

Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике

XI. Тестирование схем: подводные камни сквозного счета
(часть 1)

Родионов Александр Владимирович



Сопоставительные тестирования методов сквозного счета

□ **Woodward, Colella.** The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comput. Phys, **1984**

- Исследовалась эффективность схем с искусственной вязкостью, гибридных схем и схем типа Годунова на 3-х тестовых задачах.
- В целом исследование показало преимущество схем типа Годунова перед другими схемами.

□ **Liska, Wendroff.** Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // SIAM J. Sci. Comput., **2003**

- Исследовалась эффективность схем 8-ми видов на 8-ми одномерных и 12-ти двумерных тестовых задачах.
- Некоторые схемы работают лучше, чем другие, при решении конкретной проблемы, но ни одна из них не показала себя лучшей во всех отношениях.

□ **Wang, Fidkowski, Abgrall, Bassi, Caraeni, Cary, Deconinck, Hartmann, Hillewaert, Huynh, Kroll, May, Persson, van Leer, Visball.** High-order CFD methods: current status and perspective // Int. J. Numer. Meth. Fluids., **2012**

- Отчет группы ведущих специалистов о работе в рамках «*1st International Workshop on High-Order CFD Methods*» (2012).
- Участвовали более 70-ти специалистов со всего мира из академических, правительственных и промышленных организаций.
- Были доложены результаты тестирования различных методов повышенной точности на 15-ти тестовых задачах.
- В задачах с гладким решением методы повышенного порядка способны продемонстрировать высокий порядок сходимости.
- В задачах с разрывами в решении, эти методы не достигают высокой точности: здесь нельзя определенно утверждать преимущество методов повышенного порядка над методами второго порядка.

Работы по проблеме точности решения за фронтом ударной волны

<u>авторы</u>	<u>журнал, год</u>	<u>1-й порядок сходимости за фронтом ударной волны</u>
● Иванов, Крайко	ЖВМ и МФ, 1978	←— схема Годунова; схема Русанова 3-го порядка
○ Donat, Osher	Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1990	←— схемы типа ENO
○ Остапенко	ЖВМ и МФ, 1997	←— схема типа MUSCL
● Casper, Carpenter	SIAM J. Sci. Comput., 1998	←— схема ENO4
● Engquist, Sjogreen	SIAM J. Numer. Anal., 1998	←— схема типа MUSCL; схема ENO4
● Efraimsson, Kreiss	SIAM J. Numer. Anal., 1999	←— аналитические исследования
○ Kreiss, Efraimsson, Nordström	SIAM J. Numer. Anal., 2001	←— аналитические исследования
● Siklosi, Kreiss	SIAM J. Numer. Anal., 2003	←— аналитические исследования
● Greenough, Rider	J. Comput. Phys., 2004	←— схема типа MUSCL; схема WENO5
○ Siklosi, Efraimsson	SIAM J. Numer. Anal., 2005	←— аналитические исследования
● Suresh	J. Comput. Phys., 2005	←— схема WENO5; схема MP5
○ Михайлов	Матем. Моделир., 2015	←— схема WENO5
● Engquist, Froese, Tsai	J. Comput. Phys., 2015	←— аналитические исследования
○ Ковыркина, Остапенко	Докл. АН, 2018	←— схема WENO5
○ Ладонкина, Неклюдова, Остапенко, Тишкин	ЖВМ и МФ, 2018	←— разрывный метод Галеркина (DG(1))
● Zhao, Sun, Memmolo, Pirozzoli	J. Comput. Phys., 2019	←— схема типа MUSCL; схемы ENO и WENO; схема MP5

О точности решения за ударной волной в схемах типа Годунова: источники ошибок в одномерных задачах

- Численные методы
 - **Эталонная модель** для методов сквозного счета
 - Тестовая задача 1. Однородная ударная волна
 - **Фактор 1.** Начальные ошибки
 - **Фактор 2.** Точность воспроизводства «полочки»
 - Тестовая задача 2. Отраженная ударная волна
 - **Фактор 3.** Энтропийный след
 - Тестовая задача 3. Задача Шу-Ошера
 - **Фактор 4.** Смещение профиля
 - **Фактор 5.** Сглаживание профиля
 - Тестовая задача 4. Модифицированная задача Шу-Ошера
 - **Фактор 6.** Порядок аппроксимации метода

❑ **Rodionov.** On the solution accuracy downstream of shocks when using Godunov-type schemes. I. Sources of errors in one-dimensional problems // Commun. Comput. Phys, **2023**

❑ **Родионов.** О точности схем типа Годунова повышенного порядка аппроксимации // ВАНТ сер. ММФП, **2024**

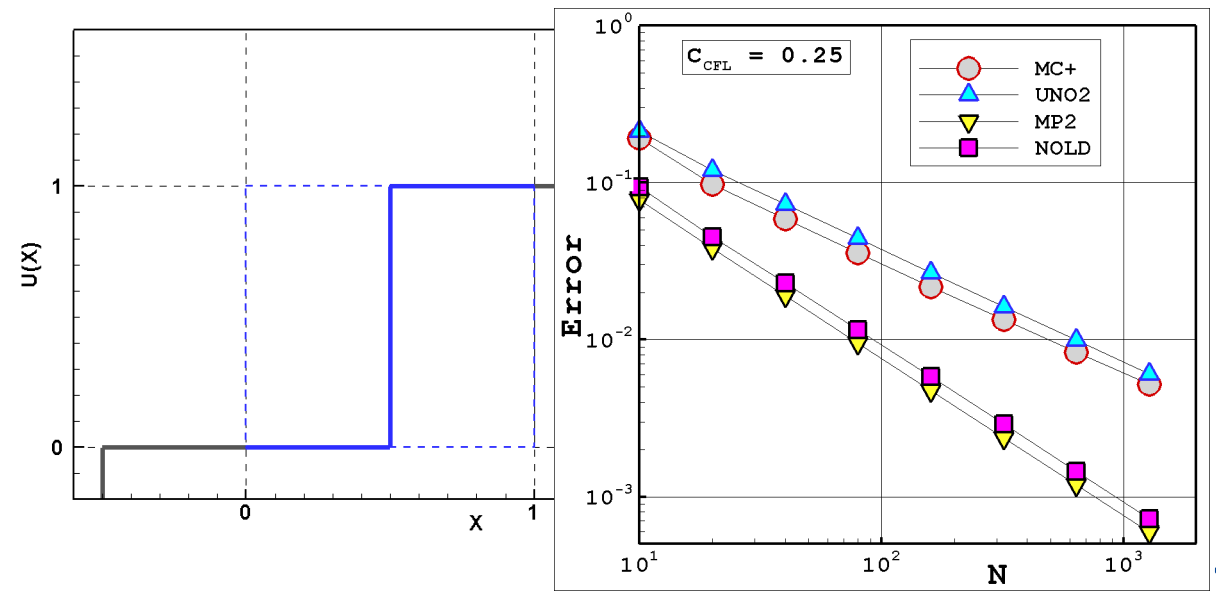
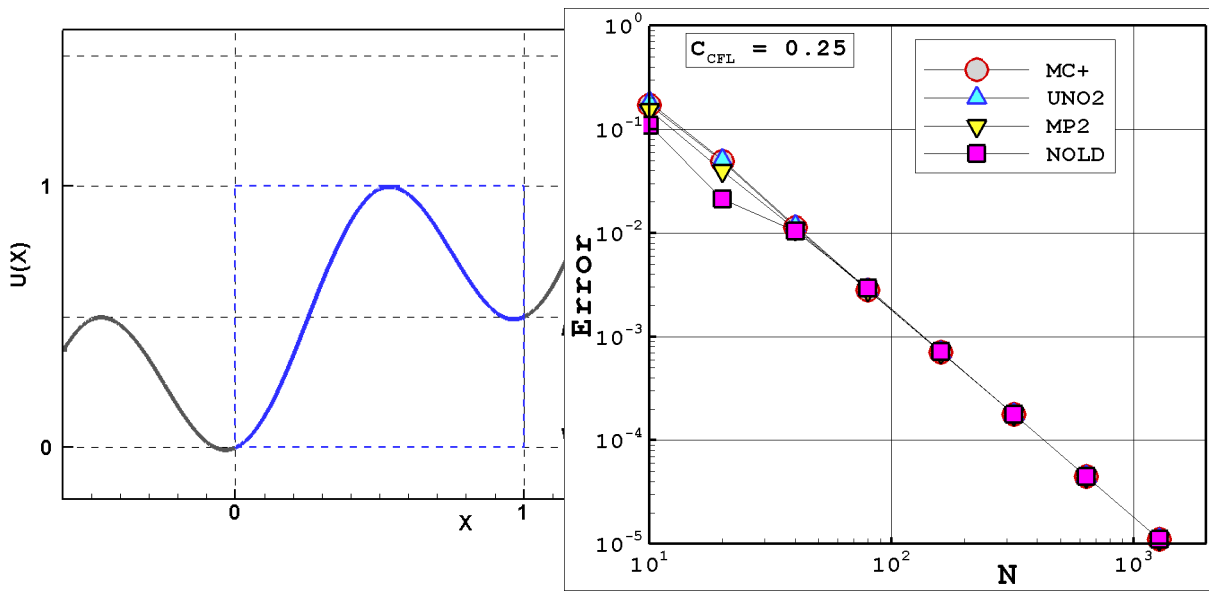
● Численные методы

- ❑ Метод **HR** (Хэнкока-Родионова) с реконструкциями-ограничителями **MC+** и **NOLD**: 2-й порядок аппроксимации по пространству и времени.
- ❑ Метод **RK3** с реконструкциями **WENO5** и **MP5**: 3-й порядок аппроксимации по времени и 5-й по пространству.
- ❑ Метод **AV** (искусственной вязкости): снижение уровня паразитных осцилляций за ударной волной.

Описание **NOLD**: Родионов А.В. Сопоставление схемы КАБАРЕ со схемами типа MUSCL // Мат. Моделир., 2013

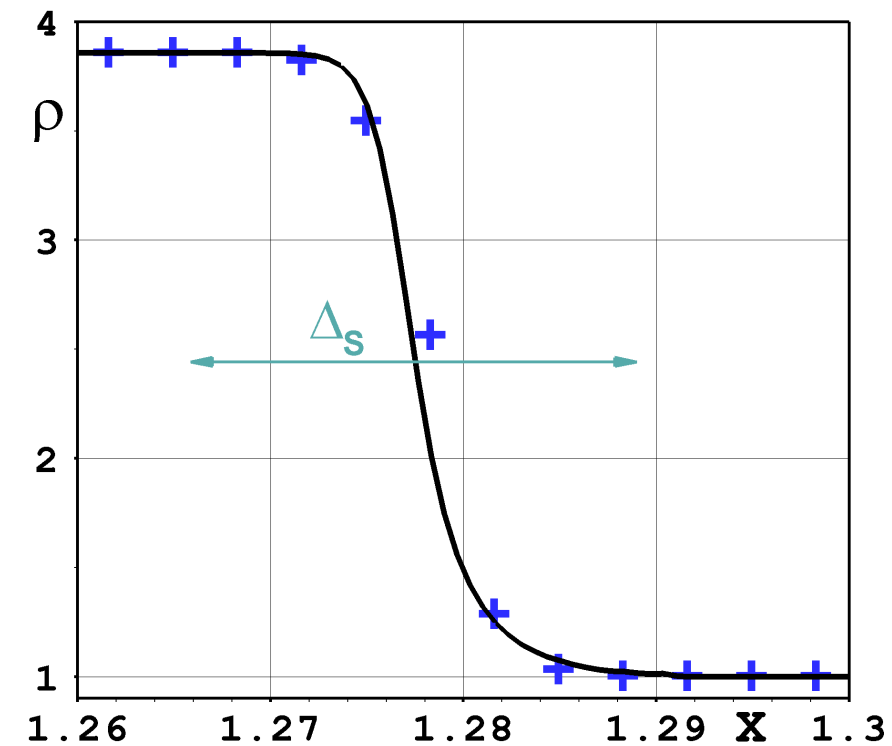
Решение уравнения переноса для ступенчато-периодических функций
с гладким профилем

