Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике

I. Схема Годунова: старые публикации о главном

Родионов Александр Владимирович

Метод (схема) Годунова

- ***Годунов С.К.*** Разностный метод расчета ударных волн // Успехи мат. наук, **1957**
- ***Годунов С.К.*** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник, **1959** *(Поступила в редакцию 20 марта 1956 г.)*

Метод Годунова

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

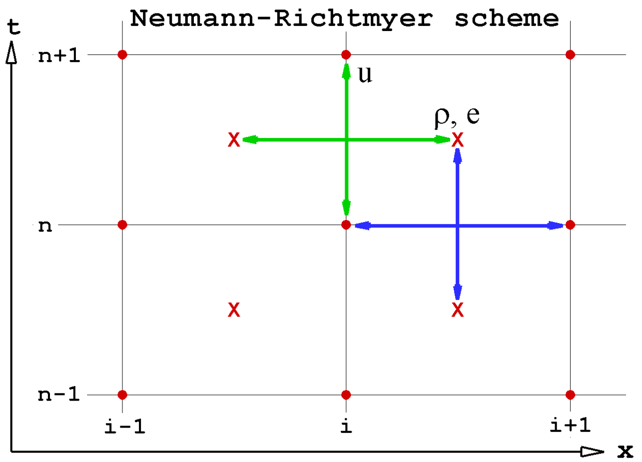
Метод Годунова — реализация схем сквозного счета, с помощью которых можно рассчитывать газодинамические течения с разрывами параметров внутри расчётной области. Эта схема предложена С. К. Годуновым в 1959 г. Метод Годунова — это вариант метода контрольного объёма. Потоки через боковые грани определяются из решения задачи о распаде произвольного разрыва.

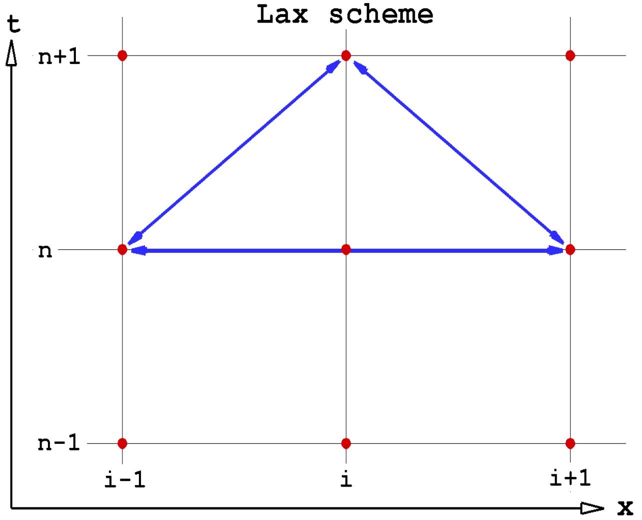
Исходное положение и цель работы

В 1950 г. Нейманом и Рихтмейером в работе [1] было предложено применять для расчета уравнений гидромеханики разностные уравнения, в которые искусственно вводилась вязкость, размазывавшая ударные волны на несколько счетных точек. При этом счет предполагалось вести сплошным образом через ударные волны.

В 1954 г. Лакс [2] опубликовал пригодную для счета через ударные волны схему «треугольник». Недостатком этой схемы является то, что она не допускает счета со слишком мелким шагом по времени (по сравнению с шагом по пространству, деленным на скорость звука), превращая в этом случае любые начальные данные в линейные функции. Кроме того, эта схема размазывает контактные разрывы.

Настоящая работа ставит своей целью выбор в некотором смысле наилучшей схемы, допускающей счет через ударные волны. Этот выбор производится для линейных уравнений, а затем по аналогии схема переносится и на общие уравнения гидродинамики.



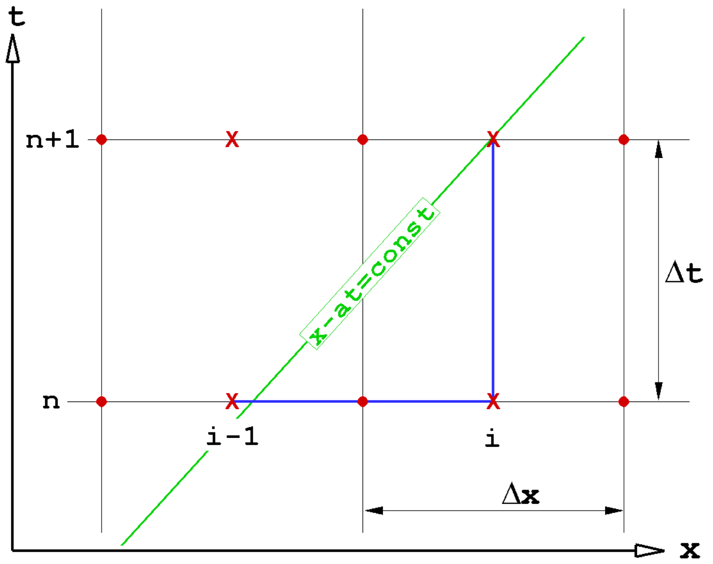


1. *Von Neumann, Richtmyer.* A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys., **1950**
2. *Lax*. Weak solutions of nonlinear hyperbolic eq-s and their numerical computation // Comm. Pure Appl. Math., **1954**

Свойство схемы сохранять монотонность решения

Для решения дифференциальных уравнений математической физики часто применяется метод конечных разностей. Естественно требовать от решения, полученного приближенно, чтобы качественное его поведение было аналогично поведению точного решения дифференциального уравнения. Однако это требование не всегда выполняется.

