

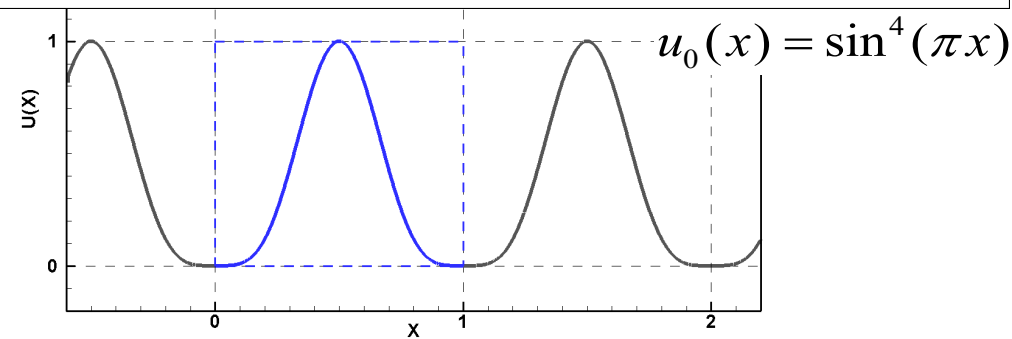
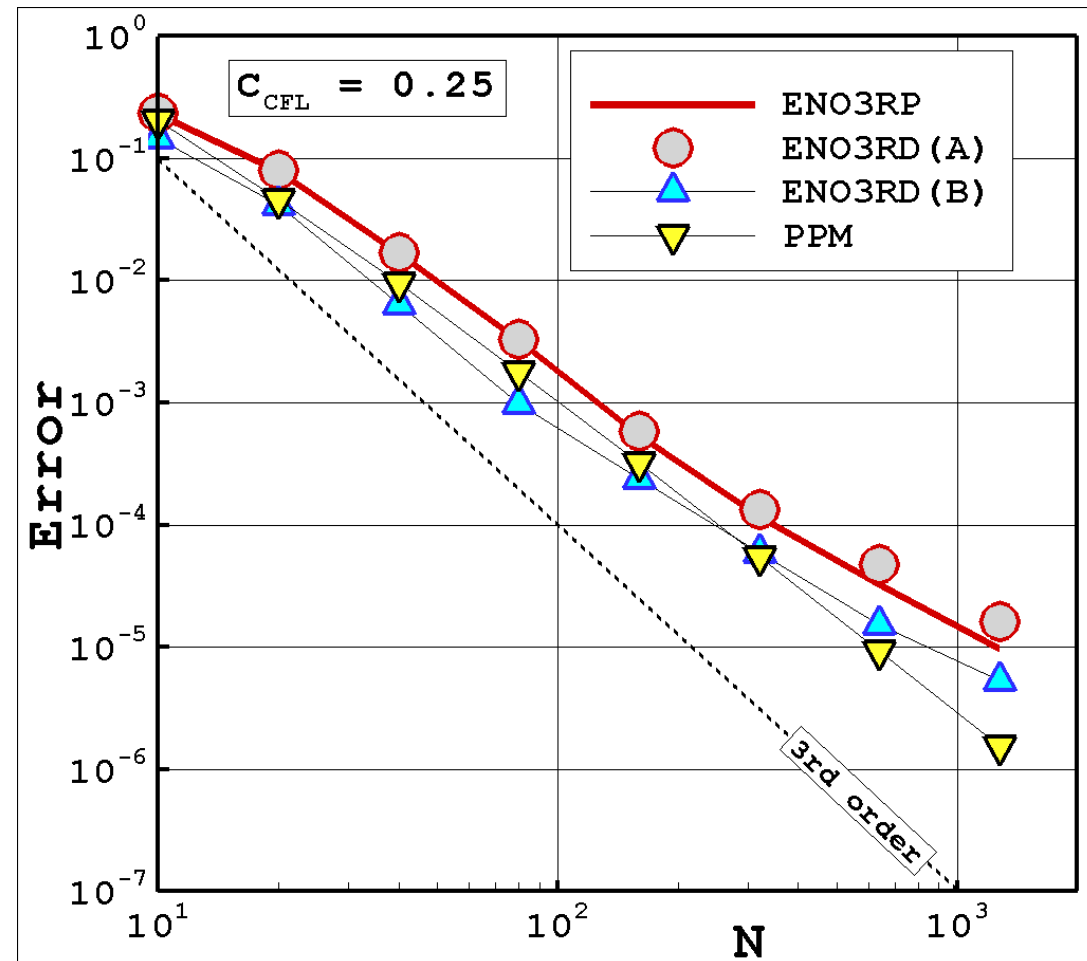
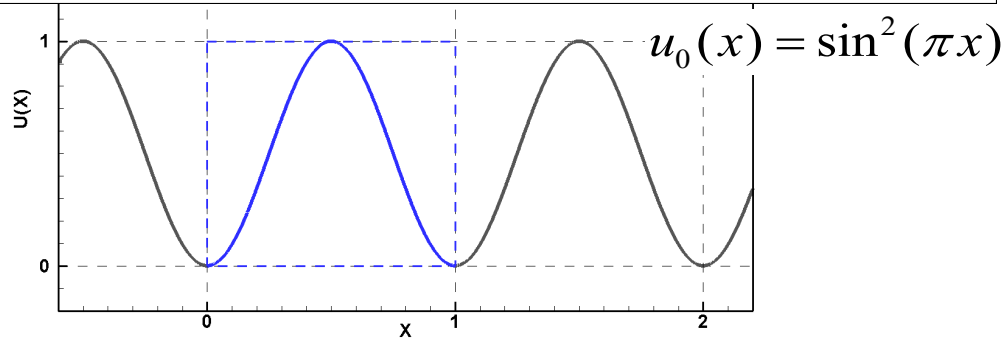
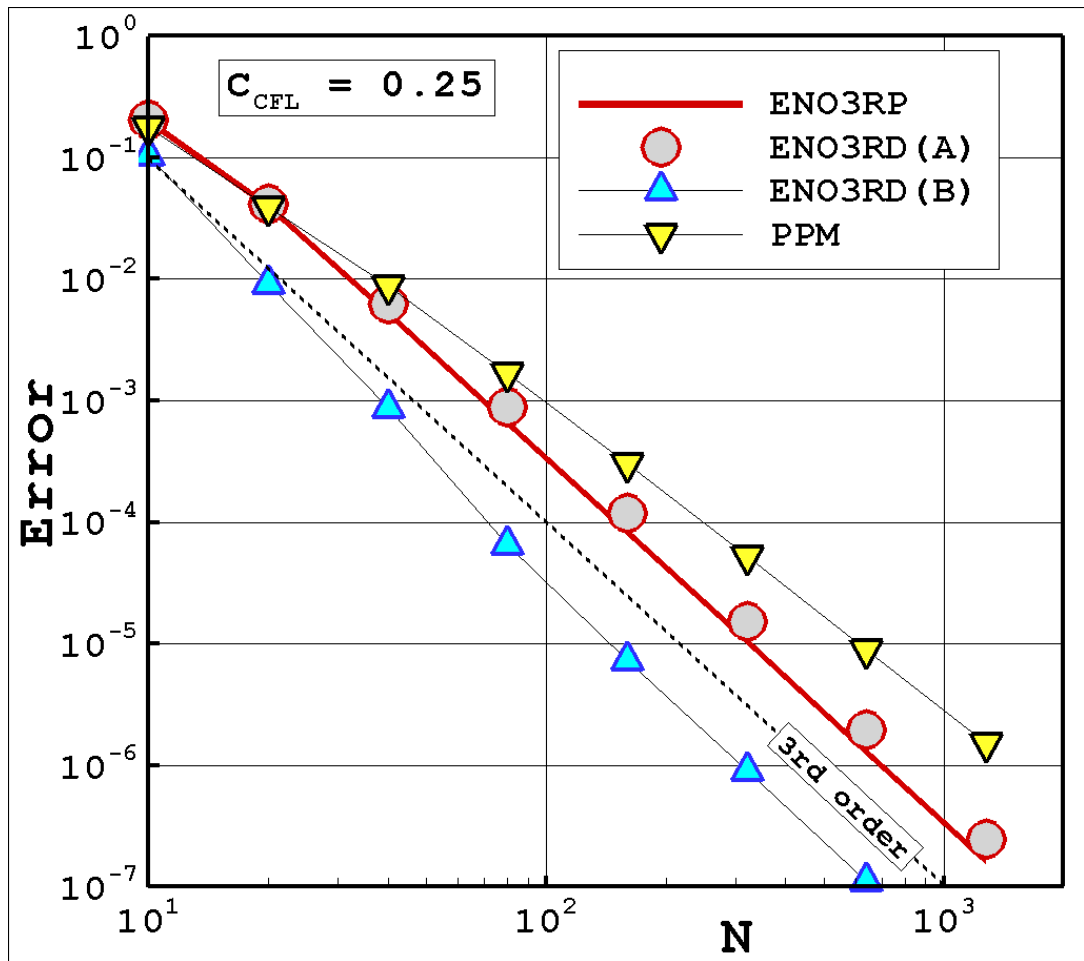
Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике

Х. Схемы повышенной точности: цена вопроса
(часть 3)

Родионов Александр Владимирович



Схемы третьего порядка с реконструкциями ENO3 и PPM



Свойства реконструкций семейства ENO

Линейная схема: аппроксимация + устойчивость → СХОДИМОСТЬ

- **Harten A., Engquist B., Osher S. Chakravarthy S.R.** Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes. III // J. Comp. Phys., **1987**

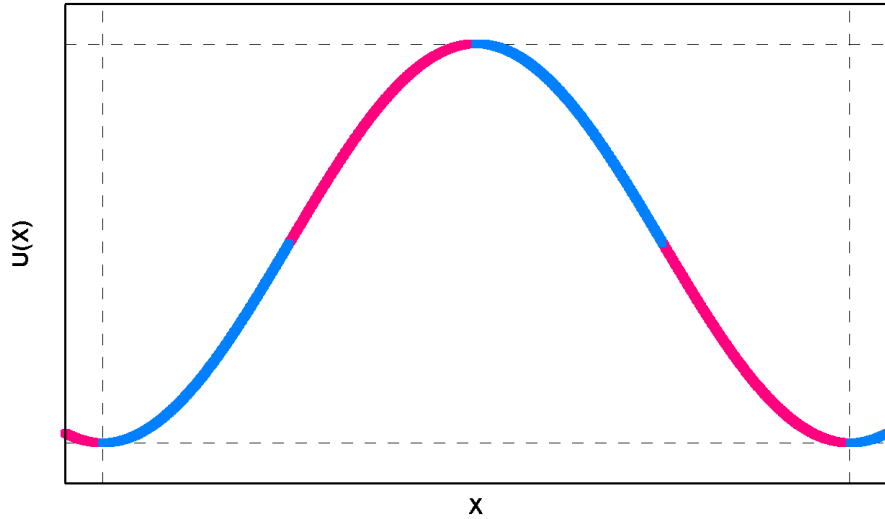


... Due to the adaptive selection of stencil in the reconstruction step, the scheme (1.23b) is highly nonlinear; consequently the use of the standard linear stability analysis is inappropriate.

... Such an instability usually exhibits itself by the production of increasing oscillations which start at the highest derivative and propagate to the function itself. The numerical experiment in [16] shows that once these oscillations begin to appear on the level of the highest derivative, the adaptive selection of stencil in (2.5b) reacts by changing the orientation of the stencil and thus avoids the buildup of instability.

