линейному уравнению переноса в этом случае ван Лир получил известную к тому времени схему Фромма [32]. Это линейная схема второго порядка аппроксимации, соответственно, не обладающая свойством сохранять монотонность решения. Поэтому ван Лир наложил на центральную разность ограничитель (2.9) и получил монотонную схему — схему I.

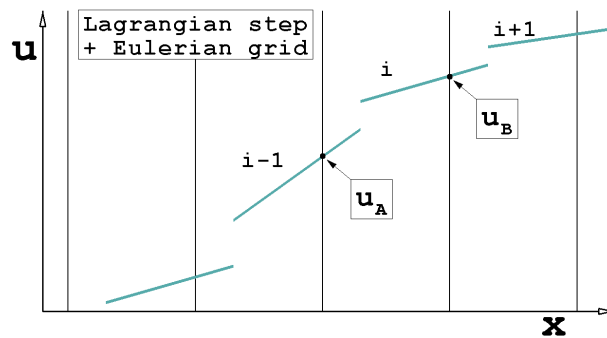


Рис. 2.15: Иллюстрация к схеме II

Схема II. Второй способ заключался в использовании величин u_A и u_B , которые, как видно из Рис. 2.15, есть значения функции после лагранжева этапа в точках пересечения с эйлеровой сеткой.

Вычислив приращение как

$$\Delta u_i^{n+1} = u_B - u_A,$$

и применив к нему ограничитель (2.9), ван Лир получил схему II.

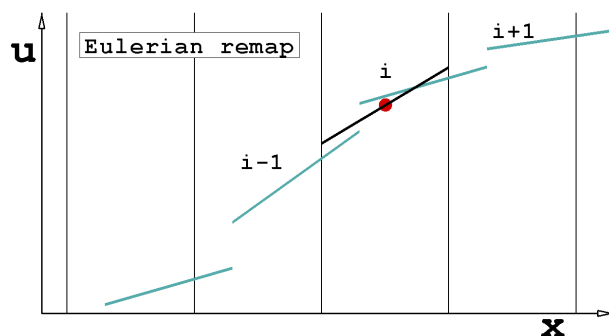


Рис. 2.16: Иллюстрация к схеме III

Схема III. Третий способ, рассмотренный ван Лиром, заключался в использовании метода наименьших квадратов для определения линейной функции в i -ой ячейке эйлеровой сетки (черная линия на Рис. 2.16) по известной разрывной функции $u(x)$ после лагранжева этапа (серые линии).

Суть метода заключается в том, чтобы внутри неподвижной (эйлеровой) ячейки найти линейную функцию, среднеквадратичное отклонение которой от функции $u(x)$ является минимальным (на рисунке черная линия внутри i -й ячейки интегрально "наиболее близка" к серым линиям).

В случае решения линейного уравнения переноса такой способ вычисления приращения Δu приводит к следующему выражению

$$\Delta u_i^{n+1} = 6\nu(1 - \nu)(u_i^n - u_{i-1}^n) + (1 - 3\nu + 2\nu^3)\Delta u_i^n - \nu(3 - 6\nu + 2\nu^2)\Delta u_{i-1}^n,$$

в котором для удобства число Куранта обозначено через ν . (Заметим кстати, что при $\nu = 1$ всегда $\Delta u_i^{n+1} = \Delta u_{i-1}^n$; также, как и $u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$.)

Опять же, к вычисленной таким способом величине Δu применяется ограничитель (2.9), и в результате получается схема III. Анализ показал, что из трех схем она является наиболее точной, и потому ван Лир использовал ее при построении своей оригинальной схемы MUSCL для расчета уравнений газовой динамики.

Однако в процессе последующего развития схем типа MUSCL более популярным оказался первый способ, заключающийся в реконструкции линейной функции по известным средним значениям u_i . Поэтому, прежде чем перейти к описанию первой MUSCL-схемы, рассмотрим свойства схемы I на примере решения линейного уравнения переноса, как мы это делали ранее для схемы Колгана.

