

Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике

XII. Тестирование схем: подводные камни сквозного счета  
(часть 2)

Родионов Александр Владимирович



# Источники ошибок в одномерных задачах

- Численные методы

схемы: HR-MC+, HR-NOLD, RK3-WENO5, RK3-MP5, метод AV

- **Эталонная модель** для методов сквозного счета **размывание УВ за счет физ. вязкости**

- Тестовая задача 1. Однородная ударная волна

Локальные ошибки

- Фактор 1. Начальные ошибки

порядок сеточной сходимости  $k < 1$

- Фактор 2. Точность воспроизводства «полочки»

- Тестовая задача 2. Отраженная ударная волна

Локальные ошибки

- Фактор 3. Энтропийный след

- Тестовая задача 3. Задача Шу-Ошера

$k = 1$

- Фактор 4. Смещение профиля

$k = 2$

- Фактор 5. Сглаживание профиля

- Тестовая задача 4. Модифицированная задача Шу-Ошера

$k = m$

- Фактор 6. Порядок аппроксимации метода

## Источники ошибок в многомерных задачах

В *многомерных задачах* исследование точности решения за ударной волной осложняется двумя дополнительными проблемами.

- I. Сетка в многомерном случае имеет больше степеней свободы, чем это было в одномерном случае (ячейки различаются не только размером, но также формой и ориентацией относительно потока).
- II. В многомерных задачах взаимодействие ударных волн приводит к рождению контактных разрывов, которые в рамках уравнений Эйлера (невязкое приближение) являются неустойчивыми образованиями.



Влияние геометрических параметров многомерной сетки и ее ориентации относительно потока на точность решения за фронтом ударной волны.

- Исследование проблемы проводилось на примере расчета двумерных течений на гладкой структурированной сетке.
- Тестовые задачи – одномерные, решаемые уравнения и расчетная сетка – двумерные.

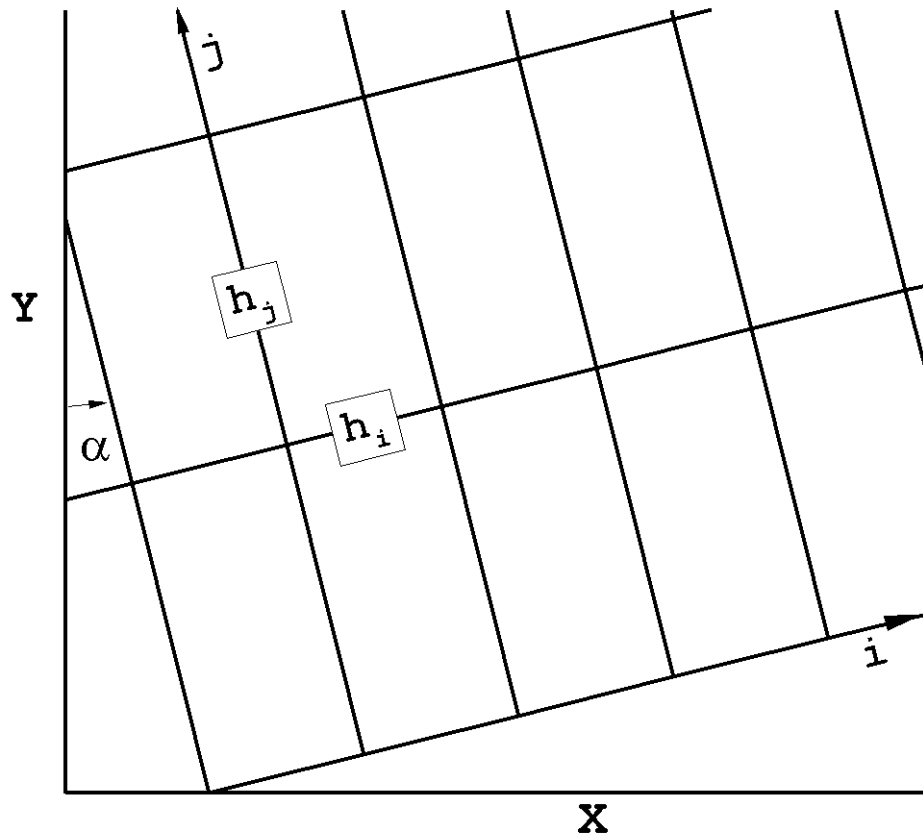
# Источники ошибок в двумерных задачах

- Численные методы схемы HR-MC+, HR-NOLD, RK3-WENO5, RK3-MP5 и метод AV на 2D сетках
  - **Эталонная модель** для методов сквозного счета поправка на двумерность задачи
    - Тестовая задача 1. Однородная ударная волна
      - Фактор 1. Начальные ошибки
      - Фактор 2. Точность воспроизводства «полочки»
    - Тестовая задача 2. Отраженная ударная волна
      - Фактор 3. Энтропийный след
    - Тестовая задача 3. Задача Шу-Ошера
      - Фактор 4. Смещение профиля
      - Фактор 5. Сглаживание профиля
    - Тестовая задача 4. Модифицированная задача Шу-Ошера
      - Фактор 6. Порядок аппроксимации метода

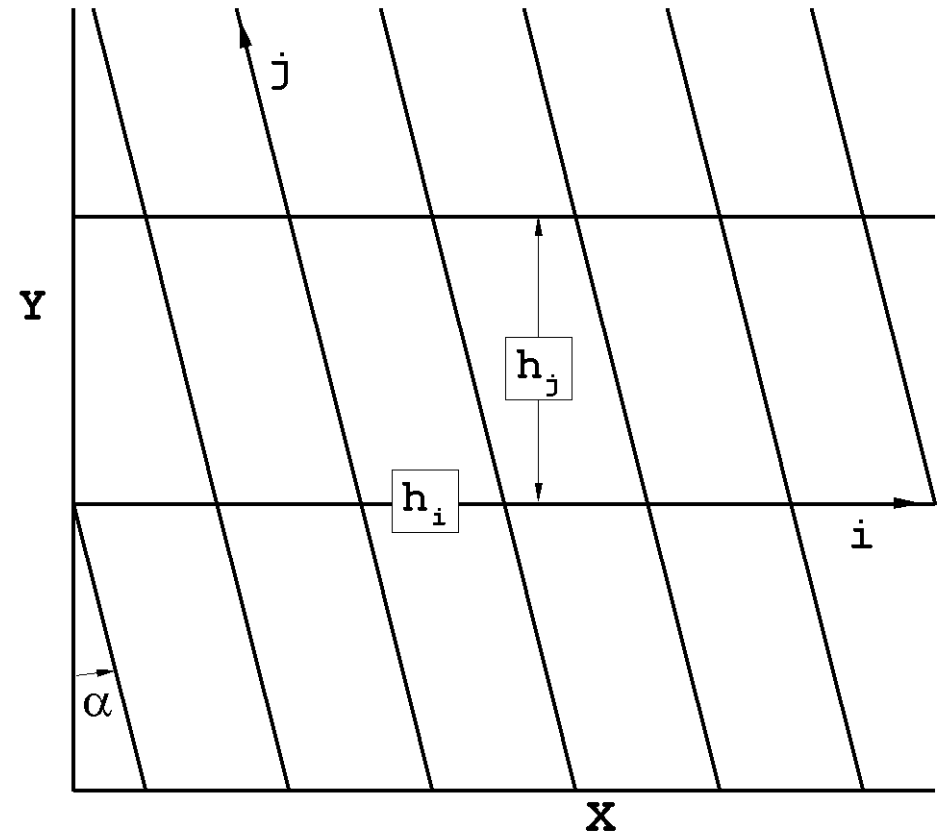
# Расчетная сетка

## Варианты расчетных сеток

прямоугольная сетка



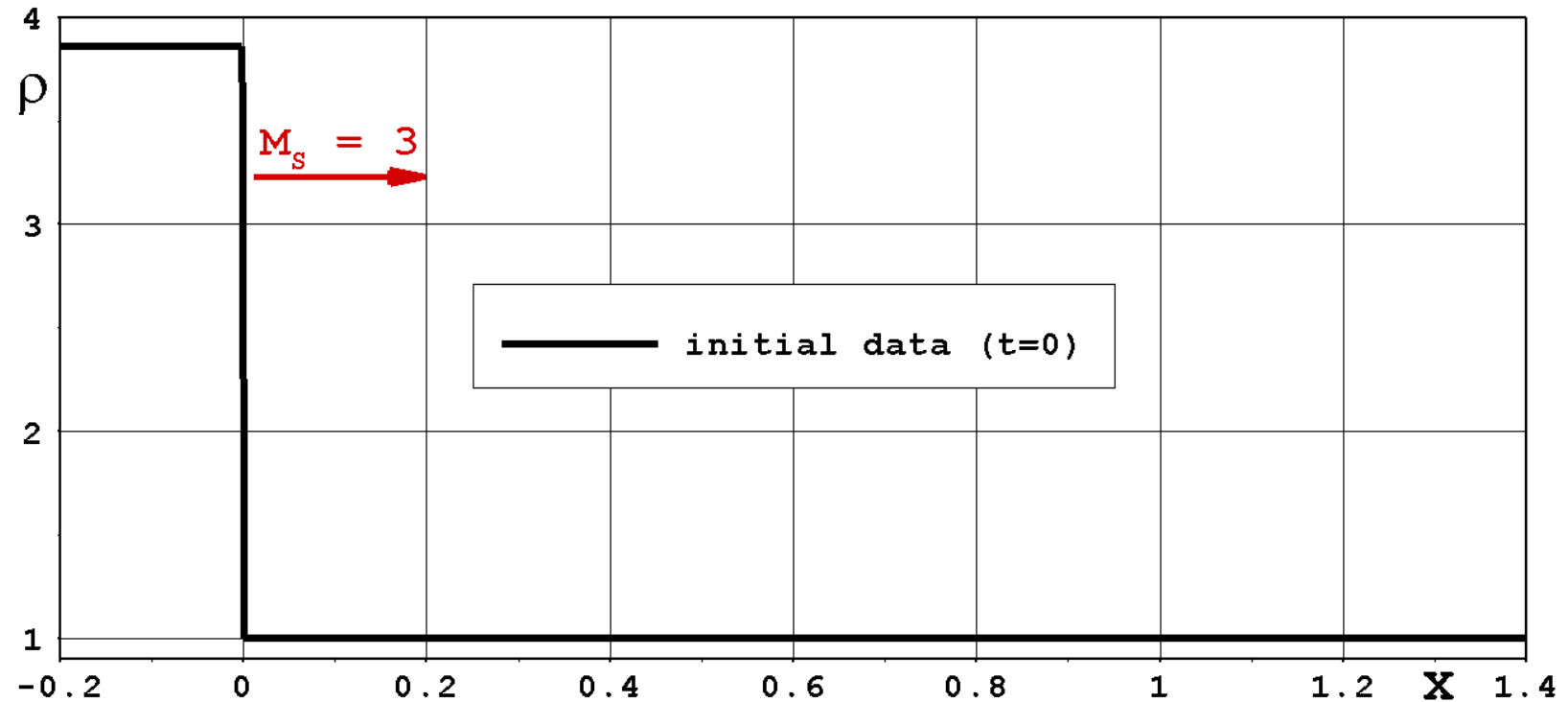
параллелограммная сетка



$$h_j / h_i = \frac{1}{2}, 1 \text{ или } 2, \quad \text{tg} \alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \text{ или } 1$$

## ● Тестовая задача 1. Однородная плоская ударная волна

- Ударная волна с  $M_s = 3$  распространяется по однородному газу с  $\gamma = 1.4$ .
- В начальный момент ( $t = 0$ ) фронт УВ расположен в сечении  $x = 0$ .
- Задача рассчитывается в двух постановках (в разных системах координат) до момента времени  $t = 0.36$ .



- Поступательная ударная волна.** В первой постановке система координат (и связанная с ней расчетная сетка) выбирается так, что газ перед волной является неподвижным.
- Медленно движущаяся ударная волна.** Во второй постановке ударная волна медленно движется относительно расчетной сетки со скоростью 0.1. По окончании счета расчетные данные приводятся в соответствие с первой постановкой задачи (координаты сетки и скорость газа пересчитываются).

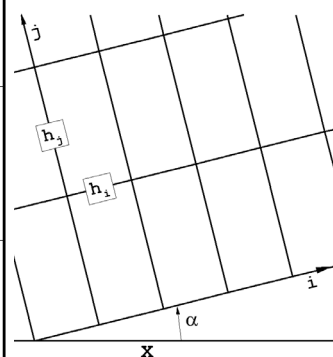
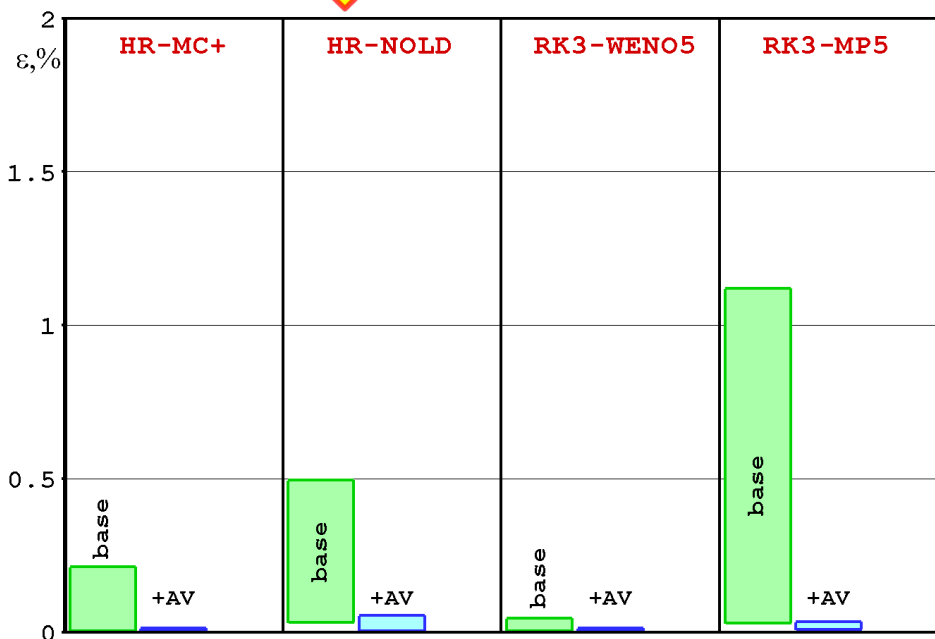
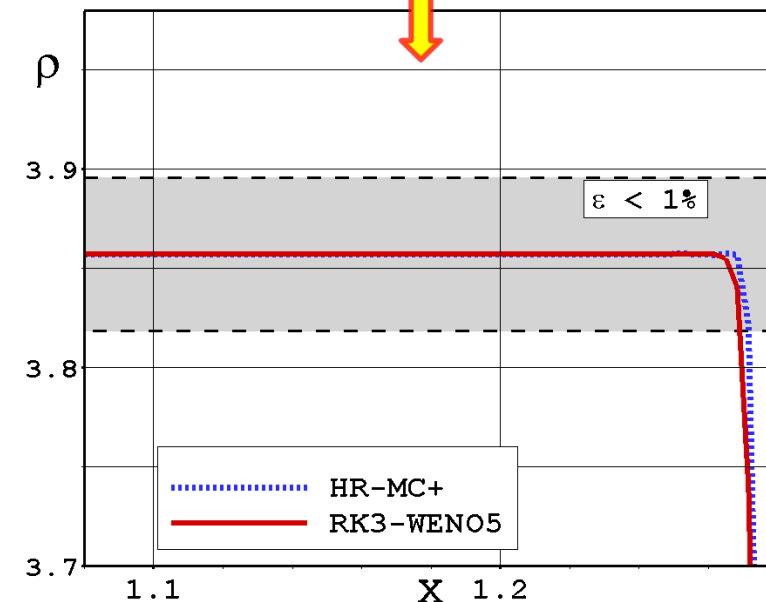
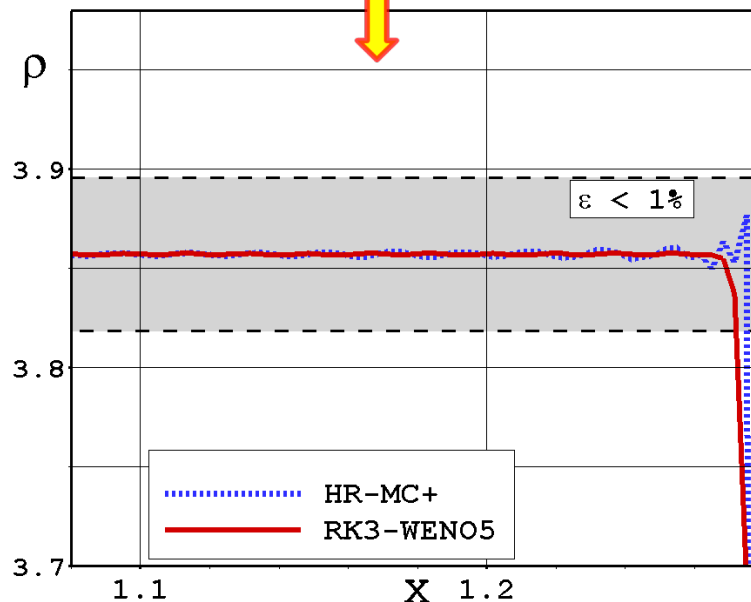
● **Фактор 2.** Точность воспроизводства «полочки»

Профили плотности, полученные в первой постановке (поступательная УВ)

по базовым схемам  
однормерные расчеты

с методом AV

Диаграммы разброса погрешностей в расчетах на прямоугольной сетке



по всем вариантам  
прямоугольной сетки

● Фактор 2. Точность воспроизводства «полочки»