- **Rogerson A.M., Meiburg E.** A numerical study of the convergence properties of ENO schemes // J. Sci. Comput., **1990**
- **Shu C.-W.** Numerical experiments on the accuracy of ENO and modified ENO schemes // J. Sci. Comput., **1990**

Свойства реконструкций семейства ENO



Использование реконструкций ENO (RP-вариант) в сочетании с методами Рунге-Кутты

$$u_{i+1/2-} = \sum_k C_k^{m,s} \bar{u}_{i+k}, \quad u_{i-1/2+} = \sum_k C_{-k}^{m,-s} \bar{u}_{i+k}$$

Таблица коэффициентов $C_k^{m,s}$ для расчета $u_{i+1/2-}$

		$k = -4$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
m	s	u_{i-4}	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}	u_{i+4}
1	0					1				
2	$-1/2$				$-1/2$	$3/2$				
	$+1/2$					$1/2$	$1/2$			
3	-1			$1/3$	$-7/6$	$11/6$				
	0				$-1/6$	$5/6$	$1/3$			
	$+1$					$1/3$	$5/6$	$-1/6$		
4	$-3/2$		$-1/4$	$13/12$	$-23/12$	$25/12$				
	$-1/2$			$1/12$	$-5/12$	$13/12$	$1/4$			
	$+1/2$				$-1/12$	$7/12$	$7/12$	$-1/12$		
	$+3/2$					$1/4$	$13/12$	$-5/12$	$1/12$	
5	-2	$1/5$	$-21/20$	$137/60$	$-163/60$	$137/60$				
	-1		$-1/20$	$17/60$	$-43/60$	$77/60$	$1/5$			
	0			$1/30$	$-13/60$	$47/60$	$9/20$	$-1/20$		
	$+1$				$-1/20$	$9/20$	$47/60$	$-13/60$	$1/30$	
	$+2$					$1/5$	$77/60$	$-43/60$	$17/60$	$-1/20$

$m = 2$. Выбирается левая разность, если:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow \left| d_{i-1/2}^{(1)} \right| < \left| d_{i+1/2}^{(1)} \right|$$

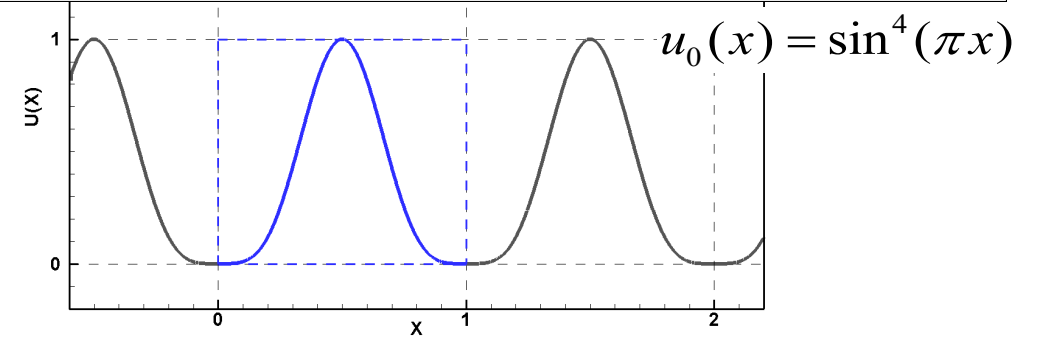
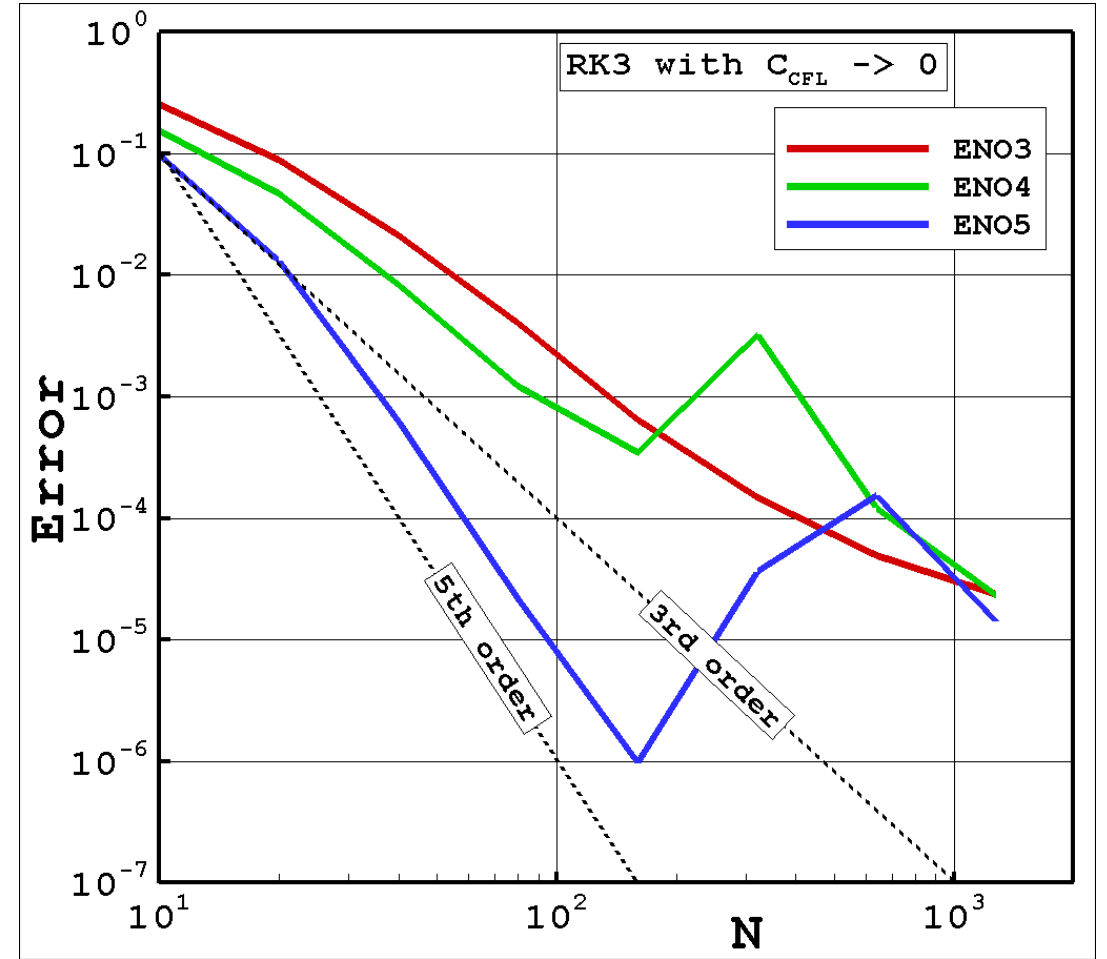
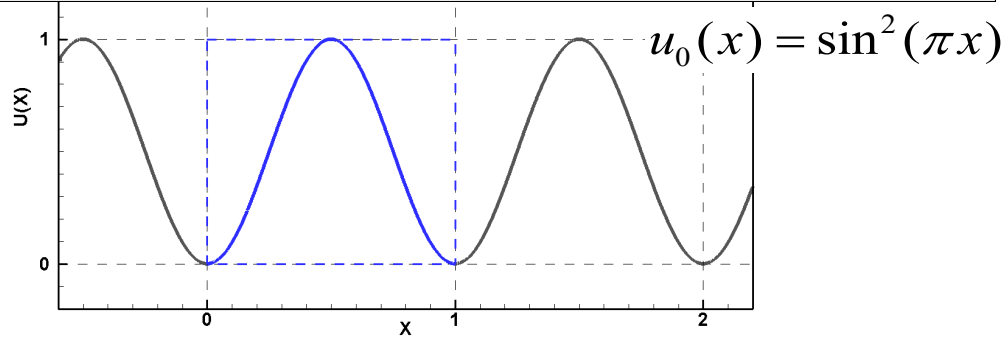
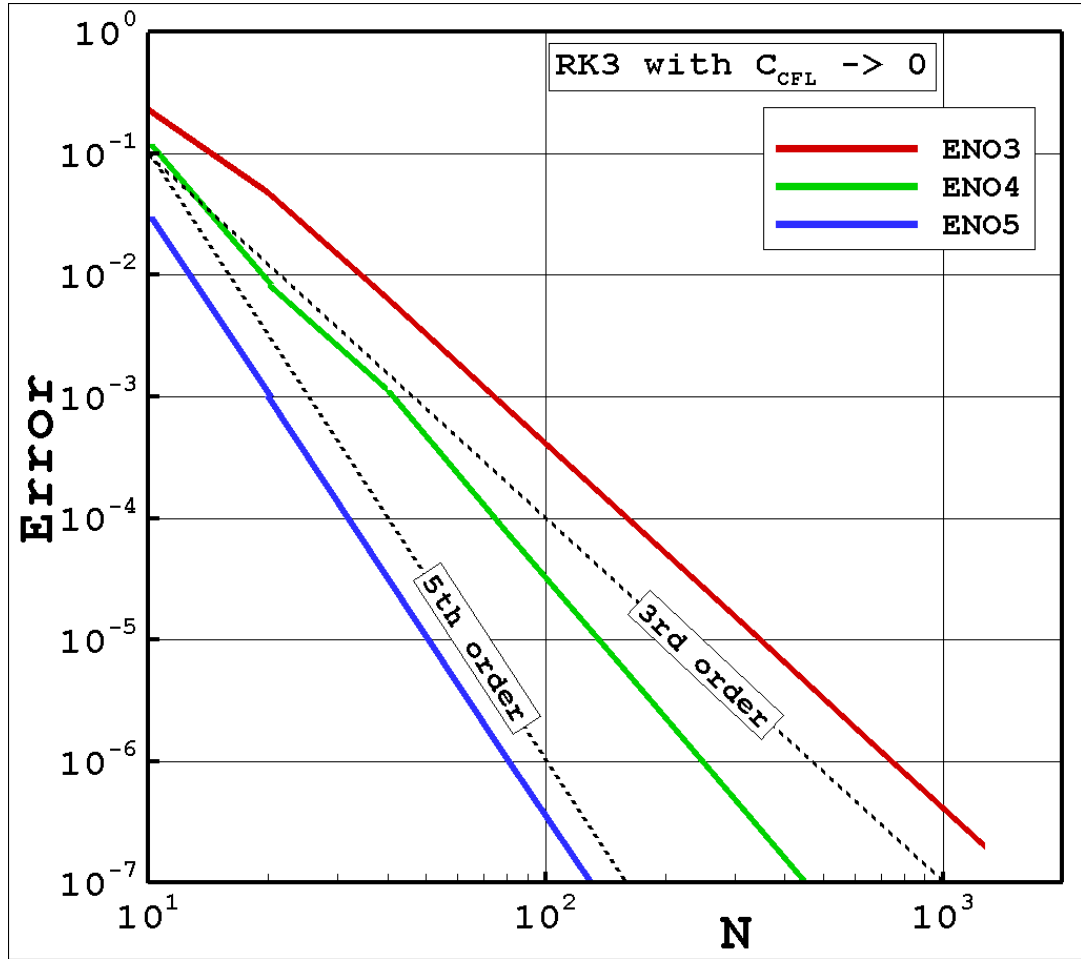
$m = 3$. Добавляется точка слева, если:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} > 0 \Rightarrow \left| d_i^{(2)} \right| < \left| d_{i+1}^{(2)} \right|$$

$m = 4$. Добавляется точка слева, если:

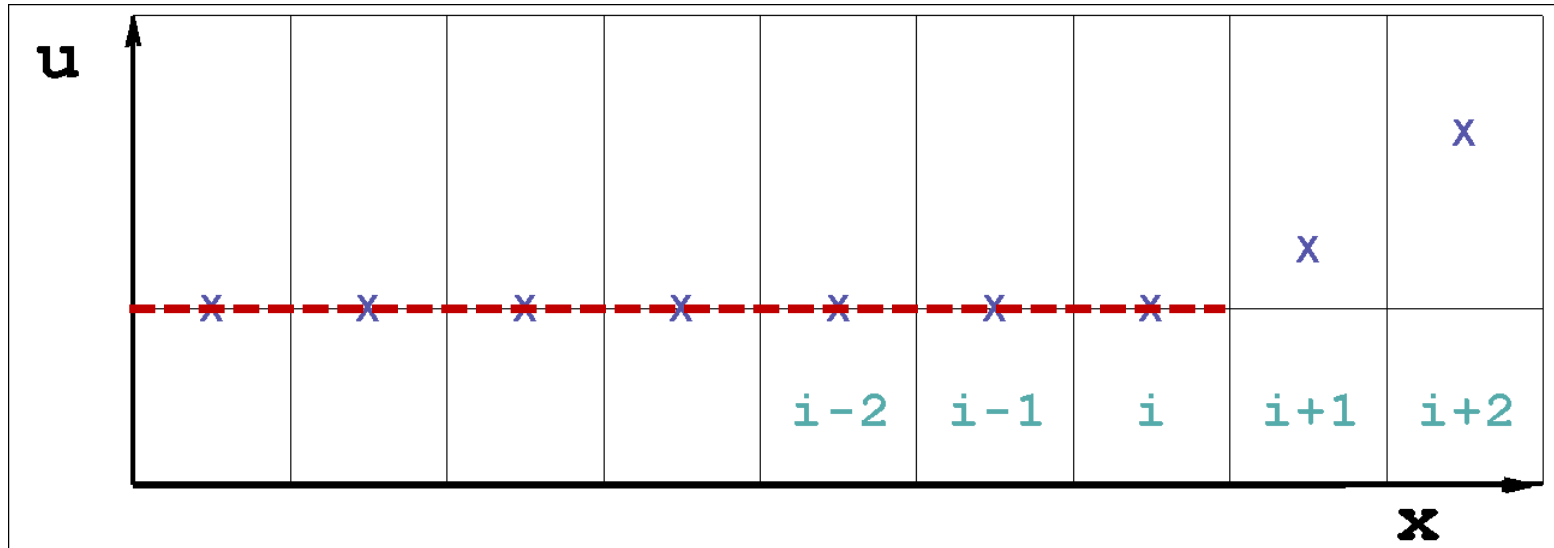
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} > 0 \Rightarrow \left| d_{i-1/2}^{(3)} \right| < \left| d_{i+1/2}^{(3)} \right|$$

