Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике

II. Схемы Колгана и ван Лира: почти детективная история

Родионов Александр Владимирович

Первые схемы сквозного счета с порядком аппроксимации выше первого

Метод Неймана-Рихтмайера с добавлением искусственной вязкости

1950 ***Von Neumann, Richtmyer.*** A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys.

Гибридые схемы (из книги: *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений, 2001*)

1962 ***Федоренко*** Применение разностных схем высокой точности для численного решения … // ЖВМиМФ

1965 ***Гольдин, Калиткин, Шишова*** Нелинейные разностные схемы для гиперболических … // ЖВМиМФ

1972 ***Harten, Zwas*** Self-adjusting hybrid schemes for shock computations // J. Comput. Phys.

1972 ***Колган*** Применение принципа минимальных значений производных к … // Ученые зап. ЦАГИ

1972 ***Kutler, Lomax, Warming*** Computation of space shuttle flowfields using noncentered … // AIAA Paper

1973-1979 ***van Leer*** Towards the ultimate conservative difference scheme. I-V … // Lect. Notes Phys.; J. Comp. Phys.

1973-1976 ***Boris, Book*** Flux-corrected transport. I-III … // J. Comput. Phys.

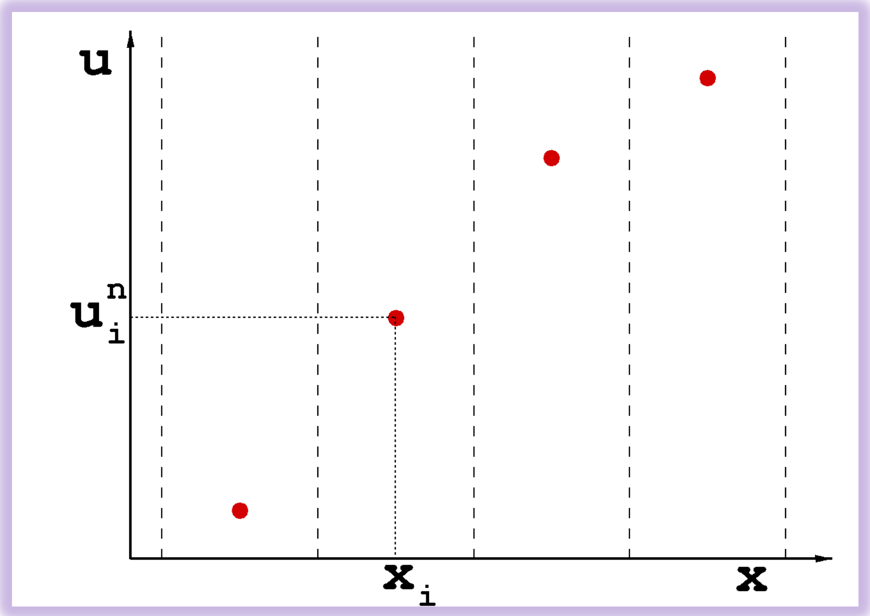
1976 ***Beam, Warming*** Upwind second-order difference schemes and applications in aerodynamic flows // AIAA J.

Схема Колгана

- ***Колган В.П.*** Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ, **1972**

I. Отказ от постоянного распределения параметров внутри ячейки в пользу <u>линейного распределения параметров</u>

$$u^n(x) = u_i^n$$



$$u^n(x) = u_i^n + \Delta u_i^n \frac{(x - x_i)}{\Delta x}$$

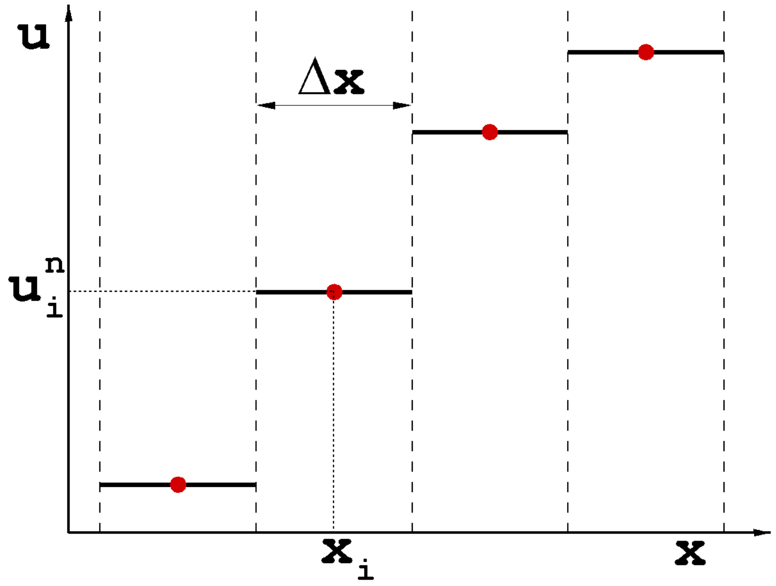


Схема Годунова

Схема Колгана

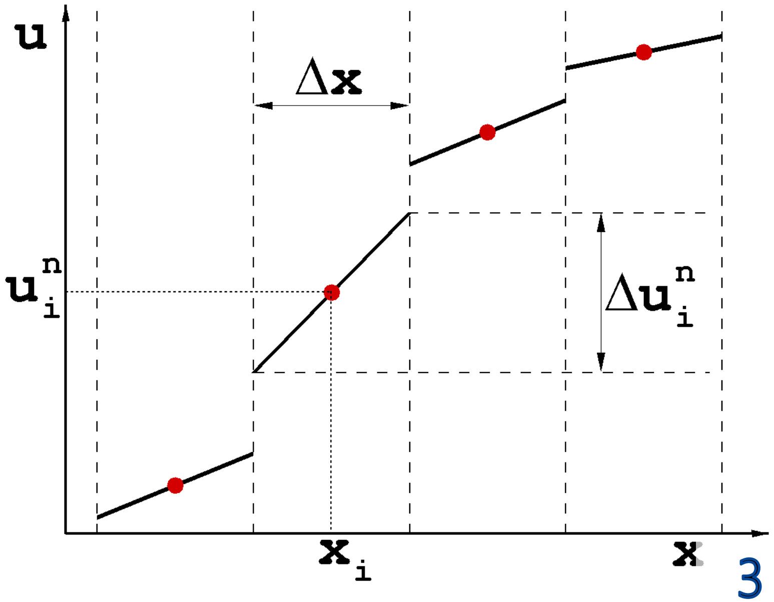
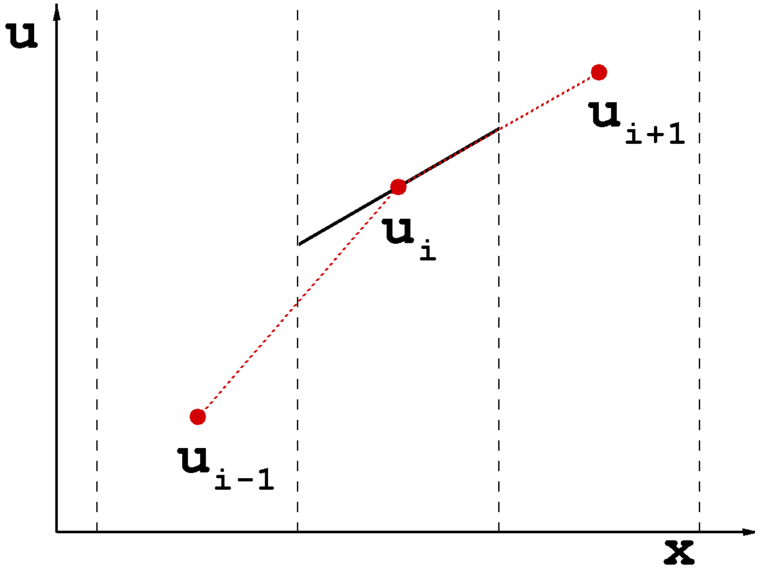


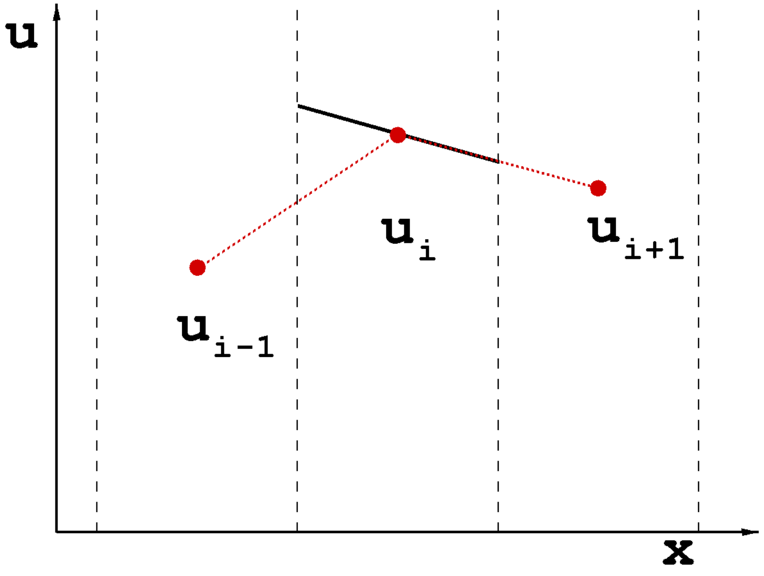
Схема Колгана

- **_Колган В.П._** Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ, **1972**

II. Принцип минимальных значений производной (реконструкция minmod)

$$\boxed{\Delta u_i^n = \mathrm{minmod}\left(u_{i+1}^n - u_i^n, u_i^n - u_{i-1}^n\right)}$$





$$\mathrm{minmod}(a,b) \equiv \begin{cases} a, & \text{if } |a| < |b|, \\ b, & \text{if } |b| < |a|. \end{cases}$$

Колган, 1975:

$$\mathrm{minmod}(a,b) \equiv \begin{cases} a, & \text{if } |a| < |b|, |c|, \\ b, & \text{if } |b| < |a|, |c|, \\ c, & \text{if } |c| < |a|, |b|. \end{cases}$$

where $c = (a+b)/2$

Osher, Chakravarthy, 1984:

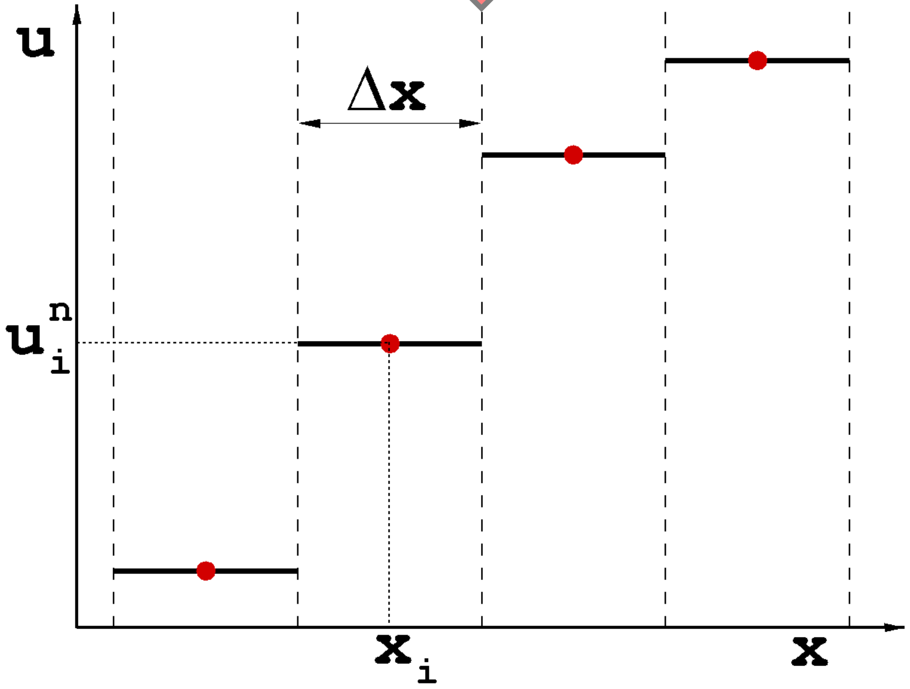
$$\mathrm{minmod}(a,b) \equiv \begin{cases} a, & \text{if } a^2 < ab, \\ b, & \text{if } b^2 < ab, \\ 0, & \text{if } ab < 0. \end{cases}$$

Схема Колгана

- ***Колган В.П.*** Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ, **1972**

III. Обобщенная задача Римана о распаде разрыва (general Riemann problem)

$$u_L = u_i^n \qquad u_R = u_{i+1}^n$$



$$u_L(x') = u_i^n + \Delta u_i^n\,(x'/\Delta x + 0.5)$$
$$u_R(x') = u_{i+1}^n + \Delta u_{i+1}^n\,(x'/\Delta x - 0.5)$$

где $x' = x - x_{i+1/2}$,

$$x_{i+1/2} = x_i + 0.5\Delta x$$

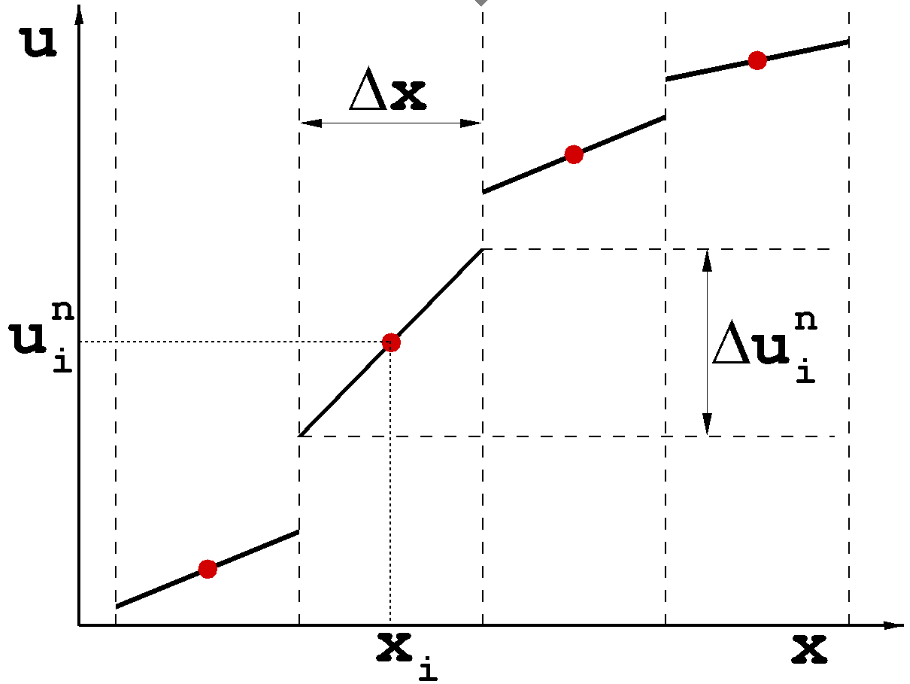


Схема Колгана

- ***Колган В.П.*** Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ, **1972**

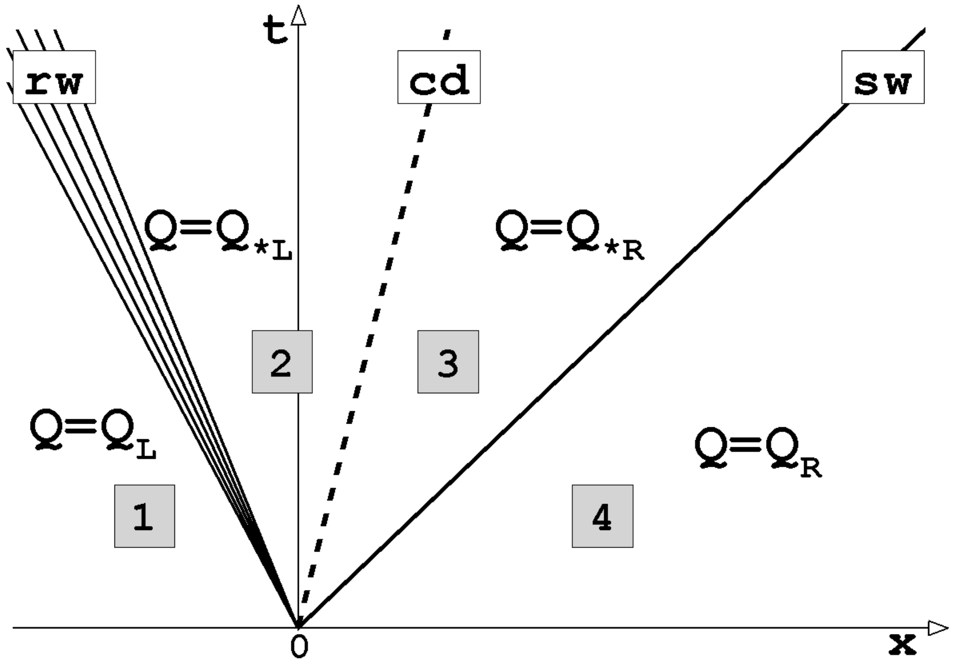
III. Обобщенная задача Римана о распаде разрыва (general Riemann problem)

$$\mathbf{Q}(x,t=0)=\begin{cases}\mathbf{Q}_L & \text{при} \quad x<0,\\ \mathbf{Q}_R & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$$

$$\mathbf{Q}(x,t=0)=\begin{cases}\mathbf{Q}_L(x) & \text{при} \quad x<0,\\ \mathbf{Q}_R(x) & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$$

$$\mathbf{Q}_L=\mathbf{Q}_i^n+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{Q}_i^n$$

$$\mathbf{Q}_R=\mathbf{Q}_{i+1}^n-\frac{1}{2}\Delta\mathbf{Q}_{i+1}^n$$



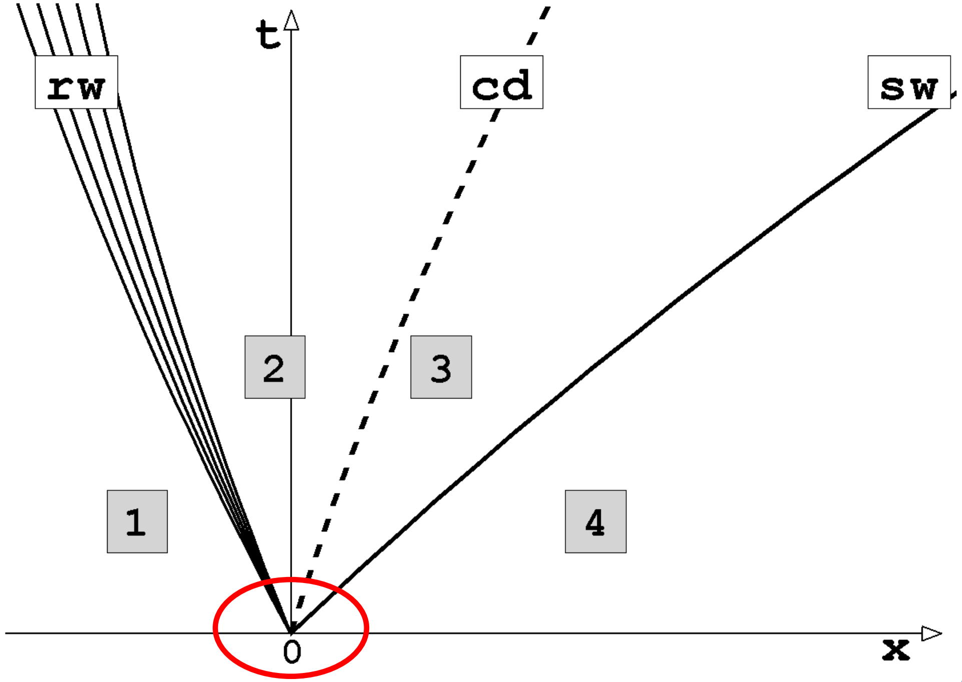


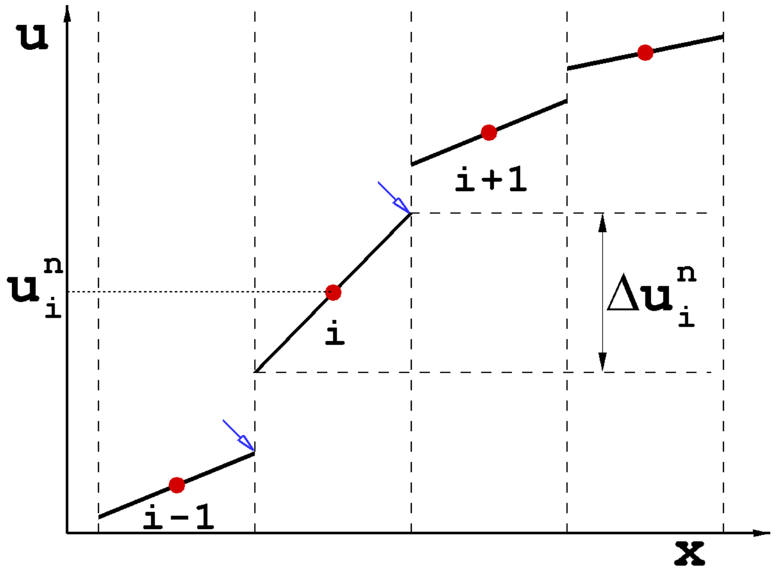
Схема Колгана: свойство сохранять монотонности решения

Линейное уравнение переноса: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $a = \text{const} > 0$