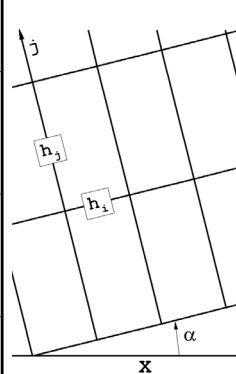
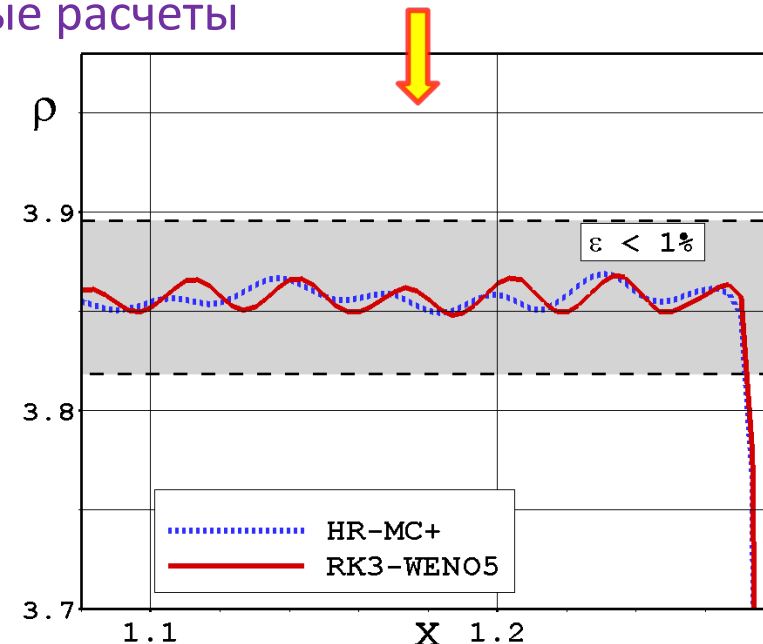
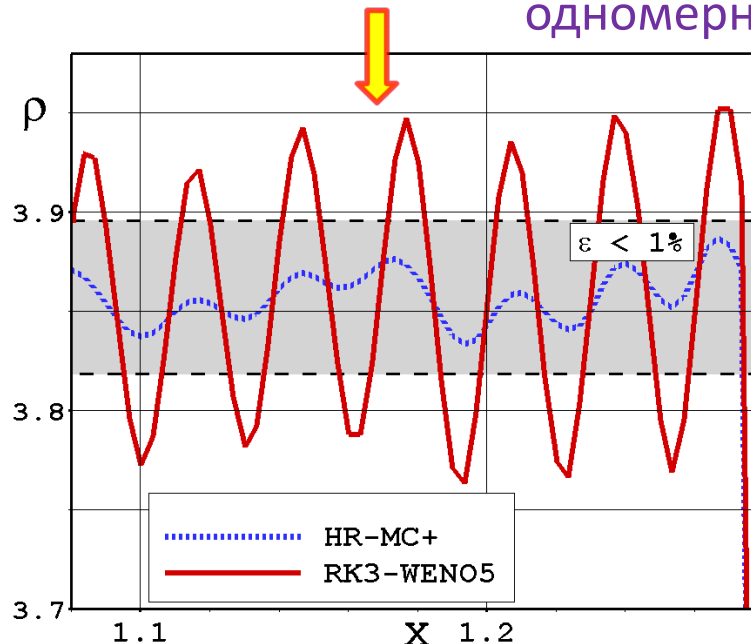
Профили плотности, полученные во второй постановке (медленно движущаяся УВ)

по базовым схемам

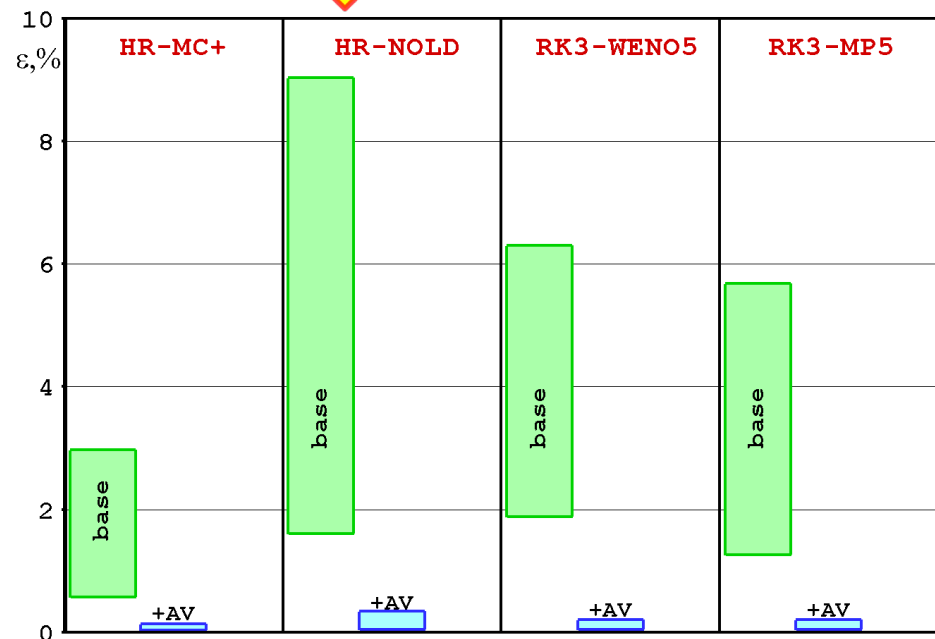
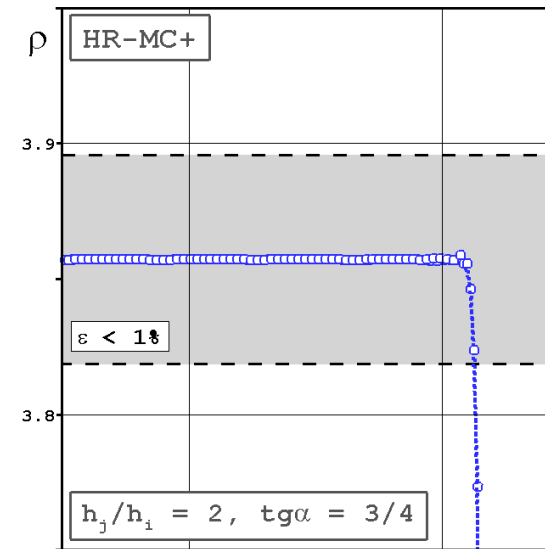
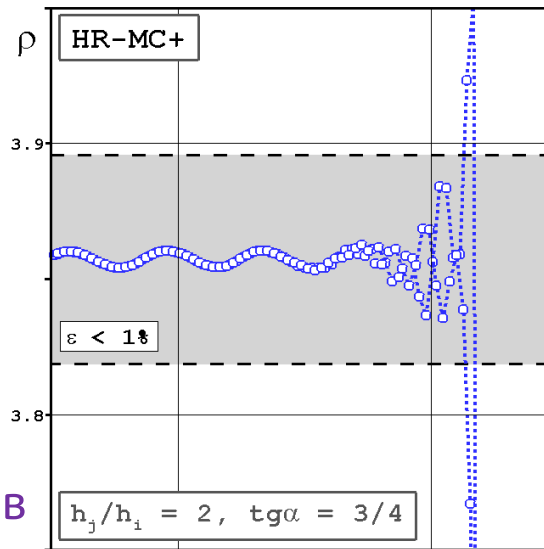
одномерные расчеты

с методом AV

Диаграммы разброса погрешностей в расчетах на прямоугольной сетке



один из вариантов



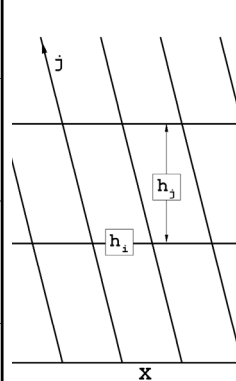
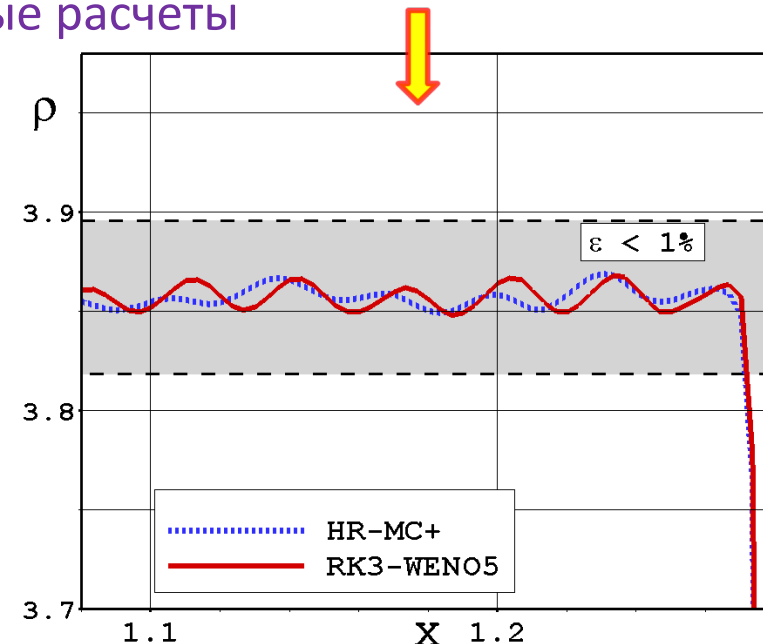
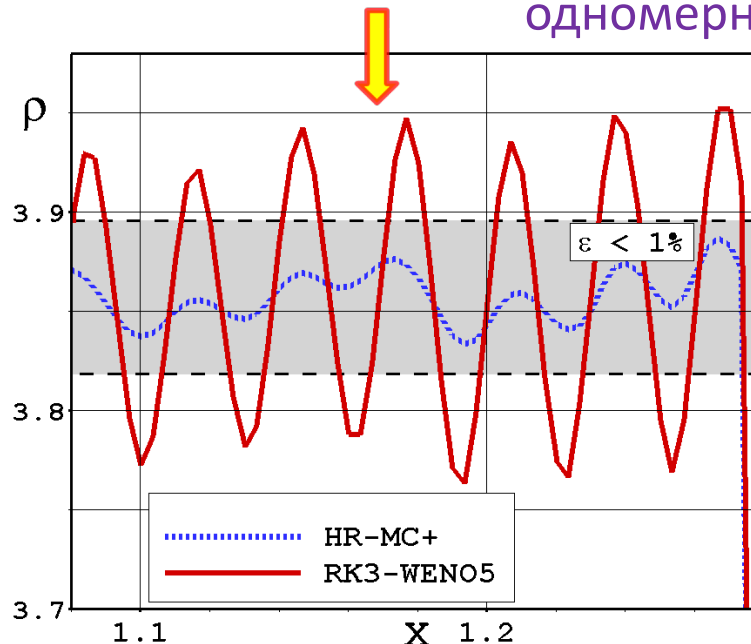
● Фактор 2. Точность воспроизводства «полочки»

Профили плотности, полученные во второй постановке (медленно движущаяся УВ)

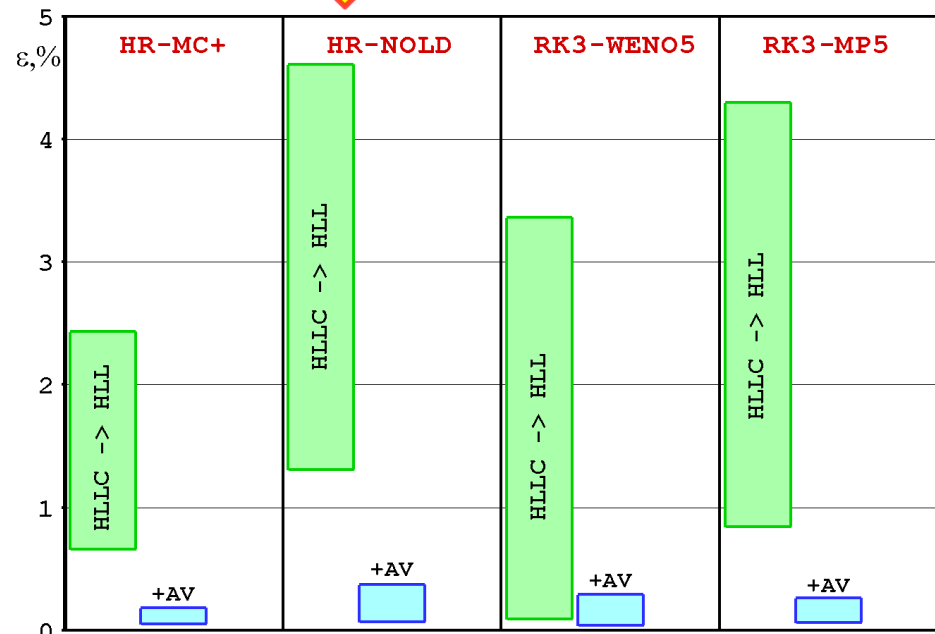
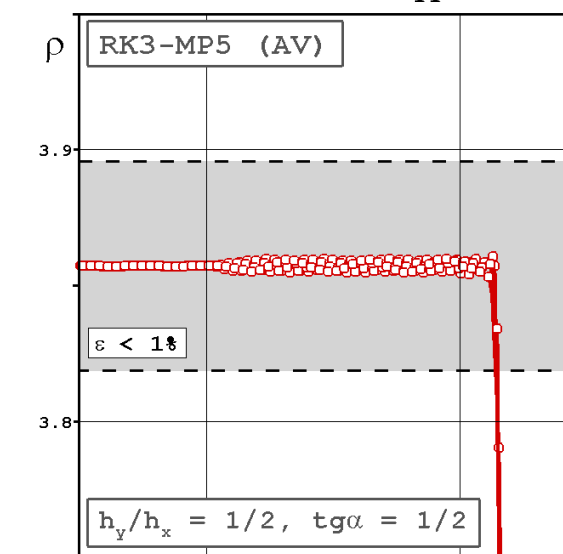
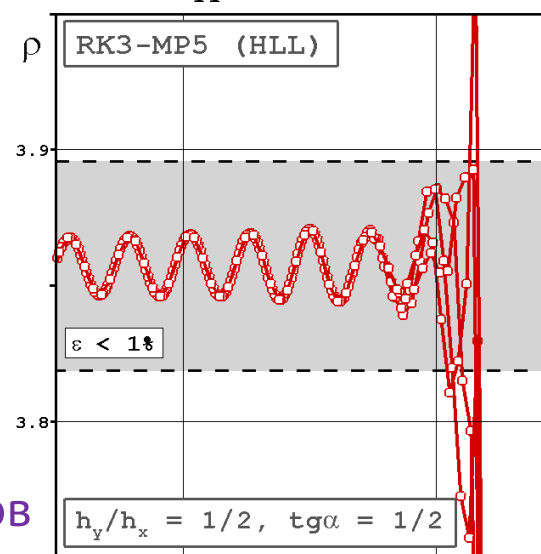
по базовым схемам  
одномерные расчеты

с методом AV

Диаграммы разброса погрешностей в расчетах на параллелограммной сетке



один из вариантов



- **Фактор 2.** Точность воспроизводства «полочки»

### Фактор 2 и эталонная модель.

В *одномерных задачах* для моделирования цикличности схемной вязкости в эталонную модель вводилась зависимость  $\mu$  от времени:

$$\mu(t) = \mu_0 + \Delta\mu \cdot \cos(2\pi t / \tau_0),$$

где  $\mu_0 = 3 \times 10^{-3}$  (для разрешения  $\Delta x = 1/300$ ),

$\tau_0$  – время прохода ударной волны расстояния  $\Delta x$  (цикл прохождения УВ по сетке).

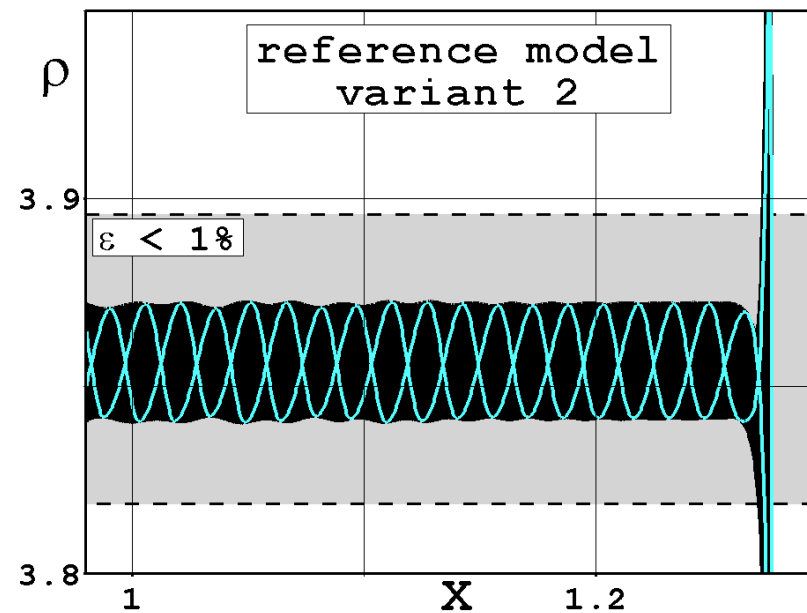
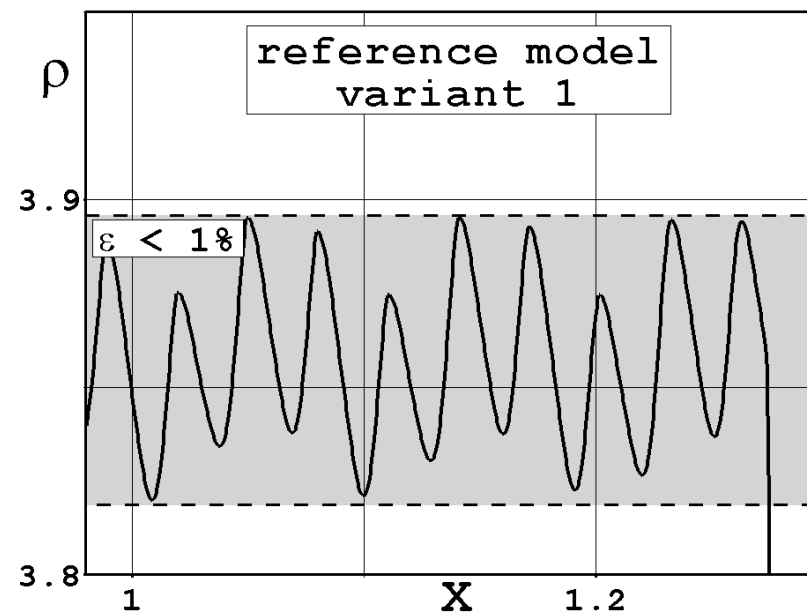
□ вариант 1 с  $\Delta\mu = 1.5 \times 10^{-3}$  и  $\tau_0 = 33 \times 10^{-3}$  (медленно движущаяся ударная волна).