Схемы ENO в сочетании с методом Рунге-Кутты



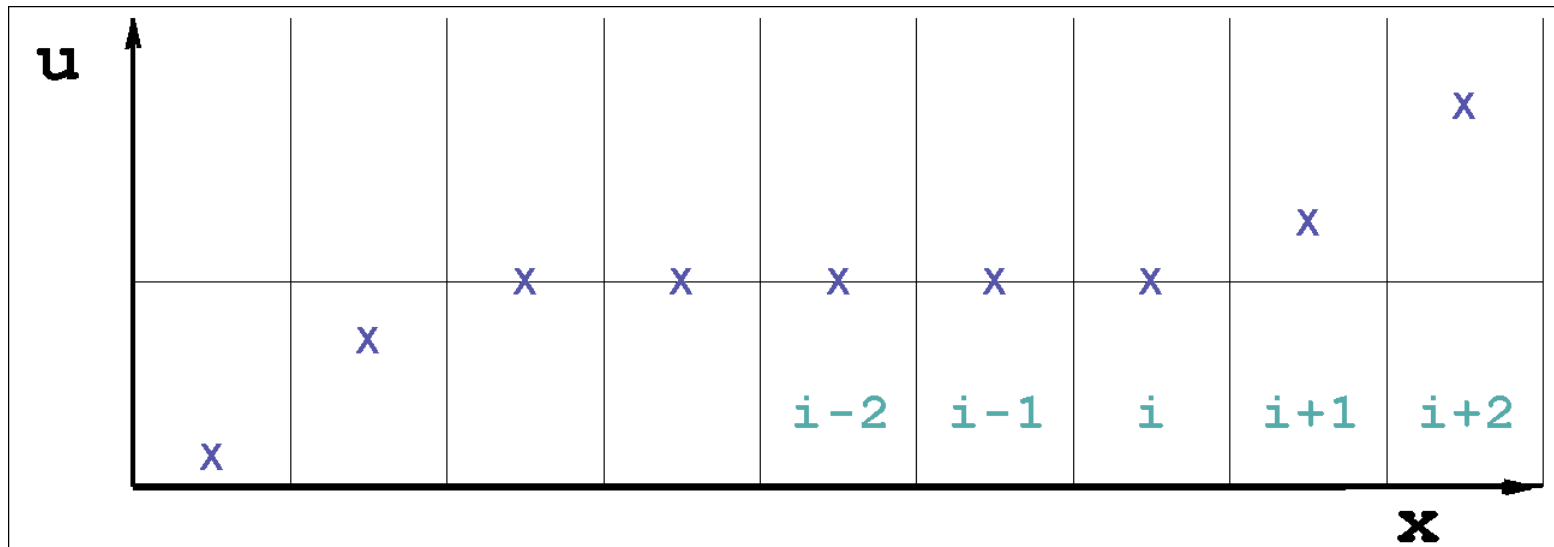
Свойства реконструкций семейства ENO

Сохраняют ли схемы семейства ENO монотонность решения?



Линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



Схемы WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory schemes)

- ❑ *Liu X.-D., Osher S., Chan T.* Weighted essentially nonoscillatory schemes // J. Comp. Phys., **1994**
- ❑ *Jiang G.-S., Shu C.-W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comp. Phys., **1996**

Главная идея схем WENO

Вместо использования одного отобранного шаблона (как в схемах ENO) использовать нелинейную комбинацию всех шаблонов, участвующих в отборе (использование всех шаблонов с весами).

В качестве весов подбираются функции, которые: (1) в областях гладкости решения позволяют повысить порядок интерполяции; (2) в окрестности разрывов дают интерполяцию, близкую к интерполяции схемы ENO (доминирует наиболее «гладкий» шаблон).

Порядки интерполяции схем ENO и WENO

ENO	WENO	
	Liu <i>et al</i> (1994)	Jiang & Shu (1996)
m	$m + 1$	$2m - 1$
2	3	3
3	4	5
4	5	7
5	6	9

Таблица коэффициентов $C_k^{m,s}$ для расчета $u_{i+1/2-}$

		$k = -4$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
m	s	u_{i-4}	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}	u_{i+4}
1	0					1				
2	$-1/2$		1/3		$-1/2$	$3/2$				
	$+1/2$		2/3			$1/2$	$1/2$			
3	-1			$1/3$	$-7/6$	$11/6$				1/10
	0				$-1/6$	$5/6$	$1/3$			6/10
	$+1$					$1/3$	$5/6$	$-1/6$		3/10
4	$-3/2$		$-1/4$	$13/12$	$-23/12$	$25/12$				
	$-1/2$			$1/12$	$-5/12$	$13/12$	$1/4$			
	$+1/2$				$-1/12$	$7/12$	$7/12$	$-1/12$		
	$+3/2$					$1/4$	$13/12$	$-5/12$	$1/12$	
5	-2	$1/5$	$-21/20$	$137/60$	$-163/60$	$137/60$				
	-1		$-1/20$	$17/60$	$-43/60$	$77/60$	$1/5$			
	0			$1/30$	$-13/60$	$47/60$	$9/20$	$-1/20$		
	$+1$				$-1/20$	$9/20$	$47/60$	$-13/60$	$1/30$	
	$+2$					$1/5$	$77/60$	$-43/60$	$17/60$	$-1/20$

Схемы WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory schemes)

□ **Jiang G.-S., Shu C.-W.** Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comp. Phys., **1996**

Вычисление весовых коэффициентов в схеме WENO3

$$u_{i+1/2-} = \omega_0 \left(\frac{3}{2} u_i - \frac{1}{2} u_{i-1} \right) + \omega_1 \left(\frac{1}{2} u_{i+1} + \frac{1}{2} u_i \right)$$

$$\omega_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1}, \quad \omega_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1}$$

$$\alpha_0 = \frac{1/3}{(\varepsilon + IS_0)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{2/3}{(\varepsilon + IS_1)^2}$$

$$IS_0 = (u_i - u_{i-1})^2, \quad IS_1 = (u_{i+1} - u_i)^2$$

$$\varepsilon = 10^{-6}$$

Вычисление весовых коэффициентов в схеме WENO5

$$u_{i+1/2-} = \omega_0 \left(\frac{11}{6} u_i - \frac{7}{6} u_{i-1} + \frac{1}{3} u_{i-2} \right) + \omega_1 \left(\frac{1}{3} u_{i+1} + \frac{5}{6} u_i - \frac{1}{6} u_{i-1} \right) + \omega_2 \left(-\frac{1}{6} u_{i+2} + \frac{5}{6} u_{i+1} + \frac{1}{3} u_i \right)$$

$$\omega_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \omega_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \omega_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}$$

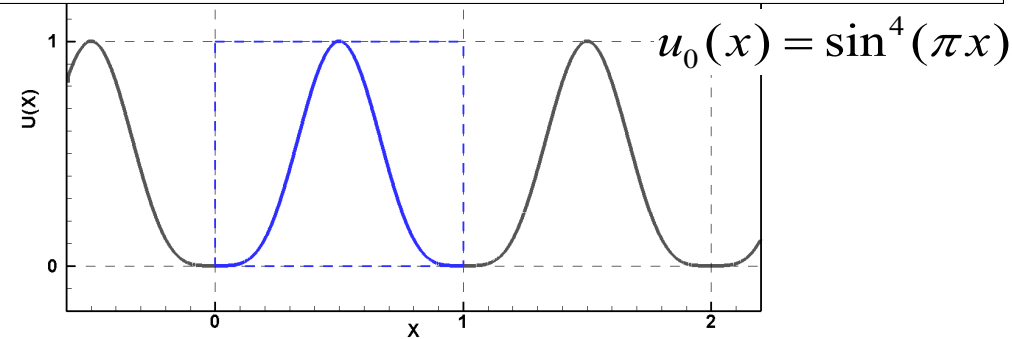
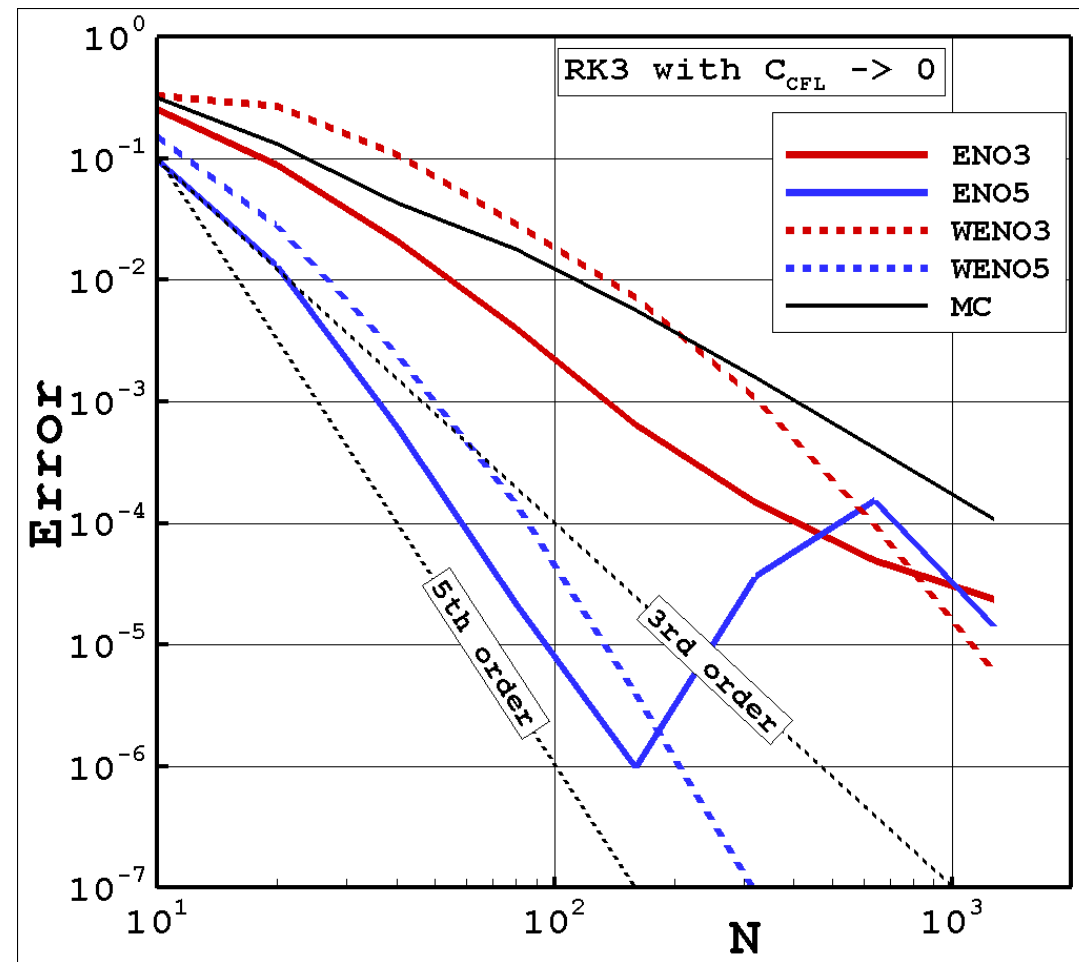
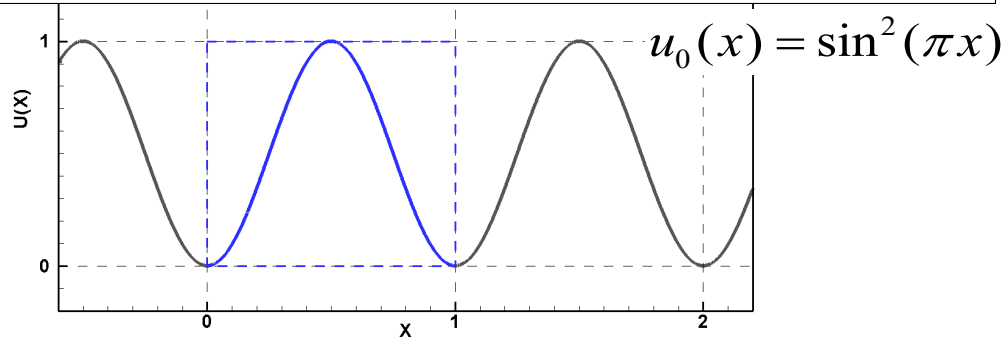
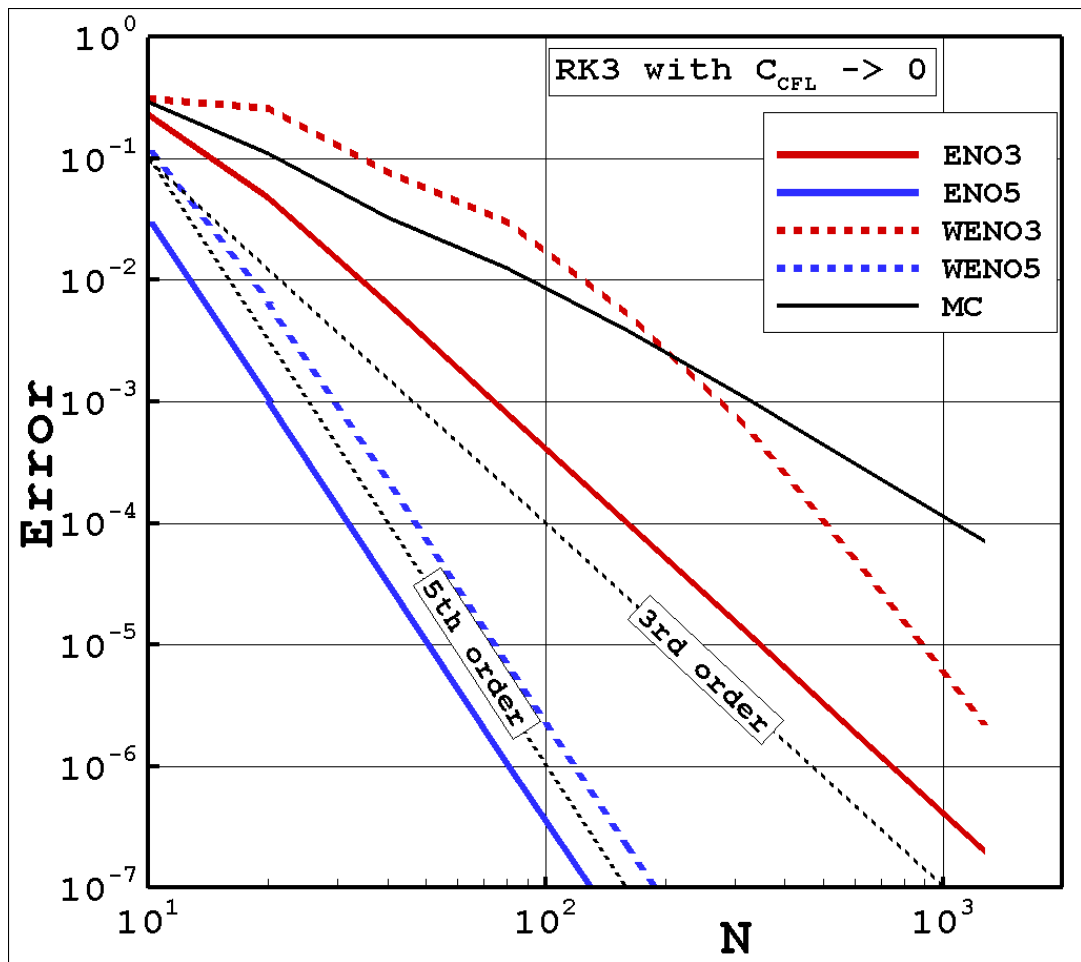
$$\alpha_0 = \frac{1/10}{(\varepsilon + IS_0)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{6/10}{(\varepsilon + IS_1)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{3/10}{(\varepsilon + IS_2)^2}$$