- требование к схеме: она должна переводить монотонные функции в монотонные
- среди схем второго порядка точности нет удовлетворяющих условию монотонности
- предложена схема, являющаяся наилучшей (наиболее точной) среди всех схем, сохраняющих монотонность решения
- исследование проводилось для случая решения линейных уравнений (в т.ч. для системы двух уравнений)



Линейное уравнение переноса: $$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при } a = \text{const} > 0$$

Точное решение: $$u = \text{const} \quad \text{вдоль характеристик } x - at = \text{const}$$

Численное решение: $$u_i^{n+1} = \left(1 - C_{CFL}\right)u_i^n + C_{CFL}u_{i-1}^n, \quad \text{где } C_{CFL} = a\Delta t / \Delta x$$

Условие сохранения монотонности решения

Для того чтобы разностная схема $u_i^{n+1} = \sum C_{i-k} u_k^n$ переводила все монотонные функции в монотонные с тем же направлением роста, необходимо и достаточно, чтобы все c_m были неотрицательными.

$$u_i^{n+1} = \sum C_{i-k} u_k^n \quad = \quad u_{i-1}^{n+1} = \sum C_{i-k} u_{k-1}^n \Rightarrow u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} = \sum C_{i-k}(u_k^n - u_{k-1}^n)$$

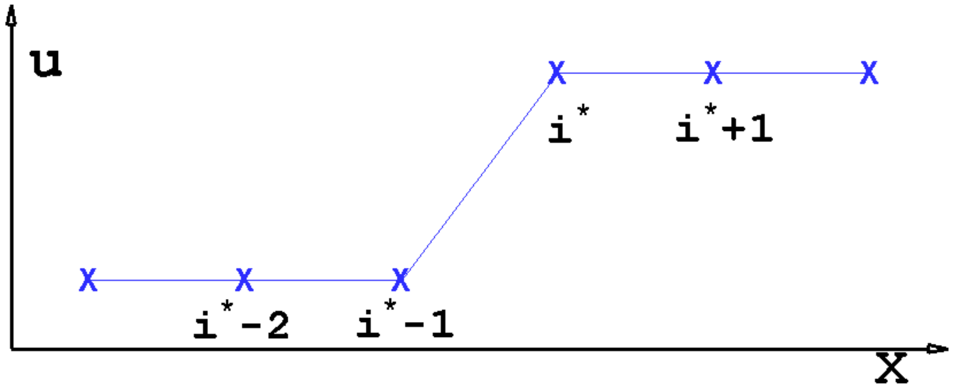
$$\ldots$$

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = C_{i-i^*+1}(u_{i^*}^n - u_{i^*-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} = C_{i-i^*}\ (u_{i^*}^n - u_{i^*-1}^n)$$

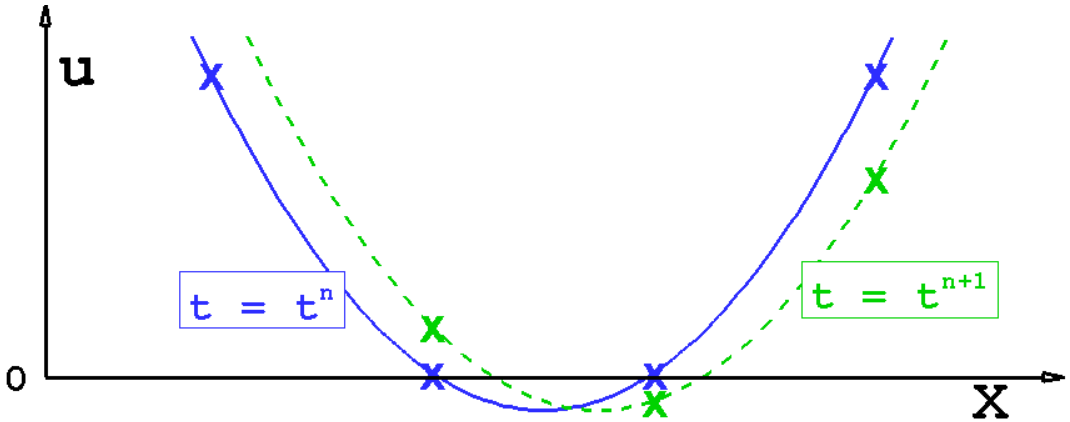
$$u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1} = C_{i-i^*-1}(u_{i^*}^n - u_{i^*-1}^n)$$

$$\ldots$$



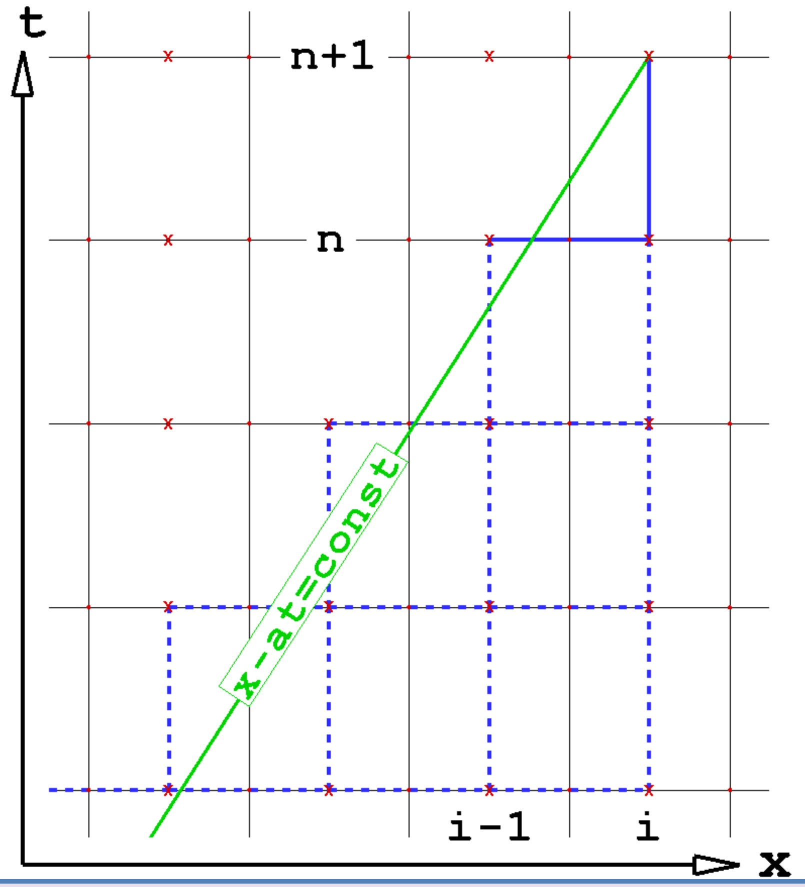
Разложение в ряд Тейлора схемы второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = c_2 \Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c_3 \Delta x^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \ldots$$