с разрывом профиля



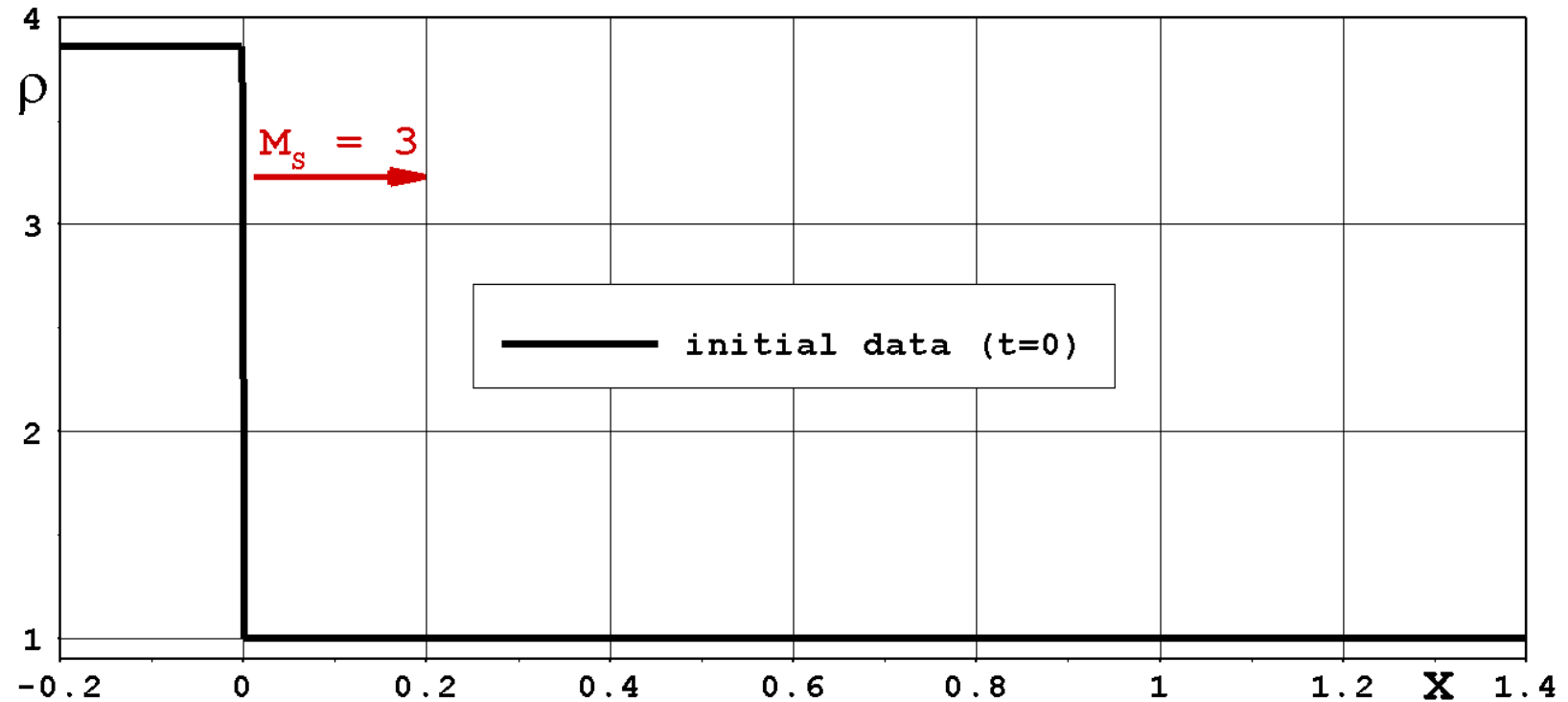
● Эталонная модель для методов сквозного счета

- ❑ Методы сквозного счета при расчете ударных волн ведут себя подобным образом: имеется ограниченный набор базовых факторов, влияющих на точность решения за ударной волной; степень влияния каждого из них определяется конкретной схемой.
- ❑ Чтобы выделить и проанализировать эти базовые факторы была построена эталонная модель: содержит в себе главные черты методов сквозного счета, но при этом является свободной от свойств конкретной схемы.
- ❑ Эталонная модель имеет физическую основу: ударная волна размывается за счет физической вязкости (уравнения Навье-Стокса), действие которой ограничено ударным слоем и его ближайшей окрестностью (внутри интервала Δ_S).
- ❑ Коэффициент μ подбирается для каждой тестовой задачи: ширина размывания ударной волны за счет физической вязкости соответствует ширине ее размывания за счет схемной вязкости на сетке с разрешением Δx .
- ❑ Расчеты по эталонной модели проводятся на подробной сетке ($\Delta x^{\text{refined}} \sim 0.1 \Delta x$): ударный слой хорошо разрешен, и полученное решение можно считать сеточно-независимым.



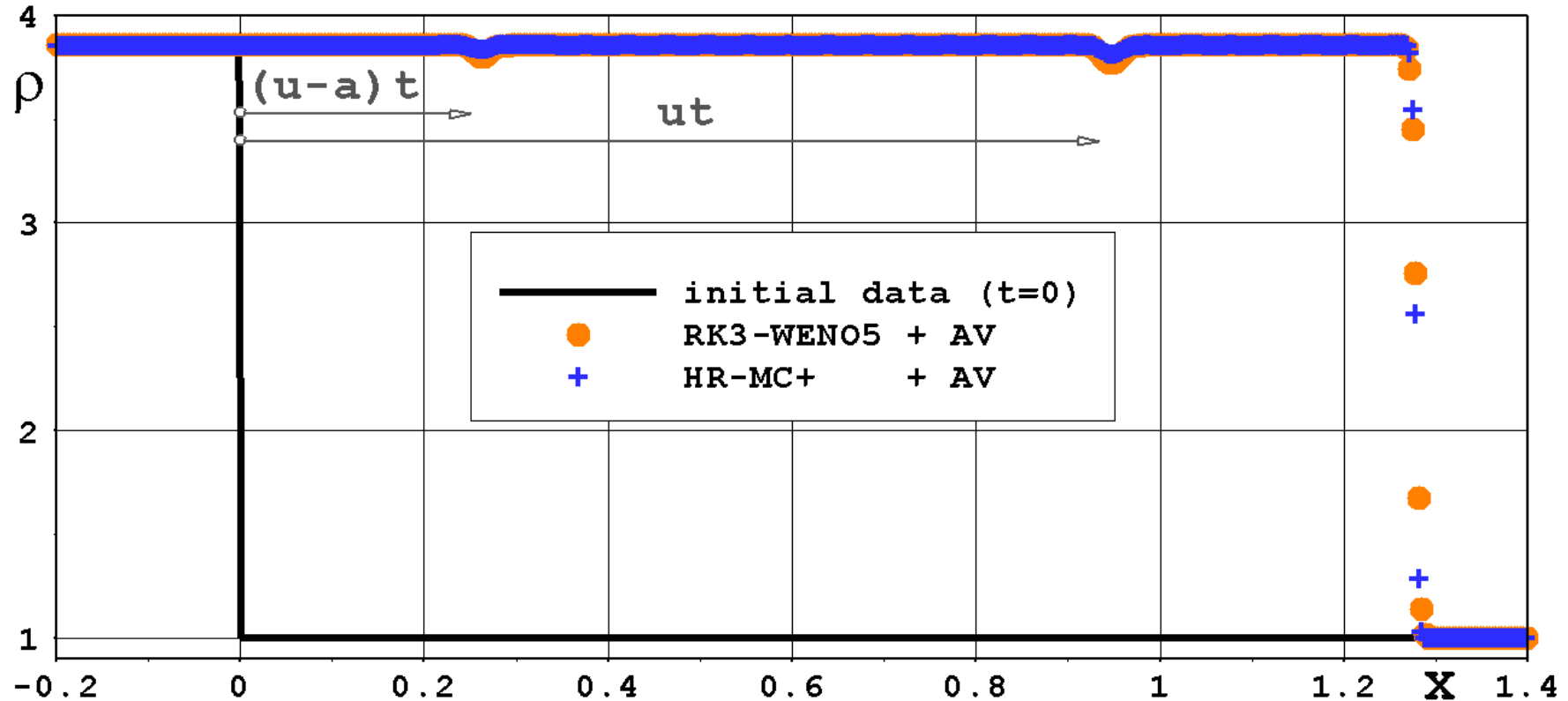
● Тестовая задача 1. Однородная плоская ударная волна

- Ударная волна с $M_s = 3$ распространяется по однородному газу с $\gamma = 1.4$.
- В начальный момент ($t = 0$) фронт УВ расположен в сечении $x = 0$.
- Задача рассчитывается в двух постановках (в разных системах координат) до момента времени $t = 0.36$.



- Поступательная ударная волна.** В первой постановке система координат (и связанная с ней расчетная сетка) выбирается так, что газ перед волной является неподвижным.
- Медленно движущаяся ударная волна.** Во второй постановке ударная волна медленно движется относительно расчетной сетки со скоростью 0.1. По окончании счета расчетные данные приводятся в соответствие с первой постановкой задачи (координаты сетки и скорость газа пересчитываются).

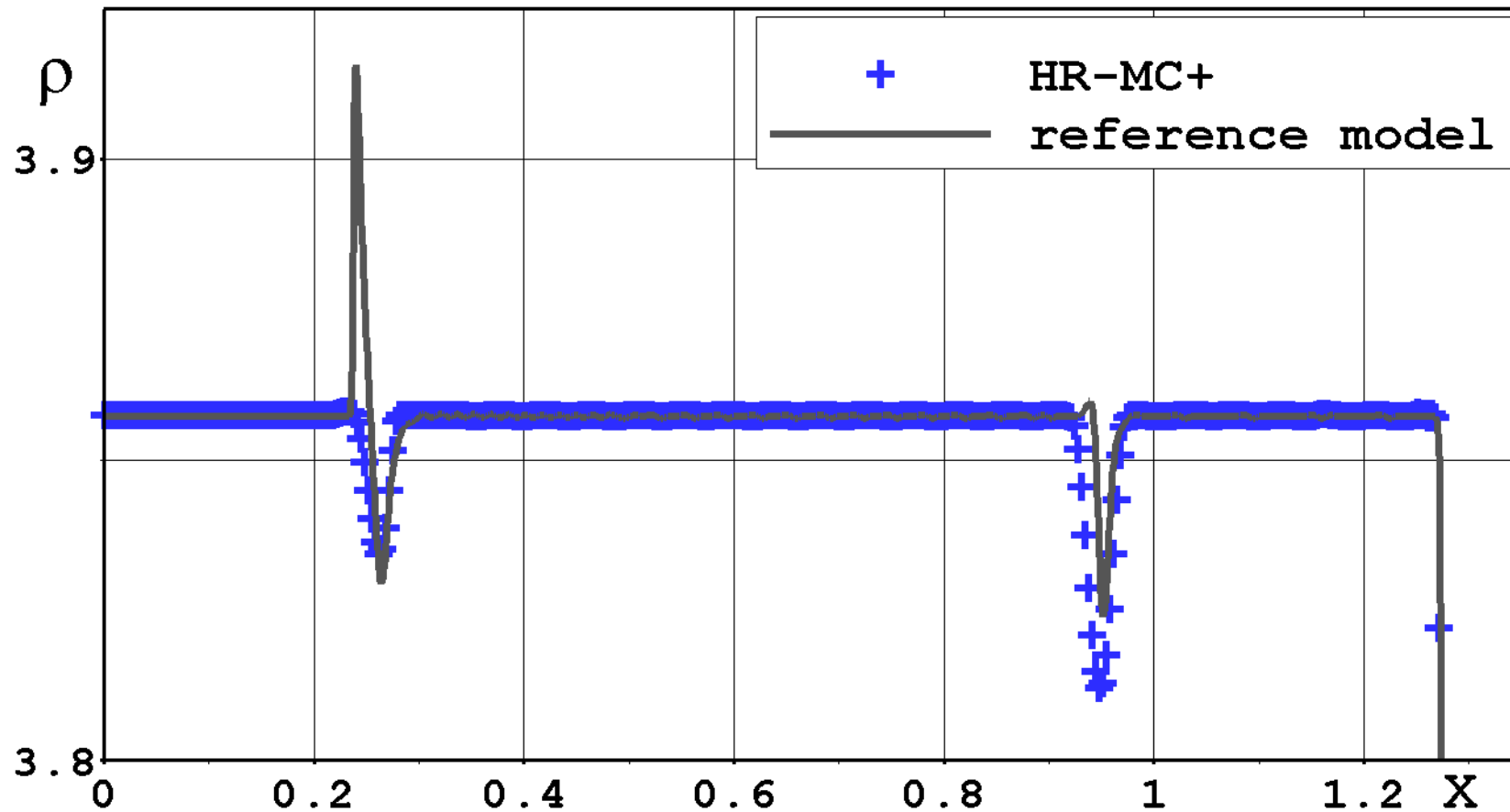
● Фактор 1. Начальные ошибки



- ❑ Начальные ошибки возникают из-за неподходящего (несогласованного с численной вязкостью) размывания ударной волны в начальных данных.
- ❑ На начальном этапе расчета, при формировании размытого фронта ударной волны, рождаются три возмущения решения, которые соответствуют характеристикам « $u-a$ », « u » и « $u+a$ ».
- ❑ Такого рода ошибки будем считать 1-м фактором, влияющим на точность решения за фронтом ударной волны. Они носят локальный характер и присущи всем схемам сквозного счета

- Фактор 1. Начальные ошибки

Фактор 1 и эталонная модель.