В *двумерных задачах* в эталонную модель вводится зависимость  $\mu$  от времени и поперечной координаты:

$$\mu(t, y) = \mu_0 + \Delta\mu \cdot \cos[2\pi(t/\tau_0 + y/L_0)],$$

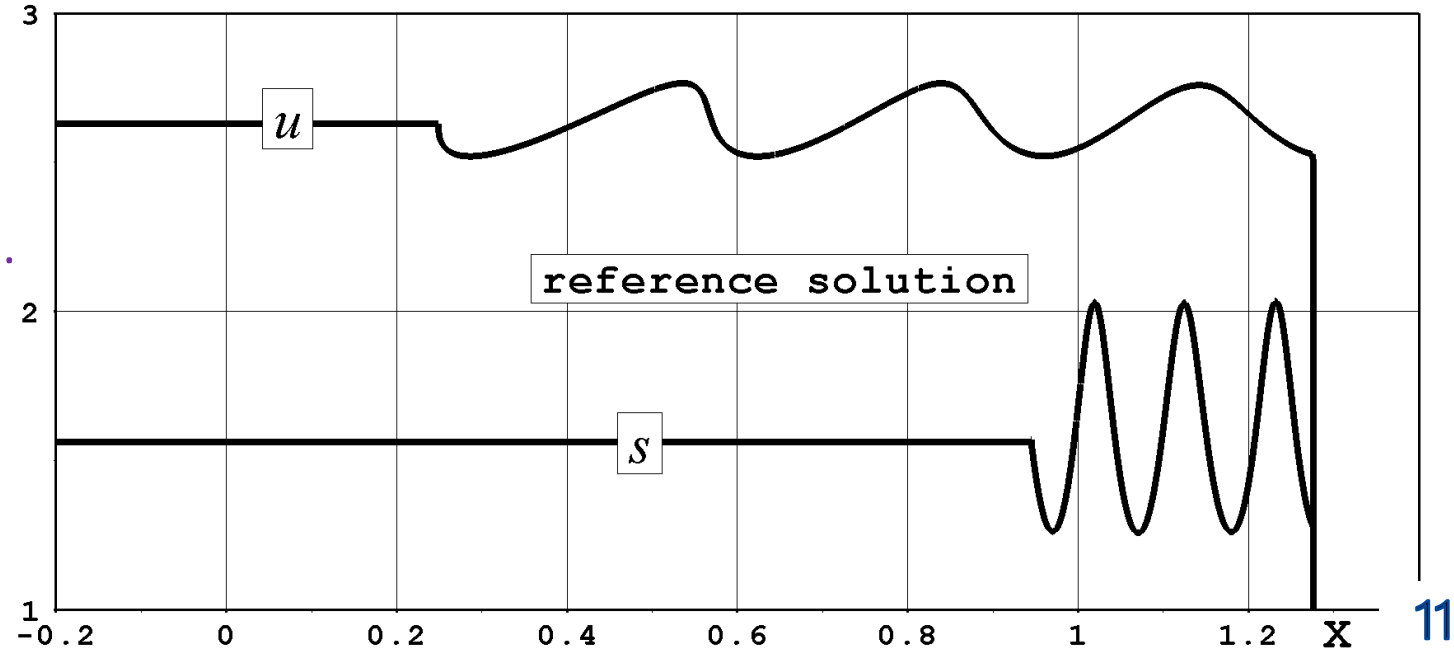
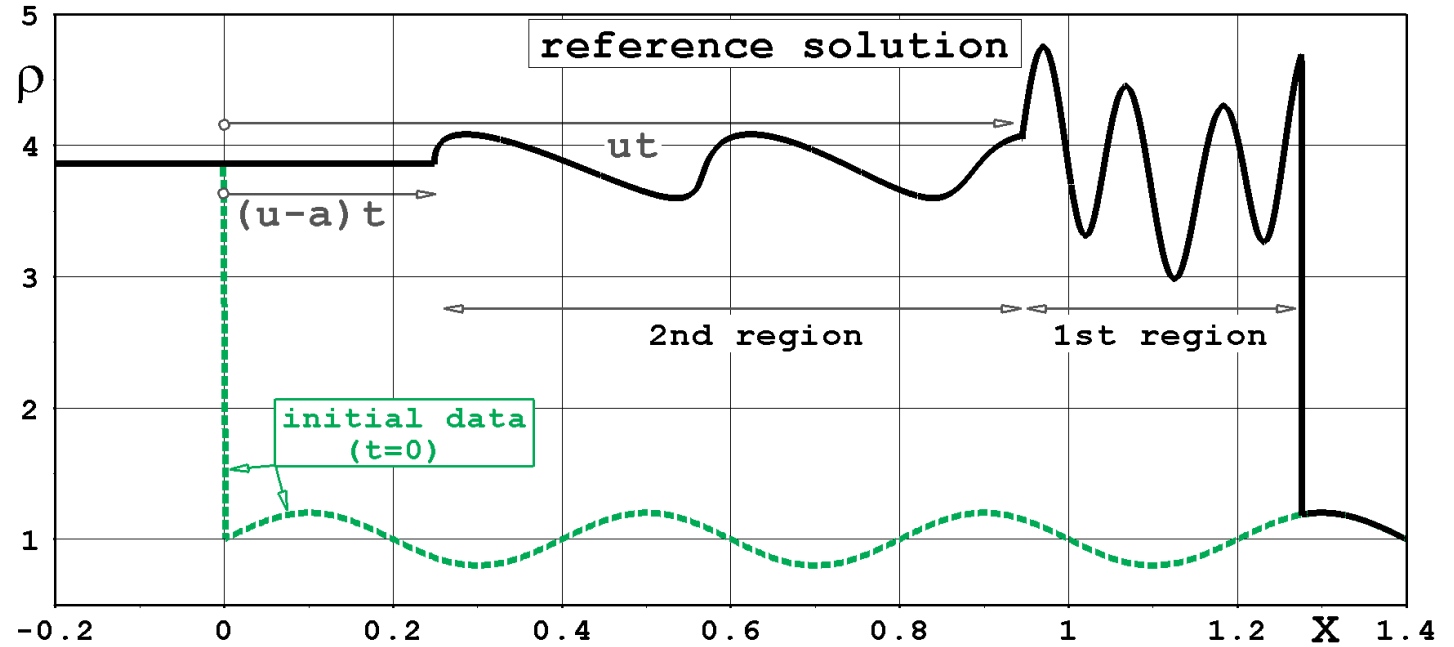
где  $L_0$  – расстояние, характеризующее периодичность сетки в поперечном направлении.

□ вариант 2 с  $\Delta\mu = 1.5 \times 10^{-3}$ ,  $\tau_0 = 33 \times 10^{-3}$  и  $L_0 = 4 \cdot \Delta x$  (медленно движущаяся ударная волна).

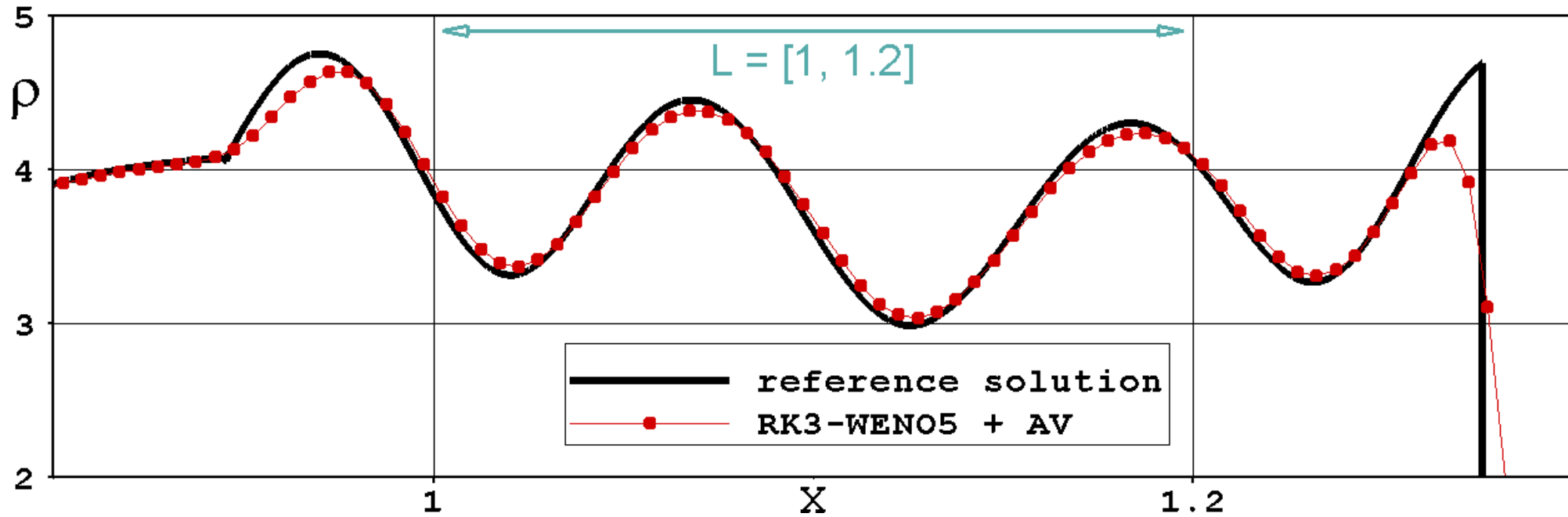


## ● Тестовая задача 3. Задача Шу-Ошера

- ❑ Ударная волна с  $M_S = 3$  распространяется по неоднородному газу с  $\gamma = 1.4$  с синусоидальным распределением плотности перед волной:  $\rho = 1 + 0.2 \cdot \sin(5\pi x)$ .
  - ❑ В начальный момент ( $t = 0$ ) фронт УВ расположен в сечении  $x = 0$ .
  - ❑ Задача рассчитывается в двух постановках до момента времени  $t = 0.36$ .
- ❑ **Поступательная ударная волна.**  
Газ перед волной является неподвижным.
  - ❑ **Медленно движущаяся ударная волна.**  
Ударная волна в начальный момент является неподвижной. По окончании счета координаты сетки и скорость газа пересчитываются.



- Тестовая задача 3. Задача Шу-Ошера



Погрешность решения в области  $L = [1, 1.2]$  в зависимости от сеточного разрешения:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{x_{i,j} \in L} (\bar{\rho}_i - \bar{\rho}_i^{ref})^2}{M}} \times \frac{100\%}{\rho_2}$$

где  $M$  – количество ячеек, центры которых попадают в интервал  $L$ .

# Тестовая задача 3. Задача Шу-Ошера

Погрешность решения  
в зависимости от сеточного разрешения

- *прямоугольная сетка*
- *первая постановка задачи (поступательная УВ)*

схема HR-MC+ →

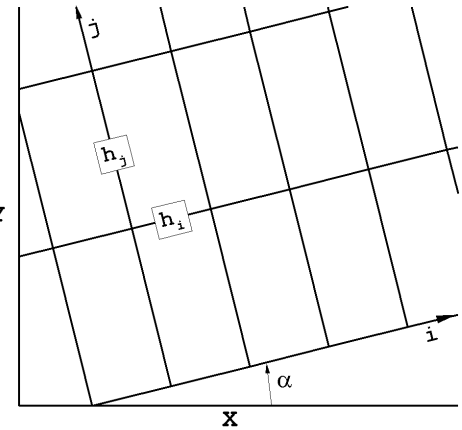
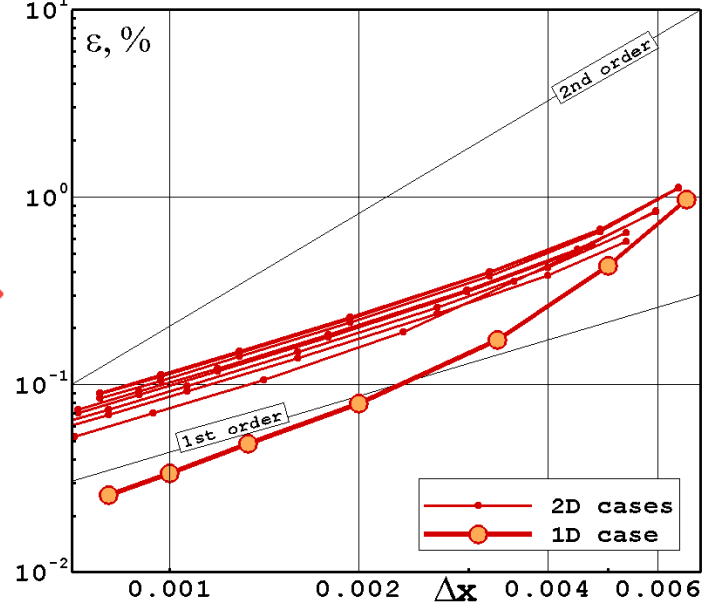
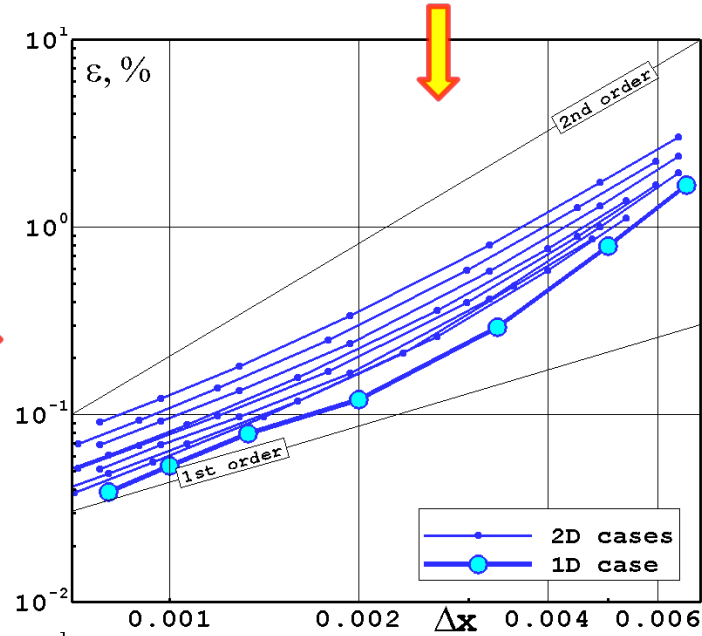
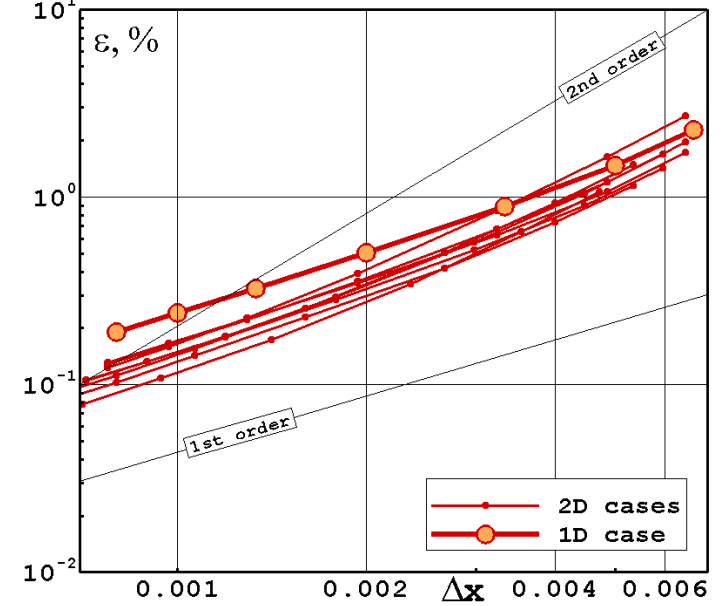
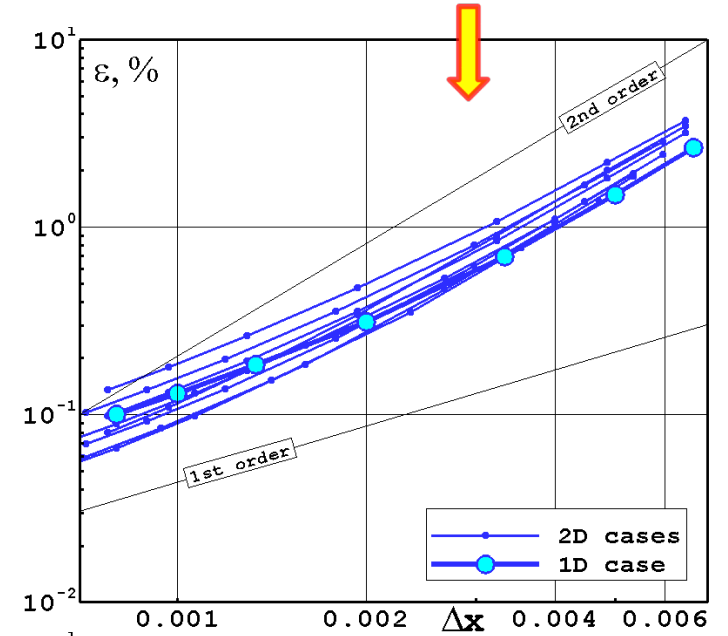


схема RK3-WENO5 →

по базовым схемам



с методом искусственной вязкости (AV)



# Тестовая задача 3. Задача Шу-Ошера

Погрешность решения  
в зависимости от сеточного разрешения

- *прямоугольная сетка*
- *вторая постановка задачи (медленно движущаяся УВ)*

схема HR-MC+

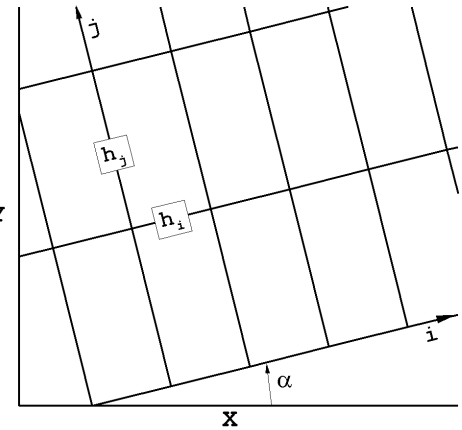
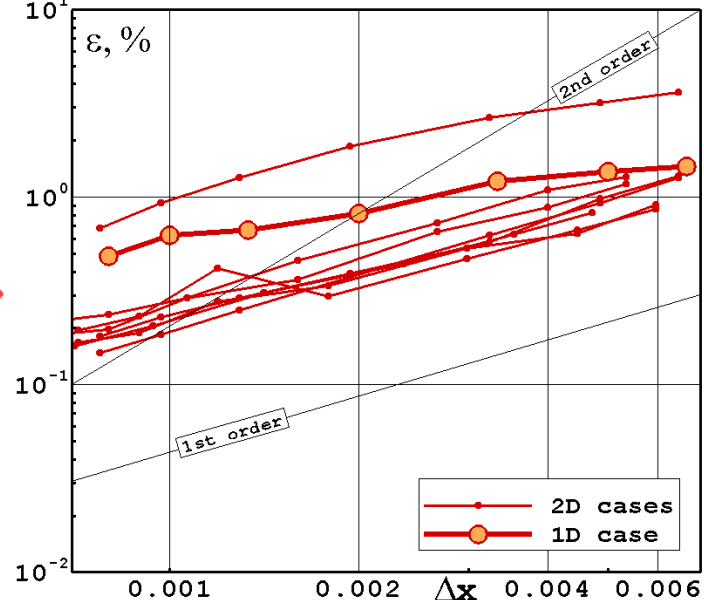
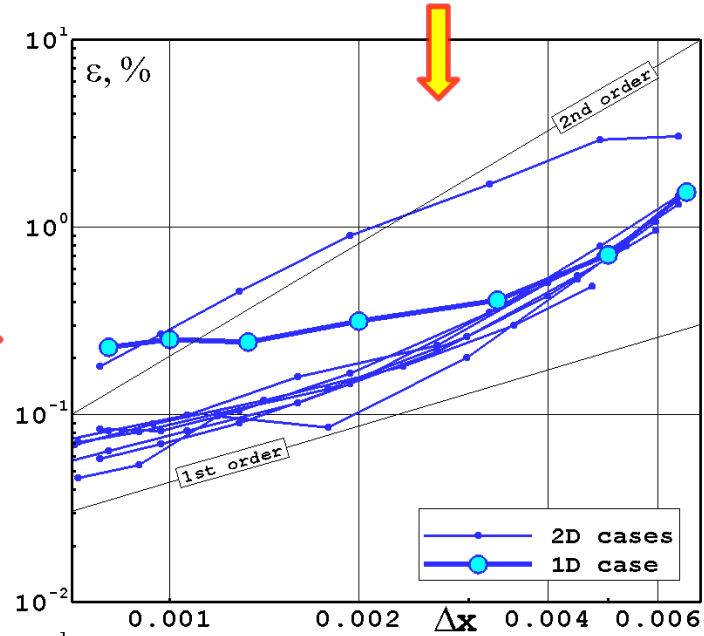