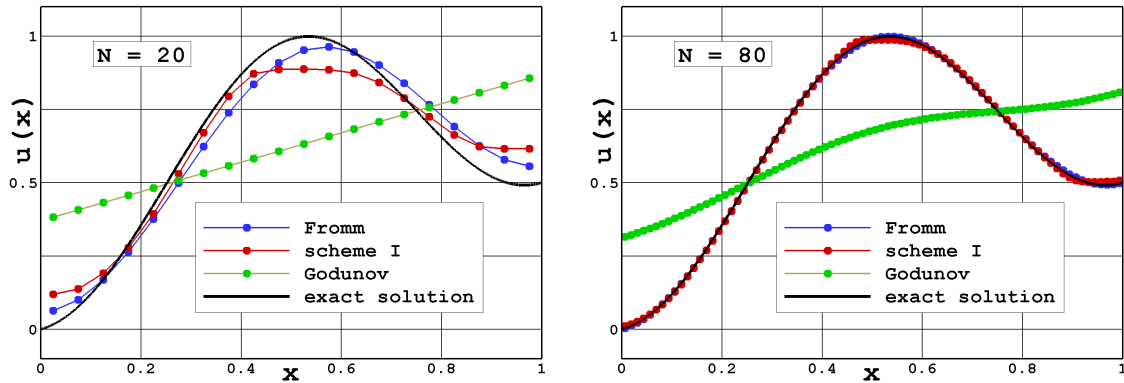


Рис. 2.17: Решение уравнения переноса в случае гладкой функции $u(x)$. Данные, полученные по трем схемам при $t = 10$, $C_{CFL} = 0.25$ и двух сеточных разрешениях: $N = 20$ (слева) и $N = 80$ (справа)

2.2.4 Тестовые примеры

На Рис. 2.17 показаны данные решения уравнения переноса в случае гладкой ступенчато-периодической функции $u(x)$. Расчеты проводились по трем схемам: схеме Фромма (синие кривые), схеме I (красные кривые) и схеме Годунова (зеленые кривые). Напомню, что схема I отличается от схемы Фромма только применением ограничителя ван Лиры.

Рассмотрим сначала данные, полученные при сеточном разрешении с $N = 20$ (левый рисунок). Можно заметить, что по сравнению со схемой Фромма схема I немного "подрезает" экстремумы (максимумы становятся ниже, а минимумы выше). Однако она существенно превосходит по точности схему Годунова, которая в данном случае абсолютно "сглаживает" решение.

Если увеличить сеточное разрешение вчетверо (правый рисунок), то данные, полученные по схеме I и схеме Фромма, будут заметно отличаться только вблизи локальных экстремумов; в остальной части решения они визуально совпадают с точным решением. Схема Годунова существенно проигрывает этим двум схемам по точности. Если сравнить эти данные с данными, показанными на верхнем левом Рис. 2.7, то становятся очевидными преимущества схемы ван Лиры (схемы I) перед схемой Колгана.

Данные решения уравнения переноса в случае разрывной функции $u(x)$ приведены на Рис. 2.18. Те же схемы сравниваются при $N = 80$ и двух числах Куранта (0.25 и 0.75). Здесь мы видим осцилляции в решениях, полученных по схеме Фромма, в то время как схема I свободна от этого недостатка. Как и у схемы Годунова, профиль решения у схемы I монотонный, но размывание разрыва здесь существенно меньше: ширина разрыва растет как $D/\Delta x \sim n^{1/3}$, тогда как у схемы Годунова $D/\Delta x \sim n^{1/2}$.

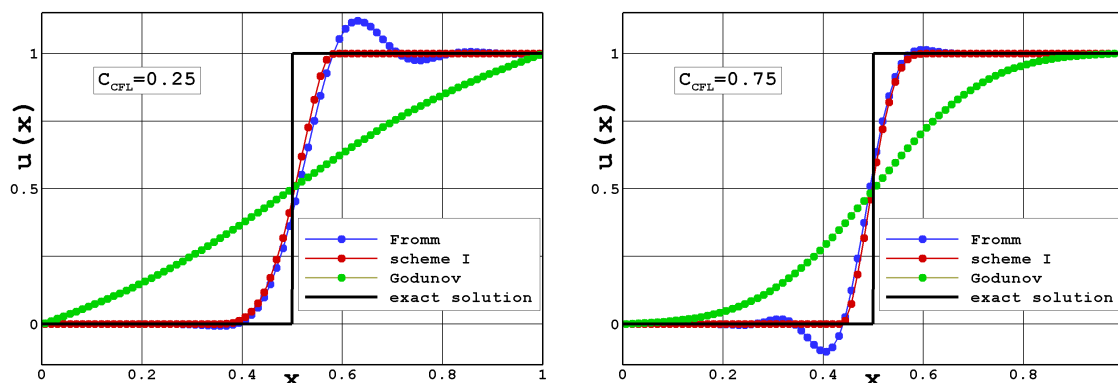


Рис. 2.18: Решение уравнения переноса в случае разрывной функции $u(x)$. Данные, полученные по трем схемам при $t = 10$, $N = 80$ и двух числах Куранта: $C_{CFL} = 0.25$ (слева) и 0.75 (справа)