● Фактор 2. Точность воспроизводства «полочки»

Профили плотности, полученные:

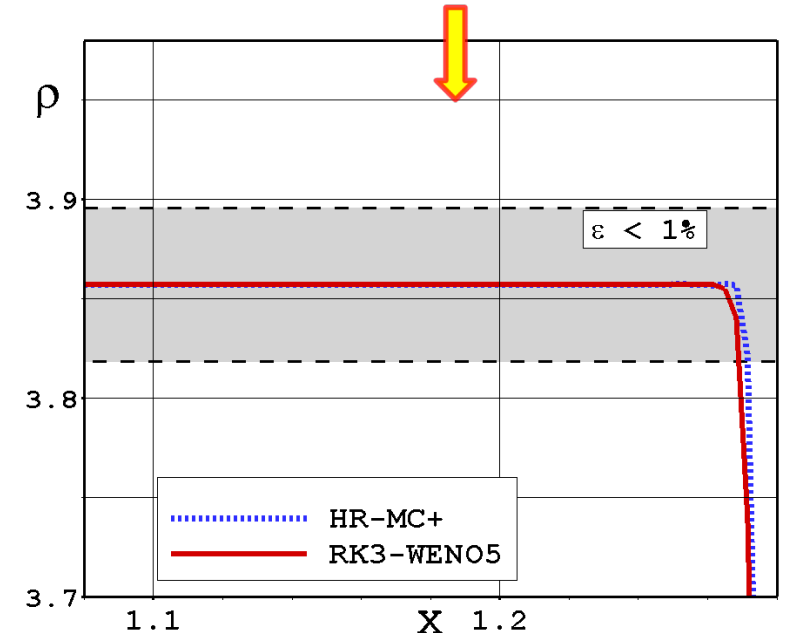
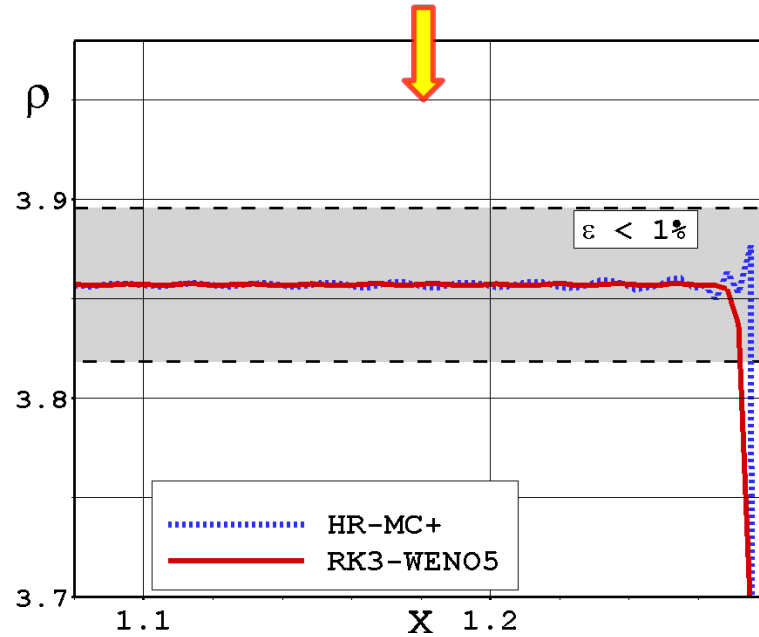
по базовым схемам

с методом искусственной вязкости (AV)

в первой постановке



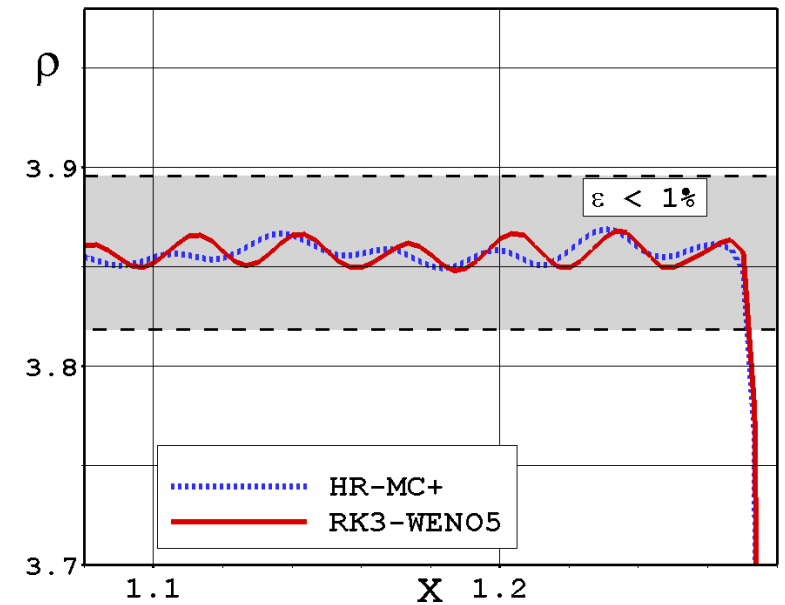
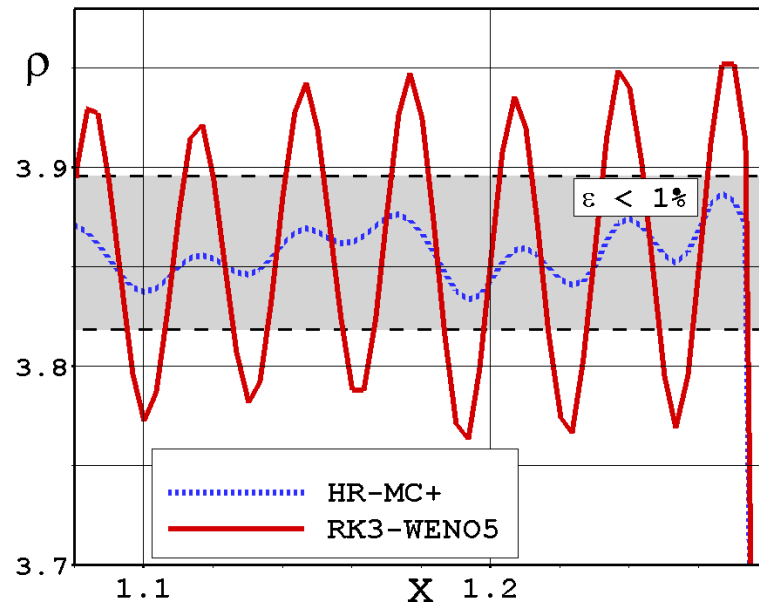
(поступательная ударная волна)



во второй постановке



(медленно движущаяся ударная волна)




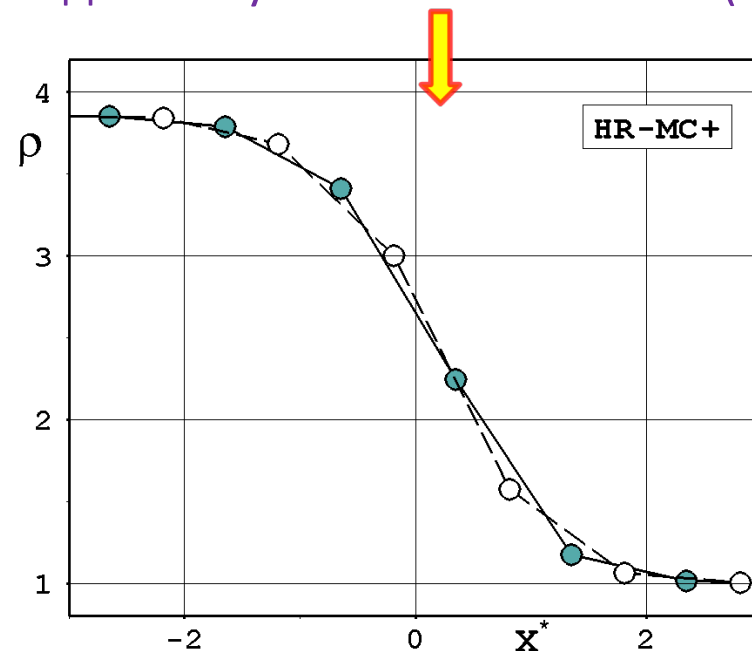
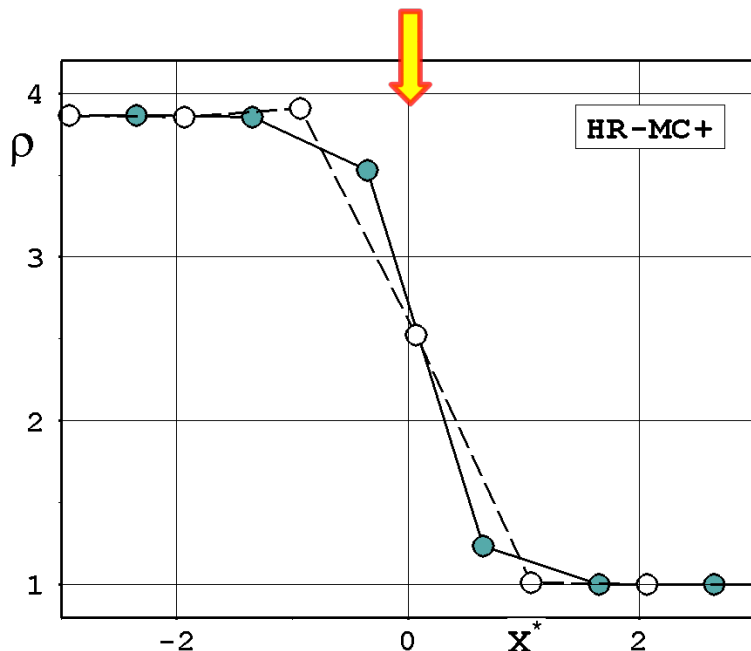
● **Фактор 2. Точность воспроизводства «полочки»**


Профили плотности в зависимости от безразмерного расстояния от номинального расположения фронта ударной волны

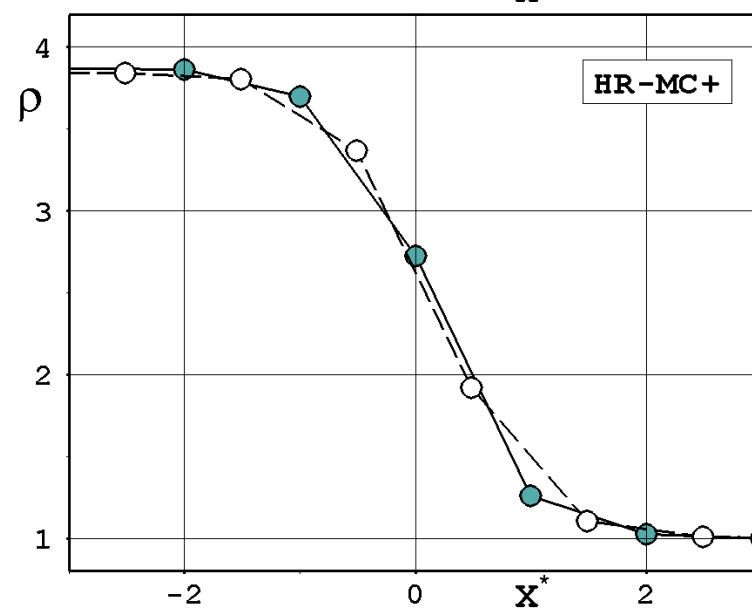
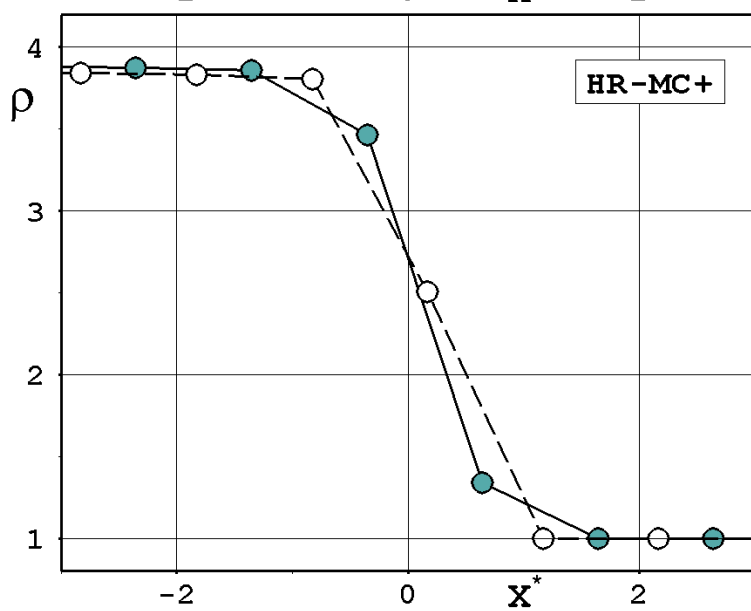
по базовой схеме

с методом искусственной вязкости (AV)

в первой постановке 
(поступательная ударная волна)



во второй постановке 
(медленно движущаяся ударная волна)



● Фактор 2. Точность воспроизводства «полочки»

Фактор 2 и эталонная модель.