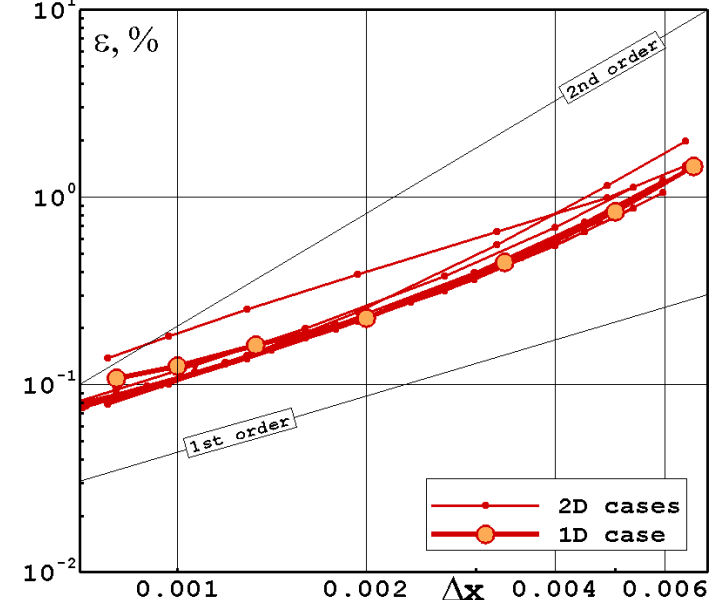
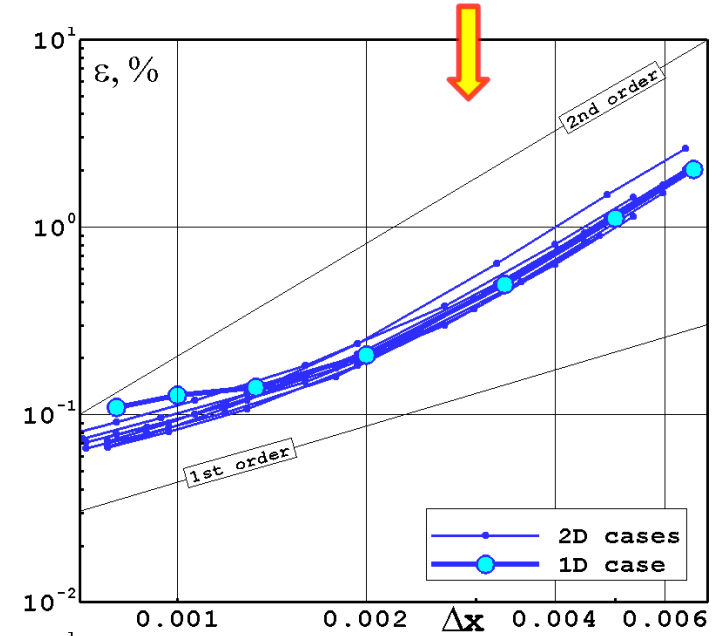
схема RK3-WENO5



по базовым схемам



с методом искусственной вязкости (AV)

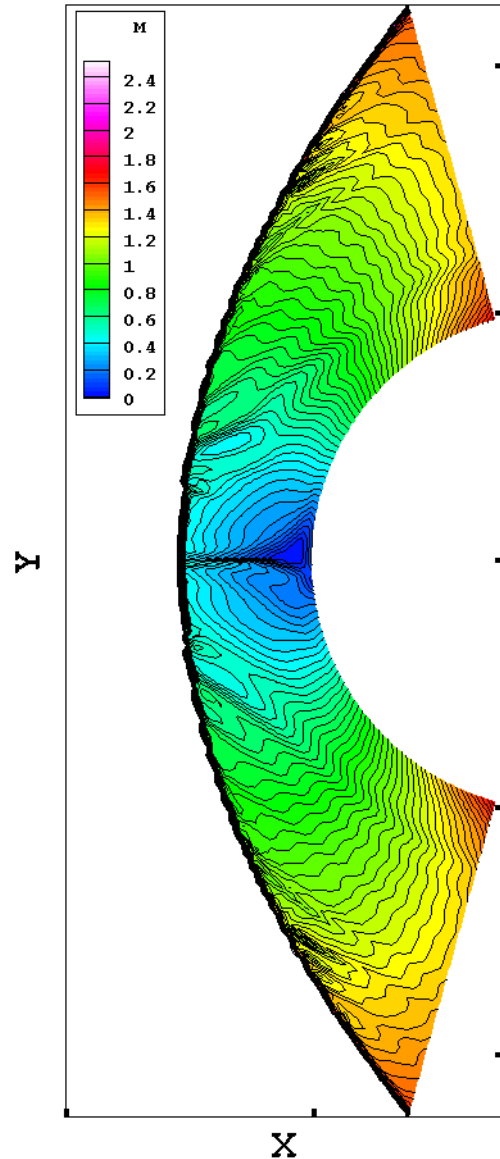


# Искусственная вязкость в схемах типа Годунова

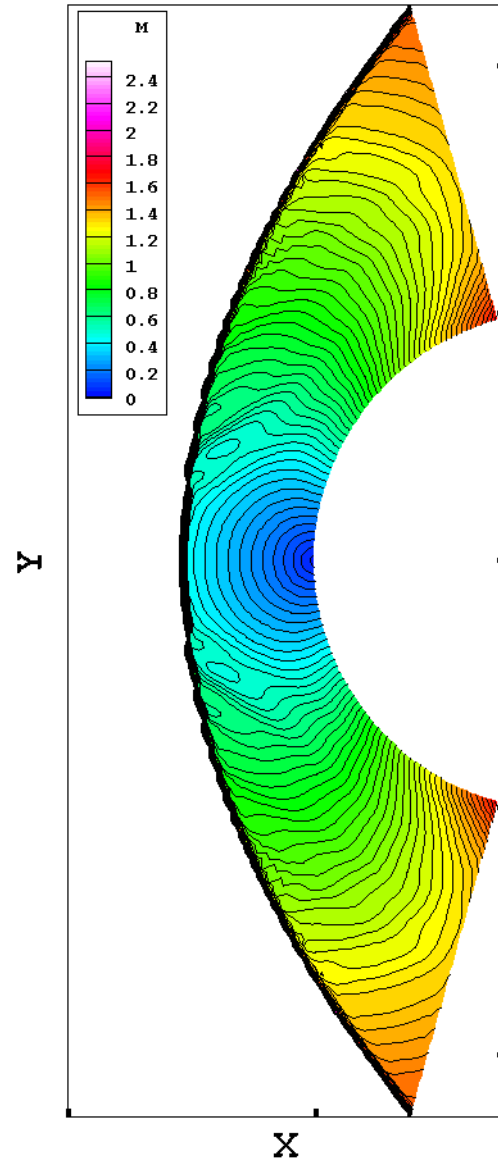
Расчет сверхзвукового обтекания цилиндра ( $M = 4$ )

HR-MC scheme:

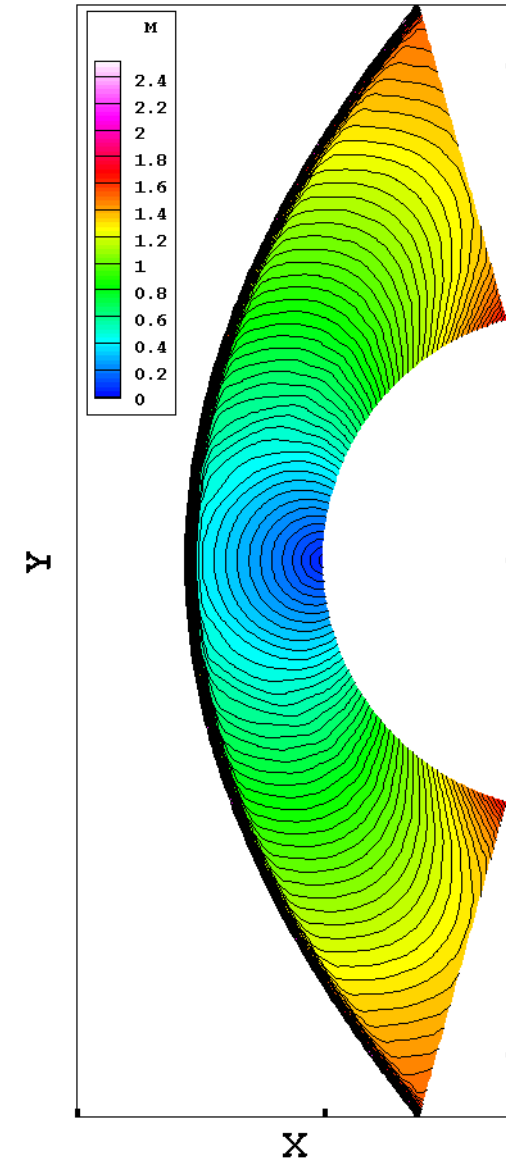
exact RS



HLL RS



exact RS + AV



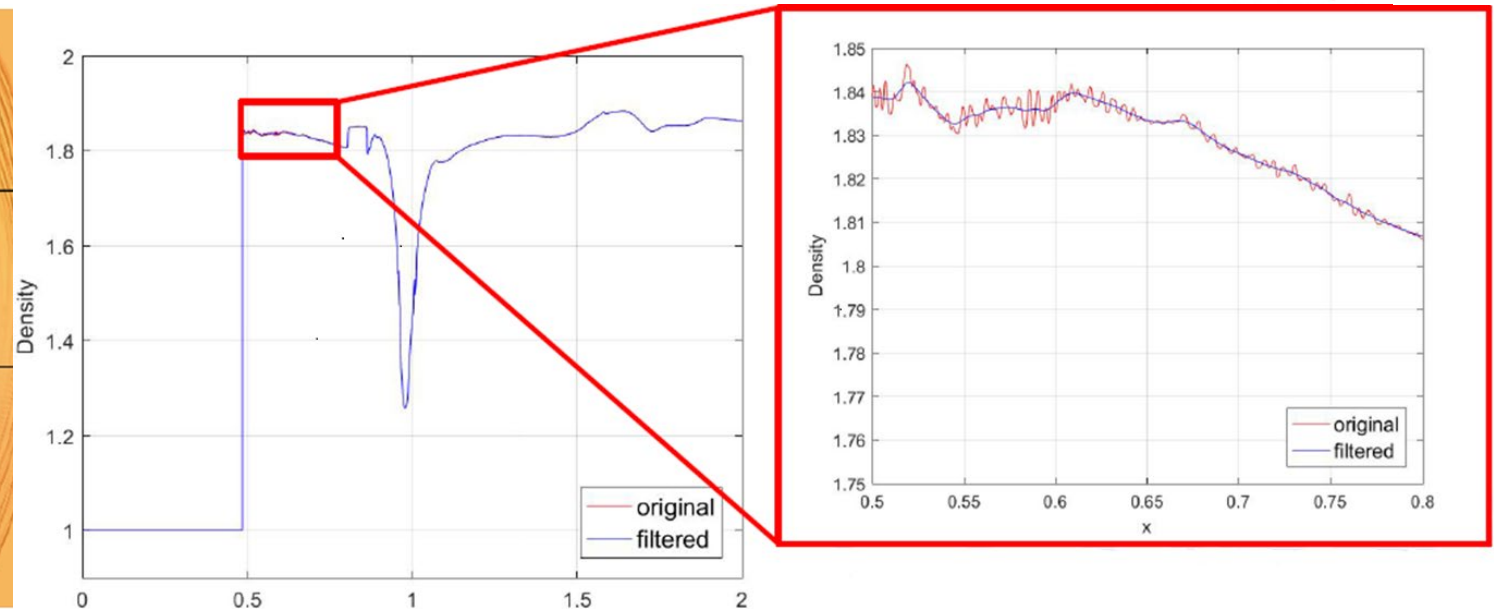
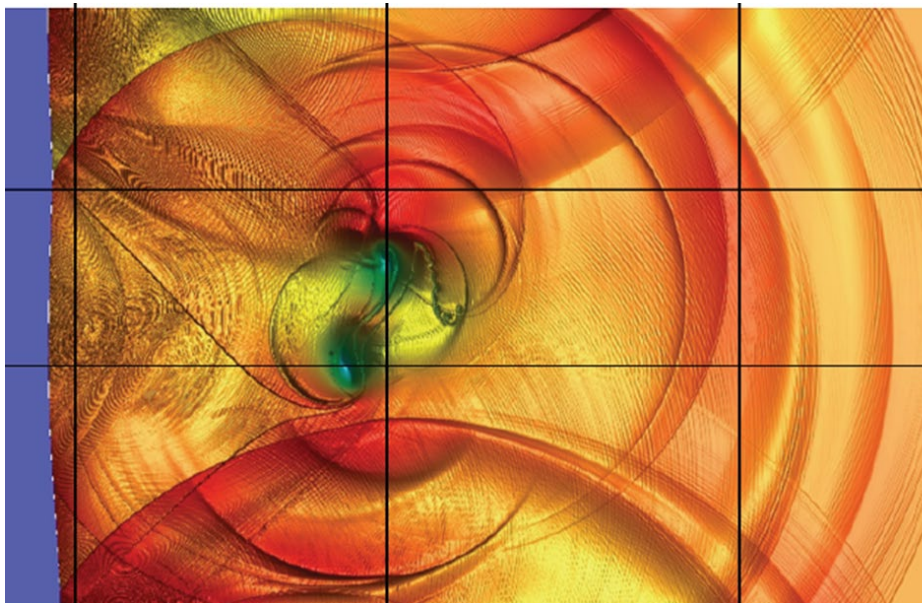
# 5th International Workshop on High-Order CFD Methods (Kissimmee, USA, 2018)

## ❑ Inviscid bow shock

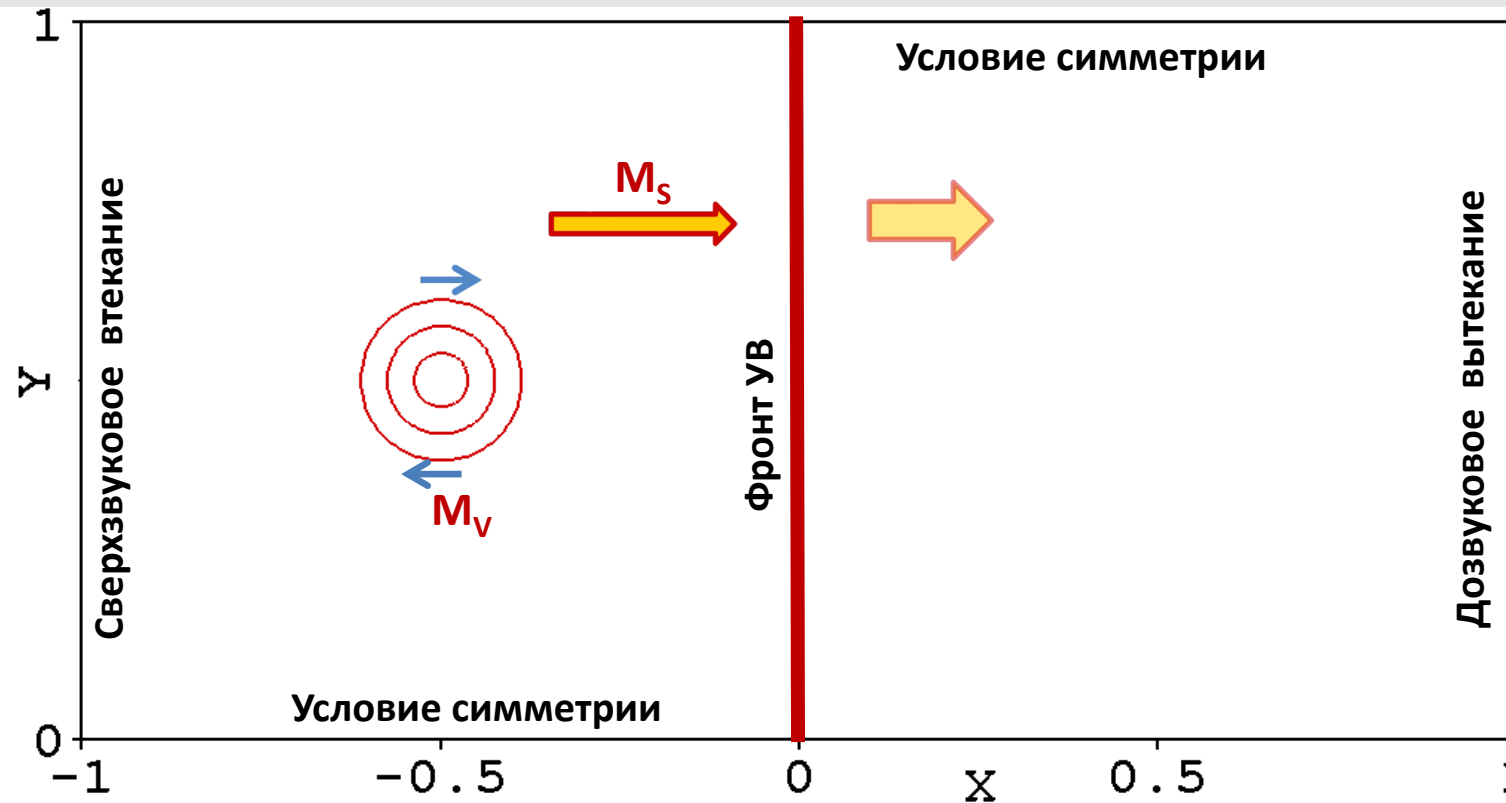
- ❖ Двумерное стационарное течение с простой ударно-волновой структурой.
- ❖ 5 групп участников представили результаты своих расчетов.
- ❖ Темп сеточной сходимости по полному давлению и энтальпии соответствует 1-2 порядку.
- ❖ Нет существенного уточнения относительно стандартного коммерческого кода.

## ❑ Inviscid strong vortex-shock wave interaction

- ❖ Двумерное нестационарное течение со сложной ударно-волновой структурой.
- ❖ 3 группы участников (из университетов США и Южной Кореи) представили результаты расчетов.
- ❖ Получено эталонное решение, относительно которого проводилось исследование на сходимость по сетке.
- ❖ Эталонное решение было повреждено численными артефактами - высокочастотными осцилляциями, которые подавлялись процедурой сглаживания.



# Тестовая задача о взаимодействии ударной волны с вихрем



## □ Постановка задачи:

- ❖ В начальный момент времени ( $t = 0$ ) задается стационарная ударная волна (УВ) с числом Маха  $M_S = u_x / c = 3$ .
- ❖ В потоке перед УВ задается изоэнтропический вихрь с профилем скорости  $V(r)$  и интенсивностью  $M_V = V_{\max} / c = 0.8$ .
- ❖ Задача решается в вязком приближении с  $Re = 10^4$ .
- ❖ Расчет задачи проводится до заданного момента времени  $t = t_1 = 1.5 / u_x$ .