Монотонность, аппроксимация, устойчивость и сходимость

$$\boxed{u_i^{n+1} = \left(1 - C_{CFL}\right) u_i^n + C_{CFL} u_{i-1}^n}$$



- схема уголок
- противопотоковая схема (upwind scheme)
- схема Куранта-Изаксона-Рис (КИР)
- сеточно-характеристический метод

- сохранение монотонности: на примере монотонно неубывающей функции

$$\ldots \le u_{i-2}^n \le u_{i-1}^{n+1} \le u_{i-1}^n \le u_i^{n+1} \le u_i^n \le u_{i+1}^{n+1} \le u_{i+1}^n \le \ldots$$

- аппроксимация исходного уравнения: разложение в ряд Тейлора

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a\Delta x}{2}\left(1 - C_{CFL}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O\left(\Delta x^2 + \Delta t^2\right)$$

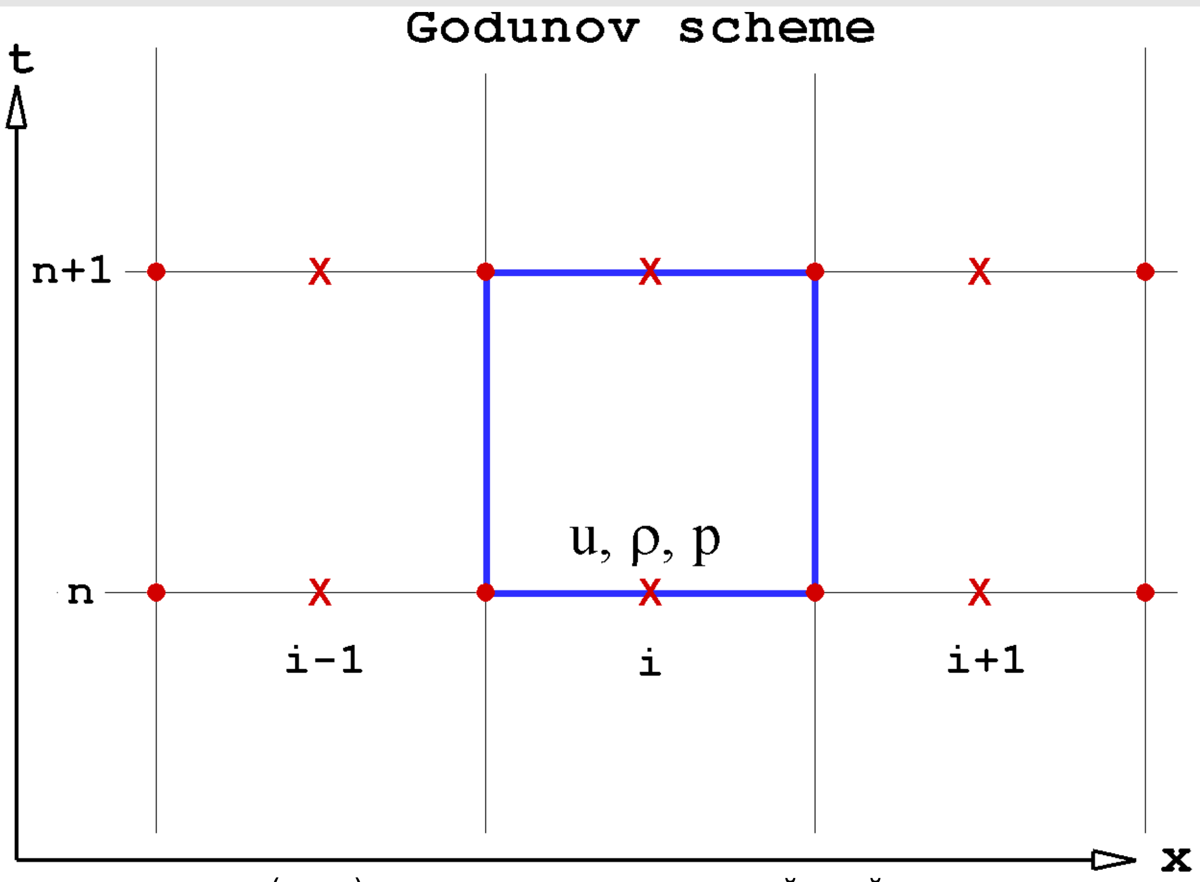
- устойчивость схемы: спектральный признак устойчивости Неймана:

для решения гармонического вида $u_i^n = \lambda^n e^{\alpha i}$ должно выполняться

$$|\lambda| \le 1 \ \forall \alpha \ \Rightarrow \ C_{CFL} \le 1$$

- необходимое условие: характеристика лежит в области влияния численного решения (отсутствие экстраполяции)
- необходимое условие: диссипация решения положительна или нулевая
- необходимое условие: физическая интерпретация (объем вещества в ячейке)

Схема Годунова для уравнений газовой динамики



- на нижнем (n-ом) временном слое в каждой ячейке известны осредненные параметры потока (приписываются центрам ячеек)
- внутри ячейки параметры постоянны (кусочно-постоянное распределение на временном слое)
- параметры на боковых гранях находятся из решения задачи Римана (автомодельная задача)
- интегрирование законов сохранения дает осредненные параметры на следующем (n+1-ом) временном слое

Консервативная форма уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho \\ \rho u \\ \rho e_0\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho u \\ \rho u^2 + p \\ u\left(\rho e_0 + p\right)\end{bmatrix} = 0, \quad e_0 = \frac{u^2}{2} + e(p,\rho)$$

Векторная форма:

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{Q})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = 0, \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u \\ \rho \\ p \end{bmatrix}$$

Q - вектор примитивных переменных
U - вектор консервативных переменных
F - вектор потока