2.2.5 Схема MUSCL

Теперь о схеме MUSCL, описанной ван Лиром в пятой, заключительной статье обсуждаемой серии публикаций [24]. Она представляет собой модификацию схемы Годунова второго порядка точности для расчета течений идеального сжимаемого газа.

Первый, оригинальный вариант этой схемы алгоритмически был очень сложен. Тем не менее, он был эффективным в плане точности и показал направление развития схемы Годунова, став базой для последующих усовершенствований.

Рассмотрим кратко основные элементы этой схемы, не погружаясь в детали, в этом нет необходимости. Цель, которую мы здесь преследуем — продемонстрировать уровень сложности оригинальной MUSCL-схемы.

Лагранжесв этап. Базовым является расчет одномерного течения в лагранжеских координатах. При этом на старте (на нижнем временном слое) известны осредненные величины и их приращения в ячейке. В качестве переменных используются удельный объем ($V = 1/\rho$), скорость (u) и давление (p) или полная удельная энергия (E). Последовательность вычислений здесь следующая.

- Сначала решается классическая задача Римана (как у Колгана) и находятся скорость и давление на контактном разрыве и удельные объемы с обеих его сторон (напомню, что лагранжева сетка привязана к контактному разрыву в решении задачи Римана).
- Далее, полученные величины дополняются их производными по времени вдоль контактного разрыва (dV/dt , du/dt и т.д.); эти производные выражаются (и вычисляются) через известные приращения величин (ΔV ,

Δu и т.д.) с использованием характеристических соотношений или более сложных формул (там, где имеются сильные скачки параметров).

- Теперь уравнения газовой динамики интегрируются на лагранжевой сетке и находятся осредненные значения на новом временном слое. Поскольку уравнения нелинейны, то учитывается кривизна линий лагранжевой сетки (линий тока) посредством полученных ранее производных по времени.
- Эти производные используются также и для пересчета приращений на новый временной слой. На этом лагранжевом этапе заканчивается.

Эйлеров этап. Далее осуществляется пересчет величин и их приращений с лагранжевой сетки на эйлерову сетку с использованием метода наименьших квадратов.

Монотонизация кусочно-линейного решения. На заключительном этапе к полученным приращениям величин на эйлеровой сетке (ΔV , Δu и т.д.) применяется ограничитель ван Лира (2.9).

Обобщение на многомерные задачи. К этому надо добавить, что в случае решения многомерных уравнений газовой динамики ван Лир использовал одну из разновидностей расщепления по координатам [33].

Вот вкратце о базовых идеях, положенных в основу оригинальной схемы MUSCL.

2.2.6 Историческое упущение: Колган и его схема

На этом можно было бы завершить рассказ о первых, базовых работах Колгана и ван Лира. Однако в этой связи стоит упомянуть о двух связанных статьях, опубликованных в 2011 году в *Journal of Computational Physics*. Это перепечатка статьи Колгана 1972 года в переводе [34] и предваряющая ее статья Брам ван Лира [35]³.

В своей статье ван Лир дает краткую информацию об истории появления схем повышенного порядка точности (имеются в виду схемы, пригодные для расчета ударных волн), рассказывает о жизни и работе Колгана (эта информация была ему предоставлена сотрудником ЦАГИ В.Л. Юмашевым). Он также подробно разбирает оригинальные идеи, содержащиеся в статье Колгана.

Ван Лир в частности разъясняет следующий критический момент. Любая линейная схема второго порядка аппроксимации по пространству и первого по времени будет неустойчивой. Но Колгану за счет нелинейности схемы и ее свойства сохранять монотонность решения удалось стабилизировать счет.