Точное решение: $u = \text{const}$ вдоль линий $x - at = \text{const}$

Численное решение: $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0$

$$u_{i+1/2}^n = u_i^n + 0.5\Delta u_i^n, \qquad u_{i-1/2}^n = u_{i-1}^n + 0.5\Delta u_{i-1}^n$$



$$u_i^{n+1} = u_i^n - C_{CFL}\left[u_i^n - u_{i-1}^n + 0.5\left(\Delta u_i^n - \Delta u_{i-1}^n\right)\right], \text{ где } C_{CFL} = a\Delta t / \Delta x$$

устойчива при $C_{CFL} < 1/2$
и сохраняет монотонность
решения при $C_{CFL} < 2/3$

$$\Delta u_i^n = \operatorname{minmod}\left(u_{i+1}^n - u_i^n, u_i^n - u_{i-1}^n\right), \quad \Delta u_{i-1}^n = \operatorname{minmod}\left(u_i^n - u_{i-1}^n, u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\right)$$

$$0 \le \Delta u_i^n, \Delta u_{i-1}^n \le u_i^n - u_{i-1}^n$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C_{CFL}\left[u_i^n - u_{i-1}^n \pm 0.5\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)\right] \Rightarrow u_i^{n+1} = u_i^n - C_{CFL}\alpha\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right), \text{ где } \alpha \in [1/2,\ 3/2]$$

Схема Колгана: аппроксимация и устойчивость

Линейное уравнение переноса: $$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при } a = \text{const} > 0$$

Точное решение: $$u = \text{const} \quad \text{вдоль линий} \quad x - at = \text{const}$$

Численное решение: $$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0$$

$$u_{i+1/2}^n = u_i^n + 0.5\Delta u_i^n, \qquad u_{i-1/2}^n = u_{i-1}^n + 0.5\Delta u_{i-1}^n$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial u^2}{\partial x^2}}$$

Разложение в ряд Тейлора:

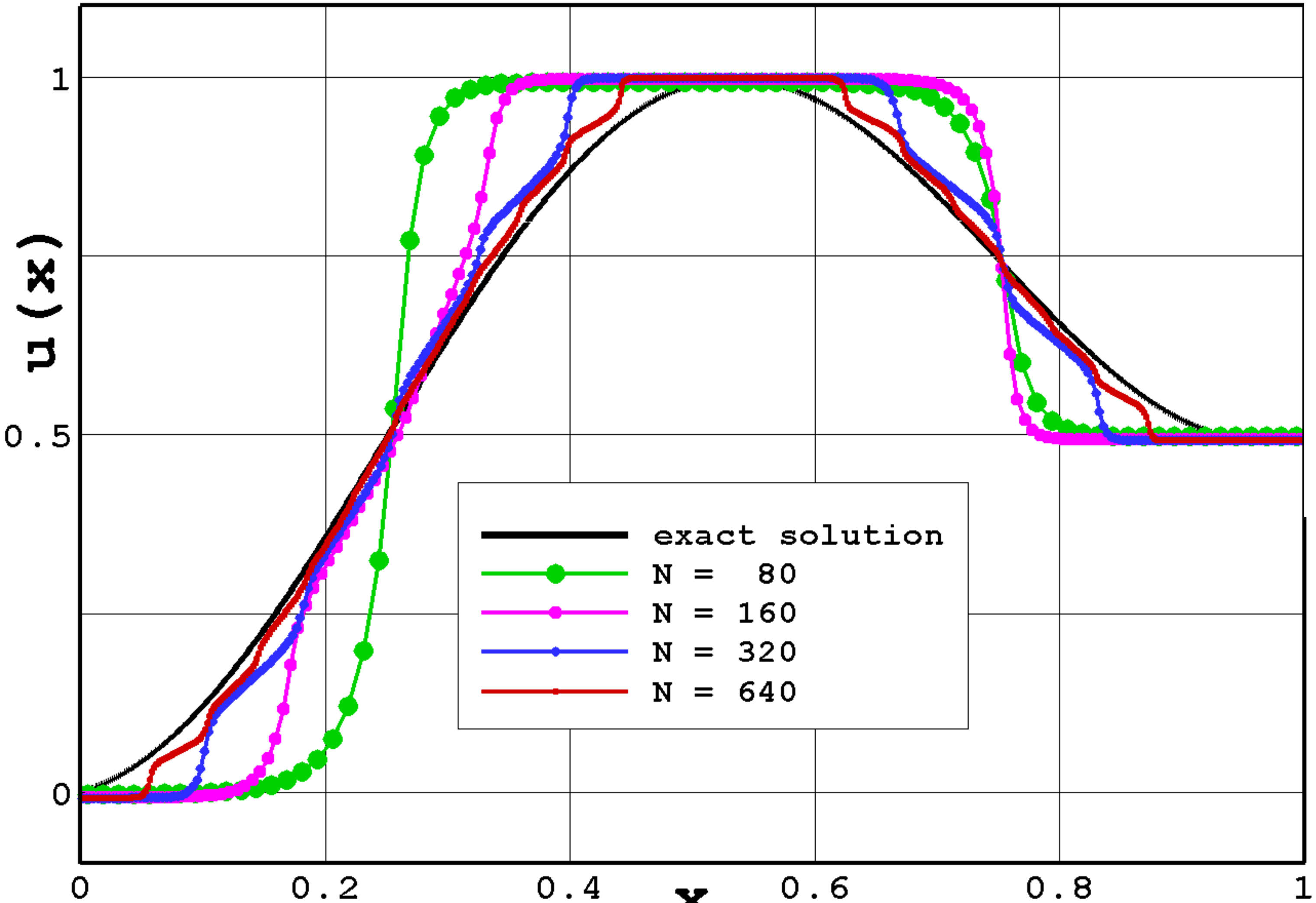
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O\left(\Delta t^2\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a\Delta x}{2}C_{CFL}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O\left(\Delta t^2\right)$$

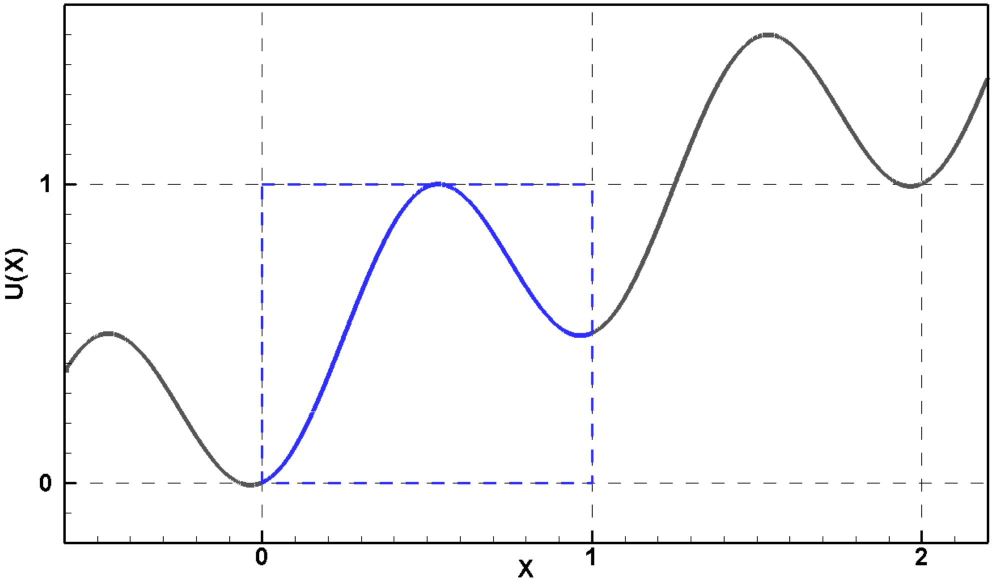
$$a\frac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{\Delta x} = a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n + 0.5\left(\Delta u_i^n - \Delta u_{i-1}^n\right)}{\Delta x} = a\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + O\left(\Delta x^2\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a\Delta x}{2}\left(\cancel{1} - C_{CFL}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O\left(\Delta x^2 + \Delta t^2\right)$$

Схема Колгана: численное решение линейного уравнения переноса

I. Ступенчато-периодическая функция $u(x)$ с гладким профилем





$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

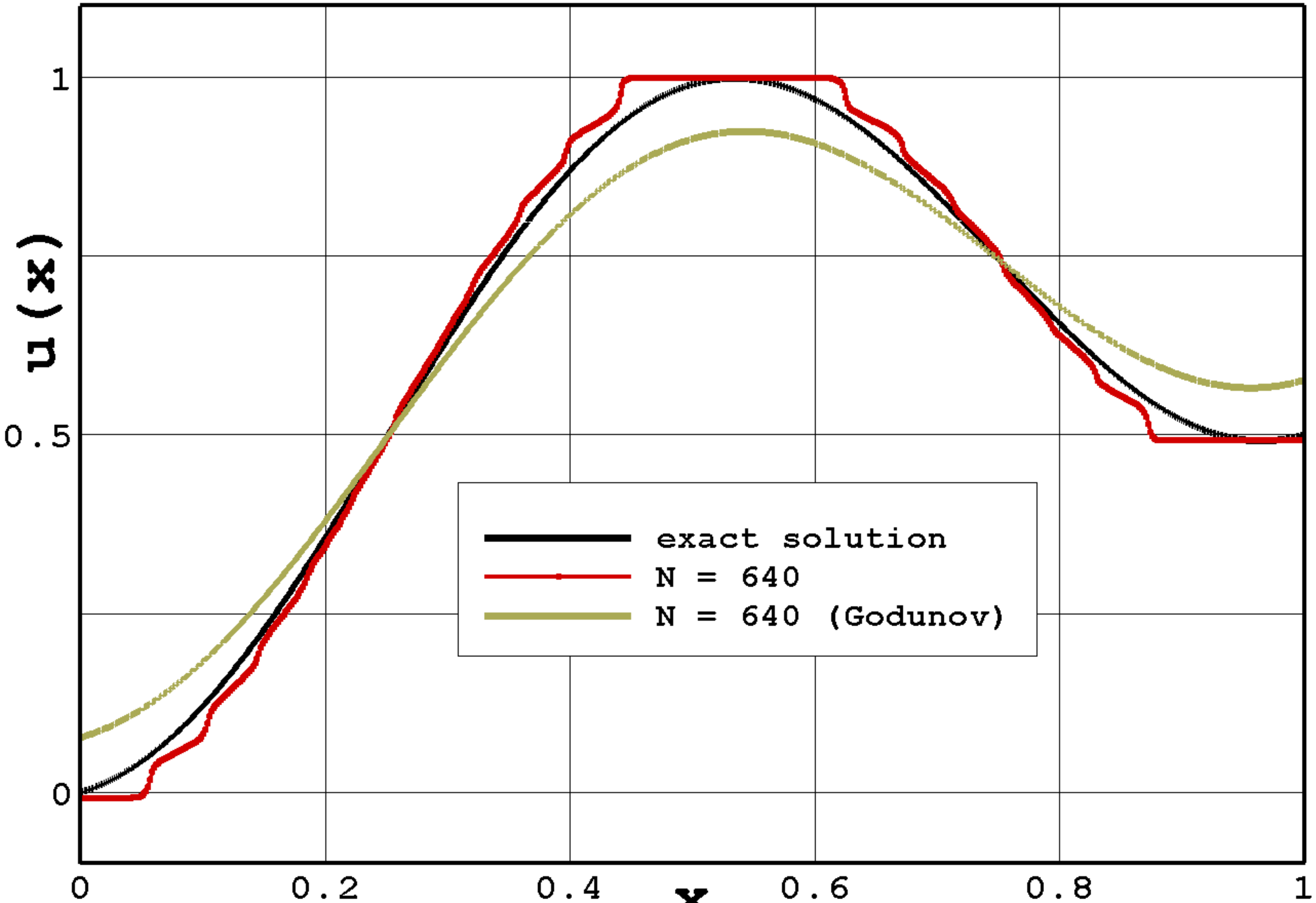
Параметры тестовой задачи:

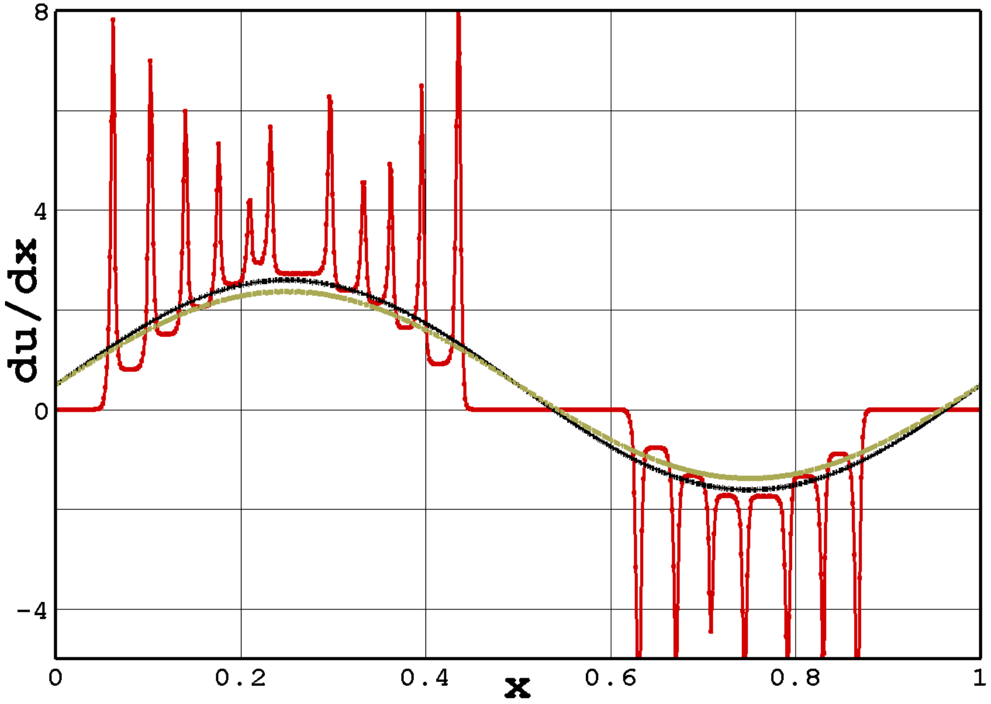
$a = 1,\ t = 10$

$C_{CFL} = 0.25$

Схема Колгана: численное решение линейного уравнения переноса

I. Ступенчато-периодическая функция $u(x)$ с гладким профилем





$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

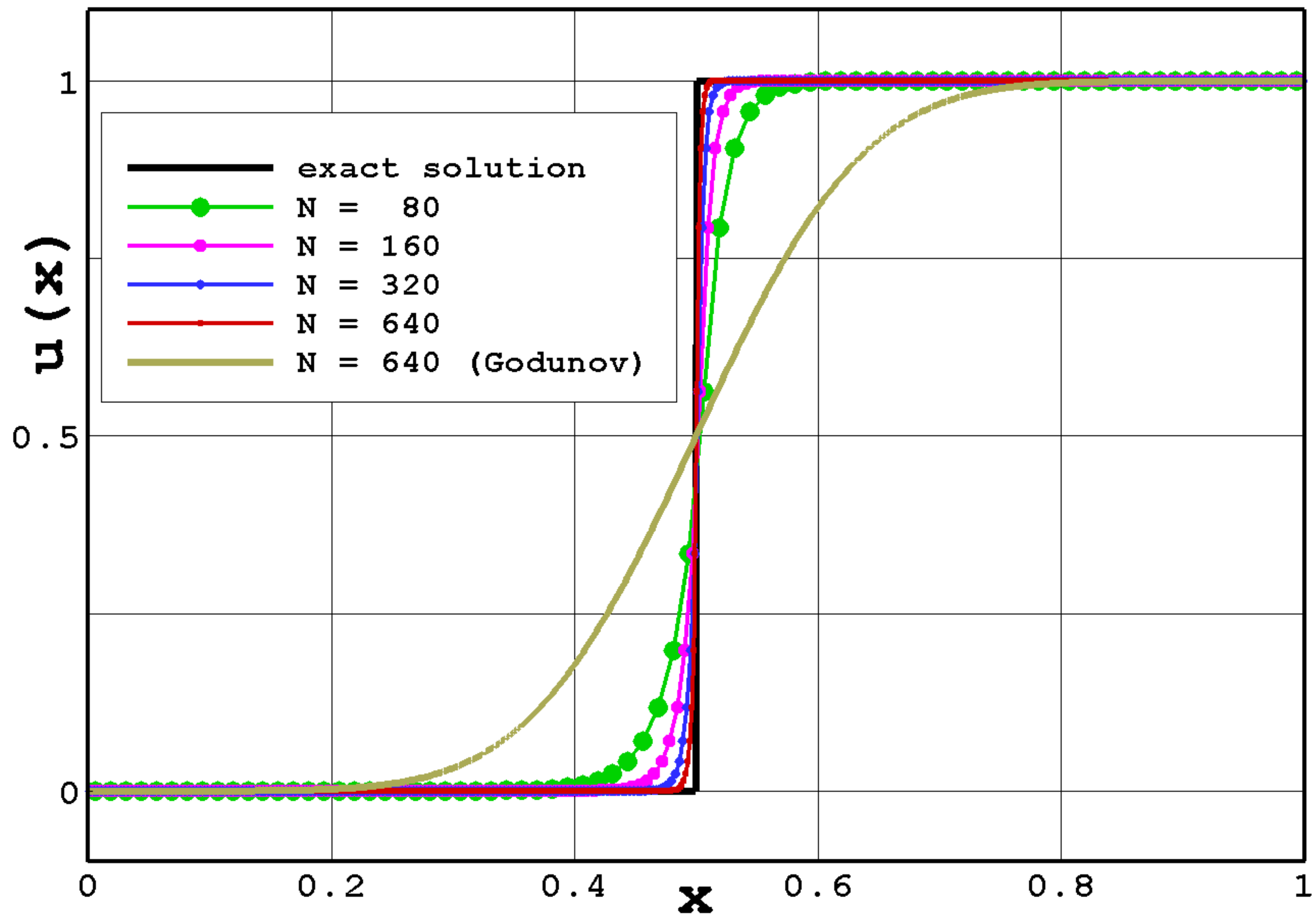
Параметры тестовой задачи:

$a = 1,\ t = 10$

$C_{CFL} = 0.25$

Схема Колгана: численное решение линейного уравнения переноса

II. Ступенчатая функция $u(x)$ с разрывом профиля



Ширина размывания разрыва

Схема Годунова:

$$D \sim t^{1/2} (\Delta x)^{1/2} \sim t^{1/2} / N^{1/2}$$

Схема Колгана: $D \sim \Delta x \sim 1 / N$

Параметры тестовой задачи:

$a = 1, \ t = 10$

$C_{CFL} = 0.25$

Схема Колгана

- ***Колган В.П.*** Конечно-разностная схема для расчета двумерных разрывных решений нестационарной газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ, №1, **1975**

<u>Обобщение схемы на случай расчета двумерных течений.</u>

Тестовый пример: сверхзвуковое обтекание плоской ступеньки;
сетка 64×32 = 2048 ячеек; 1300 – 1800 шагов; ~ 2 часа на БЭСМ-6.

- ***Колган В.П.*** Численный метод решения пространственных задач газодинамики и расчет обтекания тела при наличии угла атаки // Ученые записки ЦАГИ, №2, **1975**

<u>Обобщение схемы на случай расчета трехмерных течений.</u>

Тестовый пример: сверхзвуковое обтекание цилиндра со сферическим затуплением;
сетка 30×17×20 = 10200 ячеек; 800 шагов; ~ 12 часов на БЭСМ-6.

- ***Колган В.П.*** Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // Журнал вычислительной математики и математической физики, №5, **1978** *(Поступила в редакцию 3.12.1976)*

<u>Монотонный оператор сглаживания в схеме четвертого порядка точности для одномерных уравнений Эйлера.</u>

Тестовый пример: задача о распаде произвольного разрыва

Схема MUSCL (monotonic upstream scheme for conservation laws)

- ***van Leer B.*** Towards the ultimate conservative difference scheme:
  I. The quest of monotonicity // Lect. Notes Phys., **1973**
  II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme // J. Comp. Phys., **1974**
  III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow // J. Comp. Phys., **1977**
  IV. A new approach to numerical convection // J. Comp. Phys., **1977**
  V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys., **1979**

Paper I:

Godunov proved there are no linear second-or-higher-order schemes for Eq. (2) that always preserve monotonicity. Such schemes can only handle very smooth initial values, in which higher derivatives are of minor importance. Whoever wants to pursue unconditional monotonicity must take refuge in nonlinear techniques.

Paper V:

This paper describes a method of second-order accuracy for integrating the equations of ideal compressible flow (ICF). The method is based on the integral conservation laws and is dissipative, so that it can be used across shocks. The heart of the method is a one-dimensional Lagrangean scheme, the results of which are remapped onto the desired Euler grid in a separate step.