Интегральная форма:

$$\oint_{\Omega}\left(\mathbf{U}dx - \mathbf{F}dt\right) = 0$$

Конечно-объемная схема:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0$$

Задача Римана о распаде разрыва

Задача Коши с начальным разрывом в точке *x* = 0: $\mathbf{Q}(x,t=0)=\begin{cases}\mathbf{Q}_L & \text{при} \quad x<0,\\ \mathbf{Q}_R & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$

<u>I. Линейное приближение</u> (интенсивность начального разрыва невелика)

Одномерные уравнения газовой динамики сводятся к соотношениям вдоль характеристических линий:

$$du-\frac{1}{\rho a}dp=0 \ \text{ вдоль линий } \ \frac{dx}{dt}=u-a \ ;$$

$$du+\frac{1}{\rho a}dp=0 \ \text{ вдоль линий } \ \frac{dx}{dt}=u+a$$

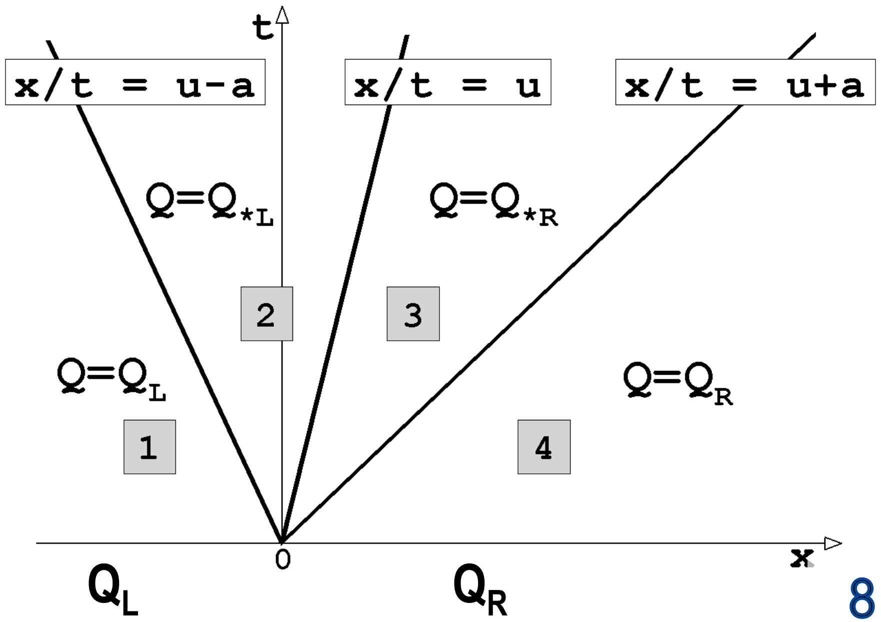
$$d\rho-\frac{1}{a^2}dp=0 \ \text{ вдоль линий } \ \frac{dx}{dt}=u$$

Параметры газа в областях 2 и 3:

$$u_*=u_{*L}=u_{*R}=\frac{u_L\rho_L a_L+u_R\rho_R a_R+p_L-p_R}{\rho_L a_L+\rho_R a_R}$$

$$p_*=p_{*L}=p_{*R}=\frac{p_L\rho_R a_R+p_R\rho_L a_L+(u_L-u_R)\rho_L a_L\rho_R a_R}{\rho_L a_L+\rho_R a_R}$$

$$\rho_{*L}=\rho_L+\frac{1}{a_L^2}(p_*-p_L), \qquad \rho_{*R}=\rho_R+\frac{1}{a_R^2}(p_*-p_R)$$



Задача Римана о распаде разрыва

<u>II. Нелинейное решение</u> (для совершенного газа с γ = const)

Определение скорости и давления в областях 2 и 3:

$$u_* = u_L - f\left(p_*, \mathbf{Q}_L\right), \qquad u_* = u_R + f\left(p_*, \mathbf{Q}_R\right)$$

sw = ударная волна (p_* > p):

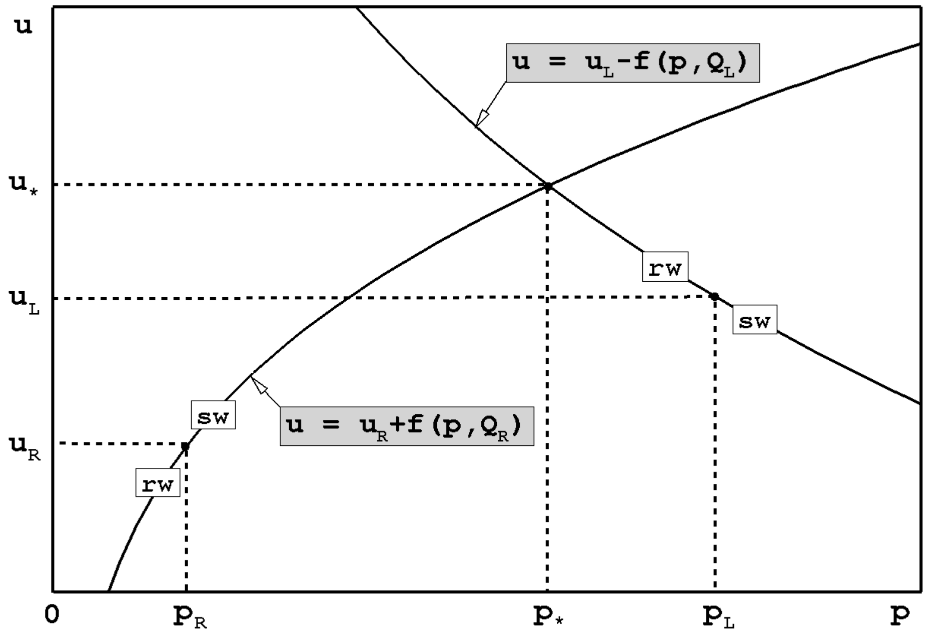
$$f\left(p_*, \mathbf{Q}\right) = \frac{p_* - p}{\sqrt{\rho\left[(\gamma+1)p_* + (\gamma-1)p\right]/2}}$$