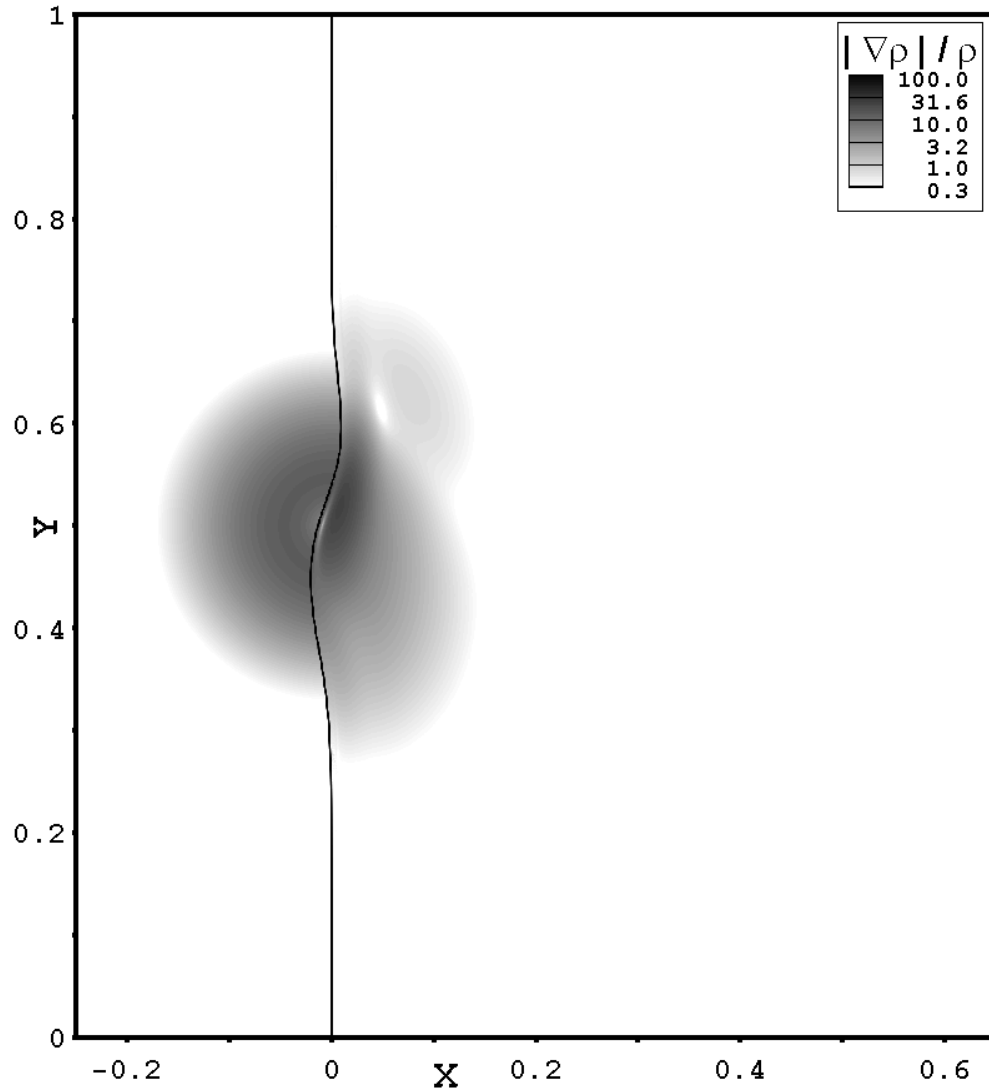
Родионов А.В. Взаимодействию ударной волны с вихрем: тестовая задача для методов сквозного счета // Матем. Моделирование, 2025

<https://caa.imamod.ru/index.php/research/reference-data/svi-problem>

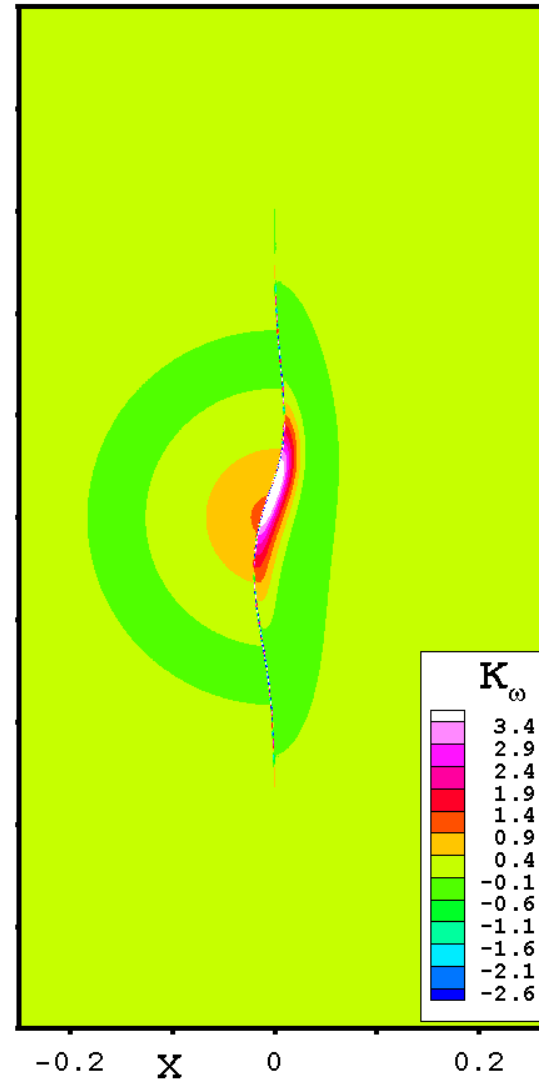
# Эталонное решение задачи на момент времени $t = t_1 / 3$

Расчет задачи на сетке с  $h = 1/7200$  по схеме HR-MC+

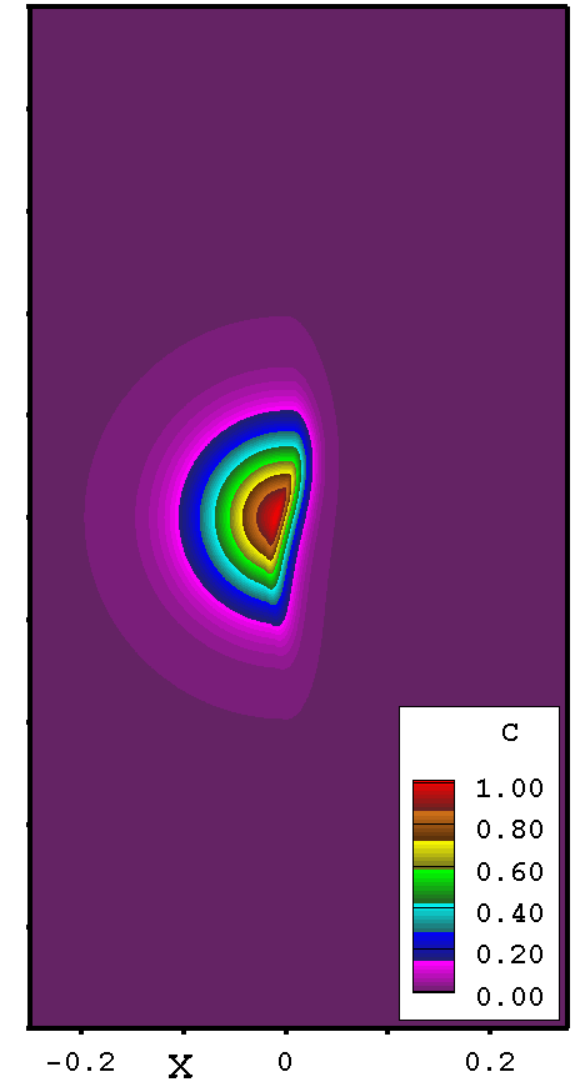
Численная шпирен-визуализация



Завихренность потока



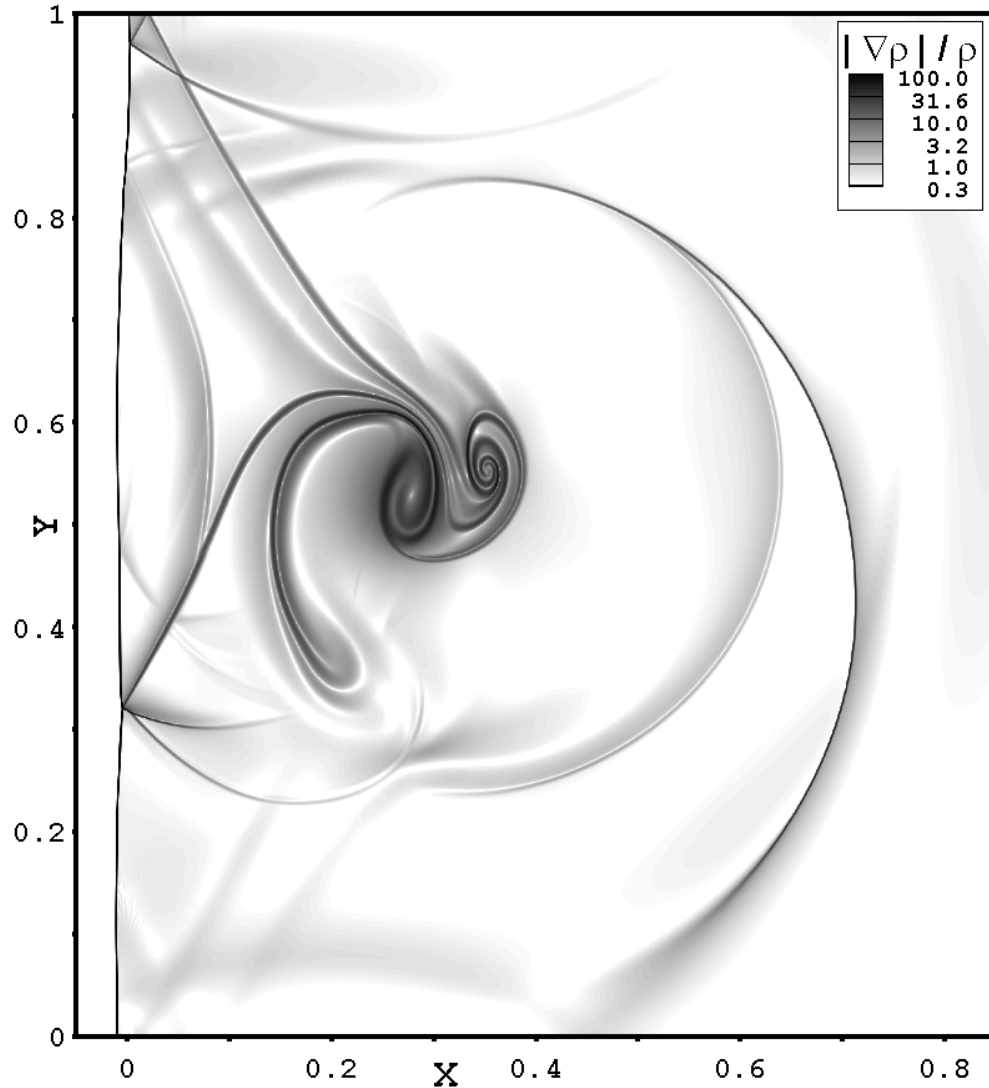
Трансформация вихря



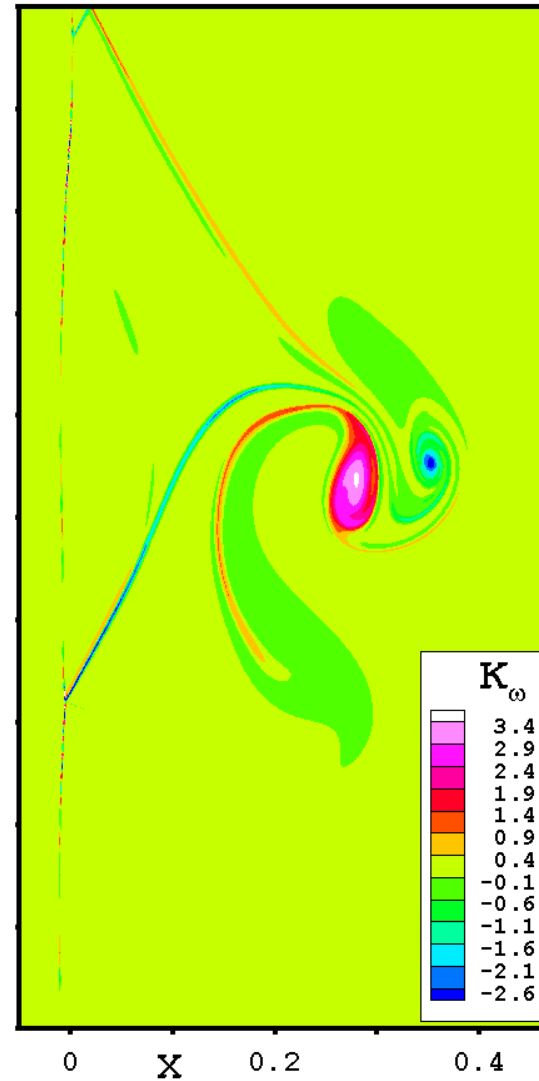
# Эталонное решение задачи на момент времени $t = t_1$