Схема MUSCL (monotonic upstream scheme for conservation laws)

- ***van Leer B.*** Towards the ultimate conservative difference scheme:
  IV. A new approach to numerical convection // J. Comp. Phys., **1977**

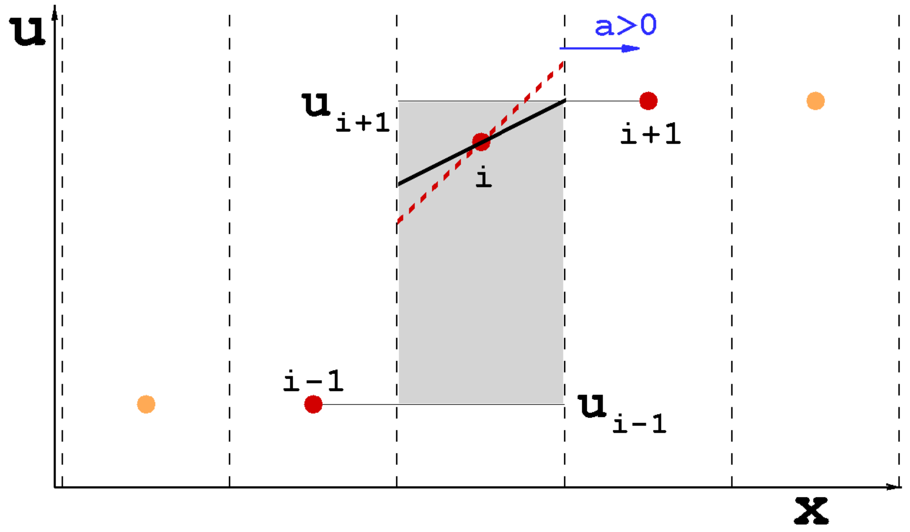
- Кусочно-полиномиальные распределения параметров
  - кусочно-линейное распределение (как в схеме Колгана) ← выбрано для схемы MUSCL
  - кусочно-параболическое распределение
- Свойство схемы сохранять монотонность решения
  - ограничение функции внутри ячейки
- Решение обобщенной задачи Римана
  - методика расчета с разделением на лагранжев и эйлеров этапы
- Способы расчета приращений функции внутри ячейки
  - схема I, схема II и схема III

Ограничение функции внутри ячейки

❖ Условие, гарантирующее сохранение монотонности решения (новые экстремумы не возникнут)

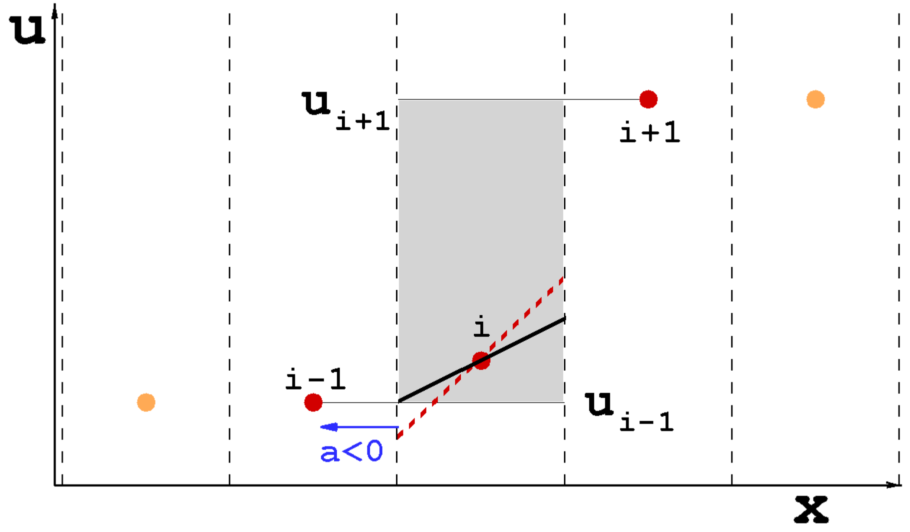
$$\min\left(u_{i-1},u_{i+1}\right)\le u(x)\le \max\left(u_{i-1},u_{i+1}\right)$$

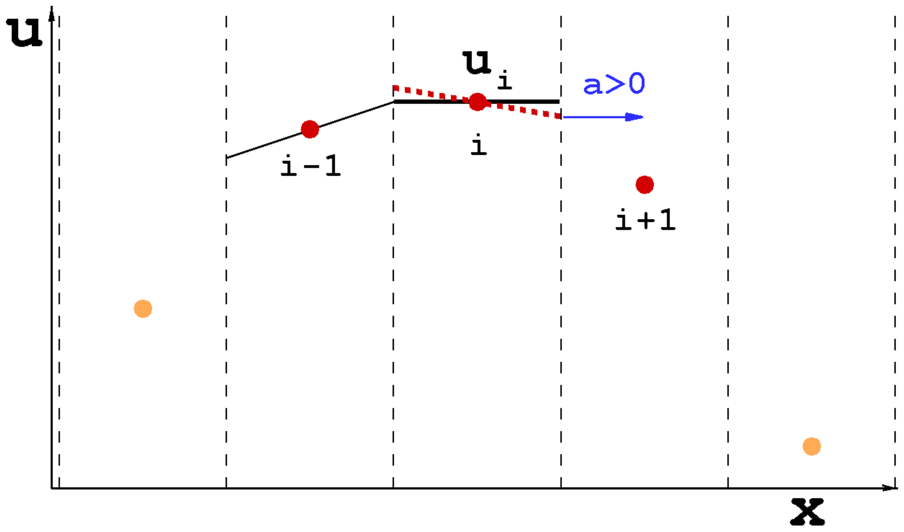
или $$\left|\Delta u_i\right|\le 2\min\left(\left|u_{i+1}-u_i\right|,\left|u_i-u_{i-1}\right|\right)$$



❖ Условие, гарантирующее не усиление существующих экстремумов (максимумы не увеличатся, минимумы не уменьшатся)

$$\Delta u_i = 0,\quad \text{if}\quad \left(u_{i+1}-u_i\right)\left(u_i-u_{i-1}\right)<0$$

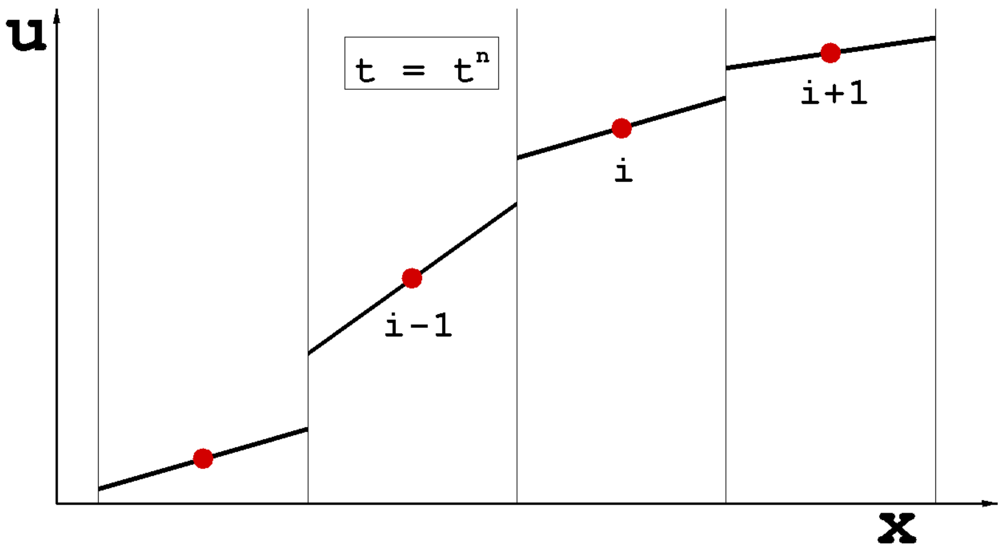


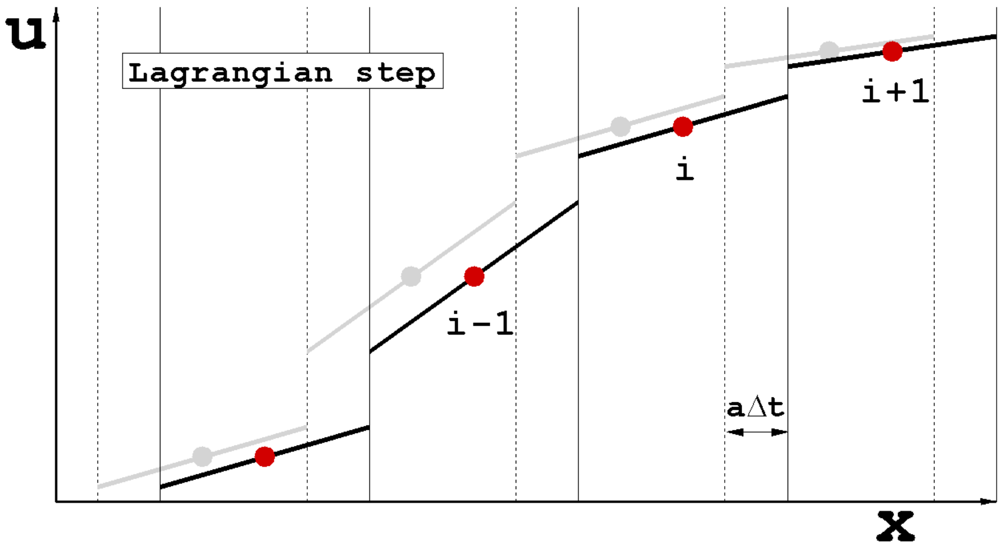


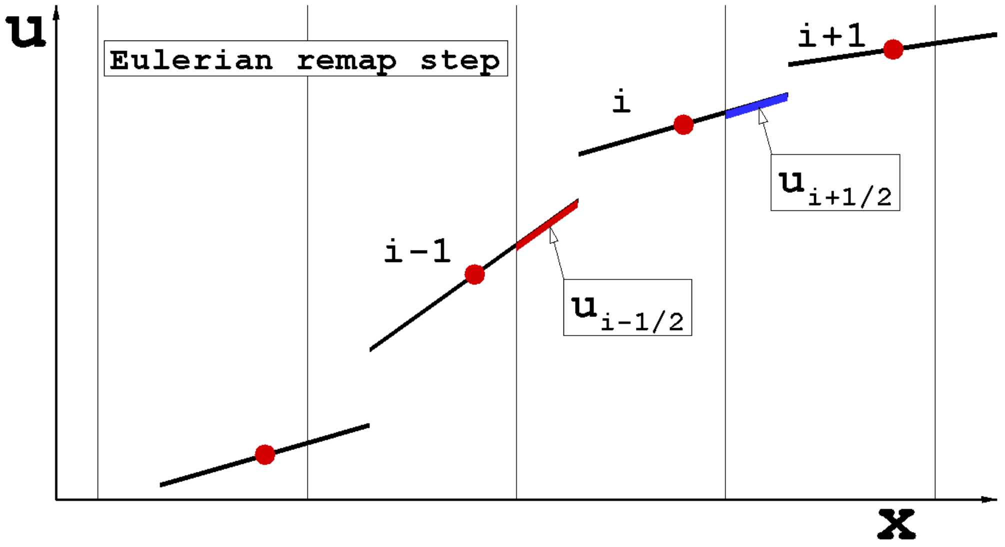
❖ Современное выражение для ограничителя ван Лира

