Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике

III. TVD-схемы: как не заблудиться в трех понятиях

Родионов Александр Владимирович

Схема Годунова

- ***Годунов С.К.*** Разностный метод расчета ударных волн // Успехи мат. наук, **1957**
- ***Годунов С.К.*** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник, **1959**

Базовые элементы

- кусочно-постоянное распределение параметров
- решение задачи Римана для вычисления потоков между ячейками

Достоинства схемы

- свойство схемы сохранять монотонность решения (на линейном уравнении переноса)
- ясная физическая интерпретация
- исключительная надежность, гибкость и универсальность

Недостатки схемы

- первый порядок аппроксимации по пространству и времени
- затратный, итерационный алгоритм решения задачи Римана

Схема Колгана

- ***Колган В.П.*** Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ, **1972**

<u>Базовые элементы</u>

- кусочно-линейное распределение параметров
- принцип минимальных значений производной для расчета приращений функции внутри ячейки (реконструкция minmod)
- решение классической задачи Римана для вычисления потоков между ячейками

<u>Достоинства схемы</u>

- свойство схемы сохранять монотонность решения (на линейном уравнении переноса)
- второй порядок аппроксимации по пространству
- существенное преимущество в точности перед схемой Годунова при решении стационарных задач

<u>Недостатки схемы</u>

- первый порядок аппроксимации по времени
- снижение допустимого расчетного шага Δt (схема устойчива $C_{cfl} < 1/2$ и монотонна при $C_{cfl} < 2/3$)
- при решении нестационарных задач распределение параметров имеет ступенчатый вид (в областях гладкости решения)

Схема ван Лира (MUSCL)

- ***van Leer B.*** Towards the ultimate conservative difference scheme: IV. A new approach to numerical convection // J. Comp. Phys., **1977**

Базовые элементы

- кусочно-линейное распределение параметров
- лагранжево-эйлерова методика для приближенного решения обобщенной задачи Римана
- метод наименьших квадратов для расчета приращений функции внутри ячейки
- ограничитель приращений функции в обеспечение свойства схемы сохранять монотонность решения
- метод расщепления по координатам для расчета пространственных задач

Достоинства схемы

- свойство схемы сохранять монотонность решения (на линейном уравнении переноса)
- второй порядок аппроксимации по пространству и времени
- существенное преимущество в точности перед схемой Годунова при решении как стационарных, так и нестационарных задач

Недостатки схемы

- сложный и затратный алгоритм схемы (лагранжево-эйлерова методика; метод наименьших квадратов; метод расщепления по координатам)

TVD-схемы

- ❑ ***Harten A.*** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys., **1983**
- ❑ ***Harten A.*** On a class of high resolution total variation stable finite difference schemes // SIAM J. Numer. Anal., **1984**

Хартен ввел понятие TVD-схема: требование невозрастания полной вариации решения.

* * *

Total Variation Non–Increasing (TVNI)

Total Variation Diminishing (TVD)

TVD scheme

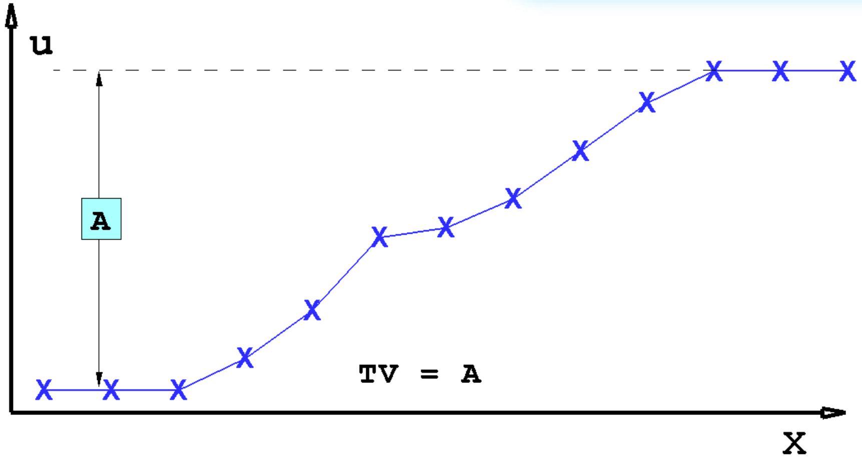
From CFD-Wiki

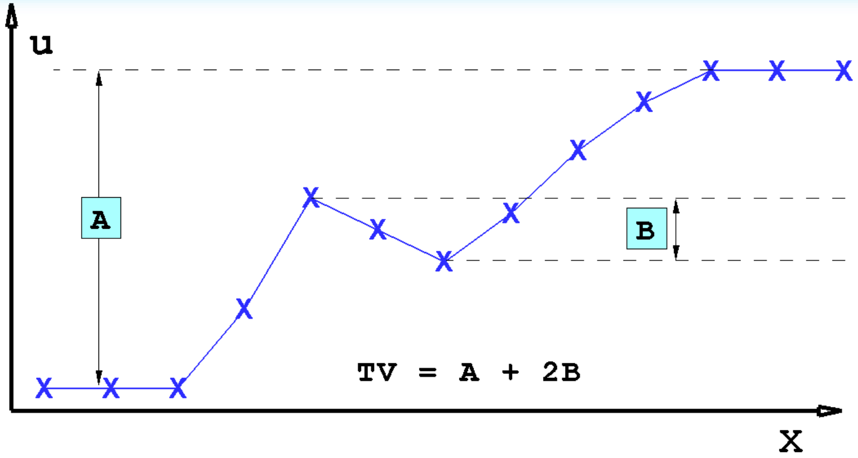
A scheme is said to be TVD or Total Variation Diminishing if it does not increase the total variation of the solution, i.e.,

$$TV(u^{n+1}) \le TV(u^n)$$

The total variation of a grid function is defined as

$$TV(u) = \sum_j |u_{j+1} - u_j|$$





Область существования TVD-схем

- ***Sweby P.K.*** High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws // SIAM J. Numer. Anal., **1984**