Расчет задачи на сетке с  $h = 1/7200$  по схеме HR-MC+

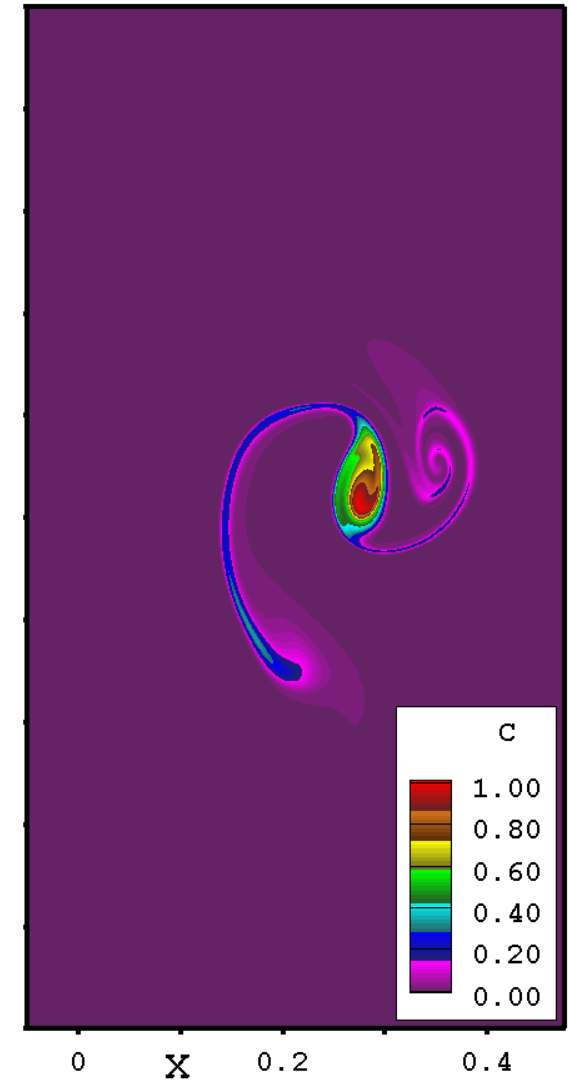
Численная шпирен-визуализация



Завихренность потока

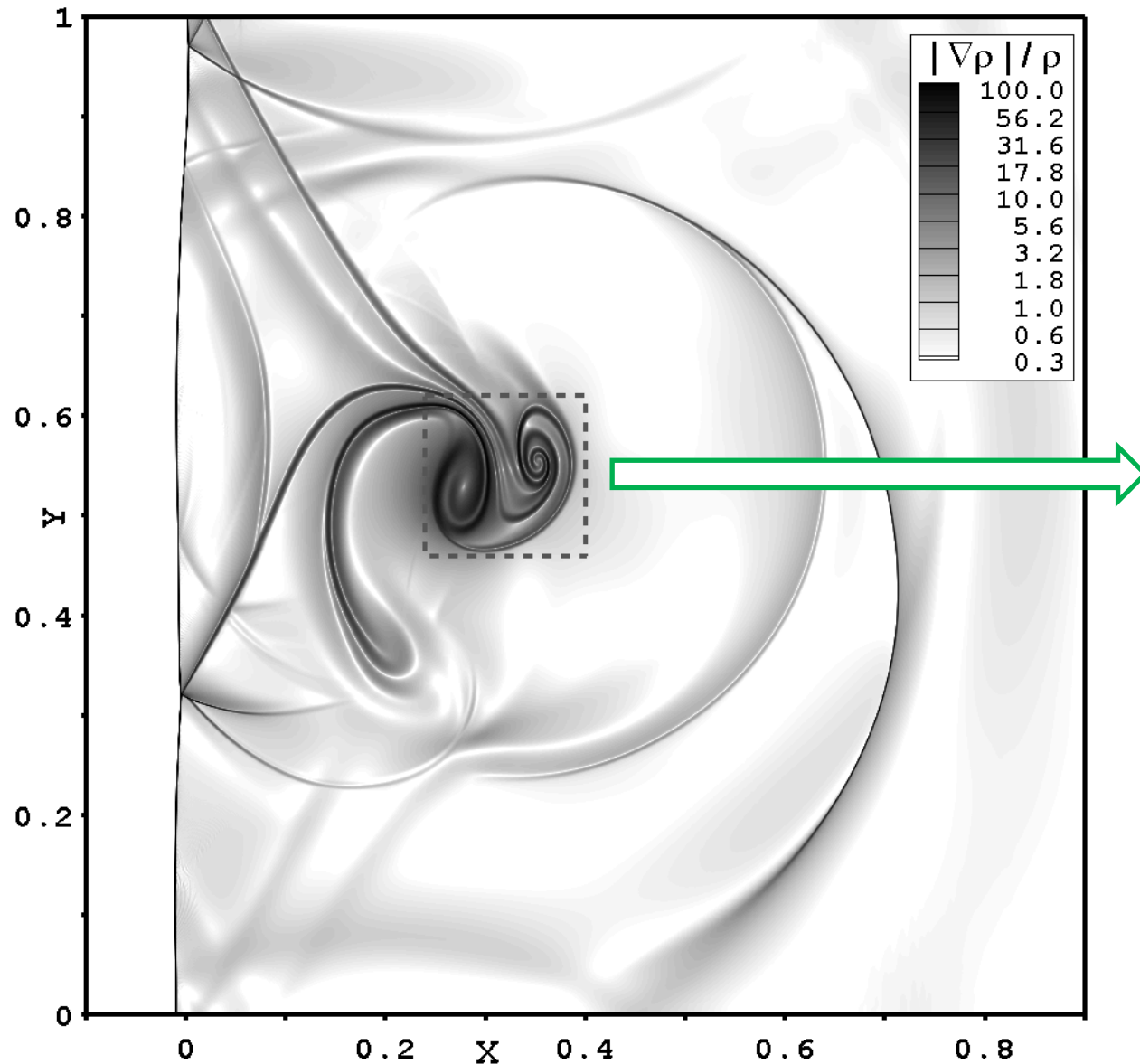


Трансформация вихря

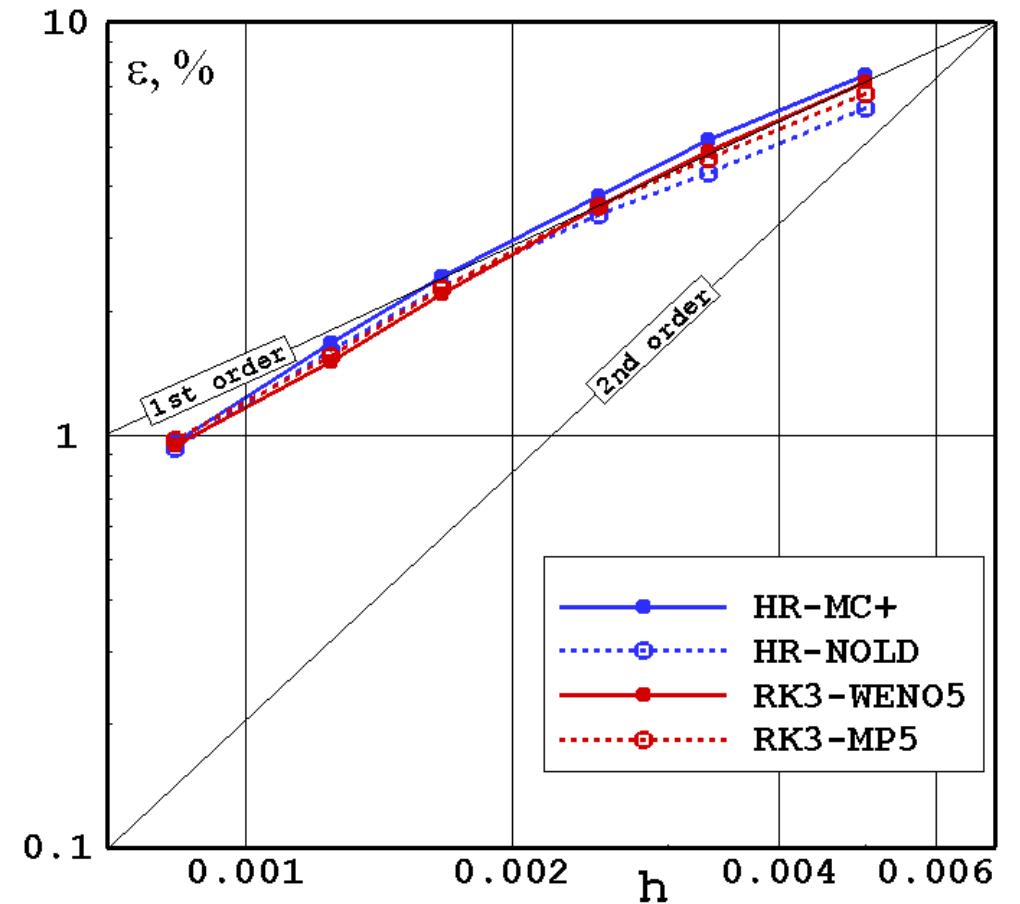


# Интегральная сеточная сходимость решения

Использование эталонного решения для оценки точности методов



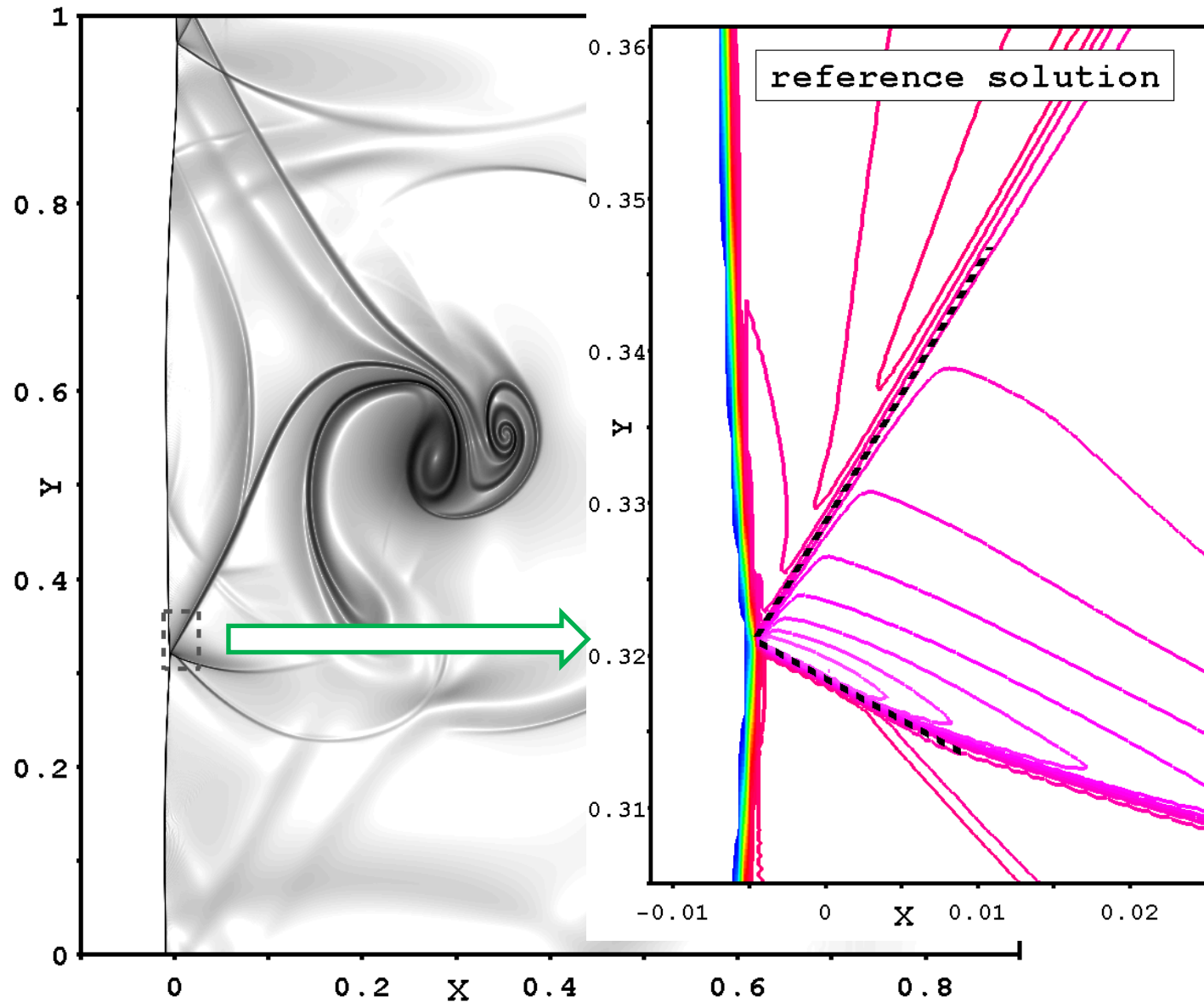
(расчеты с добавлением искусственной вязкости)



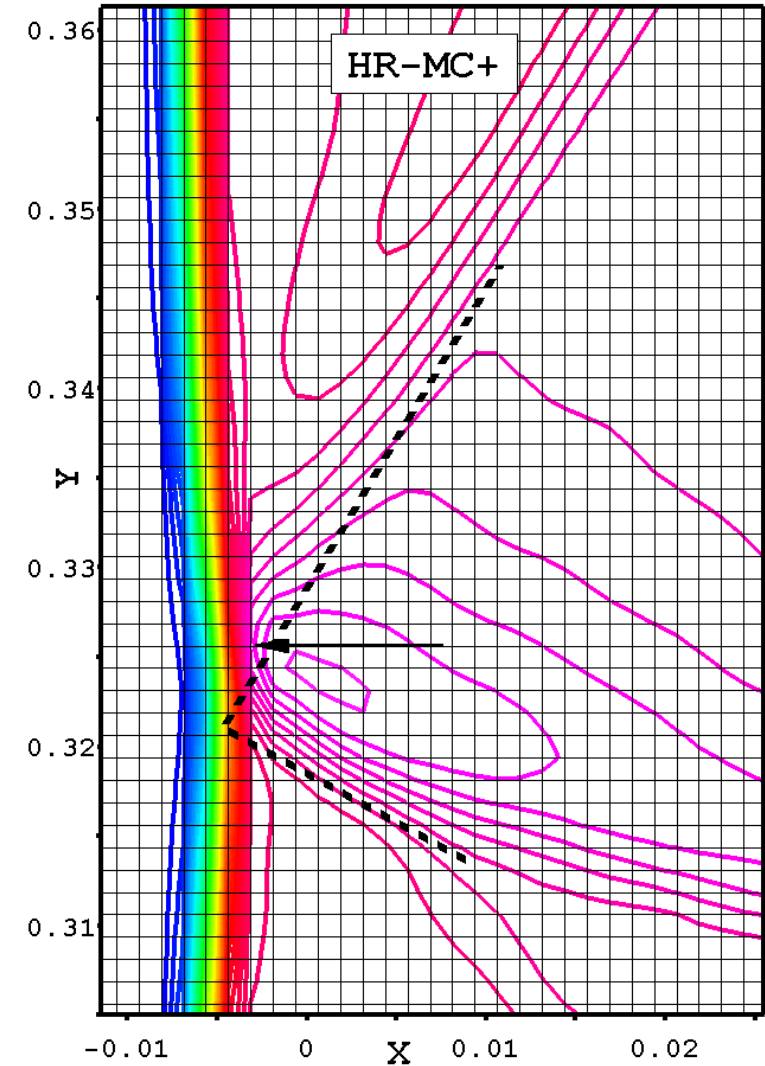
Зависимость погрешности расчета плотности от сеточного разрешения

# Смещение тройной точки

$h = 1/7200$  (эталонное решение)



$h = 1/800$

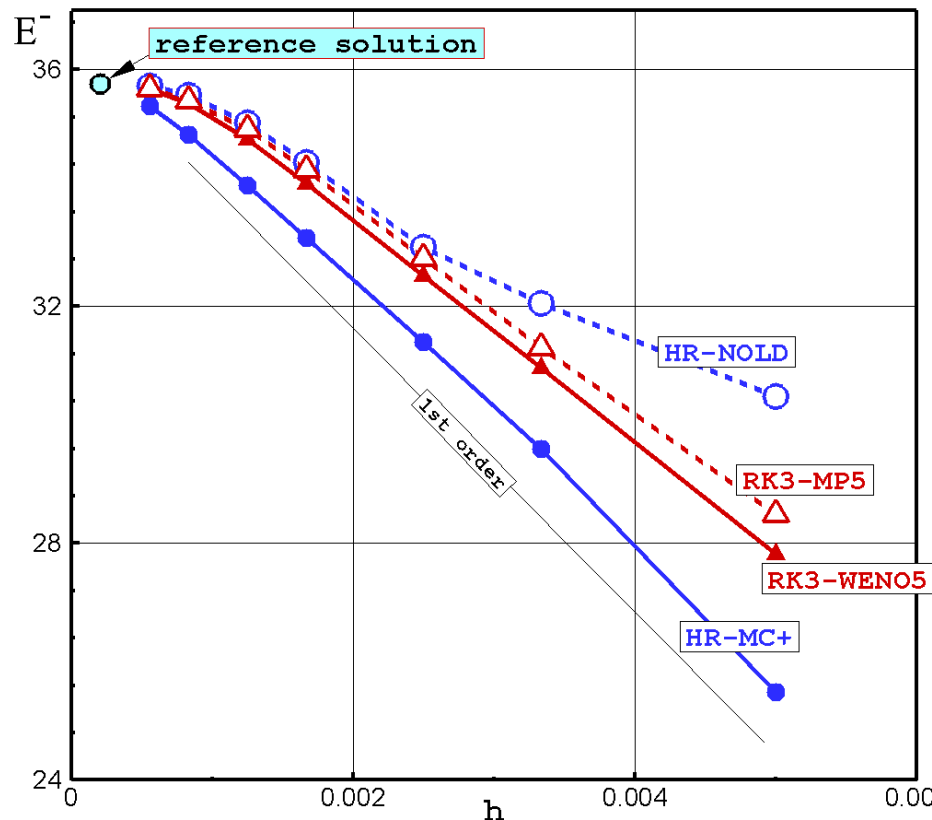


# Сходимость по интегральным параметрам

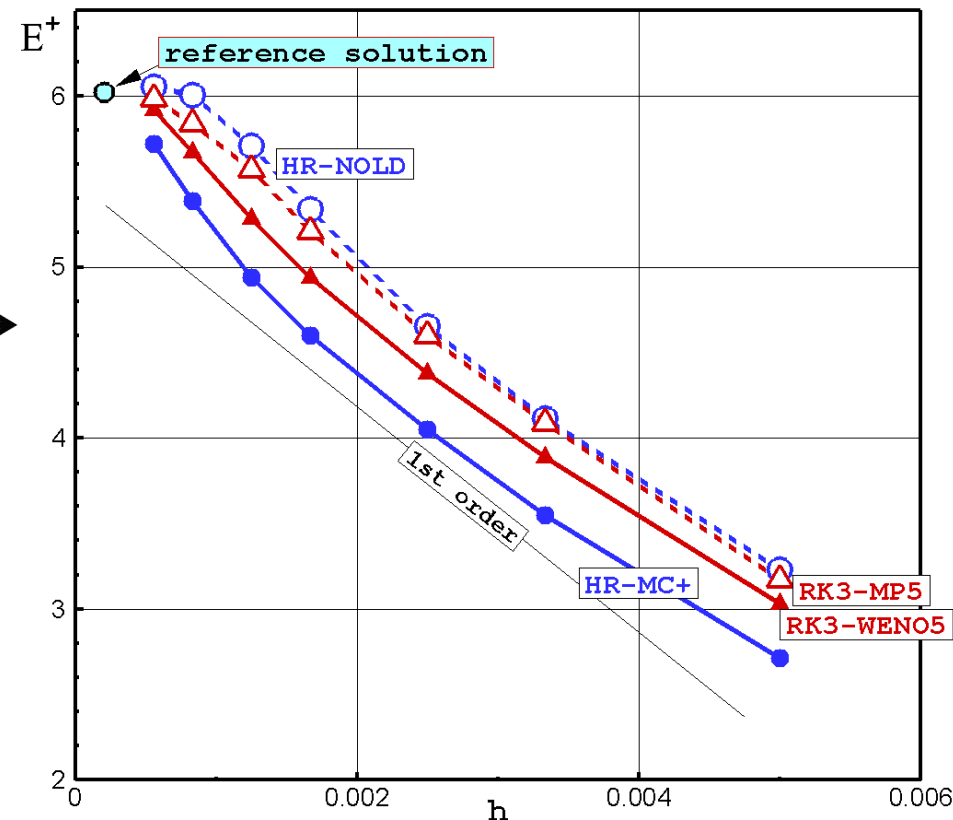
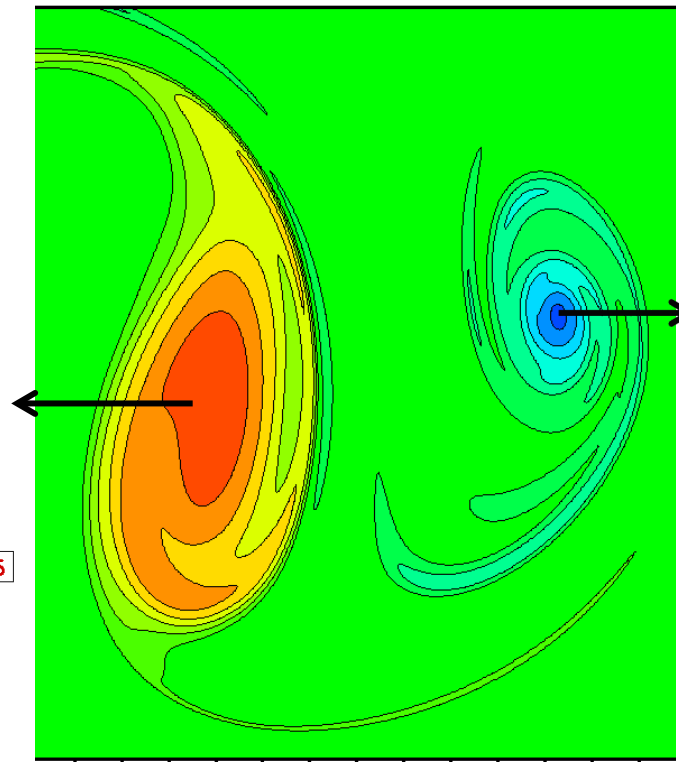
Интегральная величина завихренности (enstrophy)

$$E = \int_S \omega^2 dx dy = E^- + E^+, \quad \text{где} \quad E^- = \int_S \left( \frac{\omega - |\omega|}{2} \right)^2 dx dy, \quad E^+ = \int_S \left( \frac{\omega + |\omega|}{2} \right)^2 dx dy$$

основной вихрь



дополнительный вихрь



## Источники ошибок в многомерных задачах

В *многомерных задачах* исследование точности решения за ударной волной осложняется двумя дополнительными проблемами.

I. Сетка в многомерном случае имеет больше степеней свободы, чем это было в одномерном случае (ячейки различаются не только размером, но также формой и ориентацией относительно потока).

II. В многомерных задачах взаимодействие ударных волн приводит к рождению контактных разрывов, которые в рамках уравнений Эйлера (невязкое приближение) являются неустойчивыми образованиями.

В таких условиях нельзя получить «эталонное» решение задачи и проводить исследования схем на сходимость по сетке.

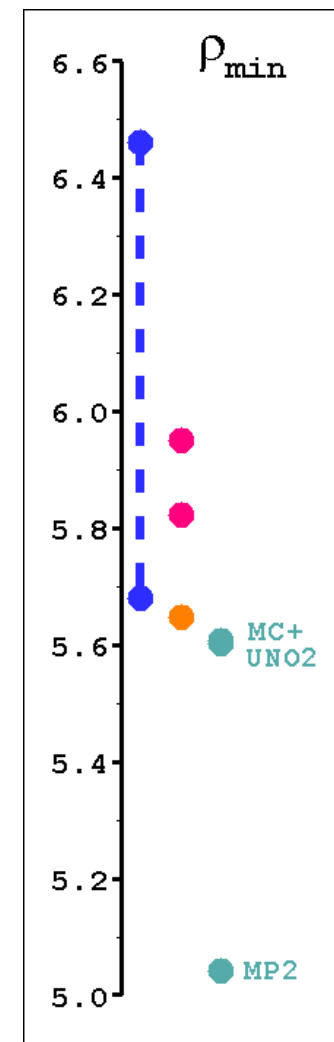
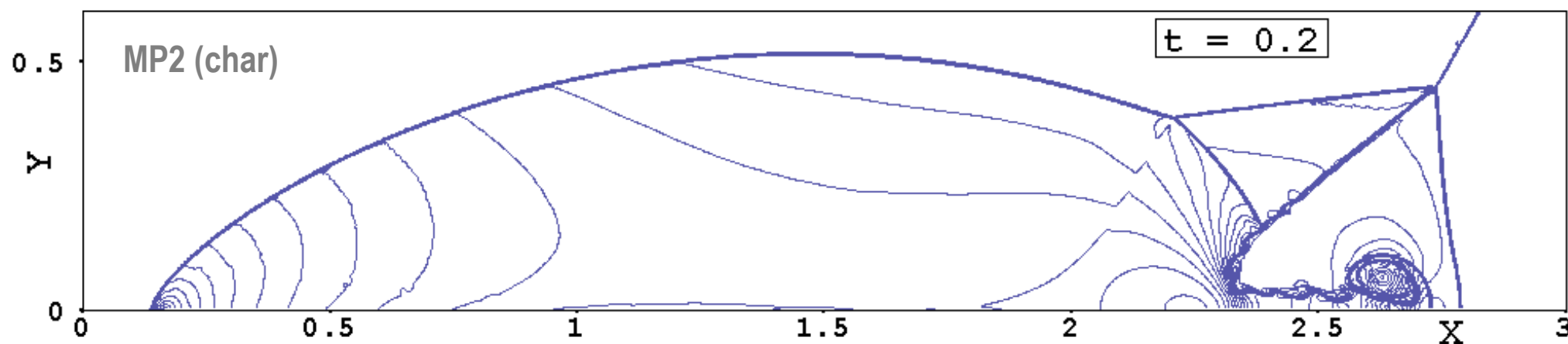
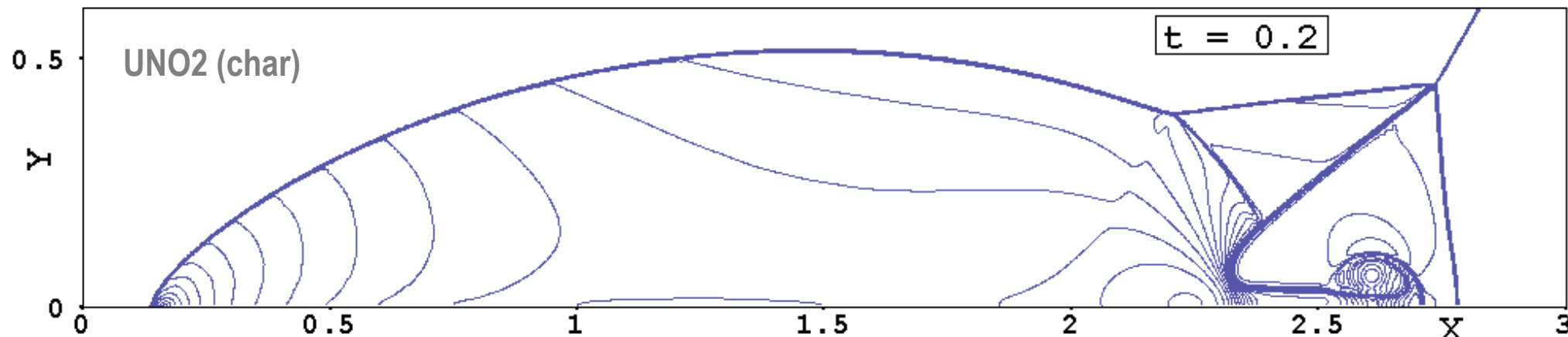
Возможны ли другие критерии качества тестируемых схем?