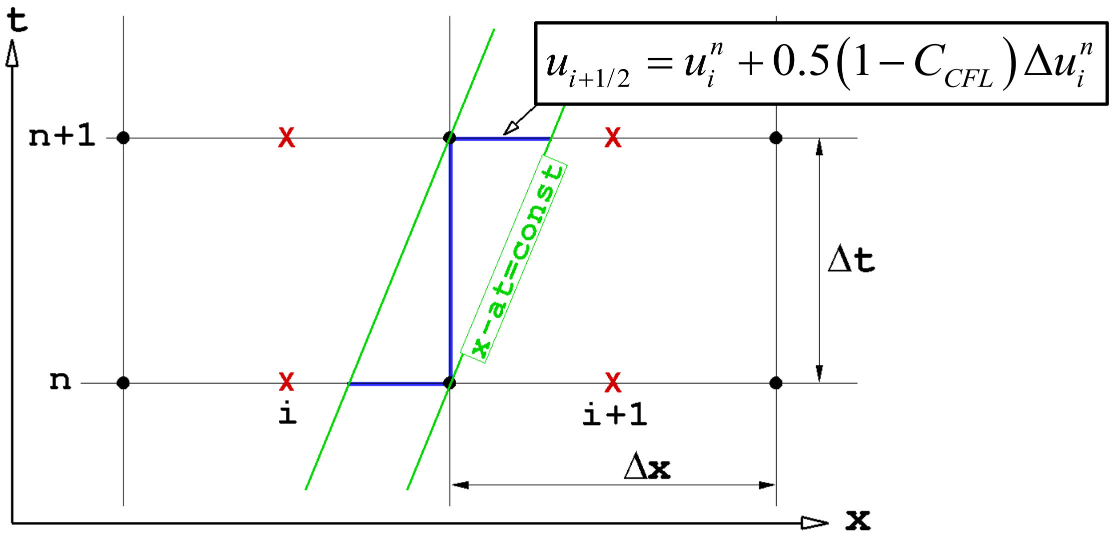
$$\left(\Delta u_i\right)^{\lim} = \operatorname{minmod}\left[\Delta u_i, 2\operatorname{minmod}\left(u_{i+1}-u_i, u_i-u_{i-1}\right)\right]$$

Методика расчета с разделением на лагранжев и эйлеров этапы









$$u_i^{n+1}\Delta x = u_i^n \Delta x - u_{i+1/2} a \Delta t + u_{i-1/2} a \Delta t \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\,\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta x} = 0$$

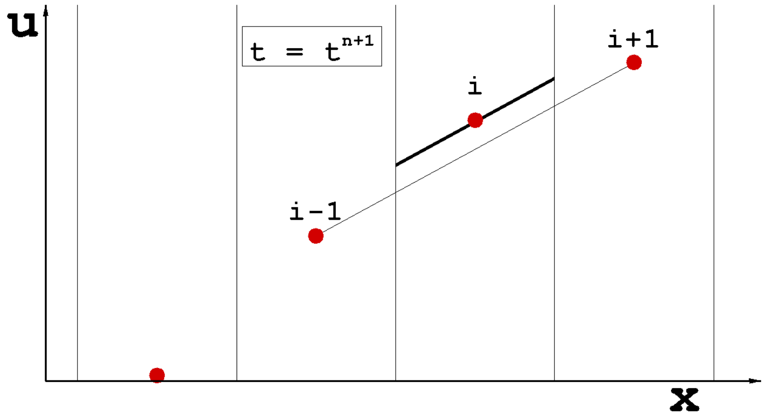
Способы расчета приращений функции внутри ячейки

- Схема I

  центральная разность $\Delta u_i = \left(u_{i+1} - u_{i-1}\right) / 2$

  с ограничителем

  без ограничителя *схема I* идентична *схеме Фромма* [1968]

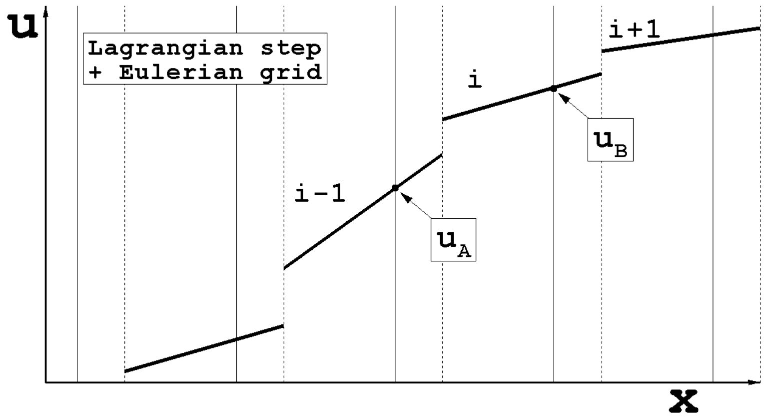


- Схема II

  разность между значениями функции после лагранжева этапа

  в точках пересечения с эйлеровой сеткой $\Delta u_i = u_B - u_A$

  с ограничителем



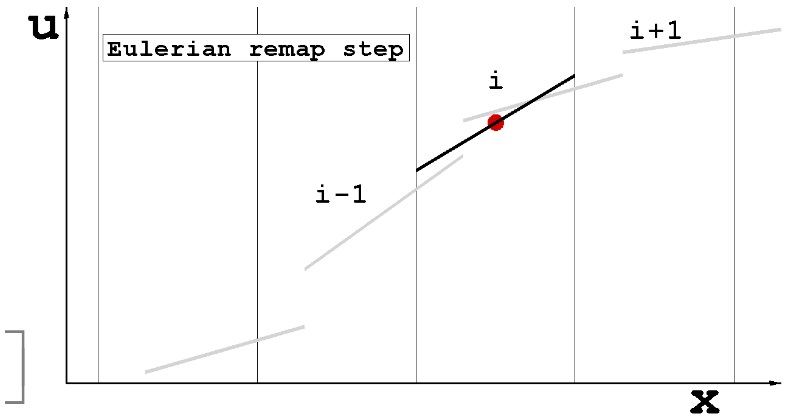
- Схема III

  пересчет на эйлерову сетку методом наименьших квадратов

  $$\Delta u_i = 6\nu(1-\nu)\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) + (1 - 3\nu + 2\nu^3)\Delta u_i^n - \nu(3 - 6\nu + 2\nu^2)\Delta u_{i-1}^n$$

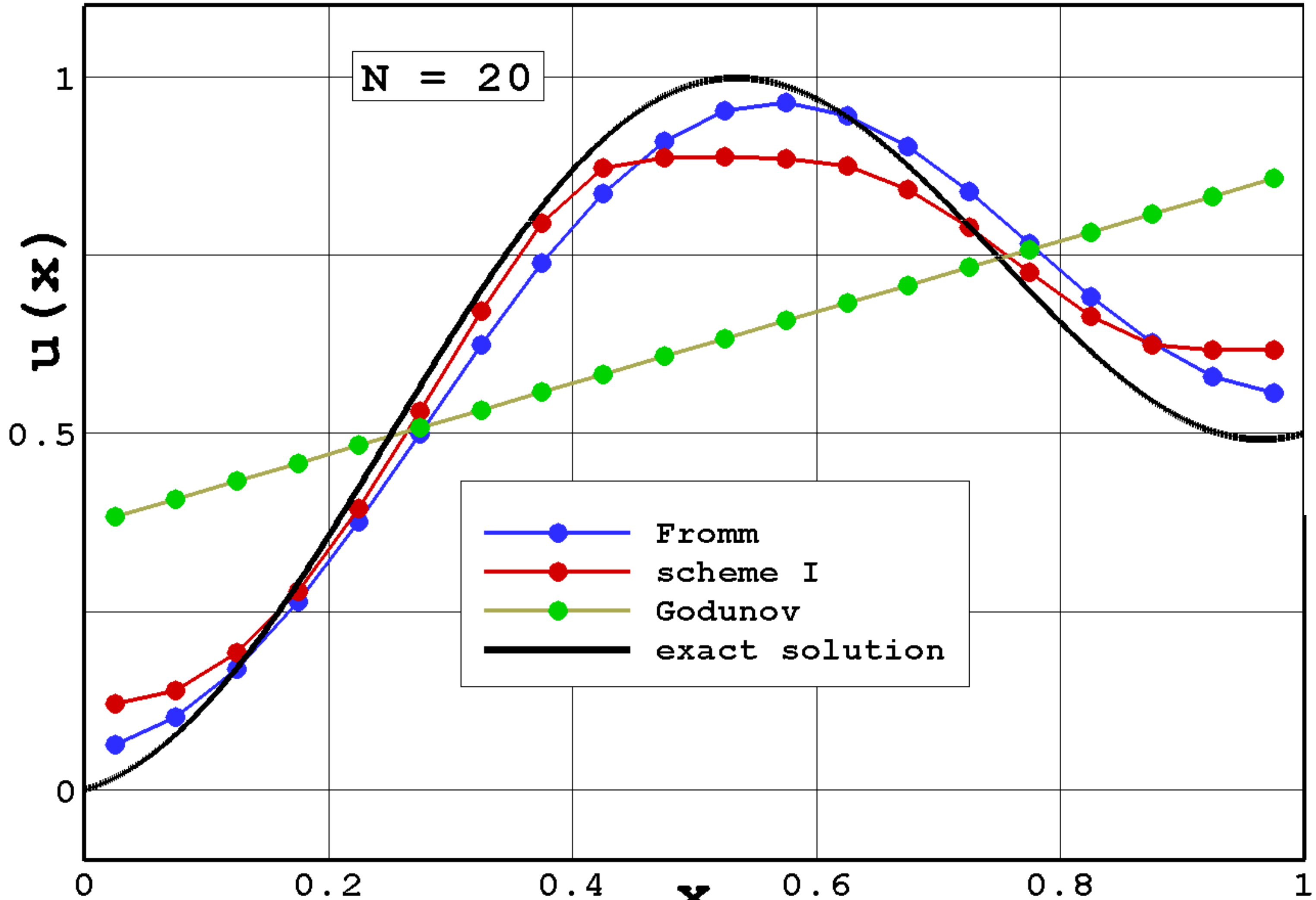
  с ограничителем

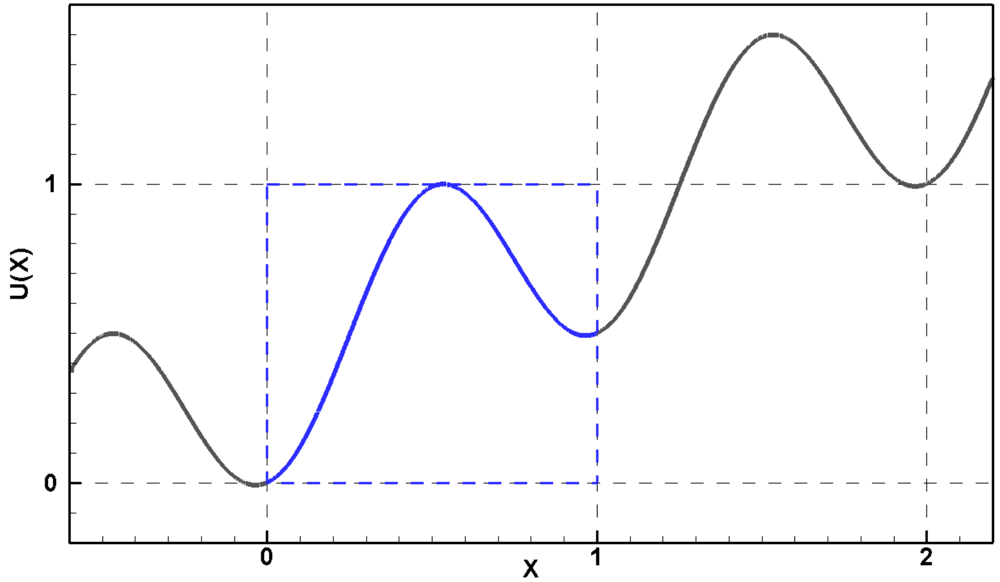
  где $\nu = C_{CFL}$



ограничитель $(\Delta u_i)^{\lim} = \mathrm{minmod}\left[\Delta u_i, 2\,\mathrm{minmod}\left(u_{i+1} - u_i, u_i - u_{i-1}\right)\right]$