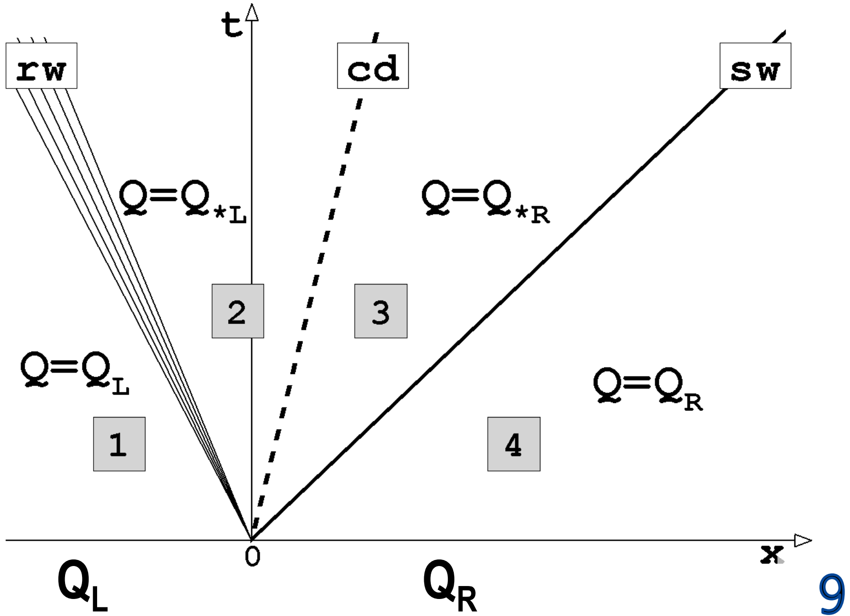
$$\frac{\rho_*}{\rho} = \frac{(\gamma+1)p_* + (\gamma-1)p}{(\gamma-1)p_* + (\gamma+1)p}$$

rw = веер разрежения (p_* < p):

$$f\left(p_*, \mathbf{Q}\right) = \frac{2a}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_*}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right]$$

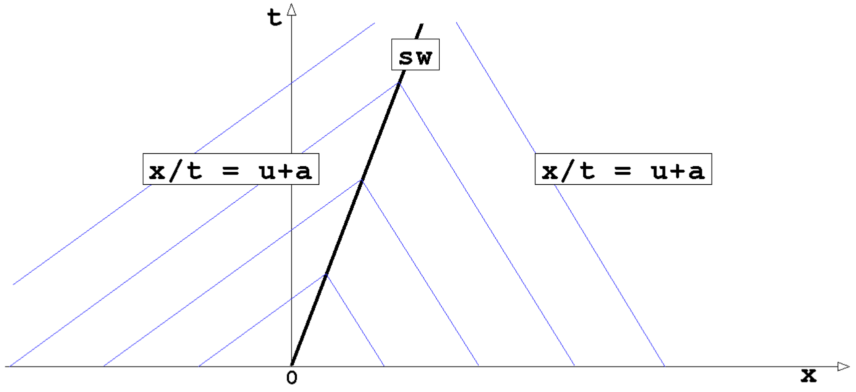
$$\frac{\rho_*}{\rho} = \left(\frac{p_*}{p}\right)^{1/\gamma}$$

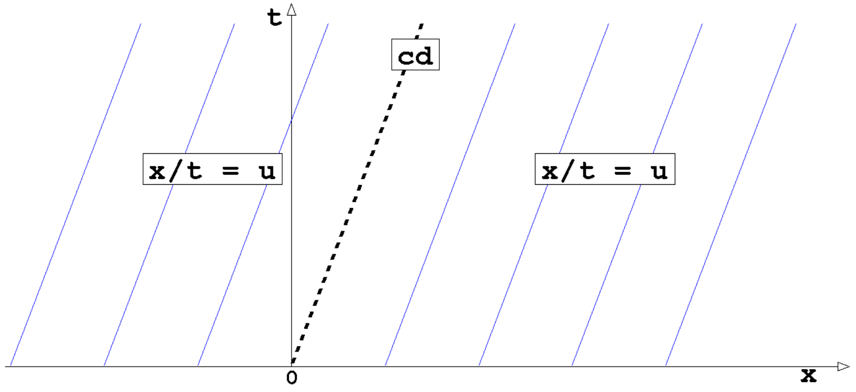




Задача Римана о распаде разрыва

Поверхности разрыва в газовой динамике



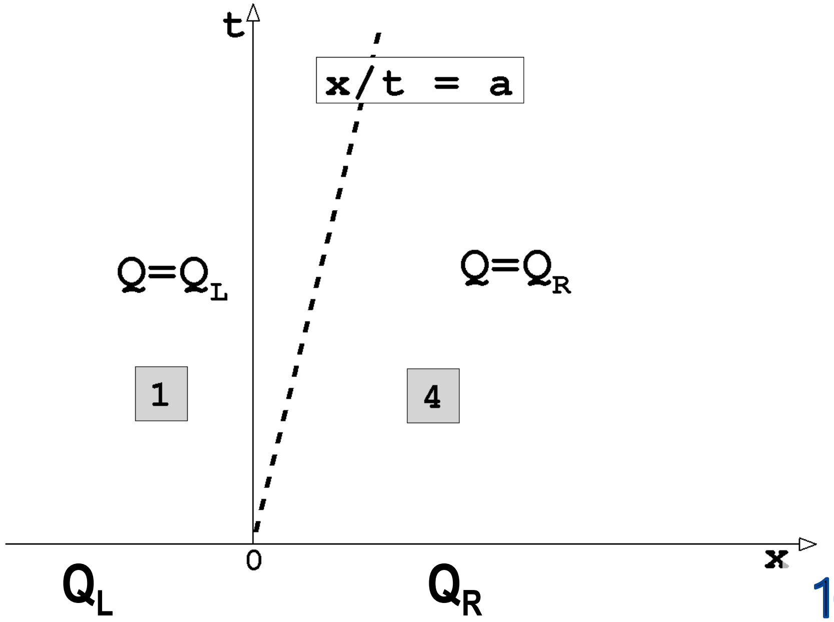


Размывание ударной волны: $\dfrac{D}{\Delta x} \approx const$

Размывание контактной поверхности: $\dfrac{D}{\Delta x} \sim n^{1/2} \sim \left(\dfrac{t}{\Delta x}\right)^{1/2}$