Чтобы смоделировать цикличность схемной вязкости эталонная модель модифицируется:

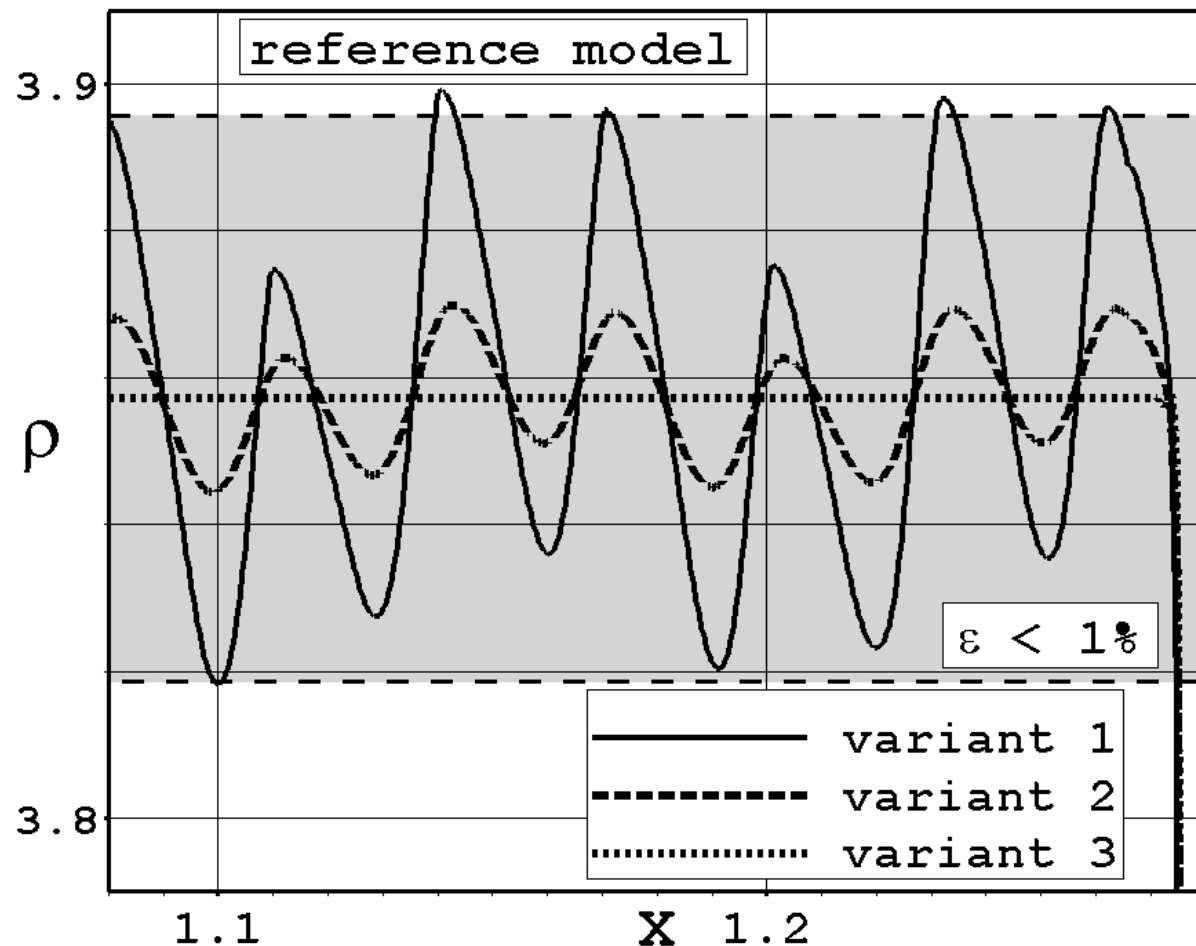
$$\mu = \mu_0 + \Delta\mu \cdot \cos(2\pi t / \tau_0),$$

где

$\mu_0 = 3 \times 10^{-3}$ (для сеточного разрешения $\Delta x = 1/300$),

τ_0 – время прохода ударной волны расстояния Δx (цикл прохождения УВ по сетке).

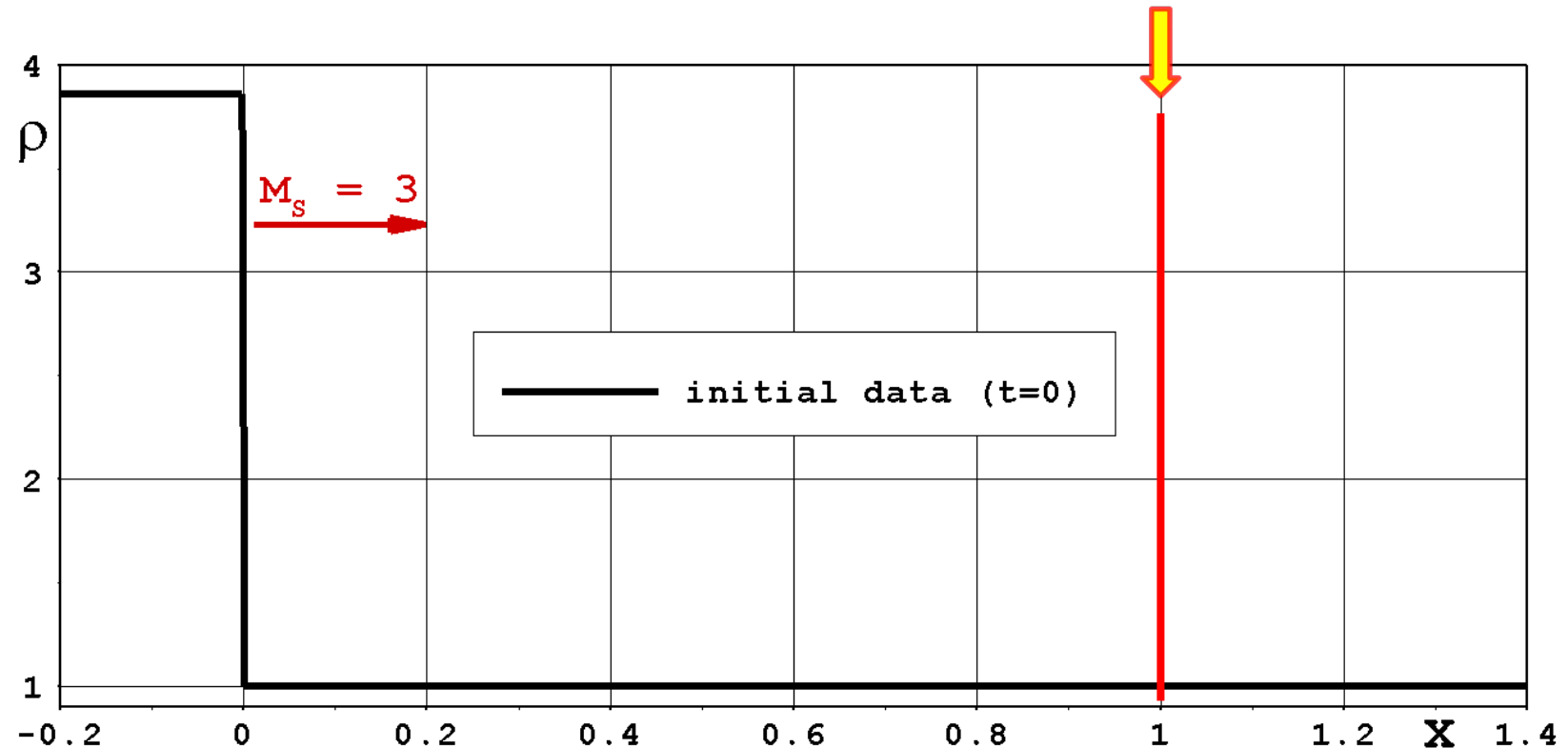
- ❑ вариант 1 с $\Delta\mu = 1.5 \times 10^{-3}$ и $\tau_0 = 33 \times 10^{-3}$ (медленно движущаяся ударная волна);
- ❑ вариант 2 с $\Delta\mu = 0.5 \times 10^{-3}$ и $\tau_0 = 33 \times 10^{-3}$ (медленно движущаяся ударная волна);
- ❑ вариант 3 с $\Delta\mu = 1.5 \times 10^{-3}$ и $\tau_0 = 1 \times 10^{-3}$ (поступательная ударная волна).



$\tau_1 = 3 \times 10^{-3}$ – время пребывания частицы газа в ударном слое.

● Тестовая задача 2. Отраженная ударная волна

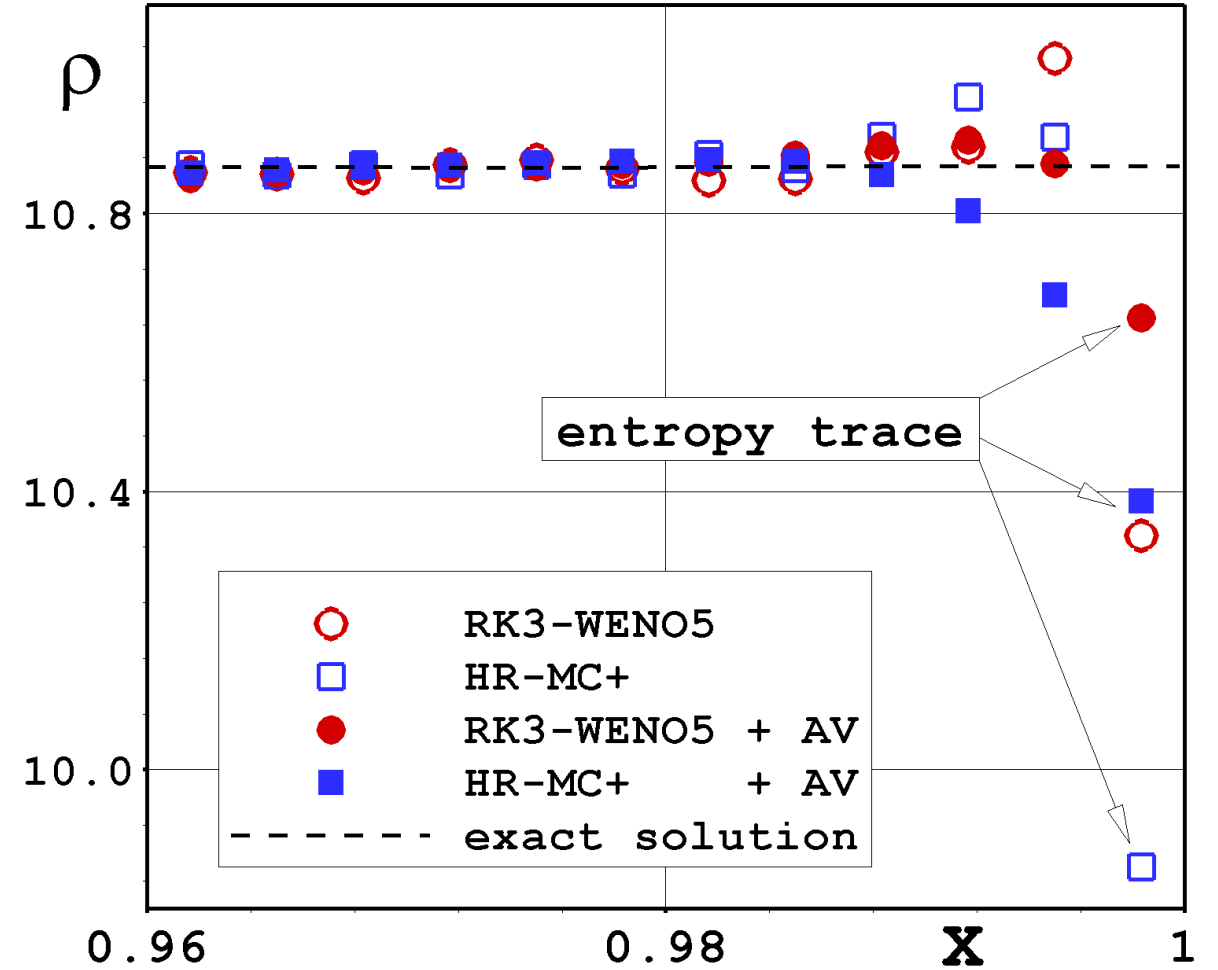
- Ударная волна с $M_s = 3$ распространяется по однородному газу с $\gamma = 1.4$.
- В начальный момент ($t = 0$) фронт УВ расположен в сечении $x = 0$.
- Задача рассчитывается в первой постановке до момента времени $t = 0.36$.
- В сечении $x = 1$ ставится условие «стенка» или условие симметрии течения.



- Поступательная ударная волна.** В первой постановке система координат (и связанная с ней расчетная сетка) выбирается так, что газ перед волной является неподвижным.