³Годом позже в том же журнале были опубликованы мои заметки [36], дополняющие статью ван Лира о Колгане и его работах

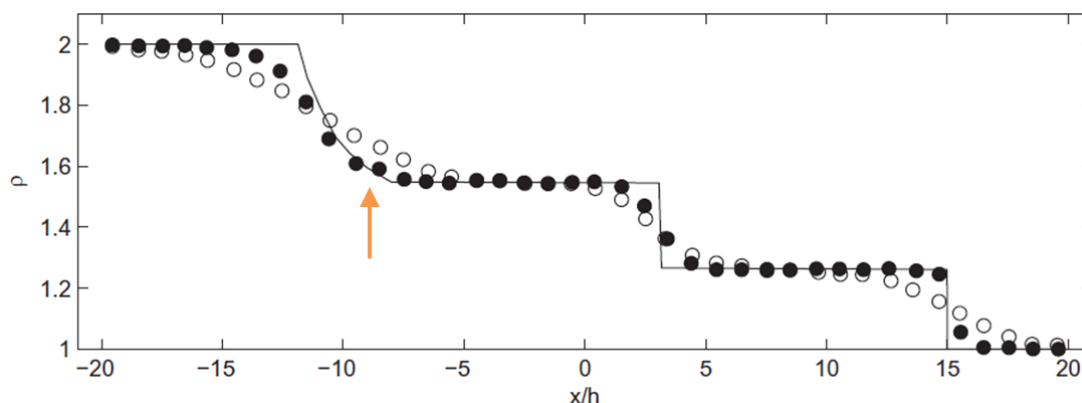


Рис. 2.19: Данные расчета задачи о распаде разрыва; рисунок из статьи Колгана [34]

Тем не менее, такой нелинейный стабилизирующий механизм не обладает высокой эффективностью при решении нестационарных задач. Ван Лир замечает, что такой способ поддержания стабильности может приводить к проявлению небольших плато, ступенек или лестниц в численном решении. При этом он ссылается на расчетные данные из статьи Колгана, которые воспроизведены здесь на Рис. 2.19. Эти данные относятся к расчетам задачи типа задачи Сода (о ней мы будем говорить позднее), полученные по схеме Годунова (светлые кружки) и Колгана (темные кружки). Ван Лир обращает внимание на отчетливо видную ступеньку на краю веера разрежения (на нее указывает красная стрелка).

Почти детективная история. Мне показался интересным раздел статьи, озаглавленный "In search of Kolgan: a personal account", в котором ван Лир рассказывает почти детективную историю о том, как он, еще не зная о существовании Колгана, предпринимал попытки его найти. Вот эта история в сокращении.

Выдержки из статьи [35], стр. 2382.⁴

В начале 1978 года я закончил работу над серией статей "Towards the ultimate conservative difference scheme". Последнюю статью, "A second-order sequel to Godunov's method", я отправил в *Journal of Computational Physics* в октябре 1977 года и ждал рецензий. Я недвусмысленно попросил редактора JCP "включить советского ученого в число рецензентов". Я вполне мог себе представить, что какой-нибудь малоизвестный ученый в СССР опередил меня, и я

⁴переведено с помощью ИИ

хотел сделать все, что в моих силах, чтобы выяснить, так ли это на самом деле. Сам того не подозревая, я искал Владимира Колгана.

Отзыв на русском языке стоил того, чтобы его дожидаться. Рецензент был великодушен; он написал: "Метод, описанный в статье, очень интересен и принципиально новый". Эти ободряющие слова, казалось, непосредственно касались моего вопроса и отвечали на него; однако, по причине, которую я уже не помню, я продолжал сомневаться в уникальности своей работы. К моему счастью, появилась возможность принять активное участие в поиске. Я смог получить грант на поездку в рамках программы обмена, существовавшей тогда между Министерством образования и науки Нидерландов и Академией наук СССР. ...

В своем заявлении я перечислил ряд институтов, которые хотел бы посетить: в Москве — Институт прикладной математики, где я был знаком с В.В. Русановым, и Вычислительный центр АН СССР ...; кроме того, в Новосибирске — Академгородок, Вычислительный центр, где работал С.К. Годунов, а также Институт теоретической и прикладной механики, где работал Н. Н. Яненко ... Академия благоразумно добавила посещение Санкт-Петербурга (тогда Ленинграда), хотя я не знал там никого в области прикладной или численной математики. Я совершил это путешествие с 25 июня по 14 июля 1978 года.