- Более раннее зарождение неустойчивости контактных разрывов в процессе измельчения сетки.

# Тестовая задача о двойном маховском отражении

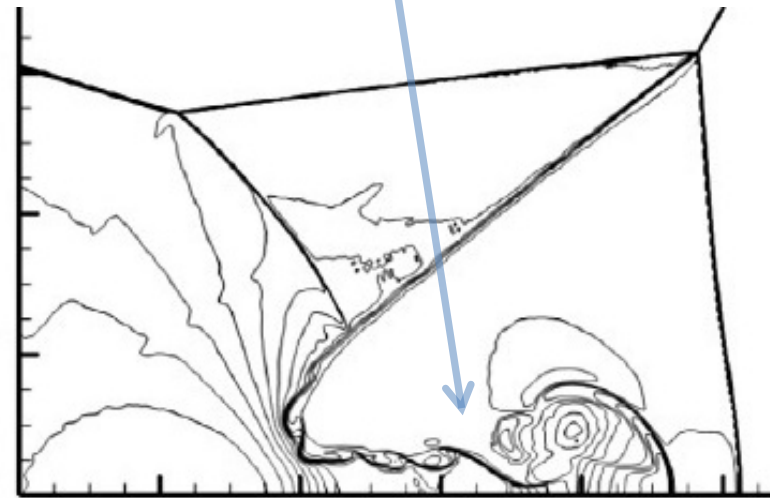
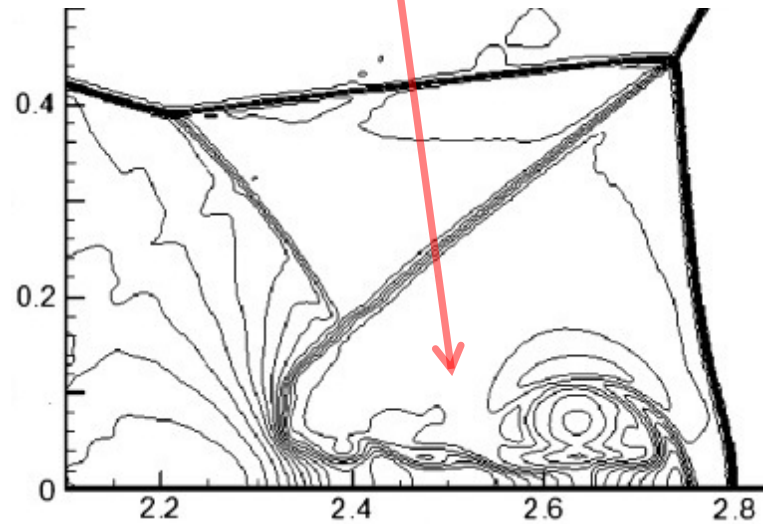
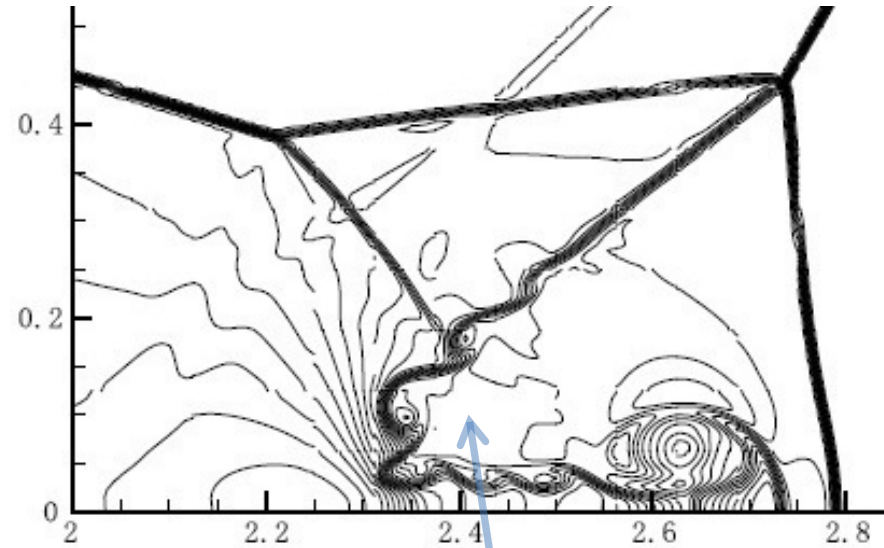
Результаты расчета задачи методом HR с решателем задачи Римана HLL  
на сетке с  $\Delta x = \Delta y = 1/480$

Изолинии плотности



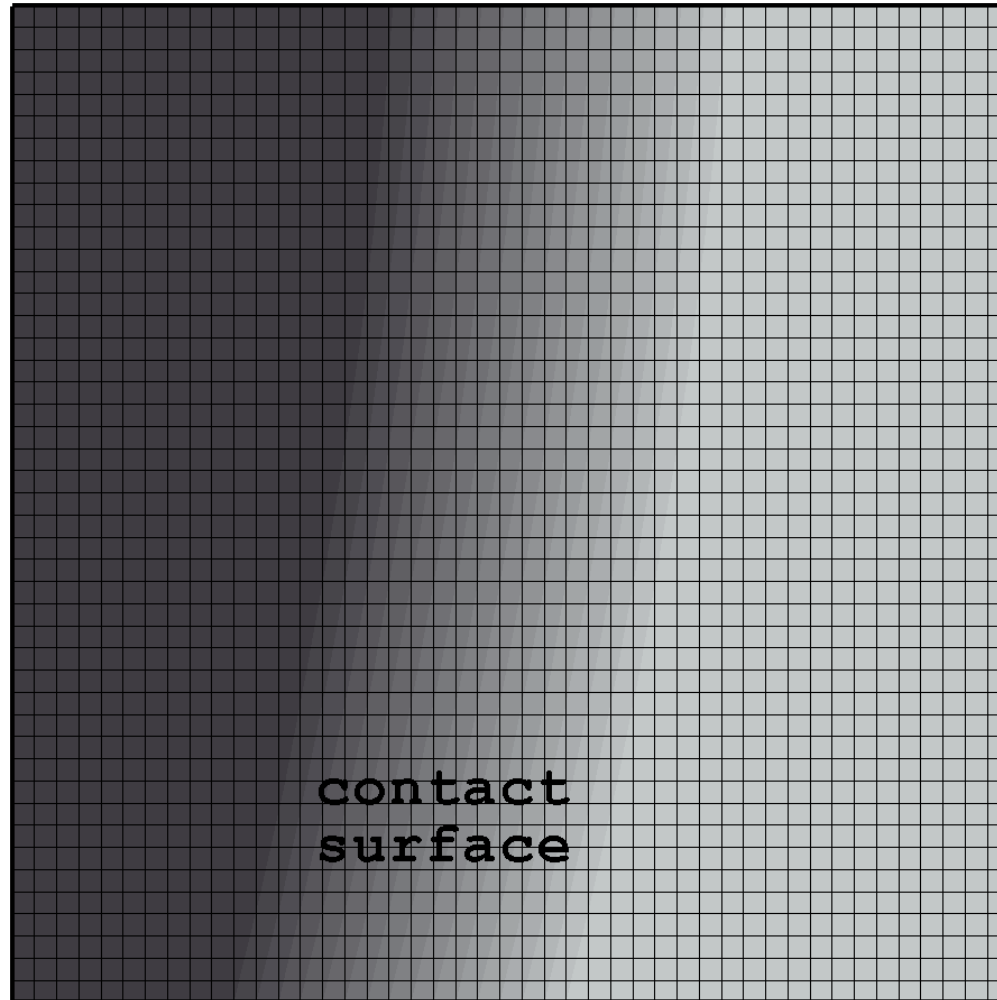
## Тестовая задача о двойном маховском отражении

Примеры расчетов задачи из публикаций в *Journal of Computational Physics* в 2016 году

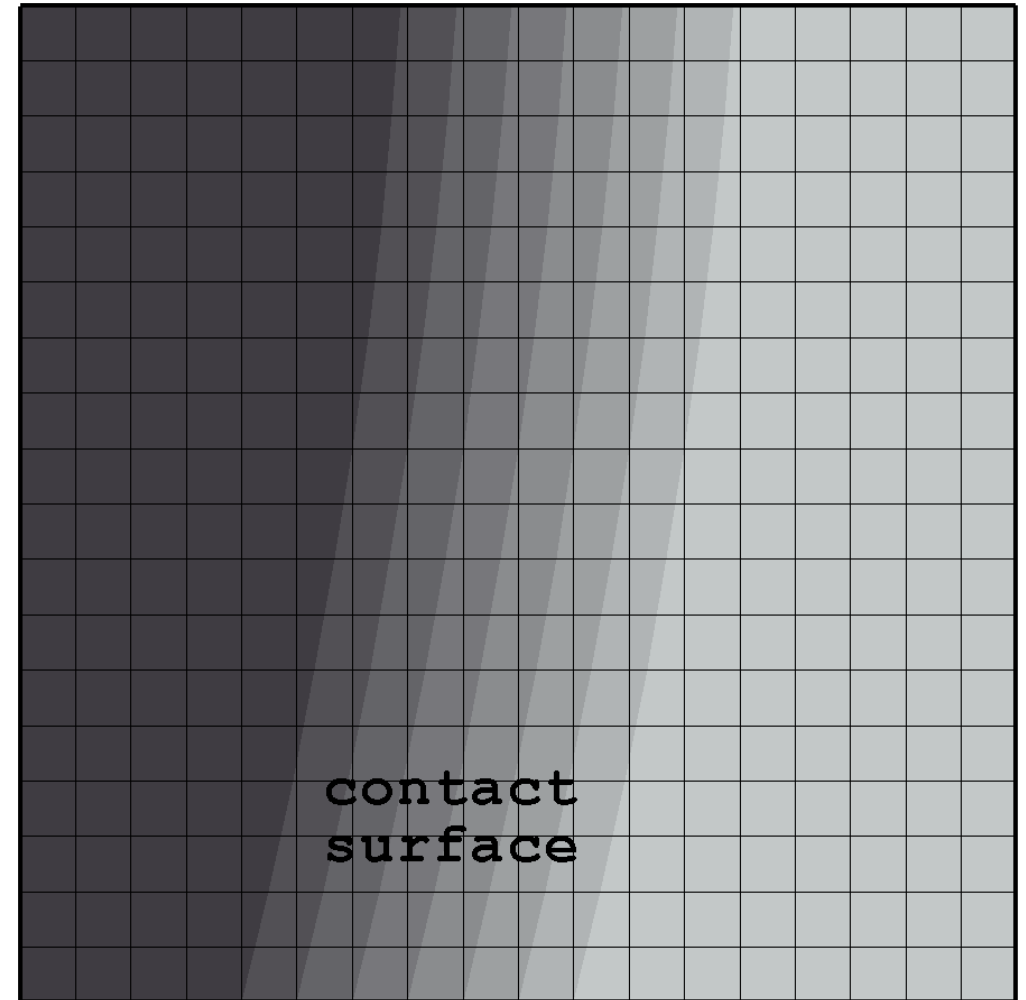


## Размывание контактного разрыва на сетке

Более диссипативный метод  
на подробной сетке



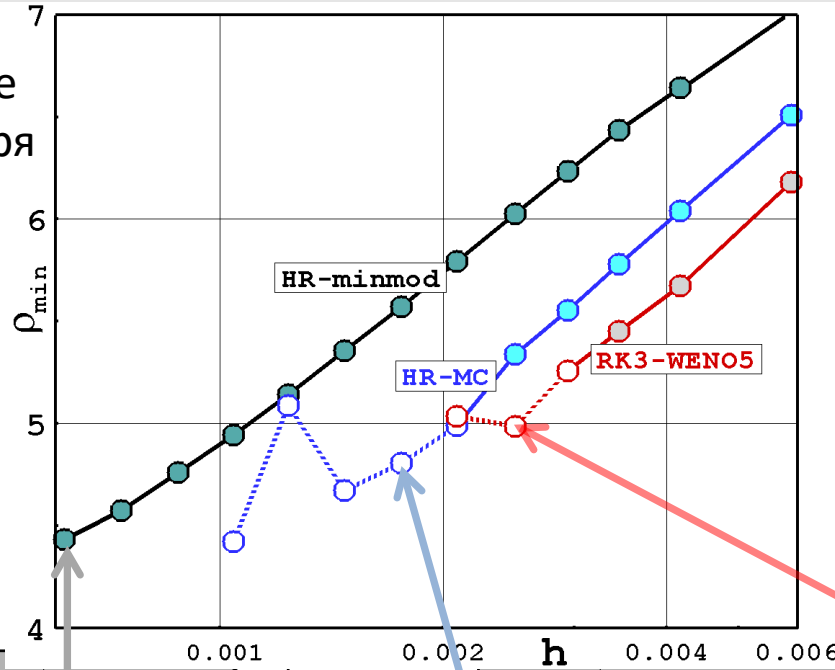
Менее диссипативный метод  
на грубой сетке



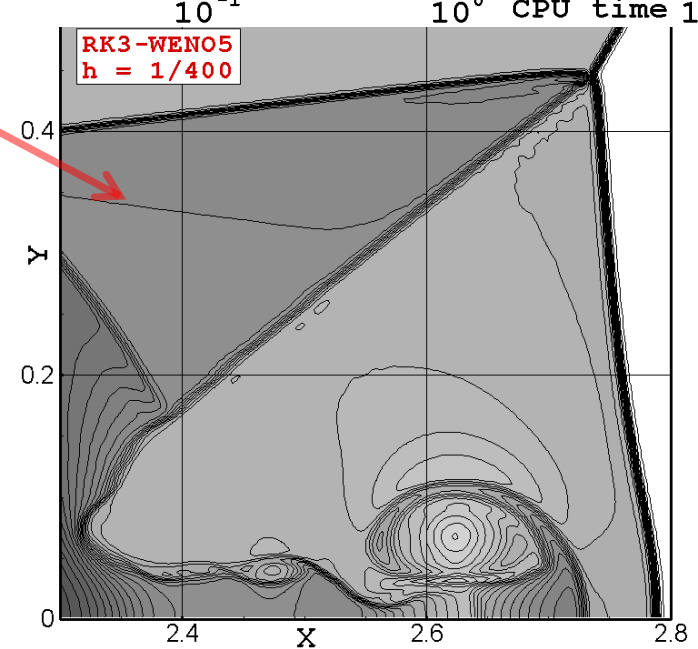
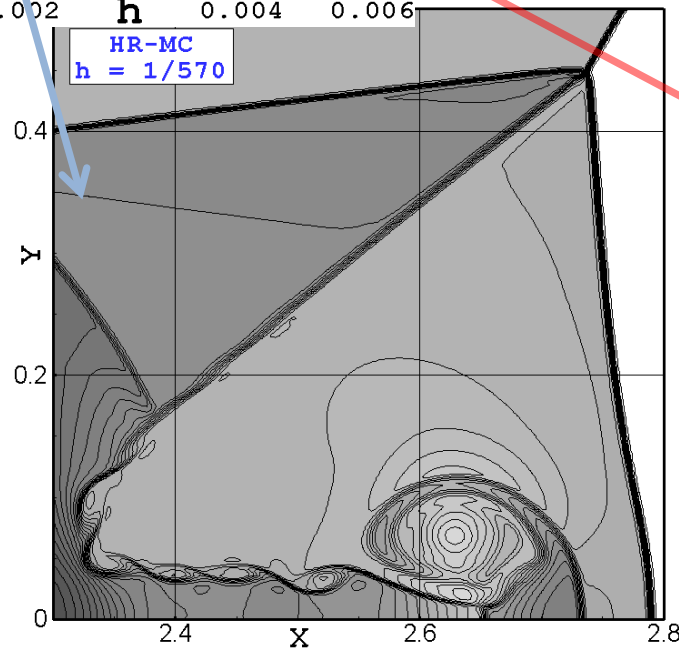
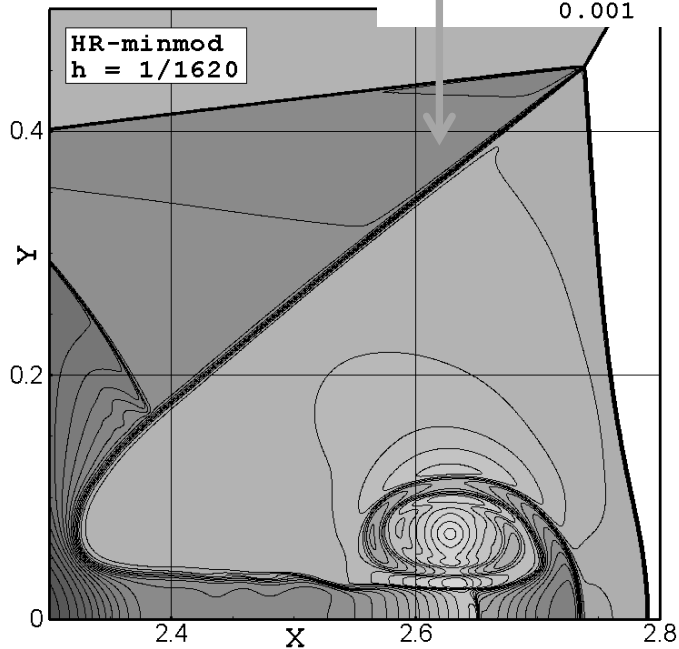
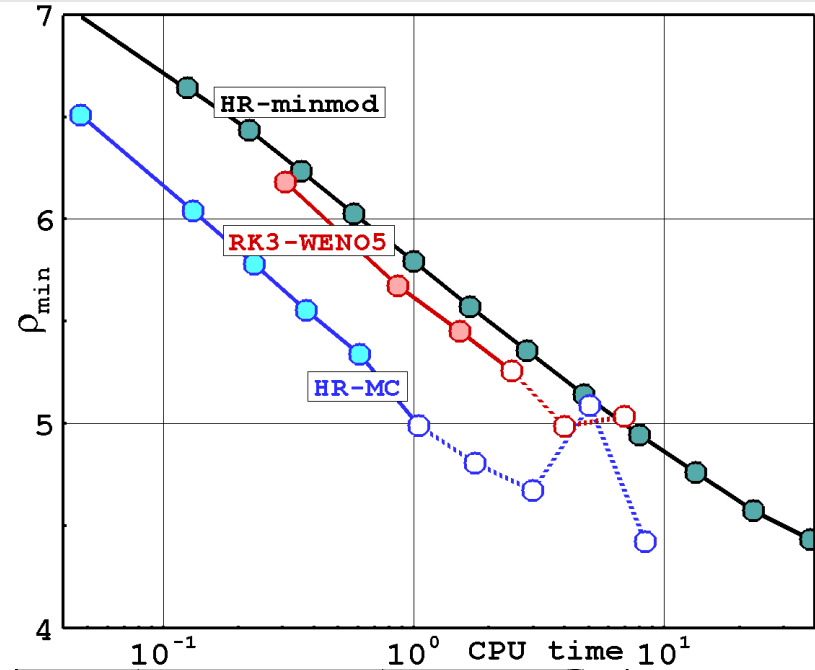
# Тестовая задача о двойном маховском отражении