Задача Римана для линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ \text{ при } a = \text{const}$$

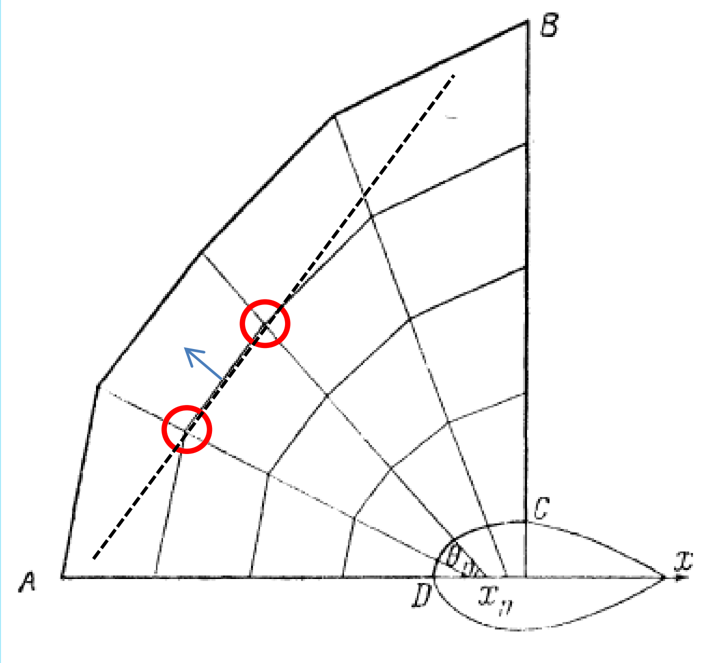


Двумерные расчеты на стационарной и подвижной сетке

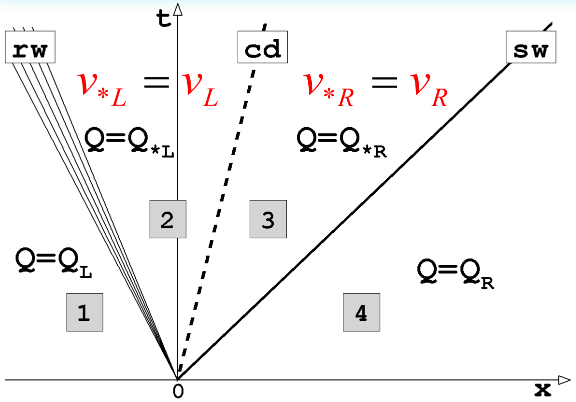
- ***Годунов С.К., Забродин, А.В., Прокопов Г. П.*** Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // ЖВМ и МФ, **1961**

В § 1 описан вариант схемы из [1], выполненный в эйлеровых координатах. § 2 и 3 посвящены двумерному варианту схемы. Исследование устойчивости схемы в простейшем случае слабо возмущенного однородного потока проводится в § 4.

Чрезвычайно существенно, что описываемая схема допускает проведение расчетов с использованием подвижной сетки. Таким сеткам и приспособлению к ним схемы посвящен § 5. Связанная с ударной волной сетка, которую мы использовали при расчете обтекания тел вращения, описана в § 6; там же приведена разностная форма законов сохранения, которая используется при расчете.



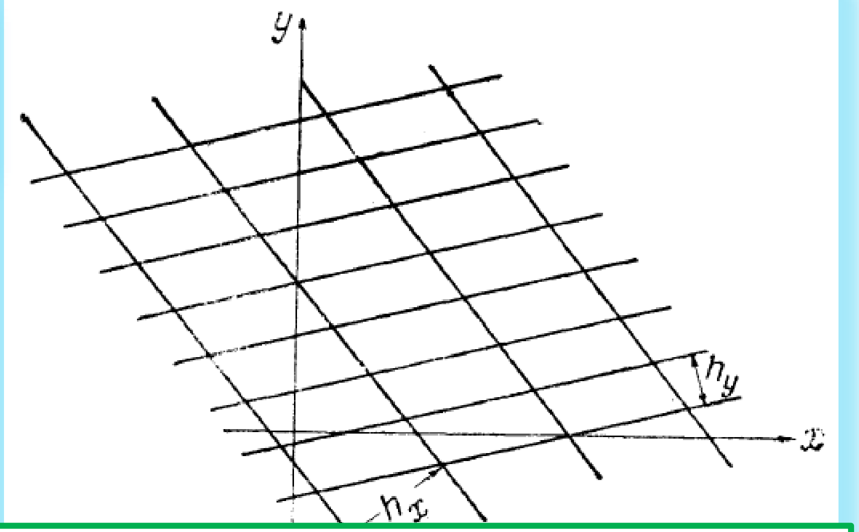
В отличие от разобранного в § 1 одномерного случая, величины ρu, ρv в этих интегралах не будут постоянными на каждой границе ячейки, даже если при $t = t_0$ внутри каждой ячейки все величины постоянны и шаг τ достаточно мал. При составлении нашей разностной схемы, однако, мы не будем обращать на это внимание, положив величины ρu, ρv на каждой границе постоянными в течение всего шага τ. Для