$$IS_0 = \frac{13}{12} (u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2})^2 + \frac{1}{4} (3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2})^2,$$

$$IS_2 = \frac{13}{12} (u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i)^2 + \frac{1}{4} (u_{i+2} - 4u_{i+1} + 3u_i)^2$$

$$IS_1 = \frac{13}{12} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})^2 + \frac{1}{4} (u_{i+1} - u_{i-1})^2,$$

Сравнение схем ENO и WENO

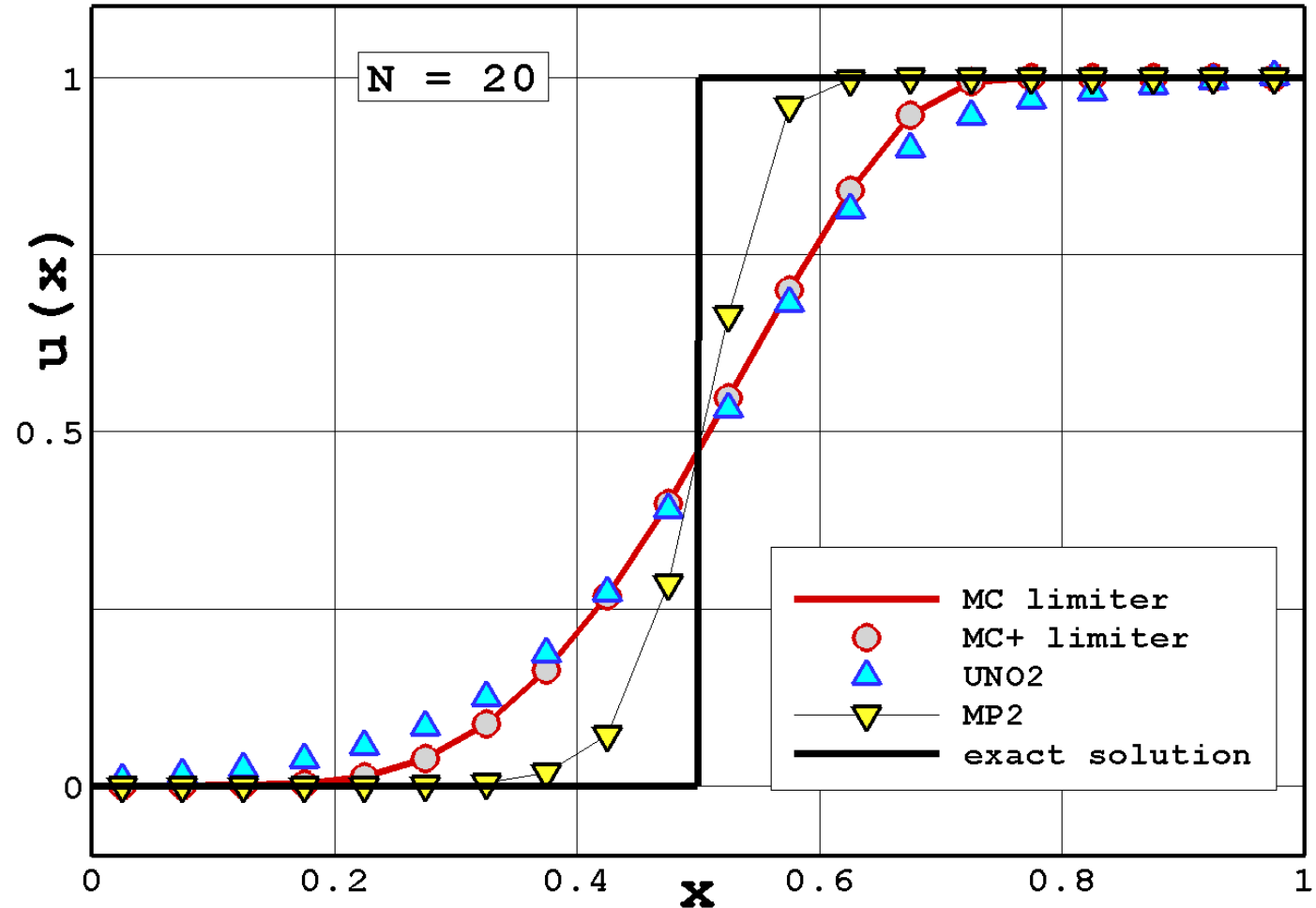


Реконструкция-ограничитель MP2

□ *Huynh H.T.* Accurate upwind methods for the Euler equations // SIAM J. Numer. Anal., 1995

MP2 = 2nd-order accurate Monotonicity-Preserving

```
FUNCTION DS_MP2( Dm2, Dm1, Dp1, Dp2 )  
  P0 = 0.5 * ( Dm1 + Dp1 )  
  Pp = 0.5 * ( 3. * Dp1 - Dp2 )  
  Pm = 0.5 * ( 3. * Dm1 - Dm2 )  
  Qp = Fmedian( Dp1, P0, Pp )  
  Qm = Fmedian( Dm1, P0, Pm )  
  Qbot = Fmedian( Qm, Qp, - Qm - Qp )  
  Qtop = Fmedian( Qbot, 2.*Dm1, 2.*Dp1 )  
  Q5 = ( 14. * P0 - Dm2 - Dp2 ) / 12.  
  Pmed = Fmedian( P0, Pp, Pm )  
  Q6 = Fmedian( Q5, P0, Pmed )  
  Q6mod = DMAX1( 5. * DABS(Qp - Qm), DABS(Q6) )  
  Q6 = DSIGN( Q6mod, Q6 )  
  DS_MP2 = Fmedian( Q6, Qtop, Qbot )  
END
```



☐ **Suresh, Huynh.** Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge–Kutta time stepping // J. Comp. Phys., 1997

MP5 = 5th-order accurate Monotonicity-Preserving

```

FUNCTION DS_MP5( Dm2, Dm1, Dp1, Dp2 )
  Vint = ( -2.D0*Dm2 + 11.D0*Dm1 + 24.D0*Dp1 - 3.D0*Dp2 ) / 60.D0
  Vmp = Fminmod( Dp1, 4.D0*Dm1 )
  IF( Vint * ( Vint - Vmp ) .LE. 1.D-10 ) THEN
    DS_MP5 = Vint
  ELSE
    Djm1 = Dm1 - Dm2
    Dj = Dp1 - Dm1
    Djp1 = Dp2 - Dp1
    aa = Fminmod( 4.D0*Dj - Djp1, 4.D0*Djp1 - Dj )
    bb = Fminmod( Dj, Djp1 )
    DM4jph = Fminmod( aa, bb )
    aa = Fminmod( 4.D0*Dj - Djm1, 4.D0*Djm1 - Dj )
    bb = Fminmod( Dj, Djm1 )
    DM4jmh = Fminmod( aa, bb )
    Vul = 4.D0 * dm1
    Vav = 0.5D0 * dp1
    Vmd = Vav - 0.5D0 * DM4jph
    Vlc = 0.5D0 * dm1 + DM4jmh / 0.75D0
    Vmin = DMAX1( DMIN1( 0.D0, Dp1, Vmd ), DMIN1( 0.D0, Vul, Vlc ) )
    Vmax = DMIN1( DMAX1( 0.D0, Dp1, Vmd ), DMAX1( 0.D0, Vul, Vlc ) )
    DS_MP5 = Fmedian( Vmin, Vmax, Vint )
  ENDIF
END
    
```