минимальное значение  
плотности в центре вихря

в зависимости от  
сеточного разрешения



в зависимости от  
времени счета



# Bizarrium test problem (странная, причудливая тестовая задача)

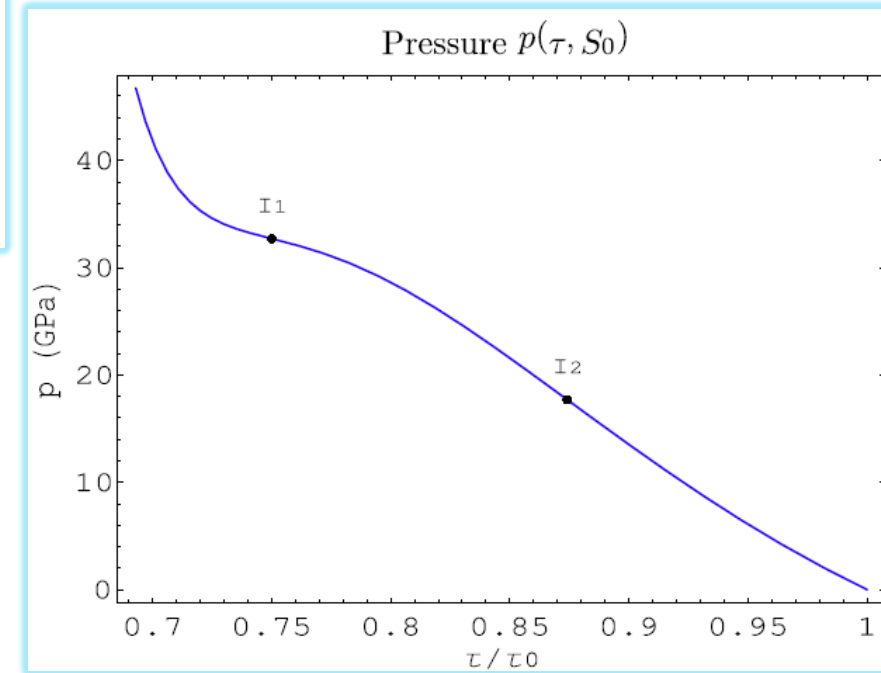
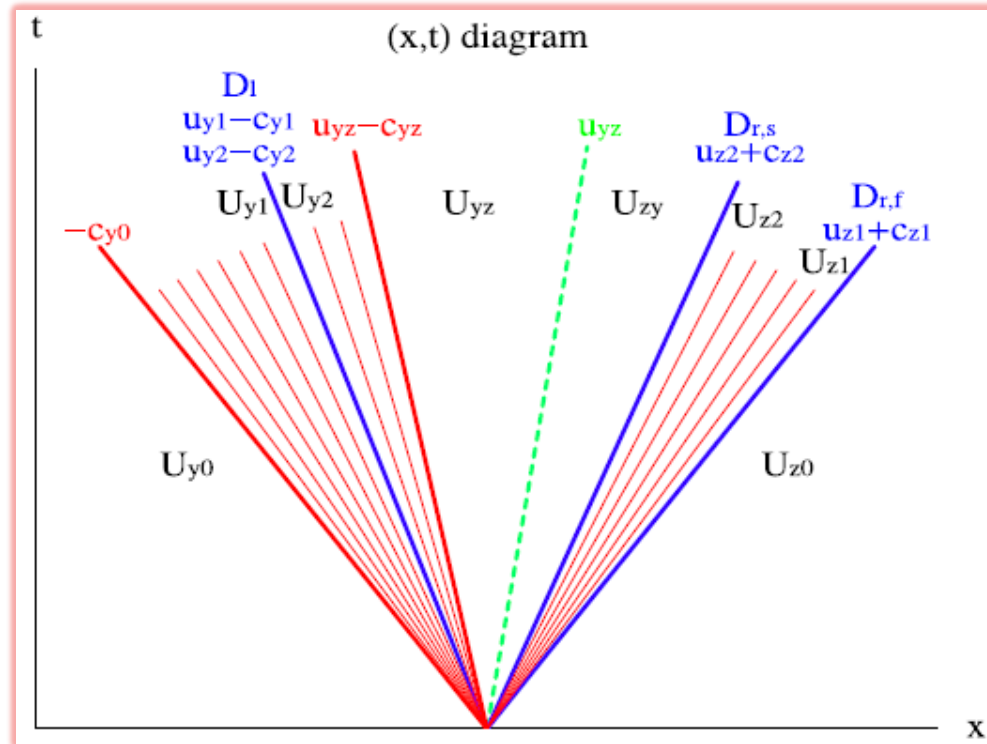
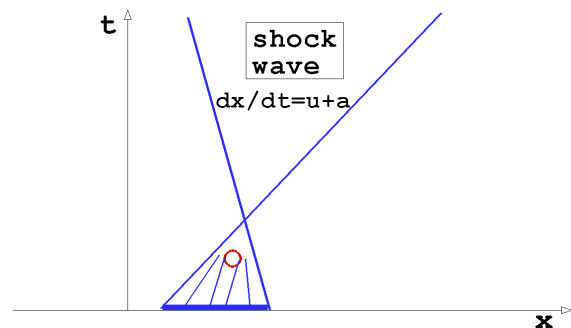
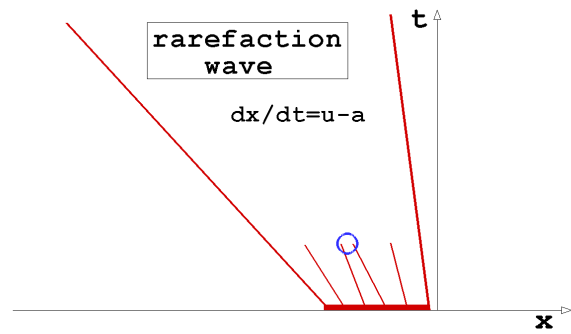
Heuzé O., Jaouen S., Jourden H. Dissipative issue of high-order shock capturing schemes with non-convex equations of state // J. Comp. Phys., 2009



WIKIPEDIA  
The Free Encyclopedia

## Mie-Grüneisen equation of state

The **Mie-Grüneisen equation of state** is an equation of state that relates the pressure and volume of a solid at a given temperature. It is used to determine the pressure in a shock-compressed solid.



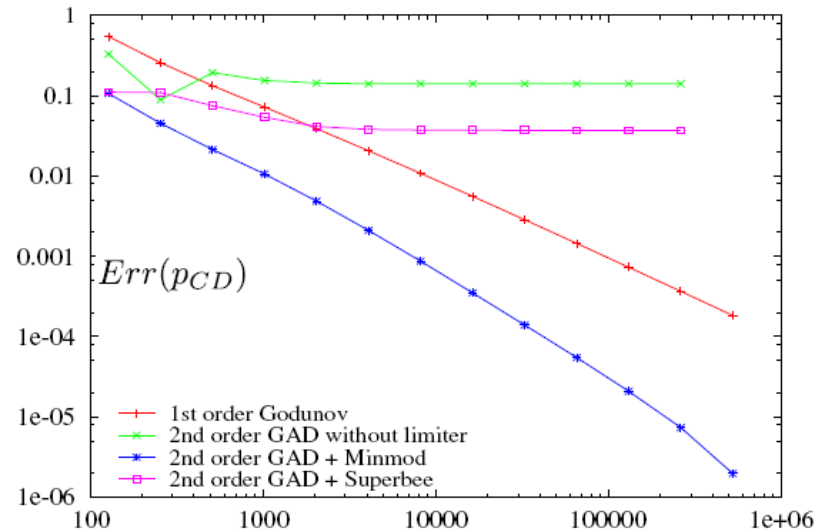
Начальные данные (t = 0):

$$U_l = \begin{cases} \tau_l = 0.7 \cdot 10^{-4}, \\ u_l = 0, \\ p_l = 10^{11}, \end{cases} \quad \text{and} \quad U_r = \begin{cases} \tau_r = 10^{-4}, \\ u_r = 250, \\ p_r = 0. \end{cases}$$

# Bizarrium test problem

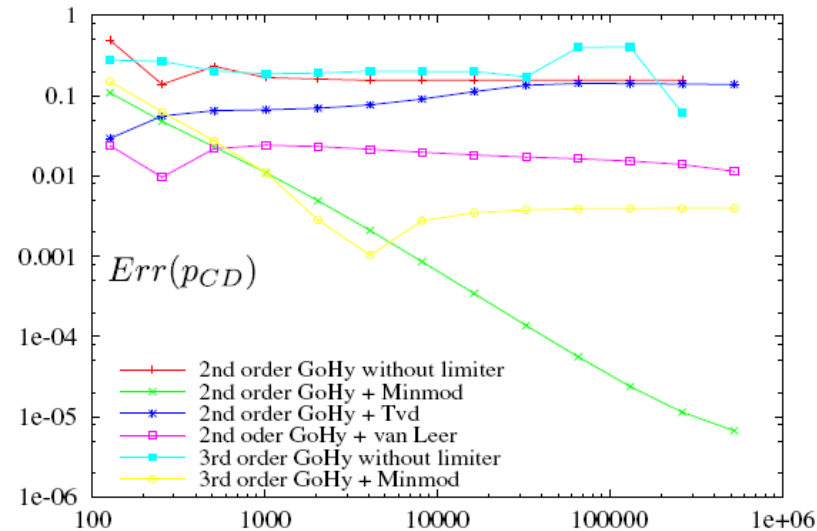
GAD = Godunov Anti-Diffuse

1<sup>st</sup>-order and GAD schemes



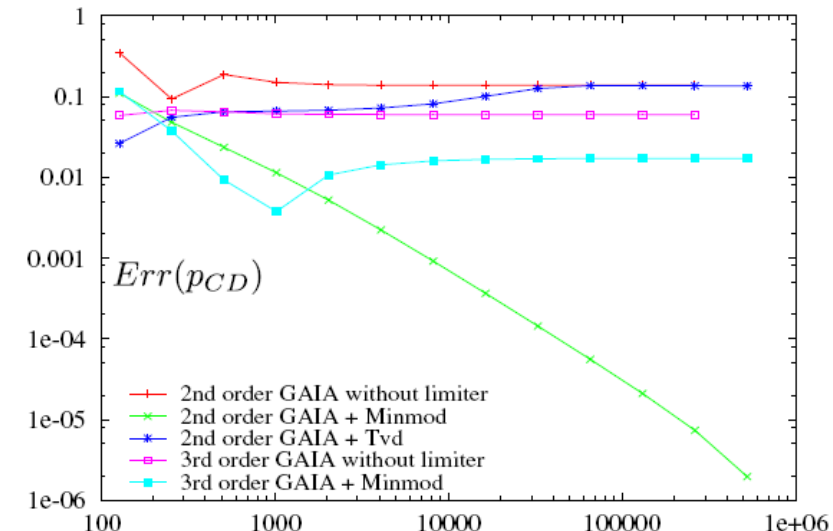
GoHy = Godunov-Hybride

GoHy scheme



GAIA = Godunov Acoustic Invariant Advection

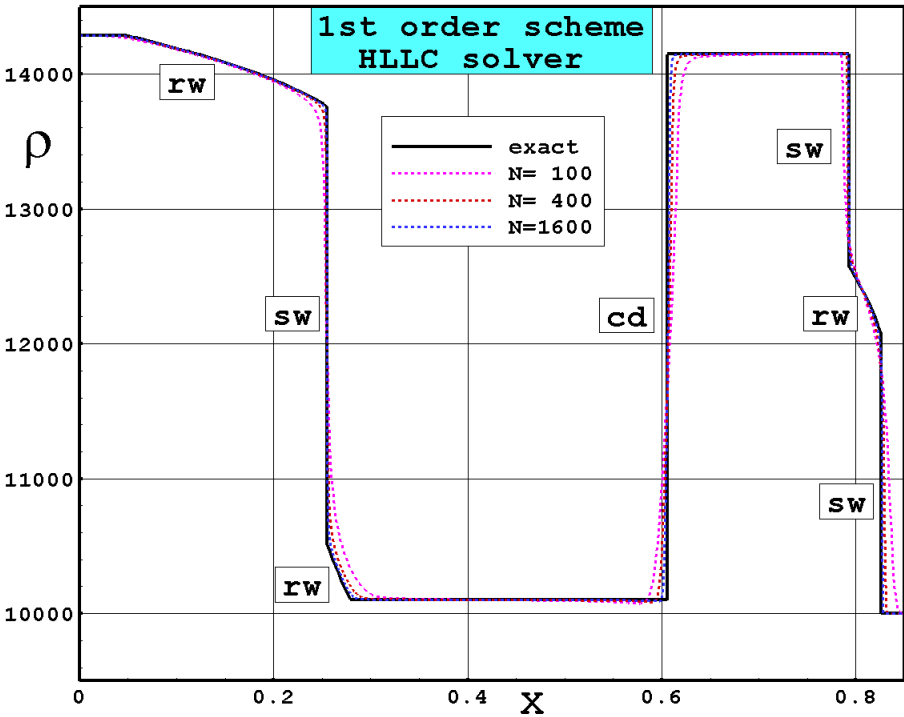
GAIA scheme



- Concerning Godunov-type schemes, a noticeable fact is that the first-order Lagrangian scheme based on the acoustic Riemann solver converges without any ad hoc numerical coefficient.
- On the other hand, the three very different second-order extensions presented do work using the Minmod limiter. With the other basic and standard limiters presented, the physical solution is not captured.
- Moreover, third-order extensions (and higher-order ones also) fail with all the limiters considered.

❑ **Heuzé O., Jaouen S., Jourden H.** Dissipative issue of high-order shock capturing schemes with non-convex equations of state // J. Comp. Phys., **2009**

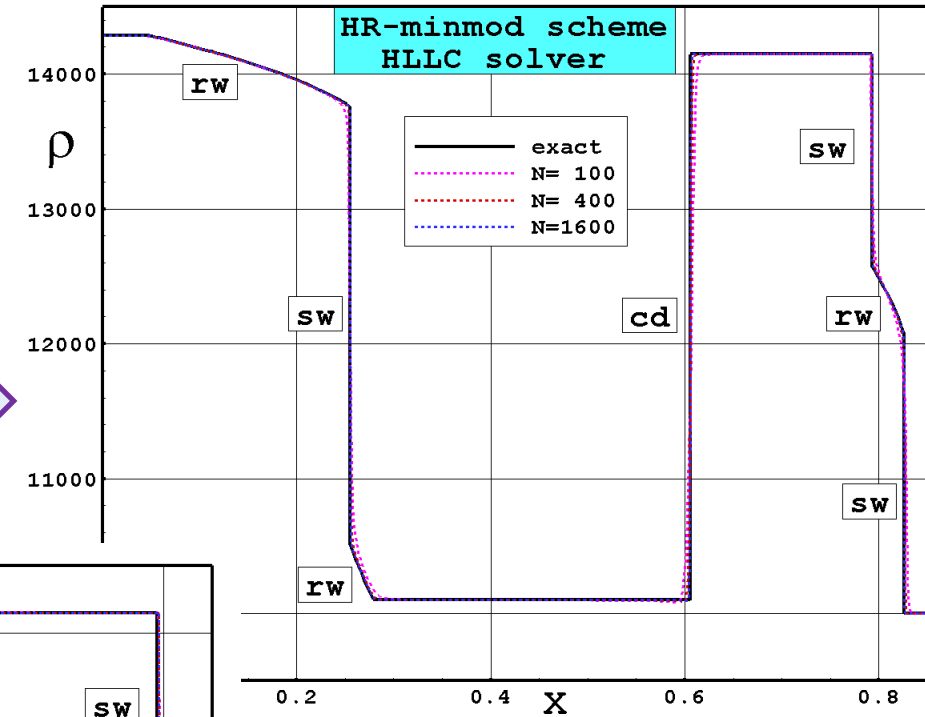
# Bizarrium test problem



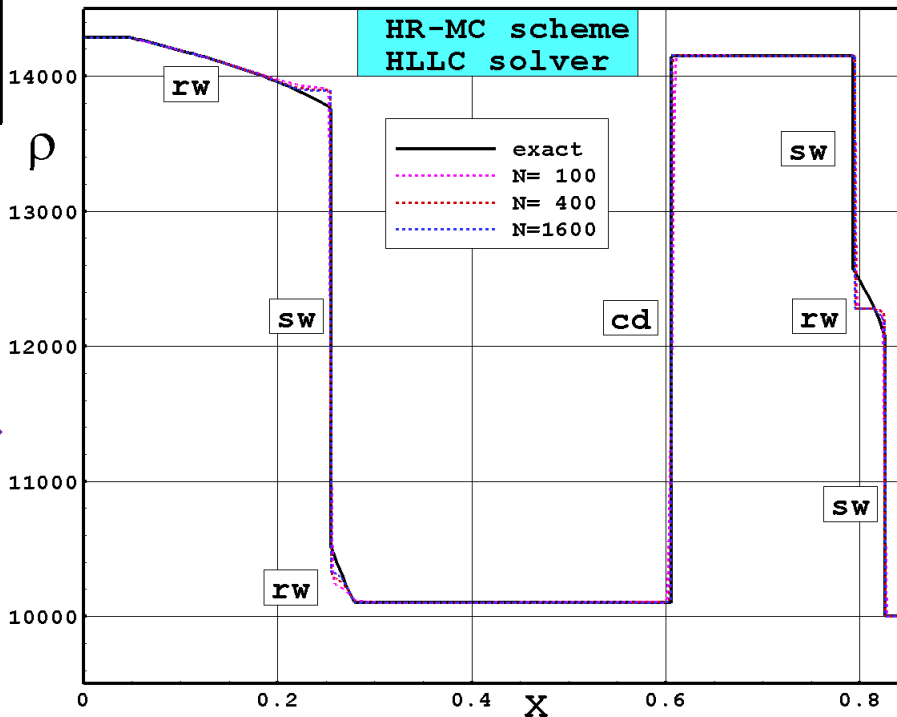
Данные расчета задачи на  
эйлеровой (неподвижной) сетке

← схема первого порядка точности

→ схема второго порядка точности  
с ограничителем minmod



→ схема второго порядка точности  
с ограничителем MC



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