$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \rho \\ p \end{bmatrix}$$

Ограничение на шаг по времени в двумерных расчетах

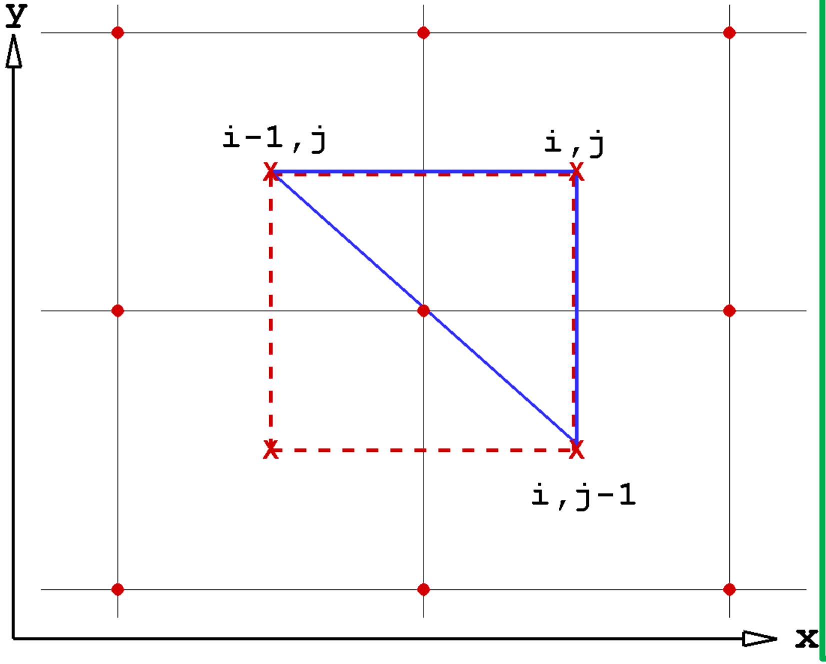
$$\tau \leqslant \frac{\tau_x \cdot \tau_y}{\tau_x + \tau_y}, \quad \tau_x = \frac{h_x}{\max(\bar{u} + \bar{c},\ \bar{c} - \bar{u})}, \quad \tau_y = \frac{h_y}{\max(\bar{v} + \bar{c},\ \bar{c} - \bar{v})}$$



$\underline{\tau} = \Delta t$, h_x, h_y - размеры ячеек
$\underline{u}, v$ - компоненты скорости
c - скорость звука

$$C_{CFL} \equiv \frac{\tau}{\tau_x} + \frac{\tau}{\tau_y} \leq 1$$

? $\tau = \min(\tau_x, \tau_y)$?



Линейное уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } a_x, a_y = \text{const} > 0$$

Точное решение:

$$u = \text{const} \quad \text{вдоль характеристик} \quad x / a_x + y / a_y - t = \text{const}$$

Численное решение:

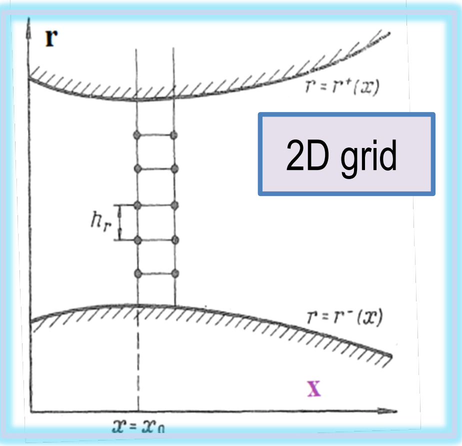
$$u_{i,j}^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_x} - \frac{\tau}{\tau_y}\right) u_{i,j}^n + \frac{\tau}{\tau_x} u_{i-1,j}^n + \frac{\tau}{\tau_y} u_{i,j-1}^n,$$

где $\tau_x = h_x / a_x$ / где $\tau_y = h_y / a_y$

Стационарный аналог схемы Годунова

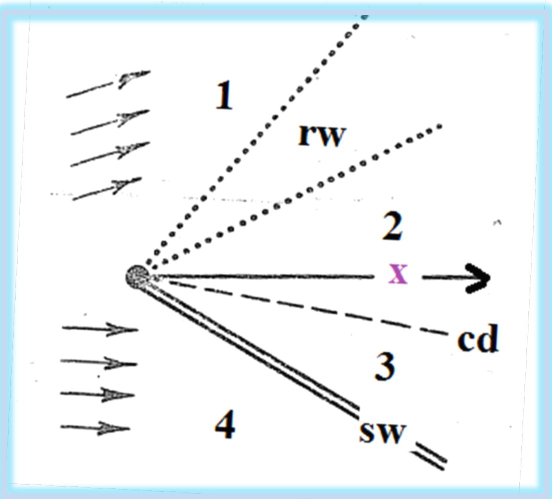
1. ***Иванов М.Я., Крайко А.Н., Михайлов Н.В.*** Метод сквозного счета для двумерных сверхзвуковых течений // ЖВМ и МФ, т. 12, №2, **1972**
2. ***Иванов М.Я., Крайко А.Н.*** Метод сквозного счета для пространственных сверхзвуковых течений // ЖВМ и МФ, т. 12, №3, **1972**

в настоящей работе. В работе предложена новая разностная схема первого порядка, являющаяся стационарным аналогом известной схемы С. К. Годунова [26, 27] для нестационарных течений. При расчете неста-



1. Стационарное сверхзвуковое осесимметричное течение с закруткой:

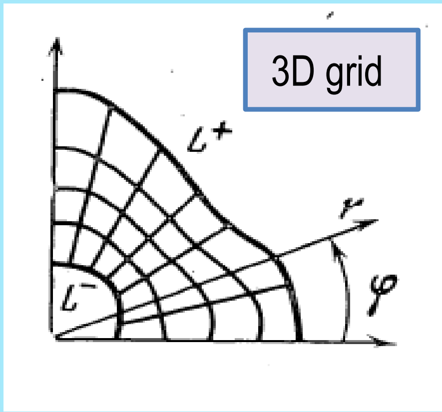
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial r}=\mathbf{H}$$



2. Стационарное сверхзвуковое трехмерное течение (цилиндрическая система координат):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial r}+\frac{\partial \mathbf{F}_\varphi}{\partial \varphi}=0$$

задача о взаимодействии двух сверхзвуковых потоков (стационарный аналог задачи Римана)



Книга по методу Годунова

- ***Годунов С.К., Забродин, А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н. Прокопов Г. П.*** Численное решение многомерных задач газовой динамики, Наука, Москва, **1976**, 400 стр.

Часть первая: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА

Главы I – IV, §§ 1 – 36.