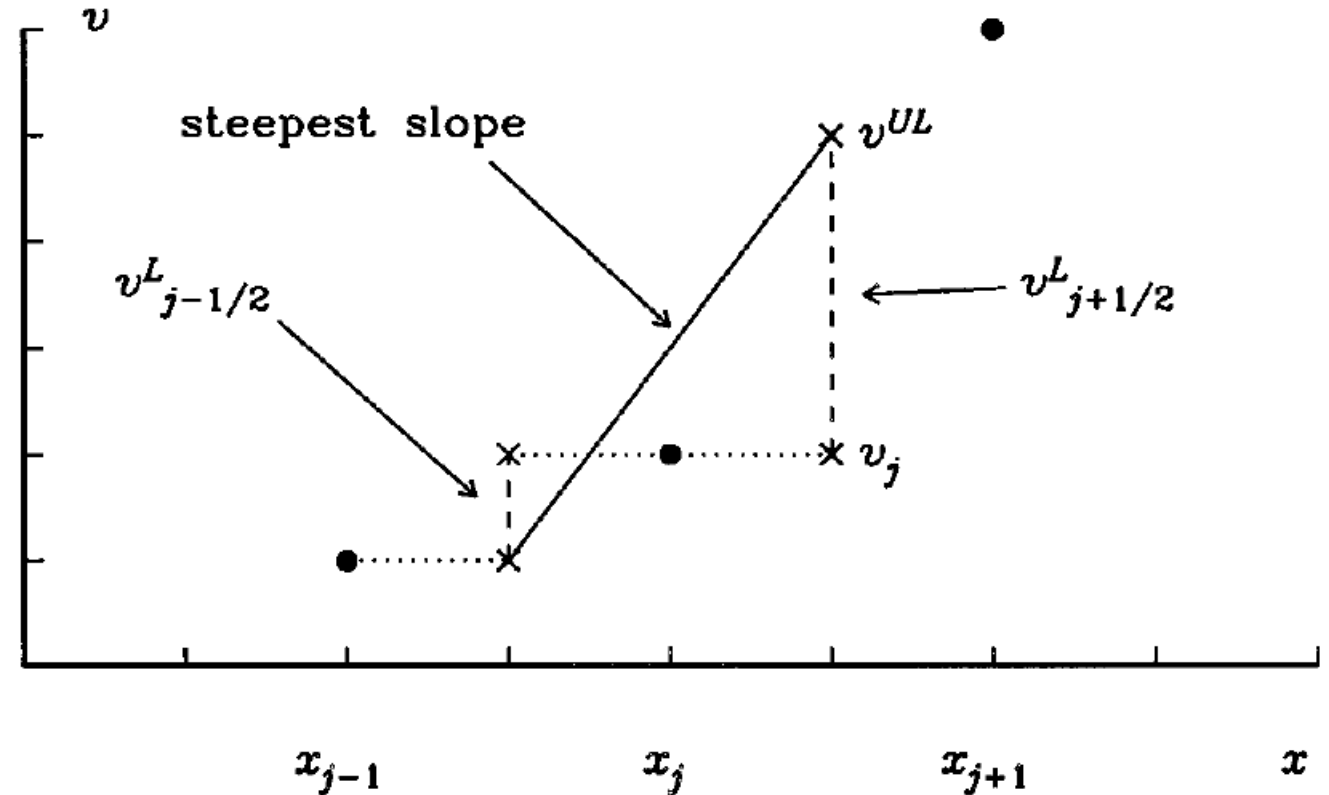
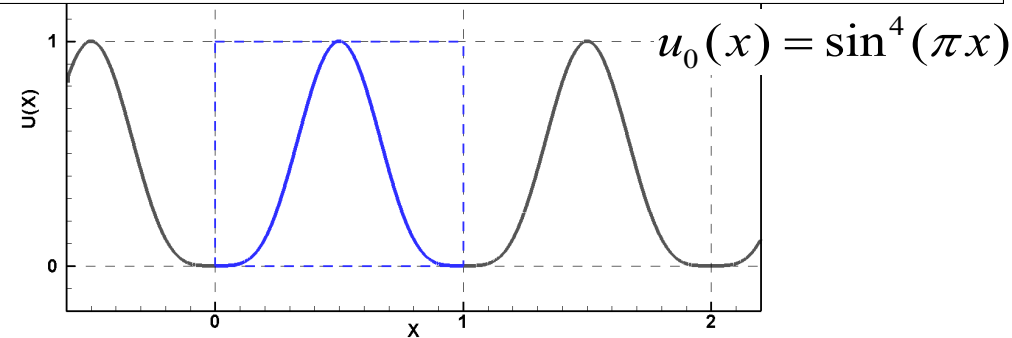
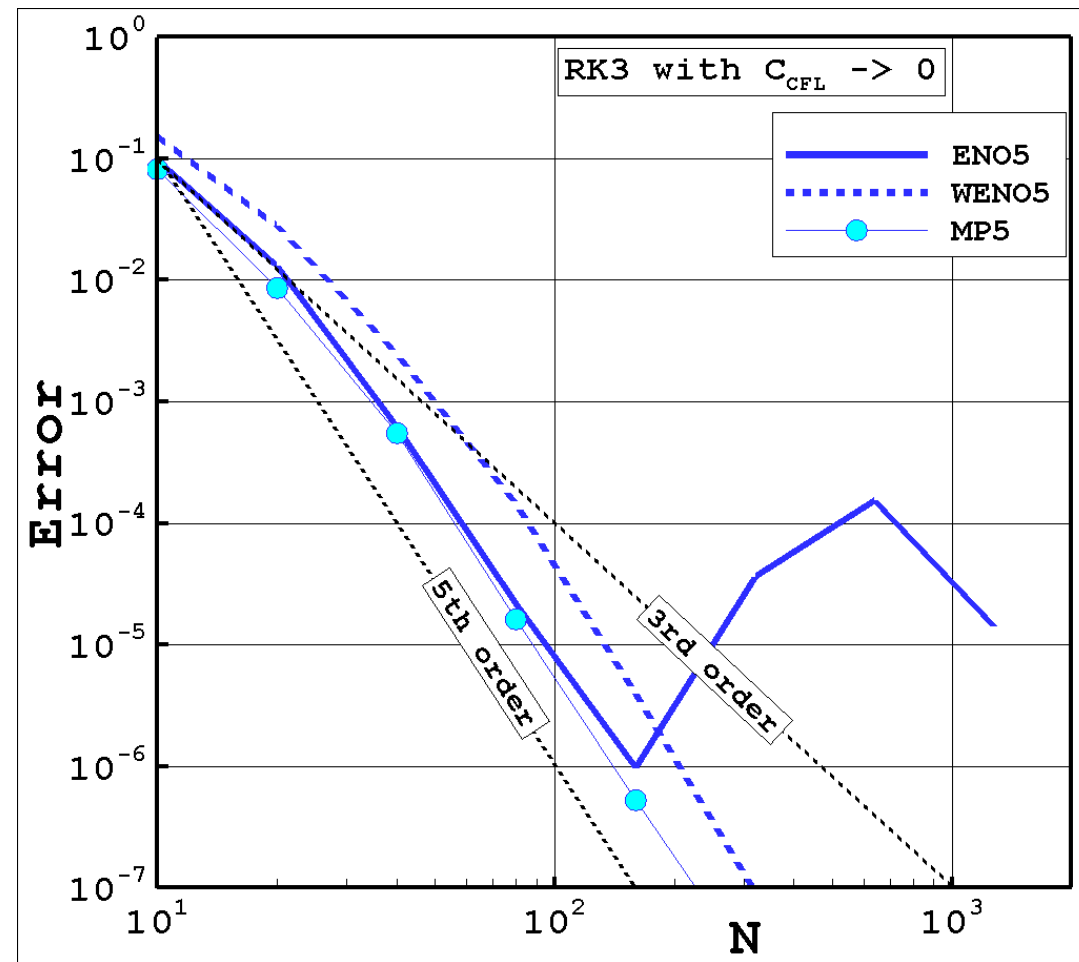
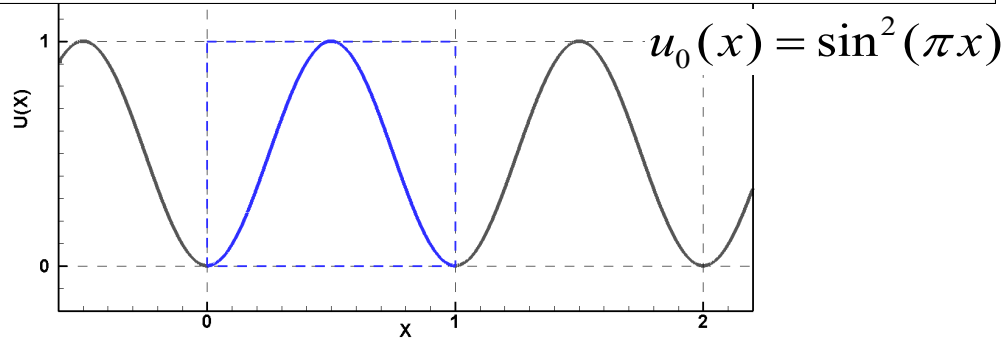
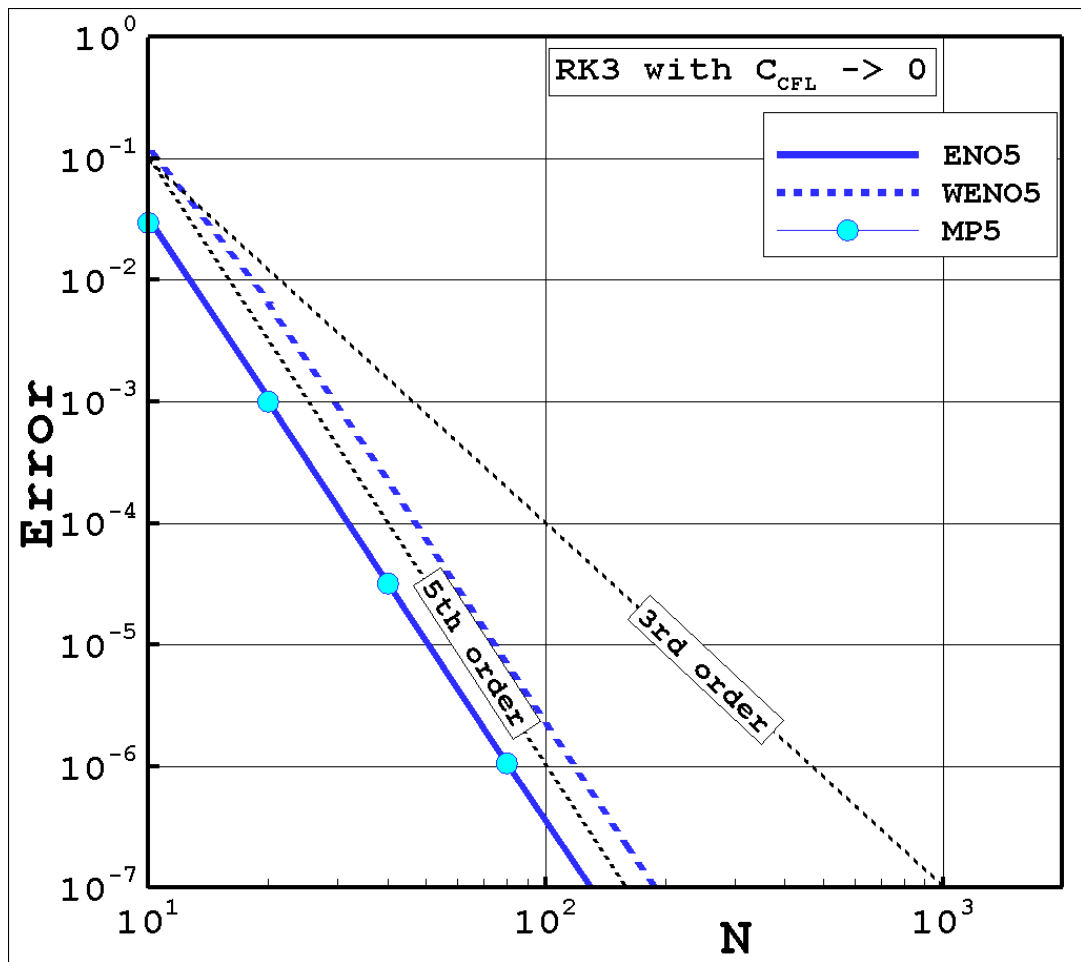


FIG. 2.2. Monotonicity-preserving constraint (2.7) and (2.9).

Сравнение схем ENO5, WENO5 и MP5



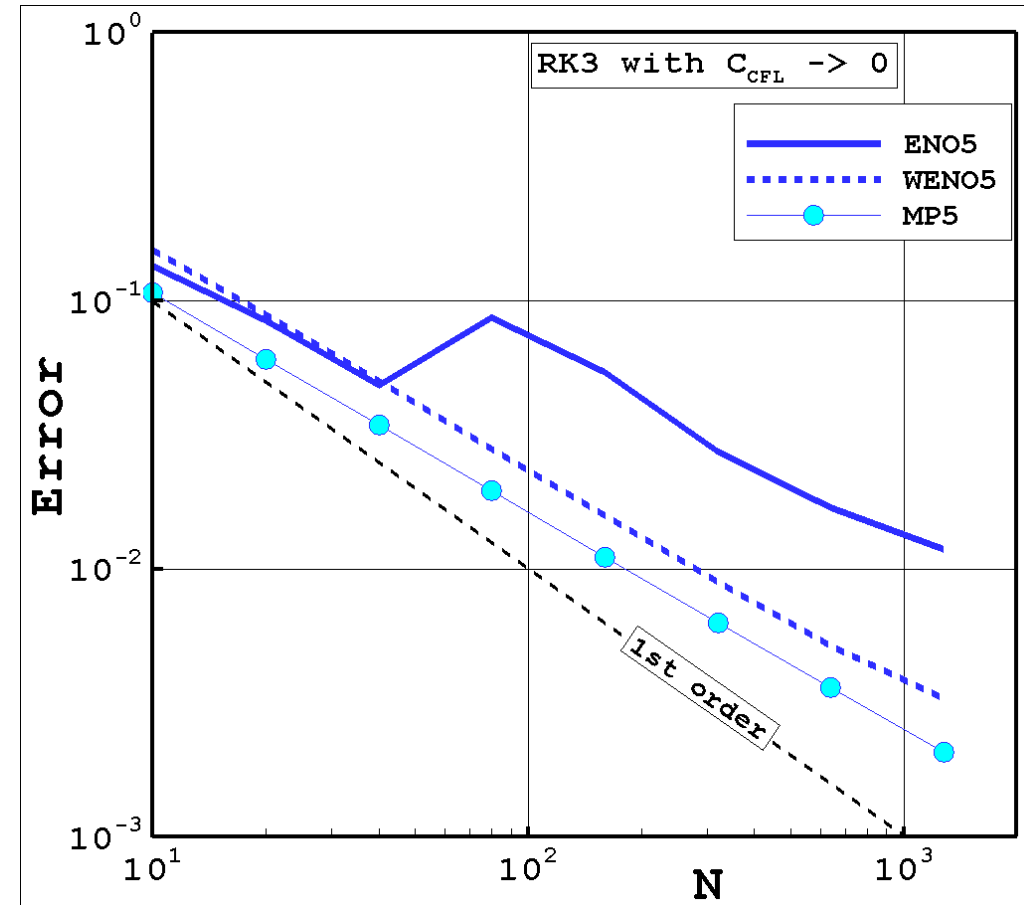
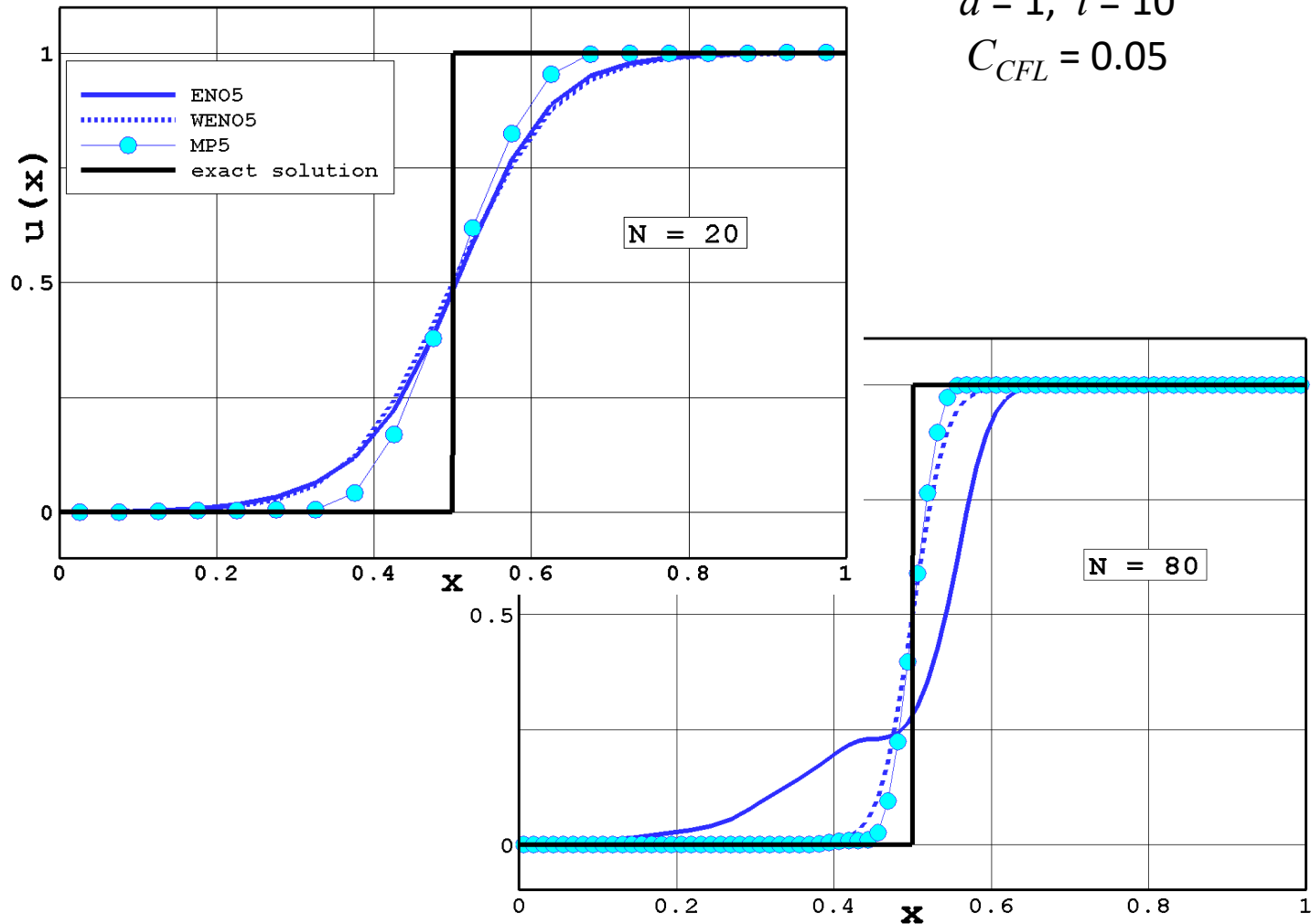
Сравнение схем ENO5, WENO5 и MP5