Накануне моего приезда в Москву скончался академик М.В. Келдыш, директор Института прикладной математики и бывший президент Академии наук. ... Из-за переполоха, вызванного смертью Келдыша, мне не удалось встретиться ни с Русановым, ни с кем-либо другим из математиков института. Хотя в то время это было для меня разочарованием, оглядываясь назад, я понимаю, что это не имело значения для моих поисков Колгана, о чем рассказывается в конце этой истории.

В Вычислительном центре в Москве я, к своему удивлению, обнаружил аспиранта, решавшего задачу о сжимаемом потоке с помощью одного из разработанных Борисом методов FCT⁵. Неужели в Советском Союзе действительно не было отечественной неосциллирующей схемы второго порядка?

Я выступал с официальными и неофициальными презентациями о своей работе, с переводчиком или без него, в Москве, Новосибирске и Санкт-Петербурге, а также подробно беседовал с учеными в области

⁵см. работы [25, 26, 27]

прикладной математики и вычислительной техники, включенными в мой список, включая самого Годунова, и с другими, не включенными в список. Годунов ответил категорически отрицательно, когда его спросили, разрабатывались ли в России идеи, подобные моей. В тот момент я, должно быть, отбросил все оставшиеся сомнения в уникальности своей работы.

Мое пребывание в Санкт-Петербурге оказалось неожиданно полезным. ... 12 июля, в Математическом институте им. В.А. Стеклова ... я сделал презентацию о сохраняющих монотонность методах второго порядка для гиперболических уравнений. ...

Два дня спустя я сел в самолет, возвращавшийся в Амстердам, в полной уверенности, что в Советском Союзе моя работа не повторилась. А в маленьком городке в 600 км к югу от Москвы человек, которого я искал, был все еще жив, но не совсем здоров. Он должен был умереть через две недели.

...

Моя статья о развитии метода Годунова появилась в 1979 году. Год спустя я встретил Русанова на международной конференции и узнал, что он был моим российским рецензентом. Затем он поделился со мной любопытным воспоминанием из 1960-х годов, когда они с Годуновым еще работали в одном институте. В то время Годунов фактически отговаривал Русанова от попыток найти расширение его метода более высокого порядка, поскольку считал, что это уникальный, изолированный метод, не имеющий продолжения. Это могло бы частично объяснить, почему в России инновация не исходила от академического сообщества прикладной математики.

Примерно в 1992 году я впервые услышал — от Ами Хартена, который узнал об этом во время чтения лекций в Москве, — что какой-то российский ученый разработал схему, подобную MUSCL, еще в 70-х годах. Это подтвердил доктор Владимир Сабельников, с которым я познакомился, когда он посетил Мичиганский университет осенью 1995 года, и который прислал мне доказательство этого: копию статьи Колгана, опубликованной в ЦАГИ в 1972 году. ... Когда у меня созрел план публикации английского перевода статьи Колгана, доктор Сабельников свел меня с доктором Юмашевым из ЦАГИ, который прислал мне профессиональную и личную информацию о Колгане ...

Как известно, история не терпит сослагательного наклонения. Однако в связи с историей, рассказанной ван Лиром, вопросы все же напрашиваются.

Например: что, если бы Колган опубликовал свою работу в одном из академических журналов, скажем, в Журнале Вычислительной Математики и Математической Физики. Тогда она наверняка была бы известна не только в ЦАГИ, где он работал. Возможно даже, кому-то из отечественных ученых удалось бы найти продолжение его работы. Но в любом случае шансы на успешные поиски ван Лиrom Колгана существенно бы возросли, и, возможно, они бы встретились.

Как бы то ни было, нам остается только выразить глубокую благодарность Брам ван Лиру за его усилия по исправлению исторического упущения, за проделанную работу, которую он обозначил как *the "Kolgan Project"*.