I. Ступенчато-периодическая функция $u(x)$ с гладким профилем





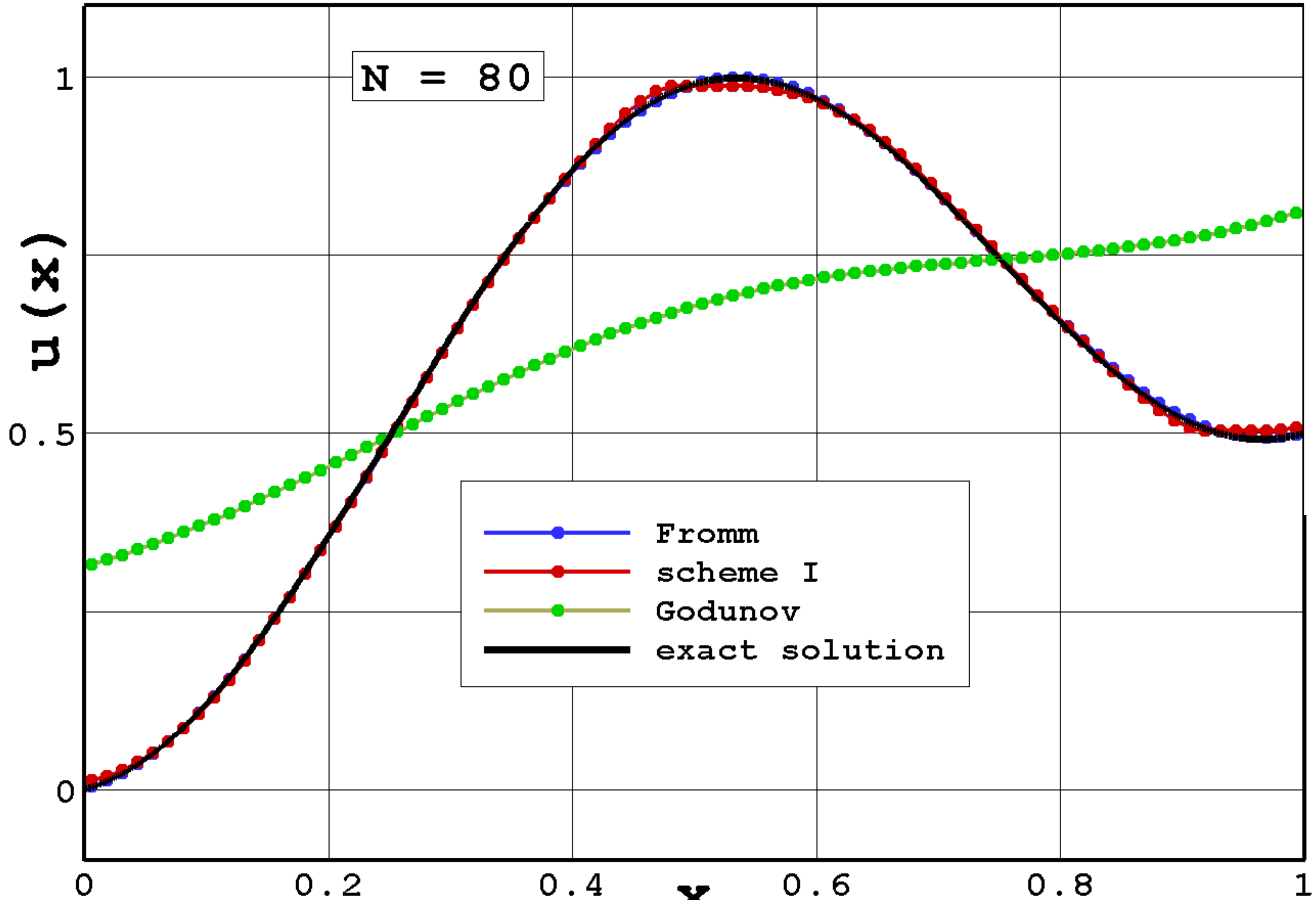
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

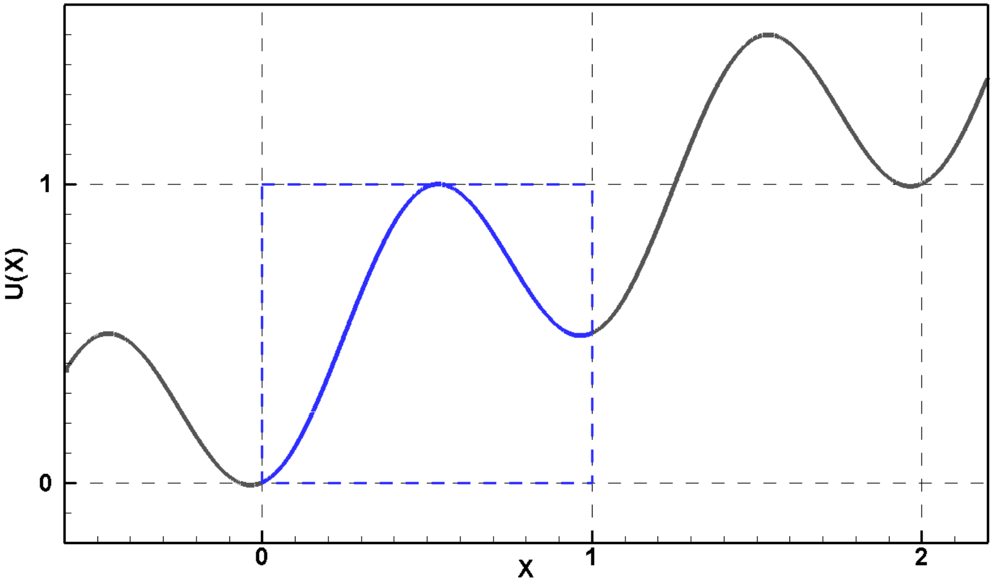
Параметры тестовой задачи:

$a = 1, \; t = 10$

$C_{CFL} = 0.25$

I. Ступенчато-периодическая функция $u(x)$ с гладким профилем





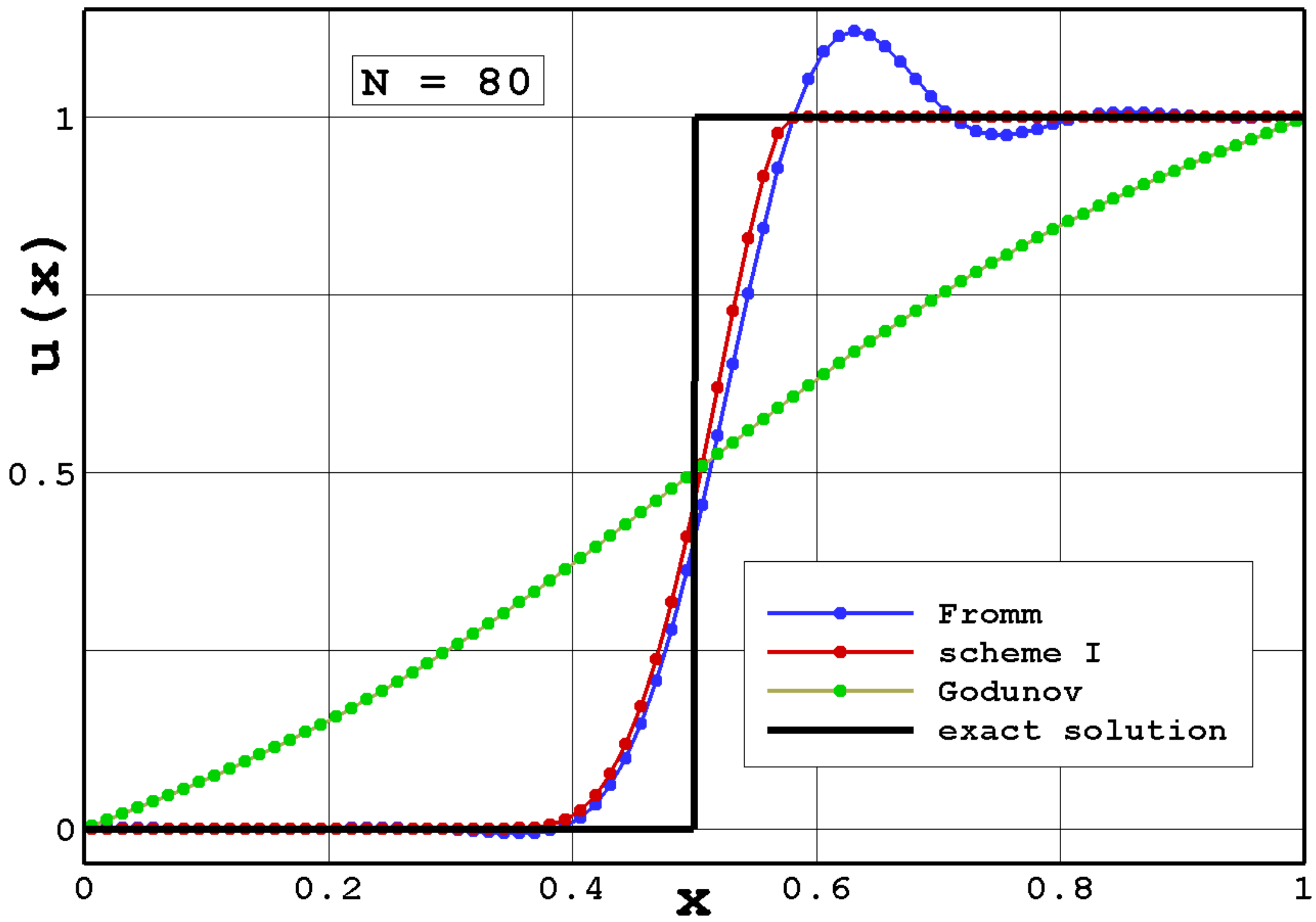
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Параметры тестовой задачи:

$a = 1, \ t = 10$

$C_{CFL} = 0.25$

II. Ступенчатая функция *u*(*x*) с разрывом профиля



Ширина размывания разрыва

Схема Годунова:

$$D \sim t^{1/2}(\Delta x)^{1/2} \sim t^{1/2} / N^{1/2}$$

Схема I: $D \sim t^{1/3}(\Delta x)^{2/3} \sim t^{1/3} / N^{2/3}$

Параметры тестовой задачи:

$a = 1, \ t = 10$

$C_{CFL} = 0.25$

Схема MUSCL (monotonic upstream scheme for conservation laws)

- ***van Leer B.*** Towards the ultimate conservative difference scheme:
  V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys., **1979**

Модификация схемы Годунова второго порядка точности для расчета течений идеального сжимаемого газа.