Численное решение линейного уравнения переноса:
ступенчатая функция $u(x)$ с разрывом профиля

Параметры тестовой задачи:

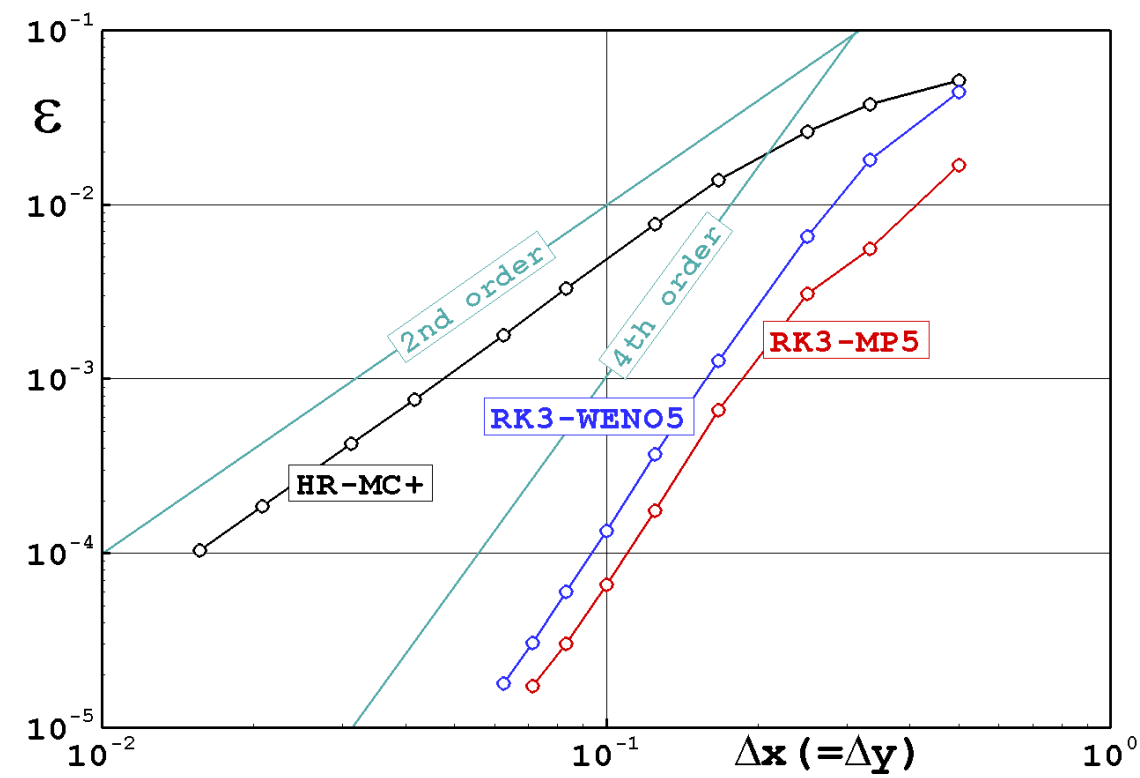
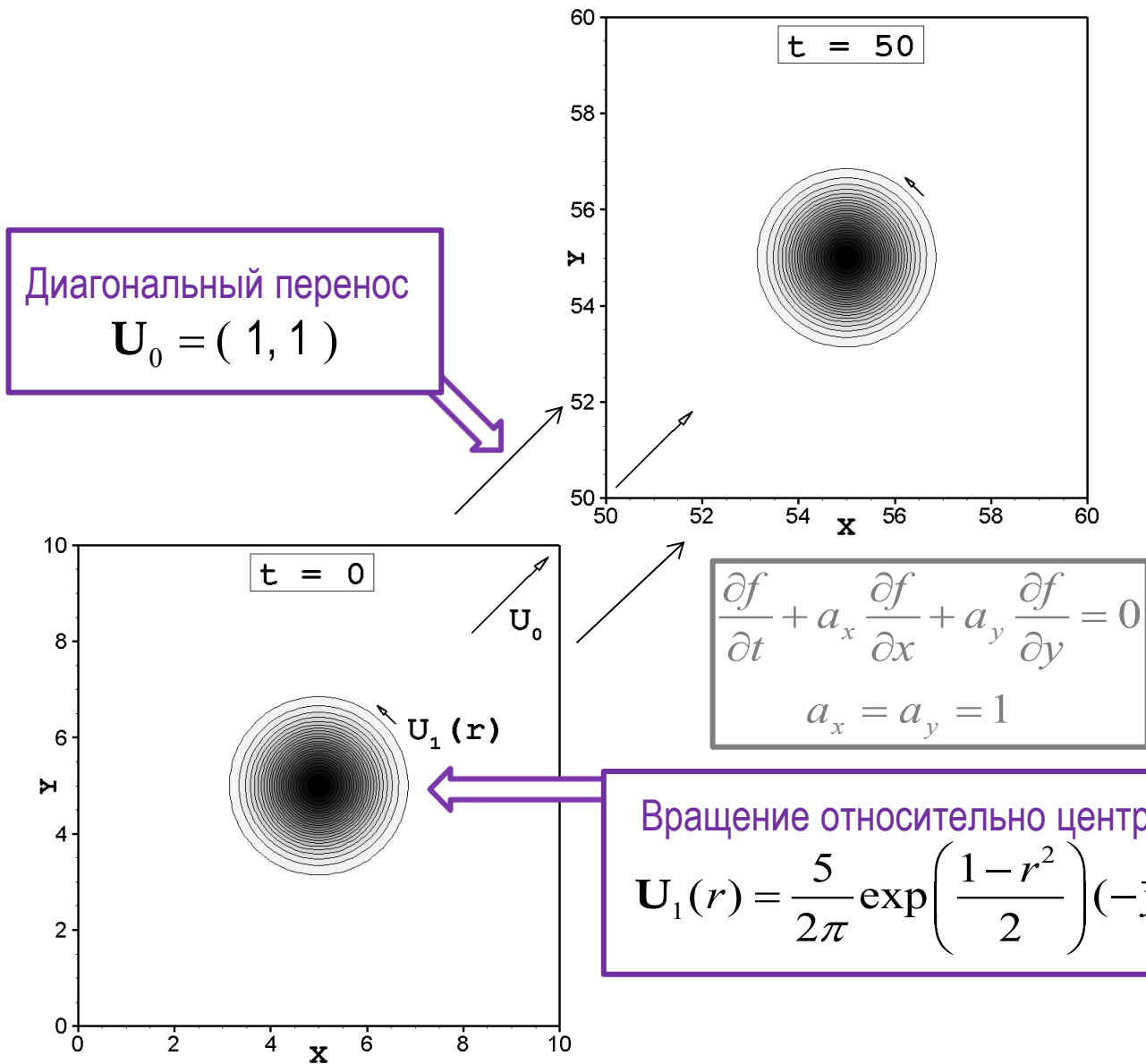
$$a = 1, t = 10$$

$$C_{CFL} = 0.05$$



Сравнение схем WENO5 и MP5

Тестовая задача о диагональном переносе изоэнтропического вихря

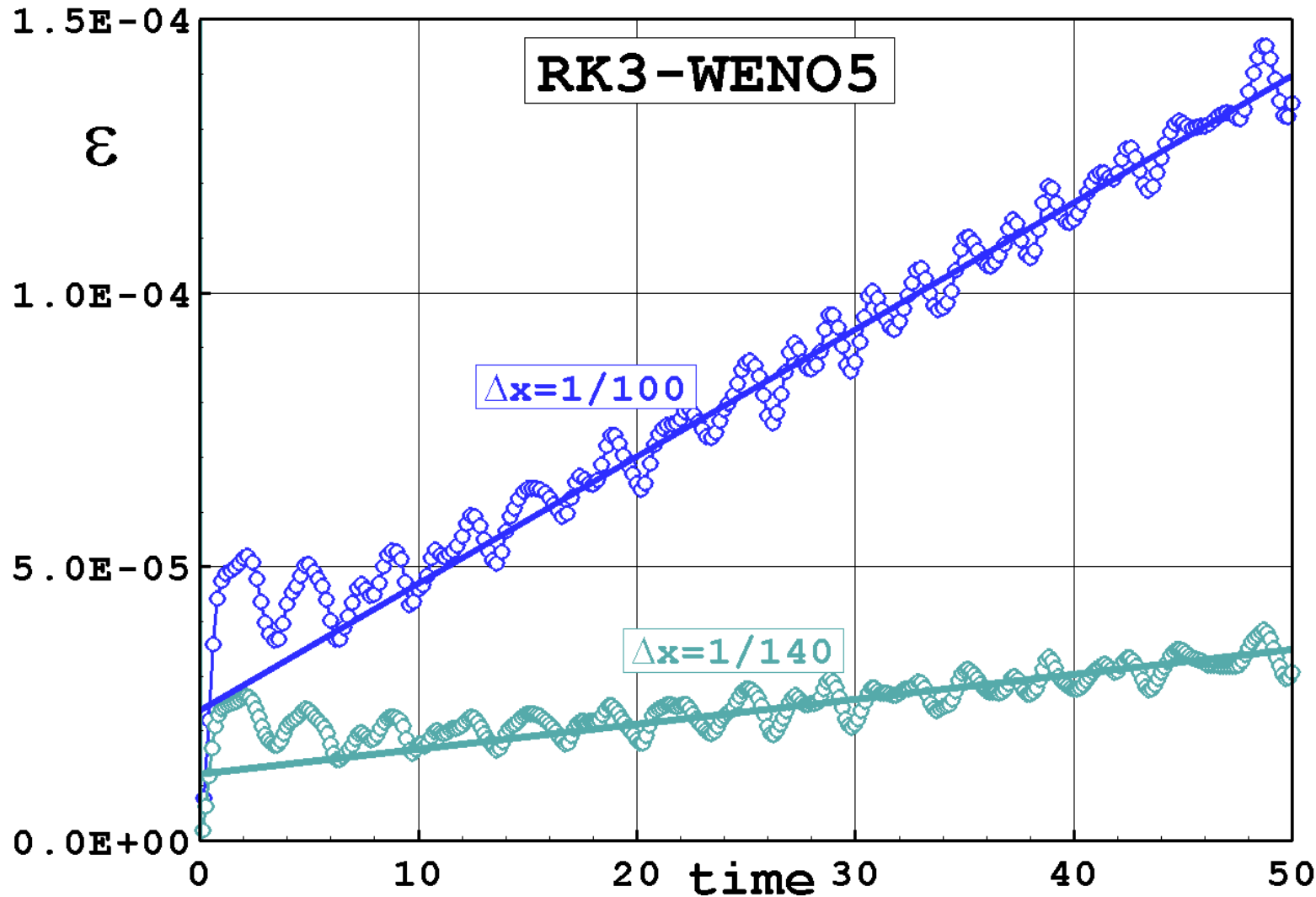


Погрешность расчета по норме L_2 для различных методов в зависимости от сеточного разрешения