● Фактор 3. Энтропийный след

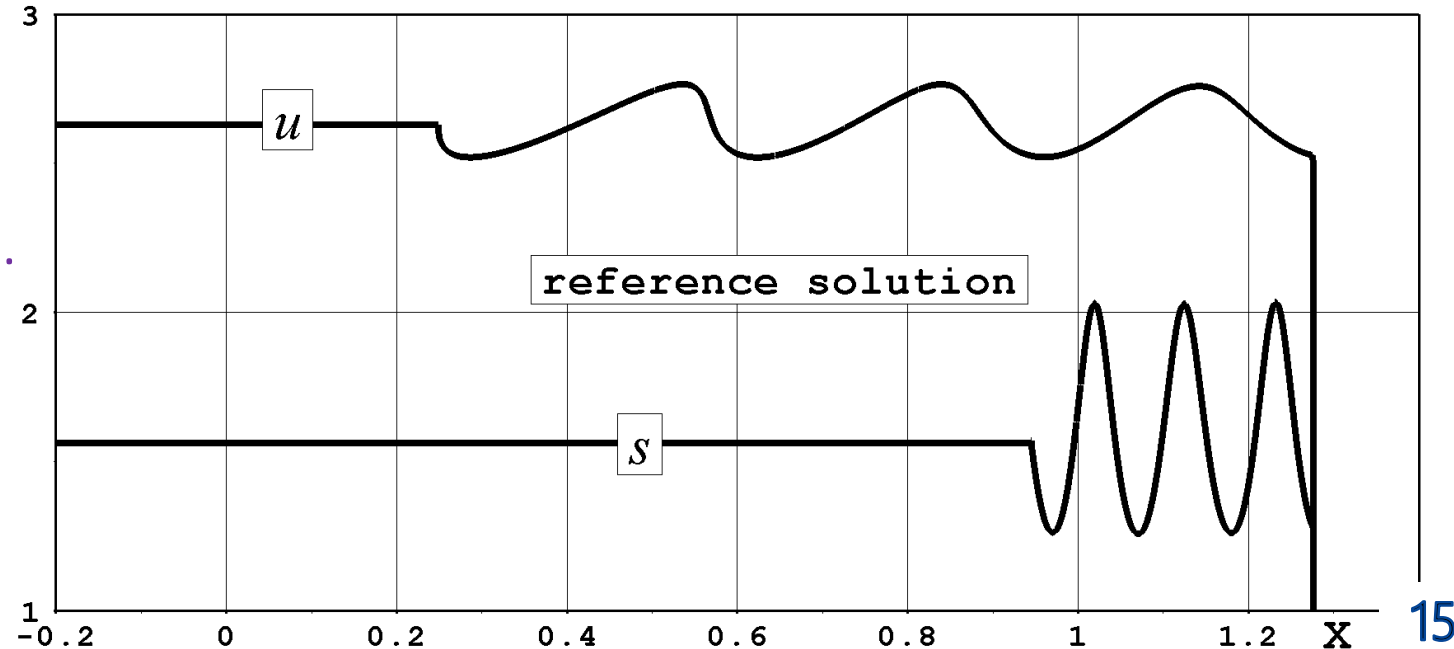
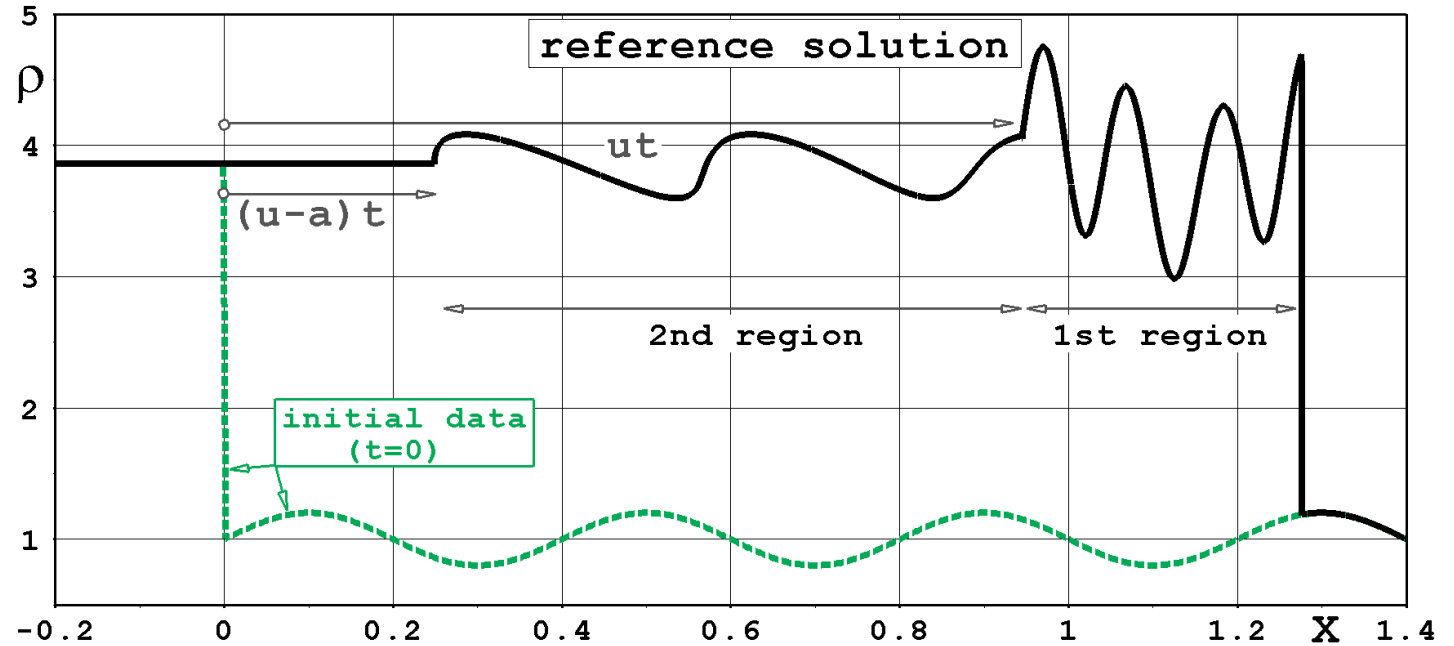
- ❑ Энтропийный след (или пристеночная тепловая ошибка) возникает в результате взаимодействия ударной волны со стенкой или с плоскостью симметрии.
- ❑ При отражении ударной волны от стенки профили параметров в ударном слое перестраиваются за счет действия схемной вязкости (уравнения Эйлера).
- ❑ Ошибка в плотности:
5–9% для базовых схем и 2–4% с методом AV.



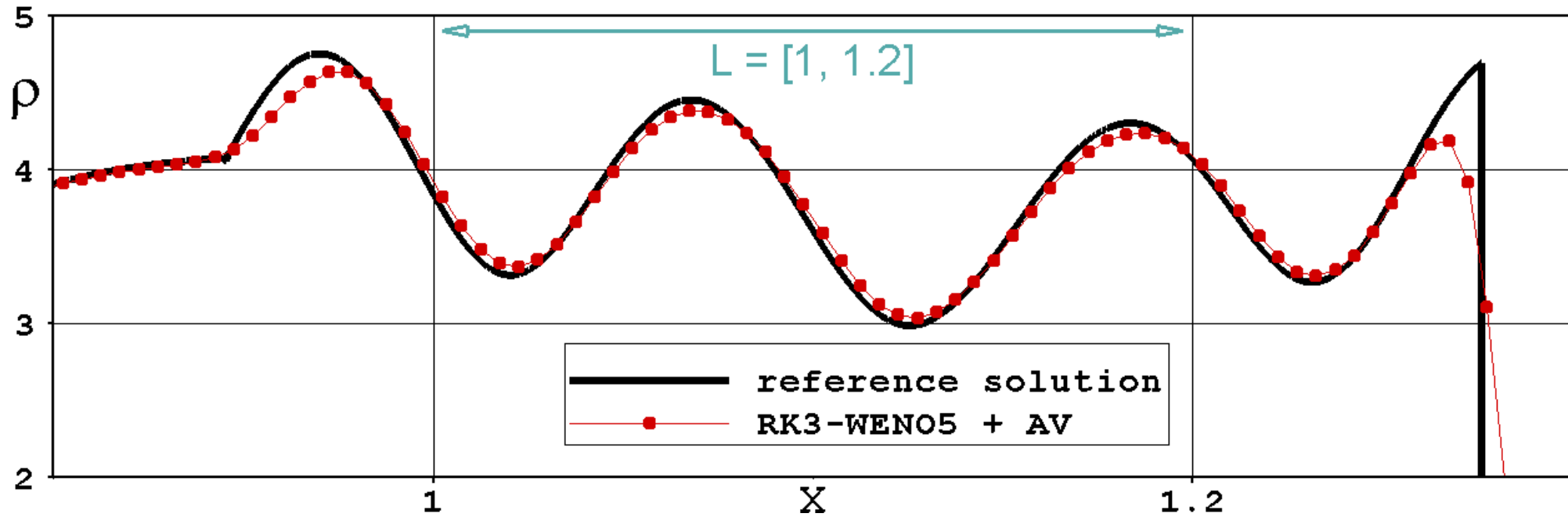
Профили плотности за отраженной ударной волной

● Тестовая задача 3. Задача Шу-Ошера

- ❑ Ударная волна с $M_S = 3$ распространяется по неоднородному газу с $\gamma = 1.4$ с синусоидальным распределением плотности перед волной: $\rho = 1 + 0.2 \cdot \sin(5\pi x)$.
 - ❑ В начальный момент ($t = 0$) фронт УВ расположен в сечении $x = 0$.
 - ❑ Задача рассчитывается в двух постановках до момента времени $t = 0.36$.
- ❑ **Поступательная ударная волна.**
Газ перед волной является неподвижным.
 - ❑ **Медленно движущаяся ударная волна.**
Ударная волна в начальный момент является неподвижной. По окончании счета координаты сетки и скорость газа пересчитываются.



- Тестовая задача 3. Задача Шу-Ошера



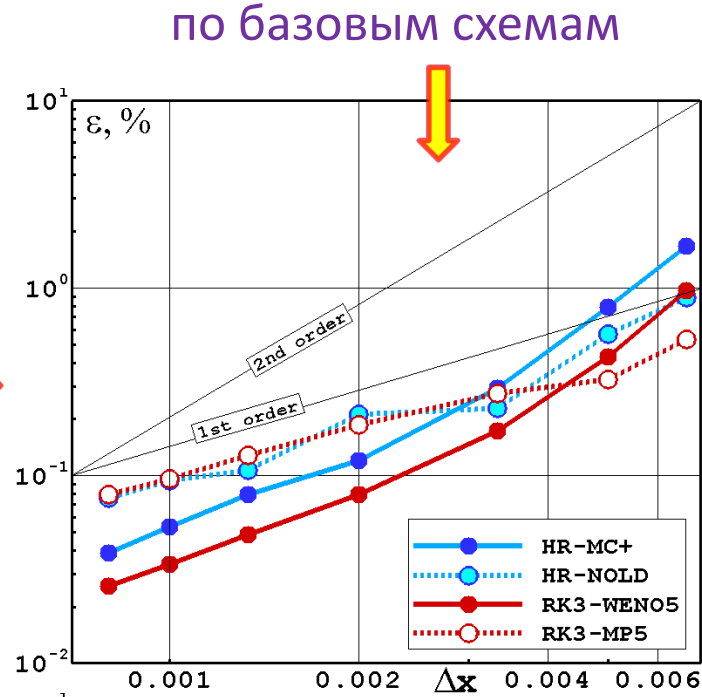
Погрешность решения в $x \in [1, 1.2]$ в зависимости от сеточного разрешения:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=i_1}^{i_2} (\bar{\rho}_i - \bar{\rho}_i^{ref})^2}{(i_2 - i_1 + 1)}} \times \frac{100\%}{\rho_2}$$

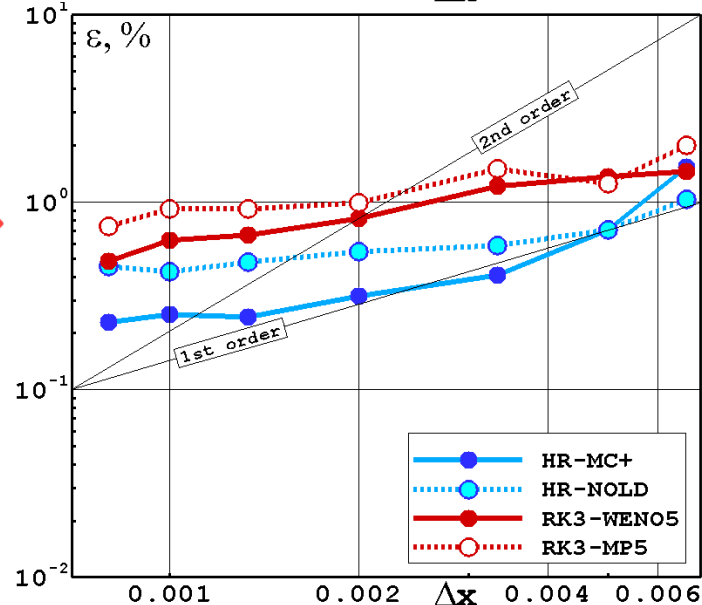
● Тестовая задача 3. Задача Шу-Ошера

Погрешность решения
в зависимости от сеточного
разрешения для 4-х схем:

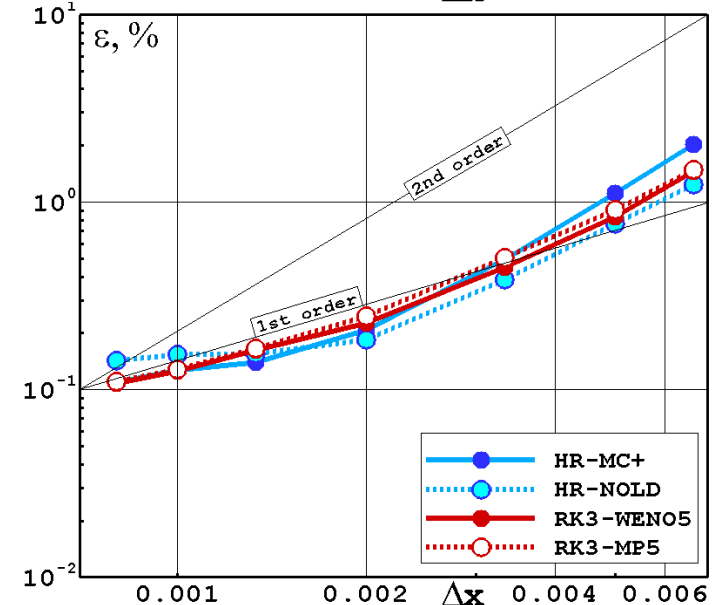
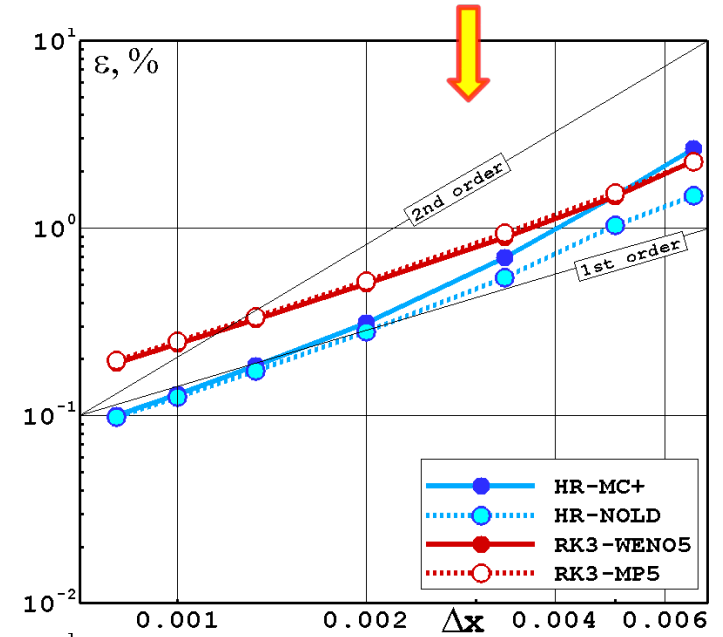
в первой постановке
(поступательная ударная волна)