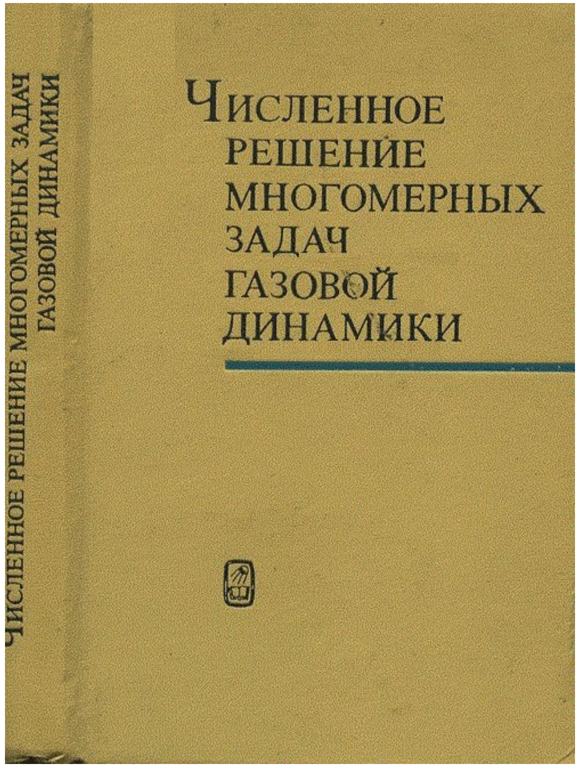
(подробно рассмотрены практически все аспекты построения и применения схемы Годунова)

Часть вторая: ИЛЛЮСТРАЦИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МЕТОДА

Главы V – VII, §§ 37 – 55.

(приведены результаты решения десятков задач, иллюстрирующие универсальность и надежность метода Годунова)

В 1956 г. К. В. Брушлинский выполнил построение схемы для уравнений акустики с точным расчетом решений в углах по функционально-инвариантным решениям С. Л. Соболева. По этой схеме были проведены модельные расчеты, сравнение которых с расчетами по описываемой «грубой» схеме показало, что они практически совпадают. Только после этого было решено пользоваться той «грубой» схемой, которую мы описываем.



Признание схемы Годунова за рубежом

- ***Richtmyer R.D., Morton K.W.*** Difference Methods for Initial-Value Problems, 2nd edition, John Wiley & Sons, **1967**
- ***Рихтмайер Р., Мортон К.*** Разностные методы решения краевых задач, изд-во «Мир», **1972**

§ 12.15. Метод Годунова

В 1959 г. С. К. Годунов описал оригинальный метод решения одномерных задач со скачками, основанный на использовании уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \qquad (12.59)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} V \\ u \\ \ldots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = V_0 \begin{bmatrix} -u \\ p \\ pu \end{bmatrix}, \qquad (12.60)$$

...ва и в двухшаговом ме-
..., что если $\mathbf{U}_j^n$ известны
...ближенные промежуточ-
...ются $\mathbf{U}_j^{n+1}$ по центриро-

$$\ldots - \mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1/2}). \qquad (12.61)$$

...0), необходимы только
...лучаются из физической
... V, E в момент $t = n\Delta t$
аппроксимируется ступенчатыми функциями, такими, что эти величины имеют постоянные значения на каждом интервале

On May 1–2, 1997, an international symposium was held in honor of the Russian mathematician Sergei Konstantinovich Godunov. The title of the symposium was “Godunov’s Method for Gas Dynamics: Current Applications and Future Developments,” and its venue was the Department of Aerospace Engineering at the University of Michigan, Ann Arbor, MI. The meeting preceded the awarding of an honorary doctorate to Godunov, which took place during the University’s Spring Commencement, on May 3.

COLELLA: This is Friday, November 14, 2003 at UCLA. This is Philip Colella interviewing Peter Lax for the SIAM Numerical Analysis Oral History Project. So, thank you Peter. So, I’d like to start out by asking you a little bit about where you first got started in computing.

* * * * *

LAX: Well, the work of Godunov was very important. I’m sure that’s how the Soviets built their atomic weapons. But it was one of the basic ingredients of Glimm’s work, too.

Неявная схема Годунова

Линейное уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ при } a = \text{const} > 0$$

Явная схема:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Неявная схема:

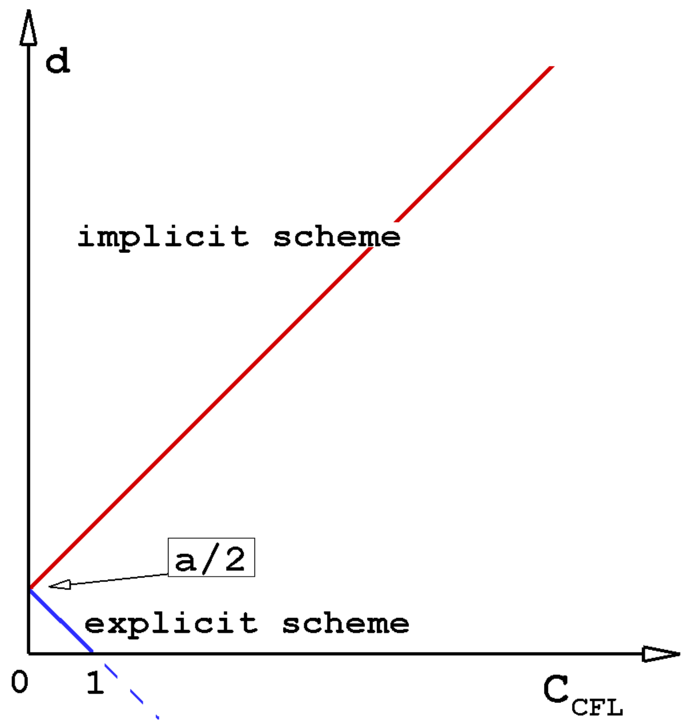
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

Разложение в ряд Тейлора:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x + O\left(\Delta x^2\right)$$

$$d = \frac{a}{2}\left(1 - C_{CFL}\right)$$

$$d = \frac{a}{2}\left(1 + C_{CFL}\right)$$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