HR: CFL = 0.9
 RK3: CFL = 0.6

Сравнение схем WENO5 и MP5

Тестовая задача о диагональном переносе изоэнтропического вихря



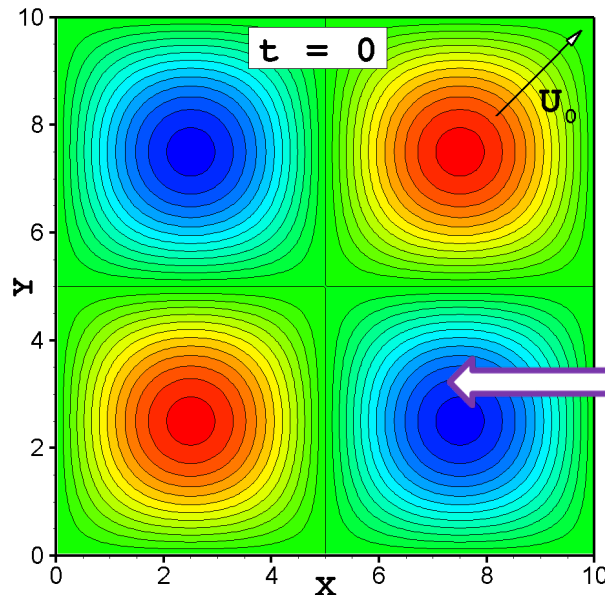
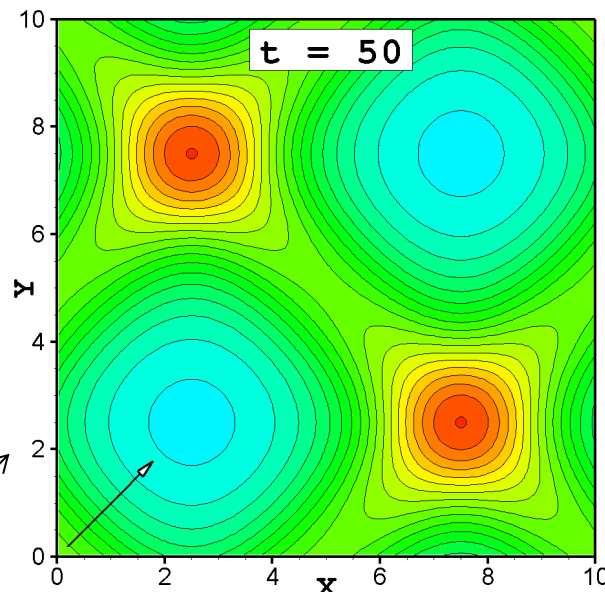
Зависимость погрешности расчета от сеточного разрешения и времени:

$$\varepsilon \approx c_0 \Delta x^2 + c_1 t \Delta x^5$$

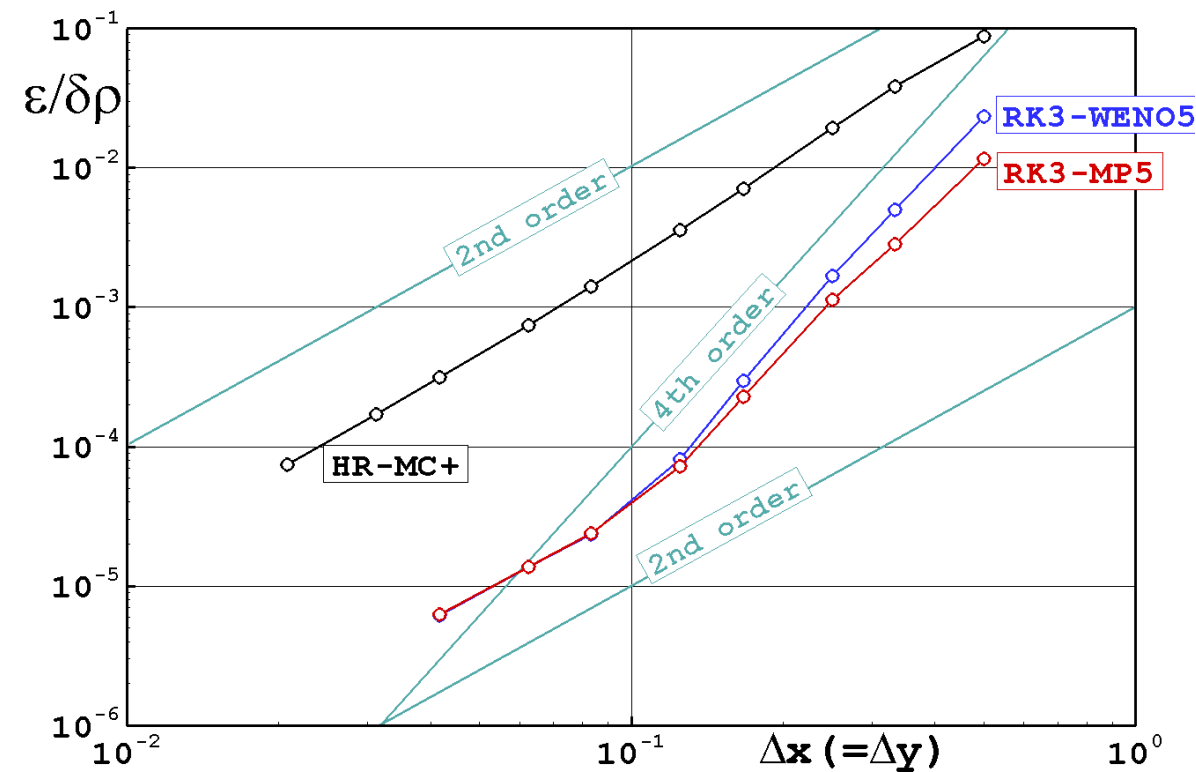
Сравнение схем с реконструкциями WENO5 и MP5

Диагональный перенос нестационарного потока (периодическое течение)

Диагональный перенос
 $U_0 = (1, 1)$



Периодическое распределение плотности и давления
 $\rho(x, y) = 1 + \delta\rho \sin(2\pi x / 10) \sin(2\pi y / 10)$
 $p(x, y) = \rho(x, y)^\gamma, \quad \delta\rho = 0.025$



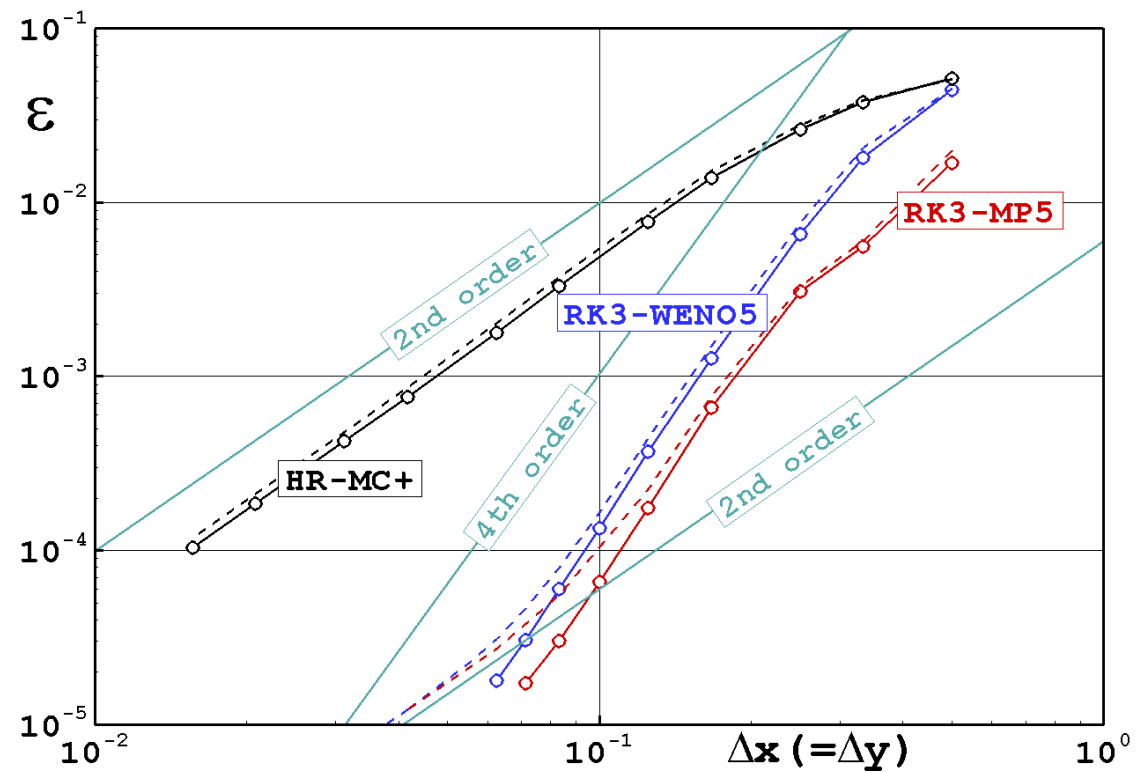
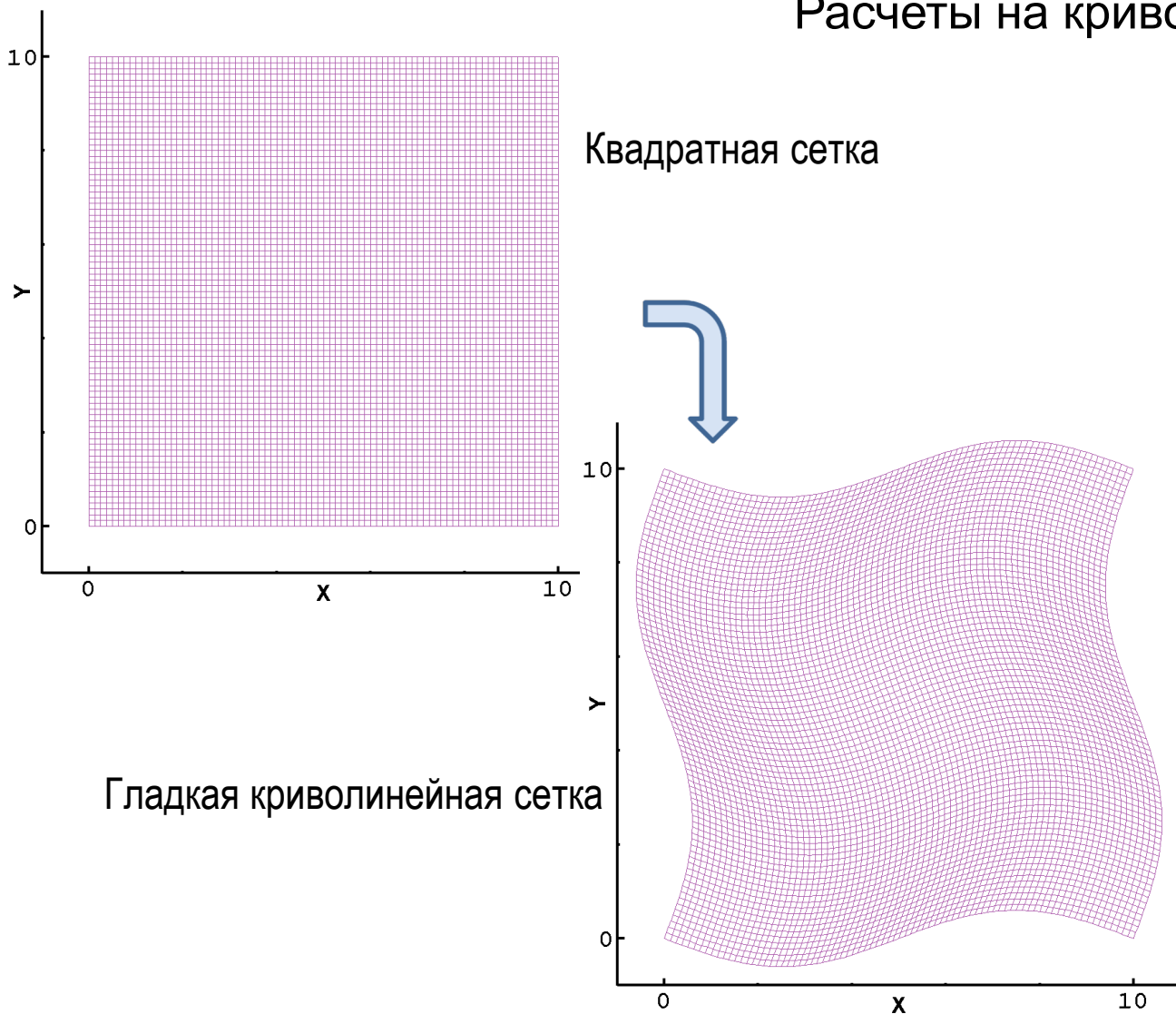
Погрешность расчета по норме L_2 для различных методов в зависимости от сеточного разрешения