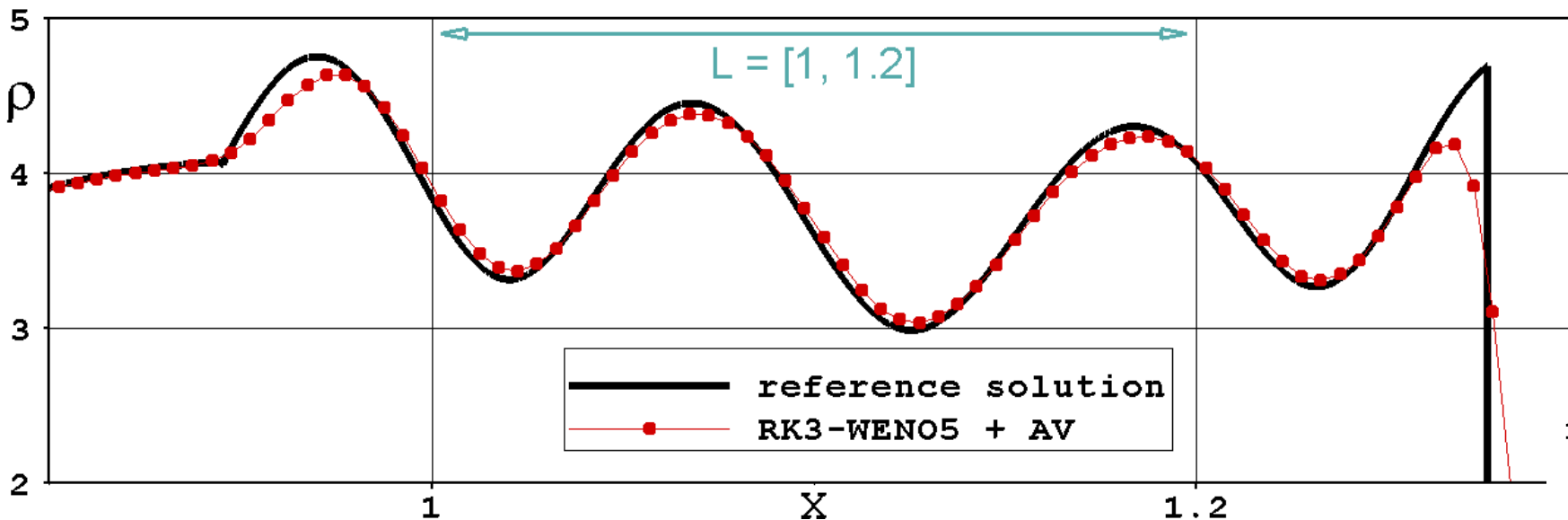
во второй постановке
(медленно движущаяся ударная
волна)



с методом искусственной вязкости (AV)



● Факторы 4 и 5. Смещение и сглаживание профиля



Расчет задачи в первой постановке с добавлением искусственной вязкости

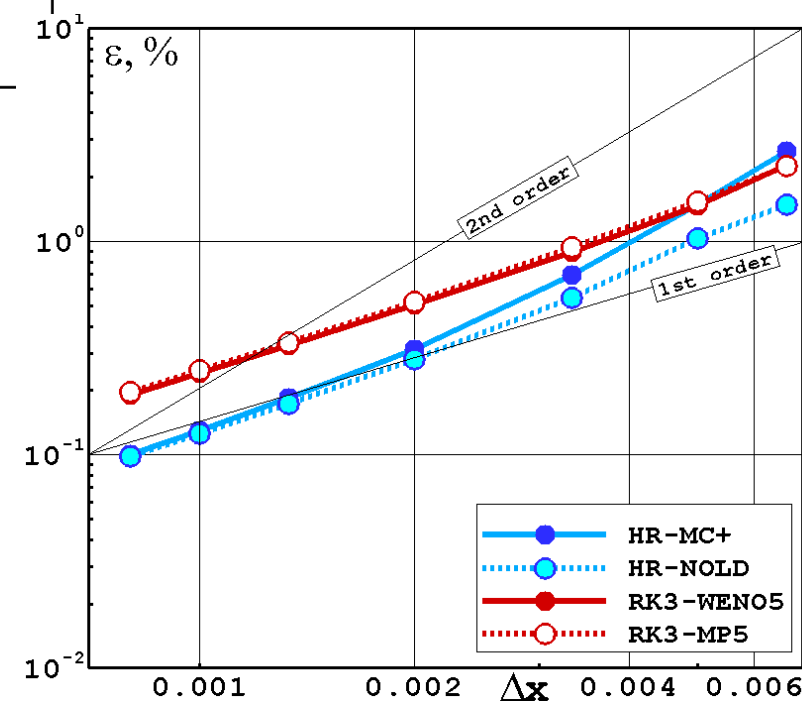
4-й и 5-й факторы, влияющий на точность решения за фронтом ударной волны:

☐ смещение профиля

☐ сглаживание профиля



$$\varepsilon \approx c_1 \Delta x + c_2 \Delta x^2$$



● Фактор 4. Смещение профиля

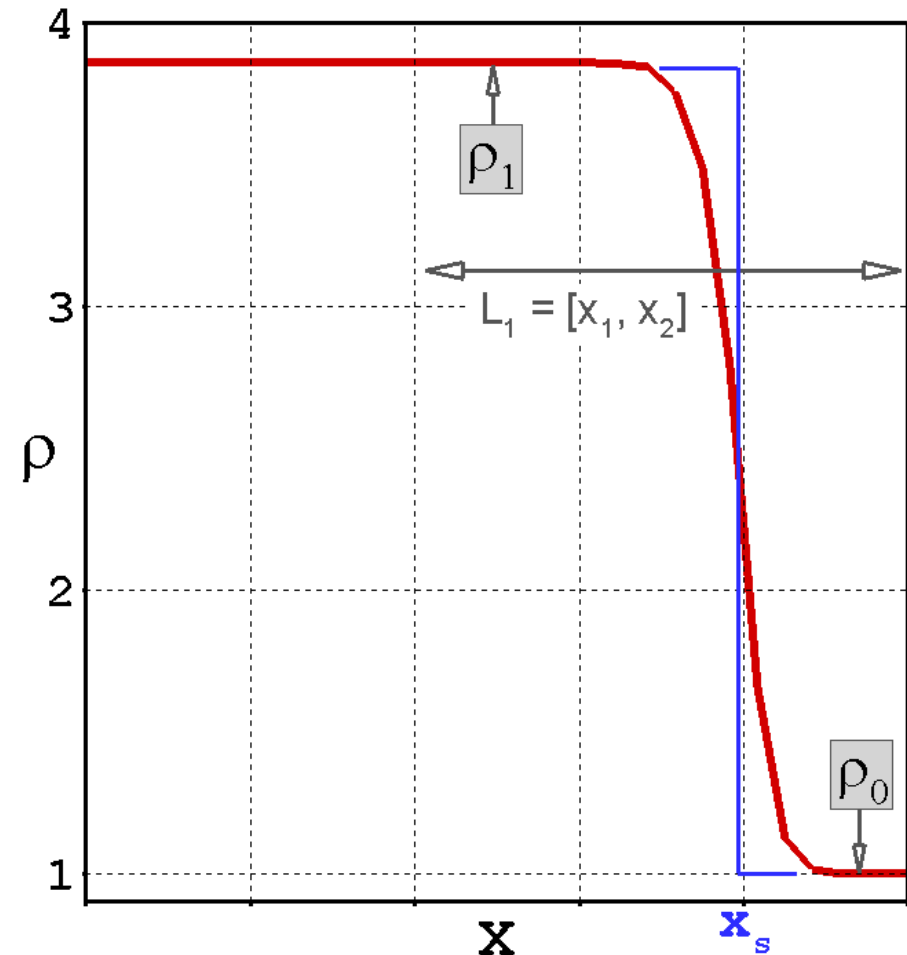
- ❑ Смещение профиля возникает на этапе начального размывания УВ (Фактор 1) и связано с поглощением возмущения, соответствующего характеристике « $u+a$ ».
- ❑ Рассчитать смещение профиля можно из закона сохранения массы.

1) определяем координату неразмытой ударной волны (x_S) для чего интегрируем плотность по интервалу L_1 и приравниваем результат точному решению:

$$\sum_{i=i_1}^{i_2} \bar{\rho}_i \Delta x = \rho_1 (x_S - x_1) + \rho_0 (x_2 - x_S)$$

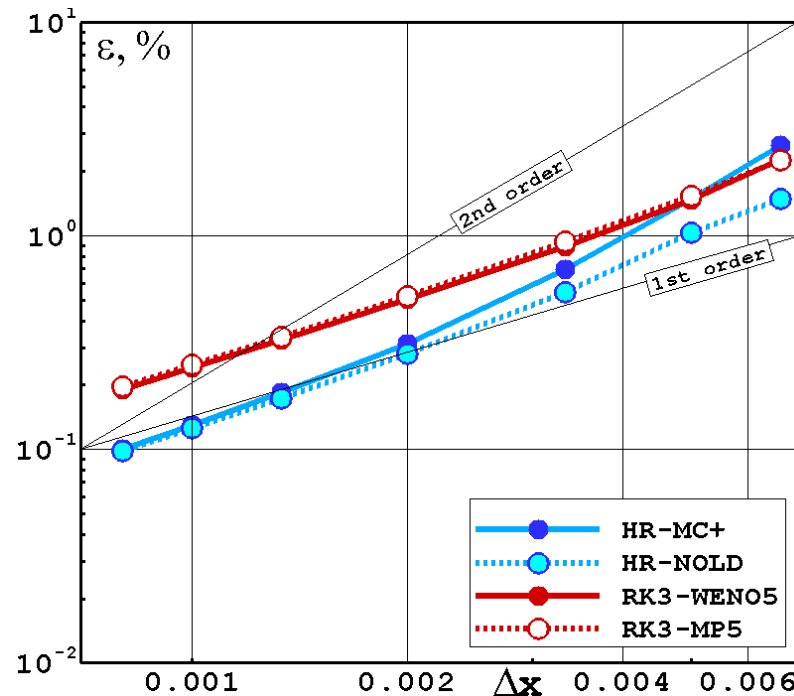
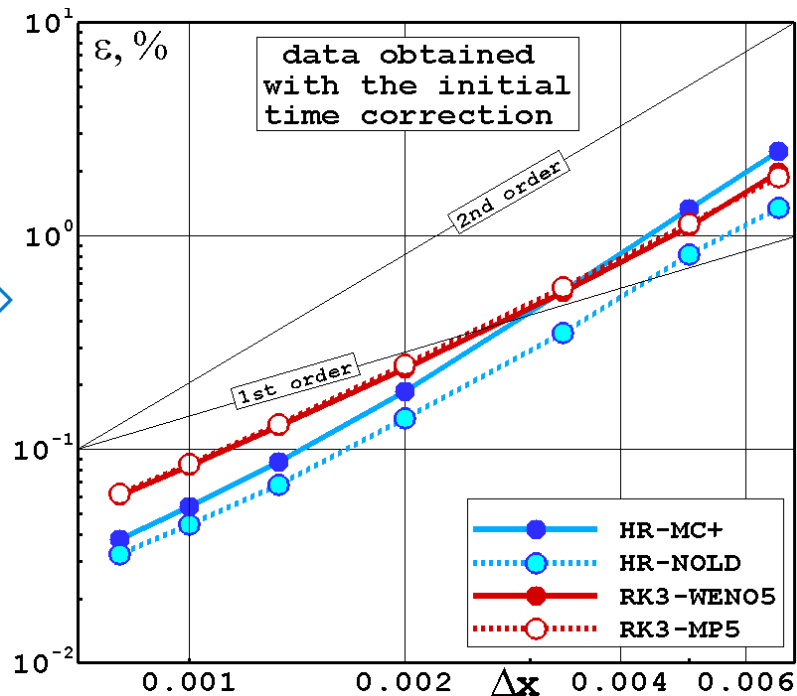
2) вычисляем смещение ударной волны относительно точного значения:

$$\delta = x_S - x_S^{exact}, \text{ где } x_S^{exact} = u_S t$$



● Фактор 4. Смещение профиля

Расчеты с коррекцией времени старта: $t = \delta / u_s$



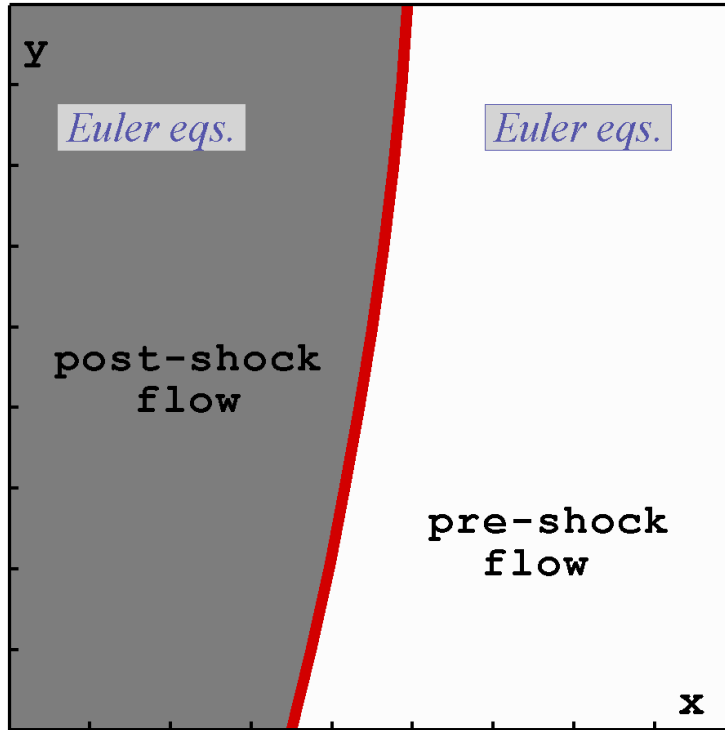
$\delta = 0.17\Delta x$ | $\delta = 0.36\Delta x$

$\varepsilon \approx c_1\Delta x + c_2\Delta x^2$

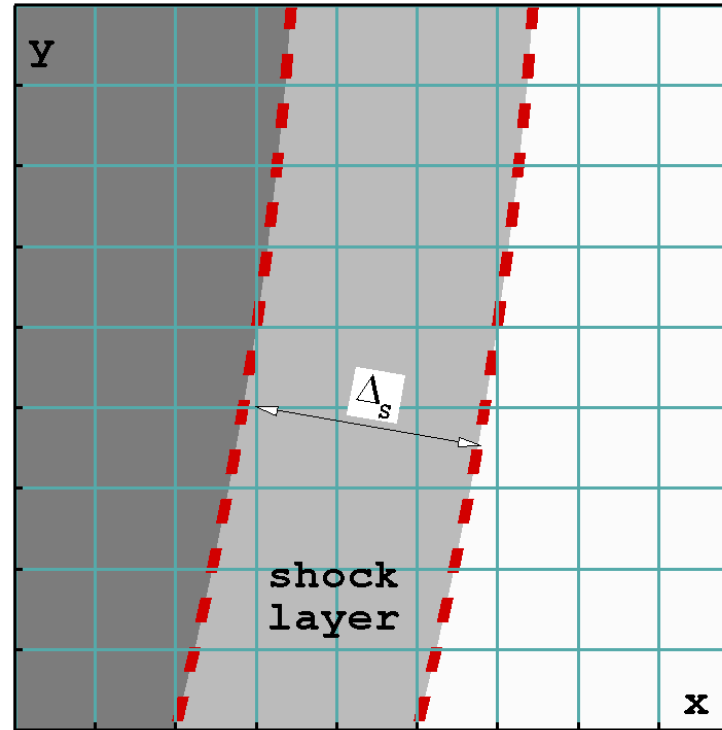
Используемый закон сохранения ↓	↓ Величина $\delta/\Delta x$ ↓	
	HR-MC+, NOLD	RK3-WENO5, MP5
Масса	0.17	0.36
Импульс	0.10	0.20
Энергия	0.06	0.14

- Фактор 5. Сглаживание профиля

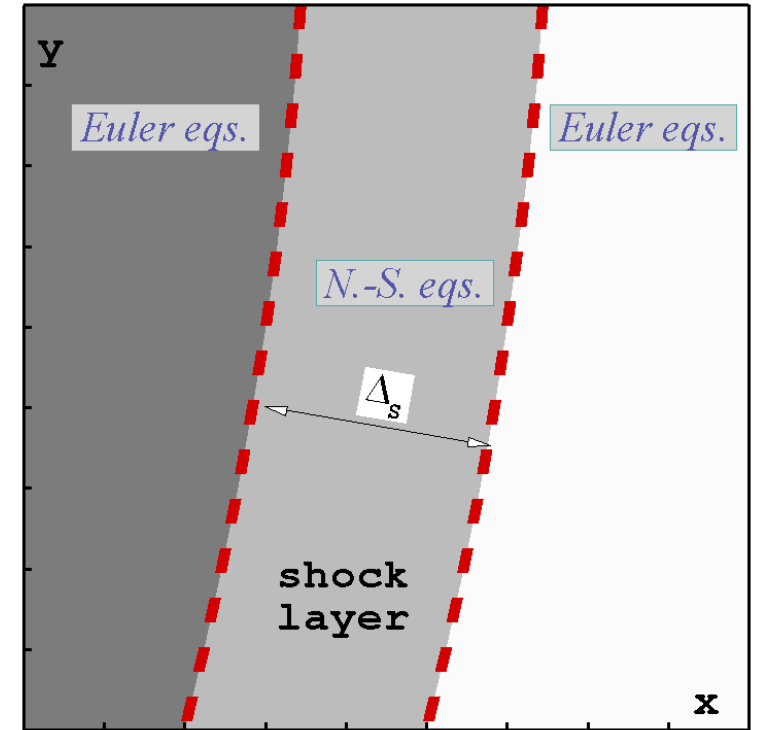
Точное решение



Решение методом сквозного счета



Решение по эталонной модели



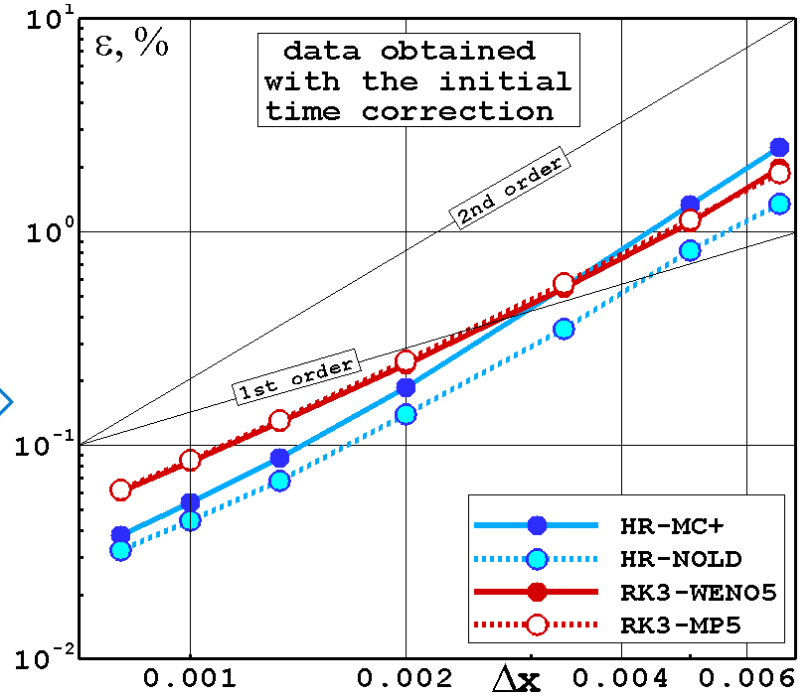
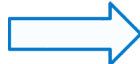
Уравнения Навье-Стокса = уравнения Эйлера + правые части (r.h.s.)

- ❑ Основные зависимости: $|r.h.s.| \sim \mu$; $\Delta_s \sim \mu$; $\tau \sim \Delta_s$.
- ❑ Влияние правых частей на частицу газа при ее прохождении через ударный слой: $|r.h.s.| \cdot \tau \sim \Delta_s^2 \sim \Delta x^2$.

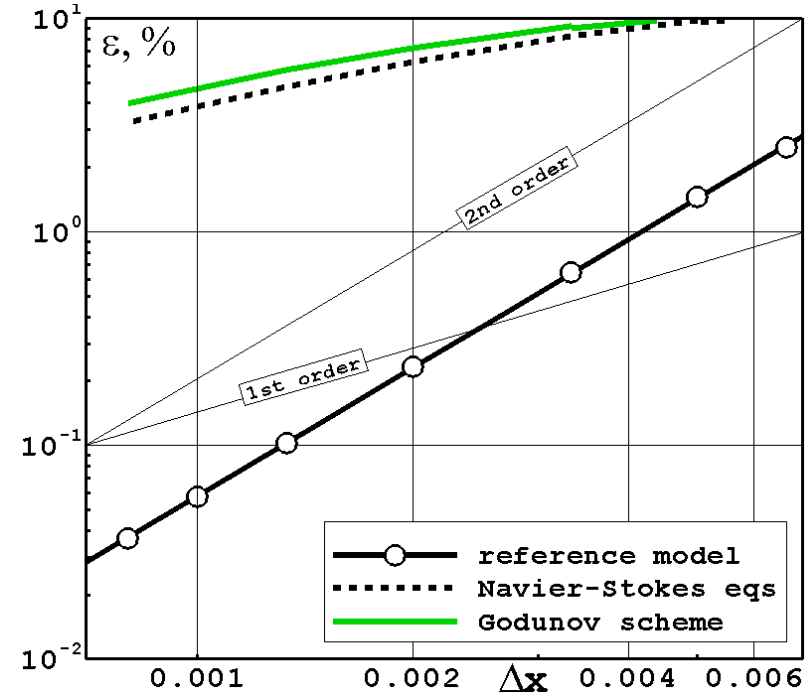
● Факторы 4 и 5. Смещение и сглаживание профиля

Расчеты с коррекцией
времени старта: $t = \delta / u_s$

$\delta = 0.17\Delta x$ | $\delta = 0.36\Delta x$



$\varepsilon \approx c_1\Delta x + c_2\Delta x^2$



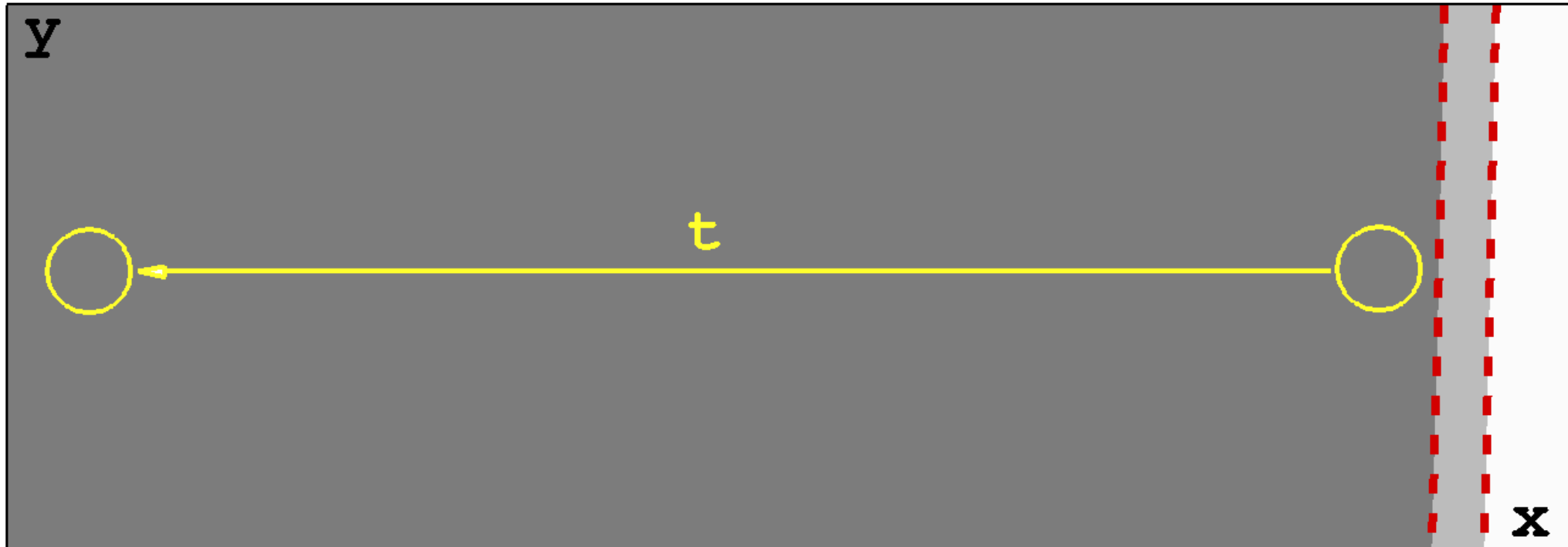
Факторы 4 и 5
и эталонная модель

$\delta = 0.03\Delta x$

- Фактор 6. Порядок аппроксимации метода

Точность решения *непосредственно за УВ* определяется главным образом двумя факторами: смещением профиля и его сглаживанием при прохождении через размытый фронт.