Список литературы

- [1] *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
- [2] *Годунов С.К.* Разностный метод расчета ударных волн // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 1(73). С. 176–177.
- [3] *Von Neumann J., Richtmyer R.D.* A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. 1950. Vol. 21. P. 232–237.
- [4] *Lax P.D.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Comm. Pure Appl. Math. 1954. Vol. 7. P. 159–193.
- [5] *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [6] *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Third Edition. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
- [7] *Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г. П.* Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // ЖВМиМФ 1961. Т. 1. № 6. С. 1020–1050.
- [8] *Иванов М.Я., Крайко А.Н., Михайлов Н.В.* Метод сквозного счета для двумерных сверхзвуковых течений // ЖВМиМФ 1972. Т. 12. № 2. С. 441–463.
- [9] *Иванов М.Я., Крайко А.Н.* Метод сквозного счета для пространственных сверхзвуковых течений // ЖВМиМФ 1972. Т. 12. № 3. С. 805–813.
- [10] *Richtmyer R.D., Morton K.W.* Difference methods for initial-value problems. Second edition. John Wiley & Sons, 1967.
- [11] *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.

- [12] Годунов С.К. Воспоминания о разностных схемах. Новосибирск: Научная книга, 1997. 40 с.
- [13] Godunov S.K. Reminiscences about difference schemes // J. Comput. Phys. 1999. Vol. 153. No. 1. P. 6–25.
- [14] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.
- [15] Федоренко Р.П. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // ЖВМиМФ 1962. Т. 2. № 6. С. 1122–1128.
- [16] Гольдин В.Я., Калиткин Н.Н., Шишова Т.В. Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений // ЖВМиМФ 1965. Т. 5. № 5. С. 938–944.
- [17] Harten A., Zwas G. Self-adjusting hybrid schemes for shock computations // J. Comput. Phys. 1972. Vol. 9. No. 3. P. 568–583.
- [18] Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
- [19] Kutler P., Lomax H., Warming R. Computation of space shuttle flowfields using noncentered finite-difference schemes // AIAA Paper. 1972. No. 72–193; AIAA Journal. Vol. 11. No. 2. P. 196–204.
- [20] Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. I. The quest of monotonicity // Lect. Notes Phys. Vol. 1973. Vol 18. No. 1. P. 163–168.
- [21] Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme // J. Comput. Phys. 1974. Vol. 14. No. 4. 361–370.
- [22] Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow // J. Comput. Phys. 1977. Vol. 23. No. 3. P. 263–275.
- [23] Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection // J. Comput. Phys. 1977. Vol. 23. No. 3. P. 276–299.

- [24] *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // *J. Comput. Phys.* 1979. Vol. 32. No. 1. P. 101–136.
- [25] *Boris J.P., Book D.L.* Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works // *J. Comput. Phys.* 1973. Vol. 11. No. 1. P. 38–69.
- [26] *Boris J.P., Book D.L., Hain K.* Flux-corrected transport. II. Generalizations of the method // *J. Comput. Phys.* 1975. Vol. 18. No. 3. P. 248–283.
- [27] *Boris J.P., Book D.L.* Flux-corrected transport. III. Minimal-error FCT algorithms // *J. Comput. Phys.* 1976. Vol. 20. No. 4. P. 397–431.
- [28] *Beam R.M., Warming R.F.* Upwind second-order difference schemes and applications in aerodynamic flows // *AIAA Journal.* Vol. 14. No. 9. P. 1241–1249.
- [29] *Колган В.П.* Конечно-разностная схема для расчета двумерных разрывных решений нестационарной газовой динамики // *Ученые записки ЦАГИ.* 1975. Т. 6. № 1. С. 9–14.
- [30] *Колган В.П.* Численный метод решения пространственных задач газодинамики и расчет обтекания тела при наличии угла атаки // *Ученые записки ЦАГИ.* 1975. Т. 6. № 2. С. 1–6.
- [31] *Колган В.П.* Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // *ЖВМиМФ* 1978. Т. 18. № 5. С. 1340–1345.
- [32] *Fromm J. E.* A method for reducing dispersion in convective difference schemes // *J. Comput. Phys.* 1968. Vol. 3. P. 176–189.
- [33] *Strang G.* On the construction and comparison of difference schemes // *SIAM J. Numer. Anal.* 1968 Vol. 5. No. 3. P. 506–517.
- [34] *Kolgan V.P.* Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite-difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics // *J. Comput. Phys.* 2011. Vol. 230. P. 2384–2390.
- [35] *Van Leer B.* A historical oversight: Vladimir P. Kolgan and his high-resolution scheme // *J. Comput. Phys.* 2011. Vol. 230. P. 2378–2383.
- [36] *Rodionov A.V.* Complement to the “Kolgan project” // *J. Comput. Phys.* 2012. Vol. 231. P. 4465–4468.