HR: CFL=0.9
 RK3: CFL = 0.3

Сравнение схем WENO5 и MP5

Тестовая задача о диагональном переносе изоэнтропического вихря

Расчеты на криволинейной сетке



Погрешность расчета по норме L_2 для различных методов в зависимости от сеточного разрешения

Базовые работы по разрывному методу Галеркина

➤ Расчет переноса нейтронов

- ❑ **Reed W.H., Hill T.A.** Triangular mesh methods for the neutron transport equation // Tech. Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, **1973**

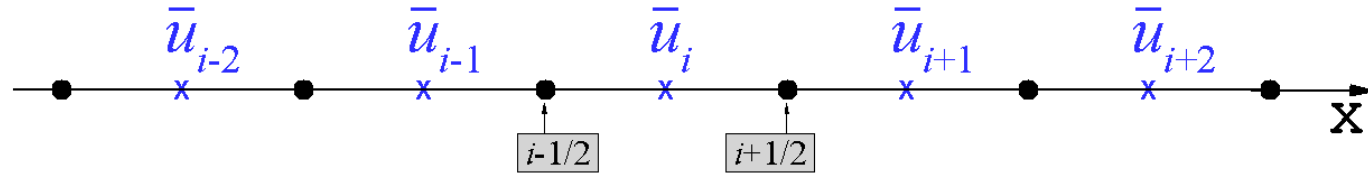
➤ Решение уравнений газовой динамики

- ❑ **Cockburn B., Shu S.-W.** TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework // Math. Comput., **1989**
- ❑ **Cockburn B., Lin S.-Y., Shu S.-W.** TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one dimensional systems // Math. Comput., **1989**
- ❑ **Cockburn B., Hou S., Shu S.-W.** The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: the multidimensional case // Math. Comput., **1990**
- ❑ **Cockburn B., Shu S.-W.** The Runge-Kutta local projection P^1 -discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws // Math. Model. Num. Anal. , **1991**
- ❑ **Cockburn B., Shu S.-W.** The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems // J. Comput. Phys., **1998**

Разрывный метод Галеркина (DG method)

Базовые элементы метода применительно к решению нелинейного уравнения

Одномерный случай:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$



Локальная координата относительно центра i -й ячейки: $\xi = \frac{x - x_i}{\Delta x}$, при $-1/2 \leq \xi \leq 1/2$

Ортогональные базисные функции $\psi_k(\xi)$ в виде полиномов, так что $\int_{-1/2}^{1/2} \psi_k(\xi)\psi_j(\xi)d\xi = 0$, если $k \neq j$

$$\psi_0(\xi) = 1, \quad \psi_1(\xi) = \xi, \quad \psi_2(\xi) = \left(\xi^2 - \frac{1}{12} \right), \quad \dots$$

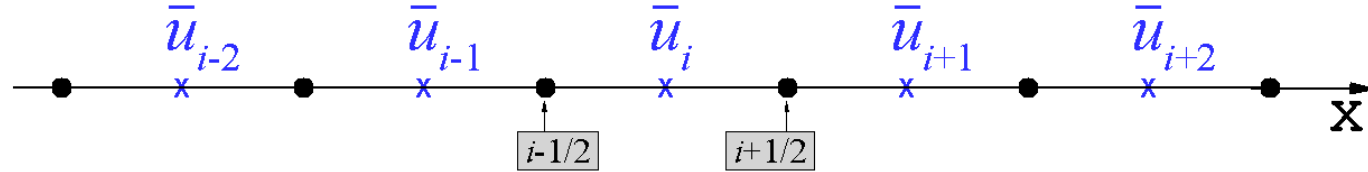
Разложение функции консервативной переменной внутри i -й ячейки по базисным полиномам

$$u_i(\xi) = \bar{u}_i \cdot 1 + d_i^{(1)} \cdot \xi + \frac{1}{2} d_i^{(2)} \cdot \left(\xi^2 - \frac{1}{12} \right) + \dots$$

Разрывный метод Галеркина (DG method)

Базовые элементы метода применительно к решению нелинейного уравнения

Одномерный случай:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$



DG(0): Базисная функция $\psi_0(\xi)$:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} (f(u_{i+1/2}) - f(u_{i-1/2})) = 0$$

DG(1): + Базисная функция $\psi_1(\xi)$

$$\frac{\partial d_i^{(1)}}{\partial t} + \frac{6}{\Delta x} (f(u_{i+1/2}) + f(u_{i-1/2})) - \frac{12}{\Delta x} \int_{-1/2}^{1/2} f(u) d\xi = 0$$

Расчет параметров на границах ячеек:

$$u_{i+1/2-} = u_i + d_i^{(1)} / 2 + d_i^{(2)} / 12$$

$$u_{i+1/2+} = u_{i+1} - d_{i+1}^{(1)} / 2 + d_{i+1}^{(2)} / 12$$

$$u_{i+1/2} = \text{RP}(u_{i+1/2-}, u_{i+1/2+})$$

DG(2): + Базисная функция $\psi_2(\xi)$

$$\frac{\partial d_i^{(2)}}{\partial t} + \frac{60}{\Delta x} (f(u_{i+1/2}) - f(u_{i-1/2})) - \frac{720}{\Delta x} \int_{-1/2}^{1/2} f(u) \xi d\xi = 0$$

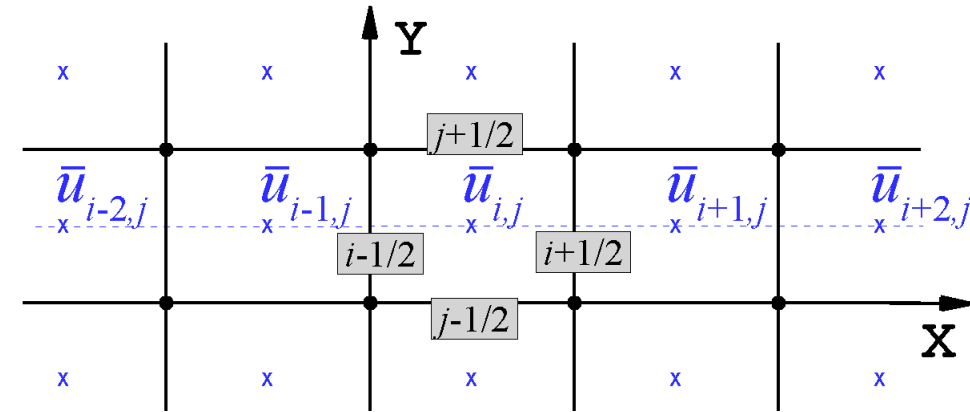
Разрывный метод Галеркина (DG method)

Базовые элементы метода применительно к решению нелинейного уравнения

Двумерный случай:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_x(u)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(u)}{\partial y} = 0$$

DG(0): Базисная функция $\psi_0(\xi, \eta) = 1$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{f_x(u_{i+1/2,j}) - f_x(u_{i-1/2,j})}{\Delta x} + \frac{f_y(u_{i,j+1/2}) - f_y(u_{i,j-1/2})}{\Delta y} = 0$$



DG(1): + Базисные функции $\psi_{1x}(\xi) = \xi$ и $\psi_{1y}(\eta) = \eta \equiv (y - y_j) / \Delta y$

$$\frac{\partial d_i^{(1x)}}{\partial t} + \frac{6}{\Delta x} (f_x(u_{i+1/2,j}) + f_x(u_{i-1/2,j})) - \frac{12}{\Delta x} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} f_x(u) d\xi d\eta + \frac{12}{\Delta y} (g_{i,j+1/2}^y - g_{i,j-1/2}^y) = 0$$

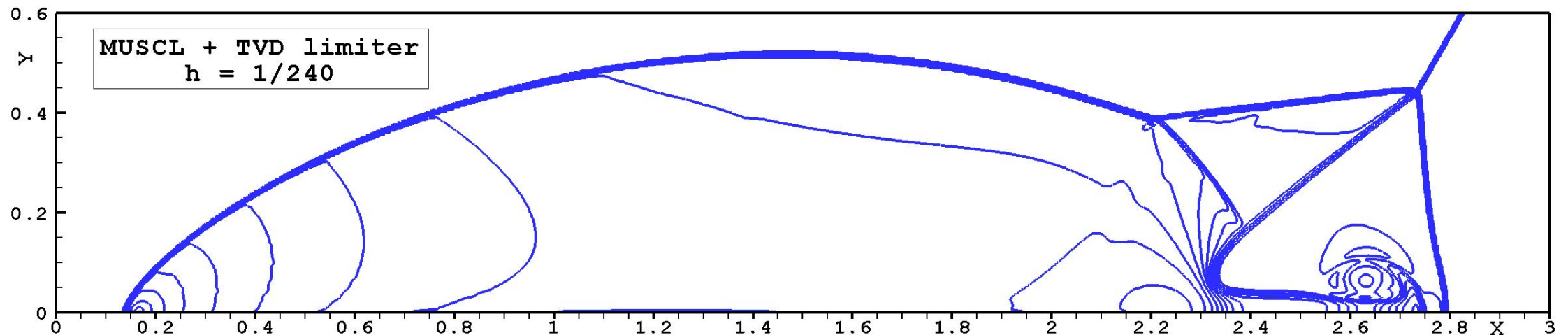
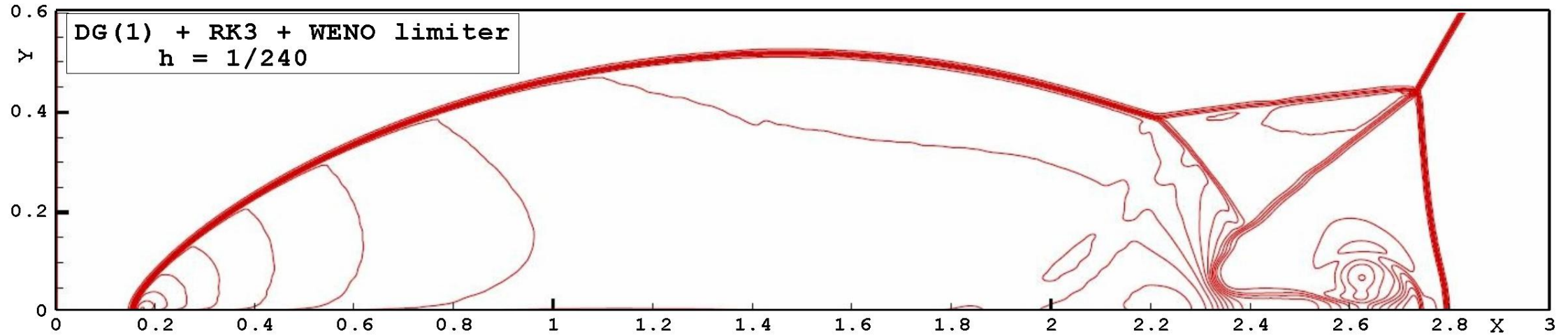
$$\frac{\partial d_i^{(1y)}}{\partial t} + \frac{6}{\Delta y} (f_y(u_{i,j+1/2}) + f_y(u_{i,j-1/2})) - \frac{12}{\Delta y} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} f_y(u) d\xi d\eta + \frac{12}{\Delta x} (g_{i+1/2,j}^x - g_{i-1/2,j}^x) = 0$$

$$g_{i+1/2,j}^x = \frac{1}{\Delta x} \int_{-1/2}^{1/2} f_x(u_{i+\xi,j}) \xi d\xi, \quad g_{i,j+1/2}^y = \frac{1}{\Delta y} \int_{-1/2}^{1/2} f_y(u_{i,j+\eta}) \eta d\eta$$

- ❑ Родионов А.В. О схемах типа MUSCL и разрывном методе Галеркина // Препринт РФЯЦ-ВНИИЭФ №114, 2015
- ❑ Родионов А.В. О взаимосвязи разрывного метода Галеркина со схемами MUSCL-типа // Мат. Модел., 2015

Тестовая задача о двойном маховском отражении

□ *Zhong X., Shu S.-W.* A simple weighted nonoscillatory limiter for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods // J. Comput. Phys, 2013



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