$$\varepsilon \approx c_1 \Delta x + c_2 \Delta x^2$$

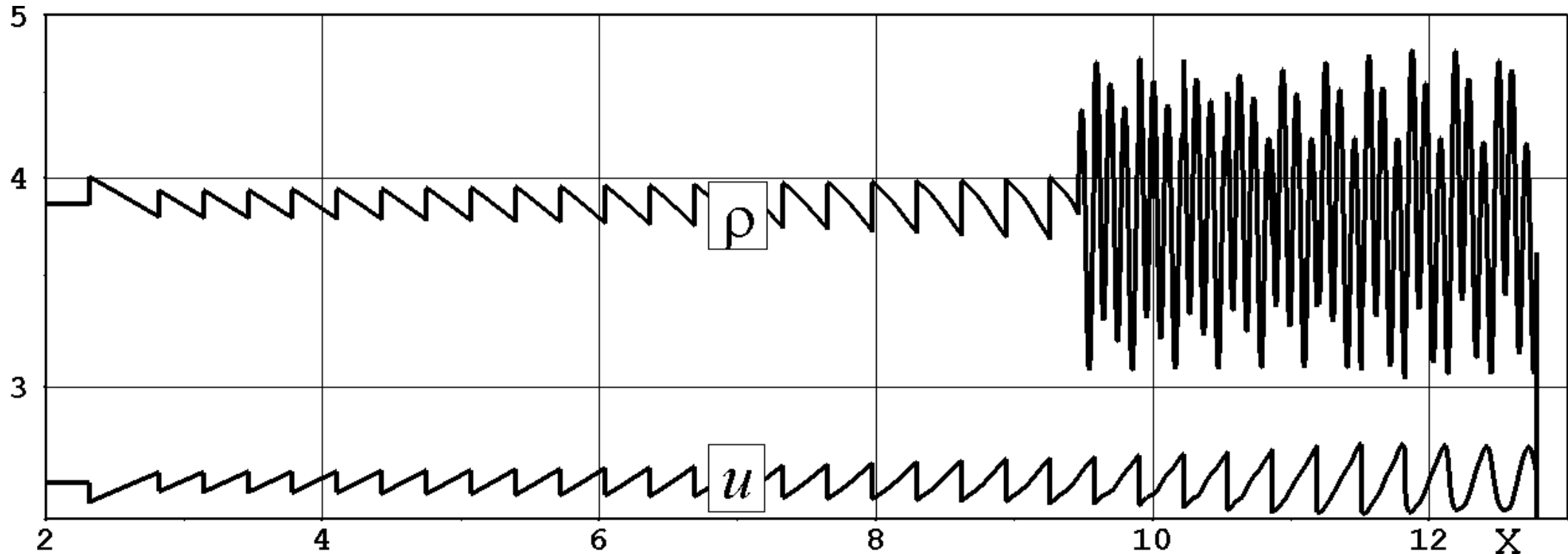


Точность решения *на большом удалении от УВ* будет также зависеть от точности схемы в протяженной области, где решение является гладким (предположительно).

$$\varepsilon \approx c_1 \Delta x + c_2 \Delta x^2 + t \cdot c_m \Delta x^m \quad (m - \text{порядок аппроксимации схемы})$$

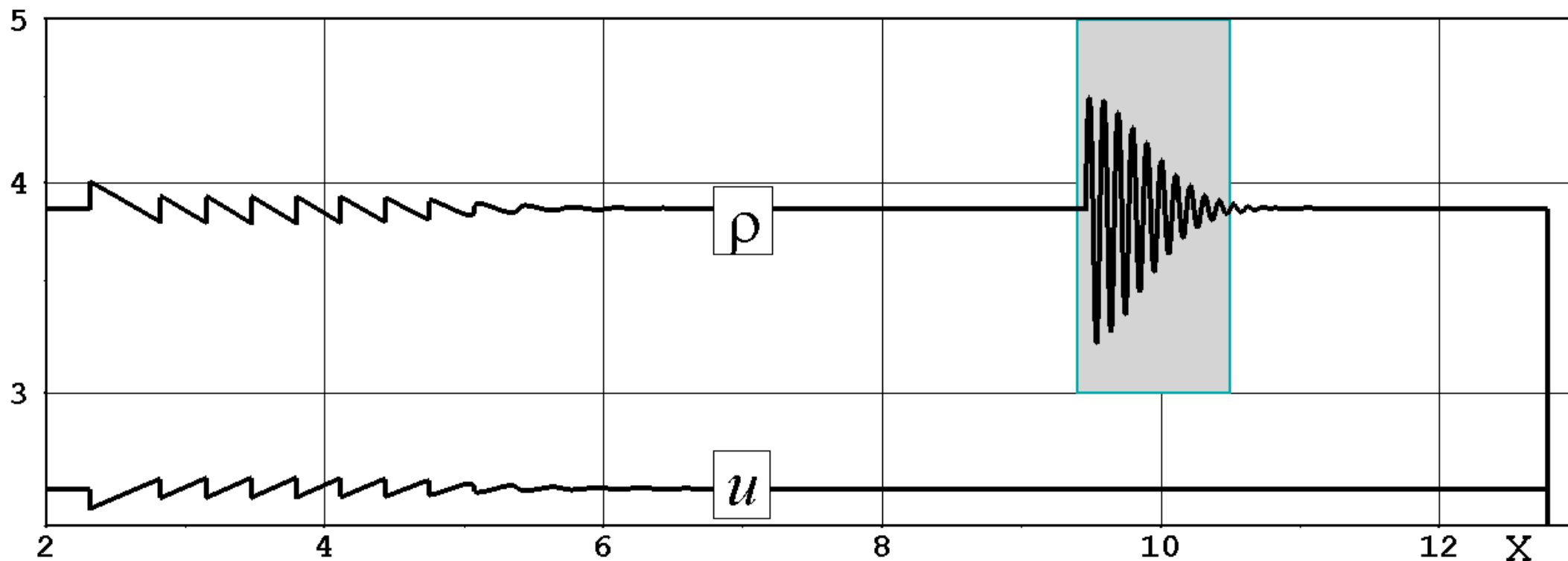
● Тестовая задача 3. Задача Шу-Ошера

- ❑ Ударная волна с $M_s = 3$ распространяется по неоднородному газу с $\gamma = 1.4$ с синусоидальным распределением плотности перед волной: $\rho = 1 + 0.2 \cdot \sin(5\pi x)$.
- ❑ В начальный момент ($t = 0$) фронт УВ расположен в сечении $x = 0$.
- ❑ Задача рассчитывается до момента времени $t = 3.6$ (вместо $t = 0.36$ в первоначальном варианте).

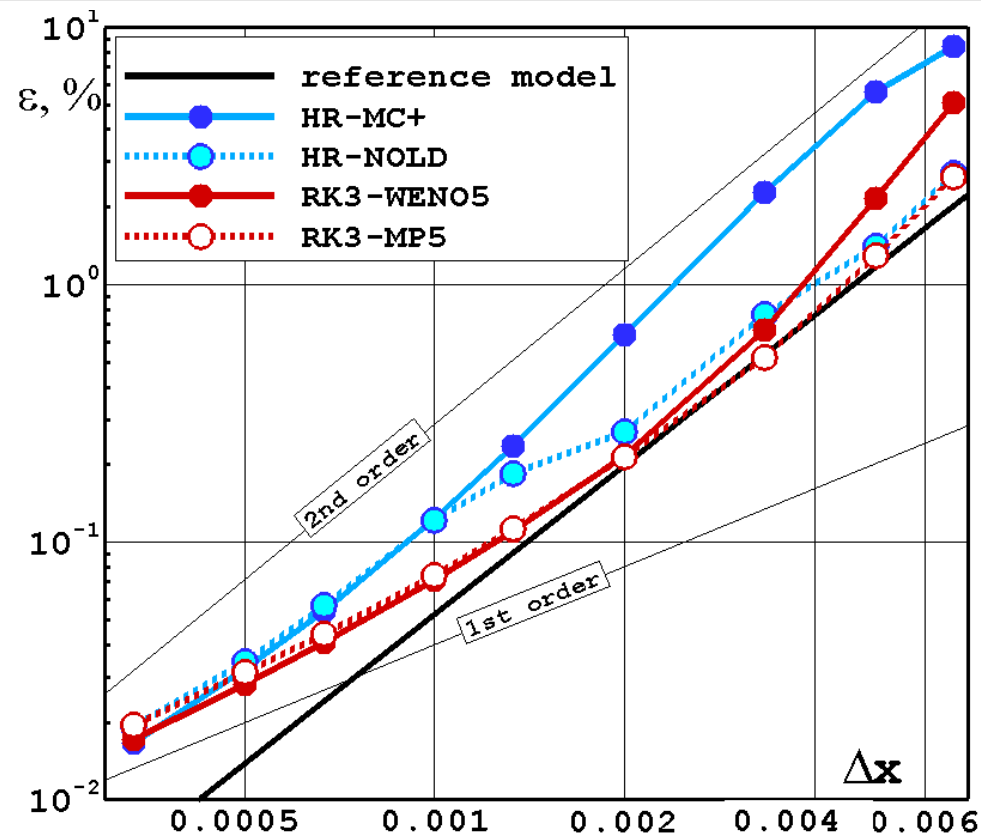
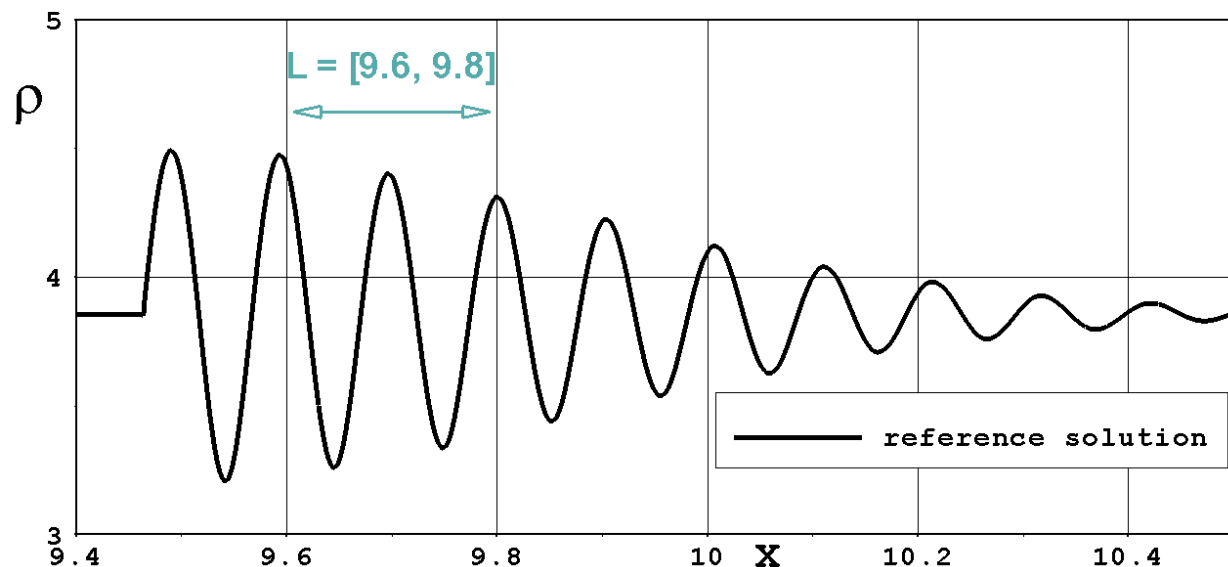


● Тестовая задача 4. Модифицированная задача Шу-Ошера

- ❑ Ударная волна с $M_S = 3$ распространяется по неоднородному газу с $\gamma = 1.4$ с синусоидальным распределением плотности перед волной: $\rho = 1 + 0.2 \cdot \sin(5\pi x) \cdot \exp(-0.2x^2)$.
- ❑ В начальный момент ($t = 0$) фронт УВ расположен в сечении $x = 0$.
- ❑ Задача рассчитывается до момента времени $t = 3.6$ (вместо $t = 0.36$ в первоначальном варианте).



● Тестовая задача 4. Модифицированная задача Шу-Ошера



- Эталонная модель показывает второй порядок сеточной сходимости (Фактор 5).
- При большом сеточном разрешении порядок сходимости всех методов приближается к первому (Фактор 4).
- Метод HR с реконструкцией MC+ оказывается наименее точным; на грубой сетке он демонстрирует порядок сходимости близкий ко второму.
- Схема RK3-WENO5 на грубой сетке демонстрирует порядок сходимости выше второго, однако далее ее точность снижается.
- Схема RK3-MP5 демонстрирует хорошее согласие с эталонной моделью в диапазоне $0.002 < \Delta x < 0.0067$, однако в области $\Delta x < 0.02$ она следует за схемой RK3-WENO5.
- Схема HR-NOLD в области $0.002 < \Delta x$ конкурирует по точности со схемой RK3-MP5, однако далее она отходит от схем повышенного порядка и, начиная с $\Delta x = 0.001$, следует за схемой HR-MC+.

конец первой части

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