1. Базовый расчет одномерных течений в лагранжевых координатах. Используются осредненные величины и их приращения в ячейке. Переменные: V (удельный объем = $1/\rho$), u, E (полная удельная энергия) или p.

1.1. Решается классическая задача Римана и находятся u, p, V_- и V_+ (для сильных скачков – итерационно)

1.2. Эти величины дополняются их производными по времени вдоль контактного разрыва; они выражаются через приращения величин справа и слева (характеристические соотношения или более сложные выражения).

1.3. Уравнения газовой динамики интегрируются на лагранжевой сетке и находятся осредненные значения на новом временном слое.

1.4. Приращения пересчитываются на новый временной слой с учетом производных, вычисленных в 1.2.

2. Пересчет величин и их приращений с лагранжевой сетки на эйлерову сетку с использованием метода наименьших квадратов.

3. Применение ограничителя для приращений величин V, u и p (фактор 2 в ограничителе может быть уменьшен).

4. В случае решения многомерных уравнений газовой динамики используется расщепление по координатам (Strang, 1968).

Историческое упущение: В.П. Колган и его схема

- ***van Leer B.*** A historical oversight: Vladimir P. Kolgan and his high-resolution scheme // J. Comp. Phys., **2011**
- ***Kolgan V. P.*** Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite-difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics // J. Comp. Phys., **2011**

1. Introduction
2. The birth of high-resolution scheme
    - краткая история появления схем повышенного порядка
3. An interrupted life
    - информация о жизни и работе В.П. Колгана
4. The 1972 TsAGI paper
    - разбор содержащихся в статье оригинальных идей
5. In search of Kolgan: a personal account
    - личная история поиска Колгана
6. Epilogue

Схема Годунова на неструктурированной сетке

Линейное уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ при } a = \mathrm{const} > 0$$

схема Годунова на равномерной сетке:

$$\boxed{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0}$$

схема Годунова на неравномерной сетке:

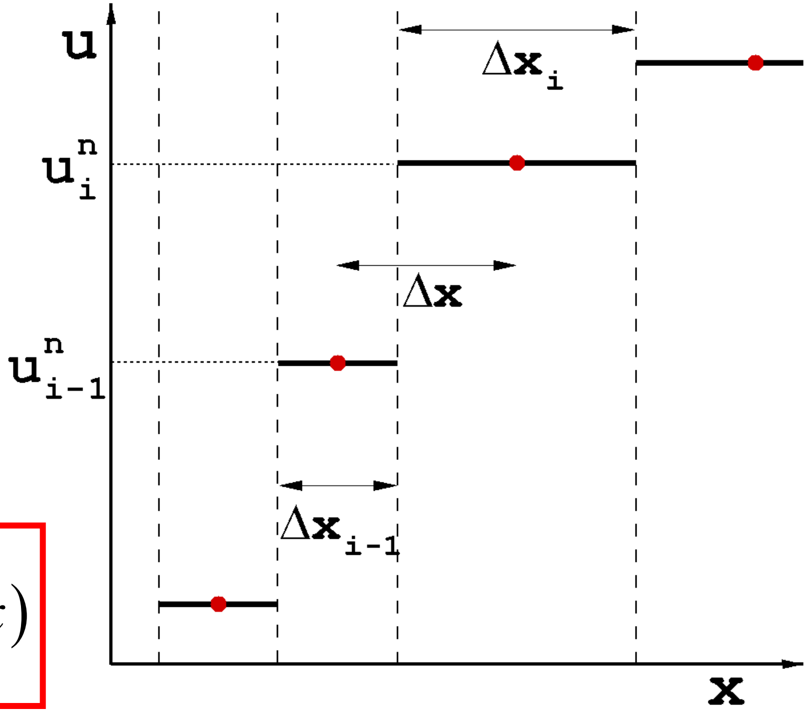
$$\boxed{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} = 0}$$

Разложение в ряд Тейлора:

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = O(\Delta x)}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{2\Delta x_i}\right) = O(\Delta x)}$$

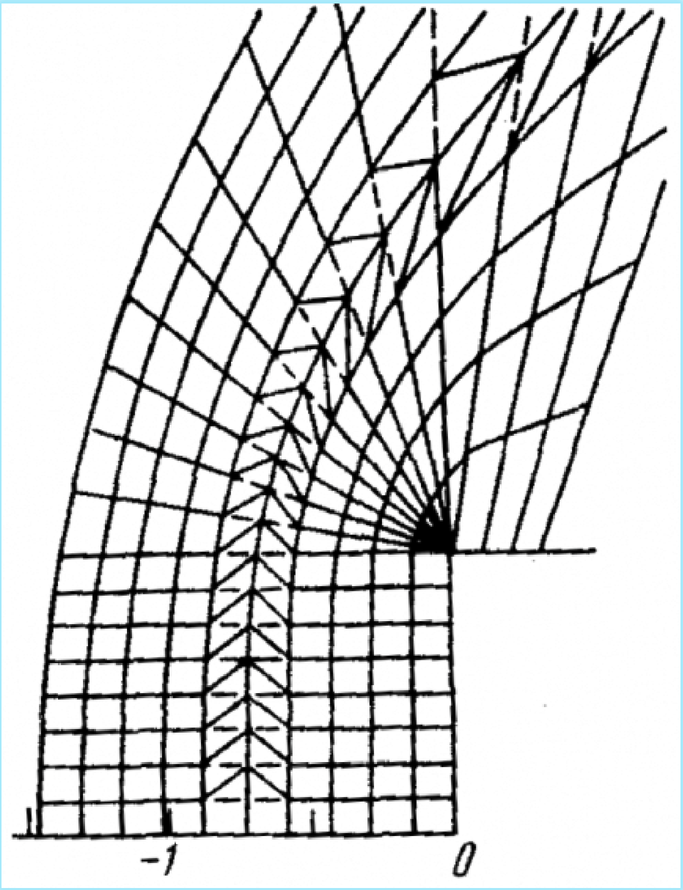


$$\Delta x = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{2}$$

Схема Годунова на неструктурированной сетке

- *__Тилляева Н.И.__* Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Ученые записки ЦАГИ, №2, **1986**

Расчет сверхзвукового обтекания плоского уступа с выделением головного скачка (M = 3).



начальная и деформированная сетки

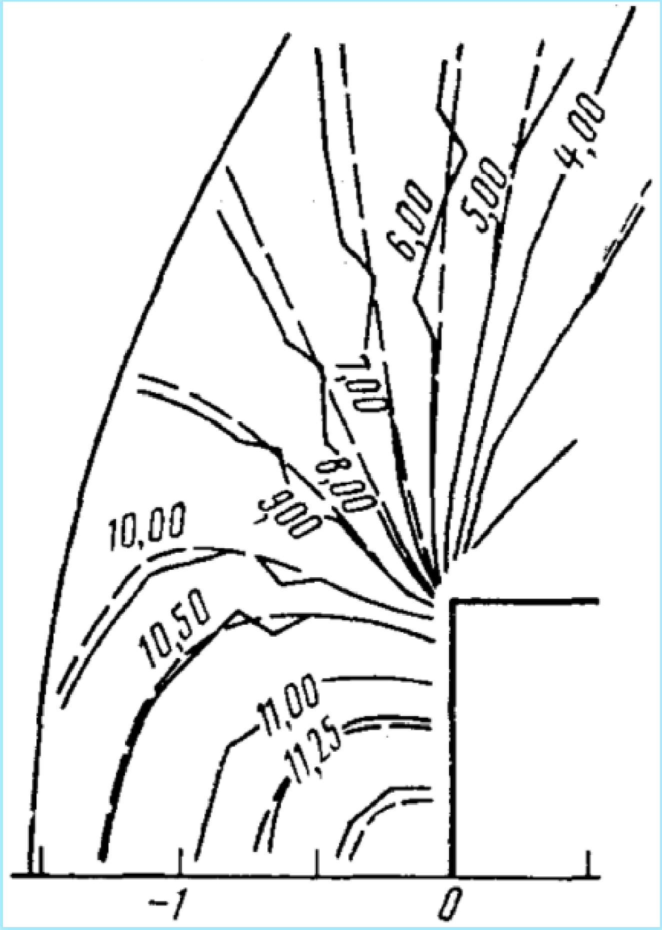
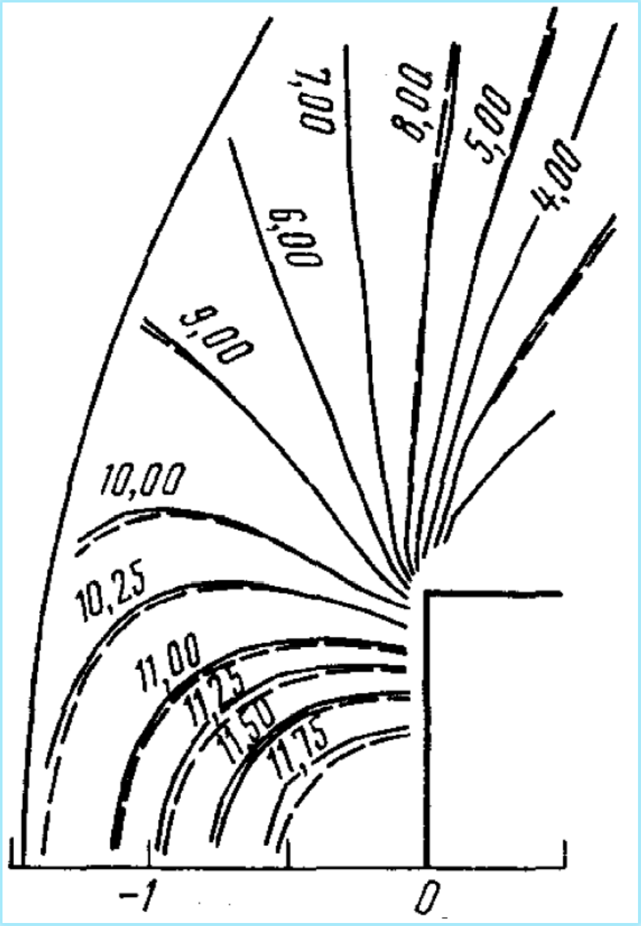


схема Годунова



обобщенная схема Колгана

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