Уравнение переноса: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $a = \mathrm{const} > 0.$

Численная схема: $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0.$

Схема Годунова: $u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n$

MUSCL-схема: $u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n + 0.5(1-\nu)\Delta u_i^n$, где $\nu = C_{CFL} = a\Delta t / \Delta x,$

$$\Delta u_i^n = f\left(u_i^n - u_{i-1}^n, u_{i+1}^n - u_i^n\right)$$

Схема Лакса-Вендроффа: $\dfrac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - (u_i^n + u_{i+1}^n)/2}{\Delta t/2} + a\dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$ $\Rightarrow$

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = 0.5(1+\nu)u_i^n + 0.5(1-\nu)u_{i+1}^n$$

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n + 0.5(1-\nu)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)$$

Введение ограничителя ϕ в схему Лакса-Вендроффа: $u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n + 0.5(1-\nu)\phi(r_i)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)$, где $r_i = \dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}$

Связь с MUSCL-схемой: $\Delta u_i^n = \phi(r_i)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)$

Область существования TVD-схем

- ***Sweby P.K.*** High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws // SIAM J. Numer. Anal., **1984**

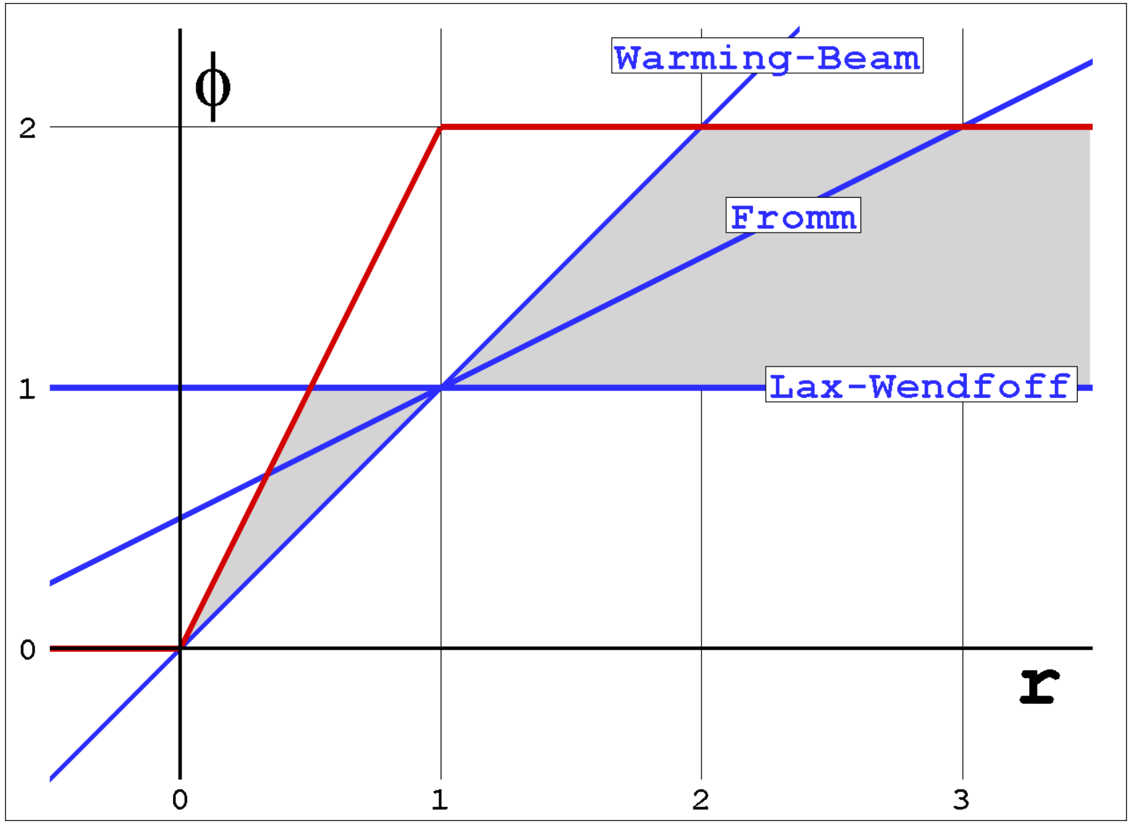
$$\Delta u_i^n = \phi(r_i)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right), \text{ где } \quad r_i = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}$$

<u>Линейные схемы второго порядка точности</u>

Правая разность: схема Лакса-Вендроффа	$\phi = 1$
Центральная разность: схема Фромма	$\phi = (1 + r)/2$
Левая разность: схема Уорминга-Бима	$\phi = r$

<u>Ограничитель ван Лира (TVD-условие Хартена)</u>

Разности разного знака	$\phi = 0$
Удвоенная правая разность	$\phi = 2$
Удвоенная левая разность	$\phi = 2r$



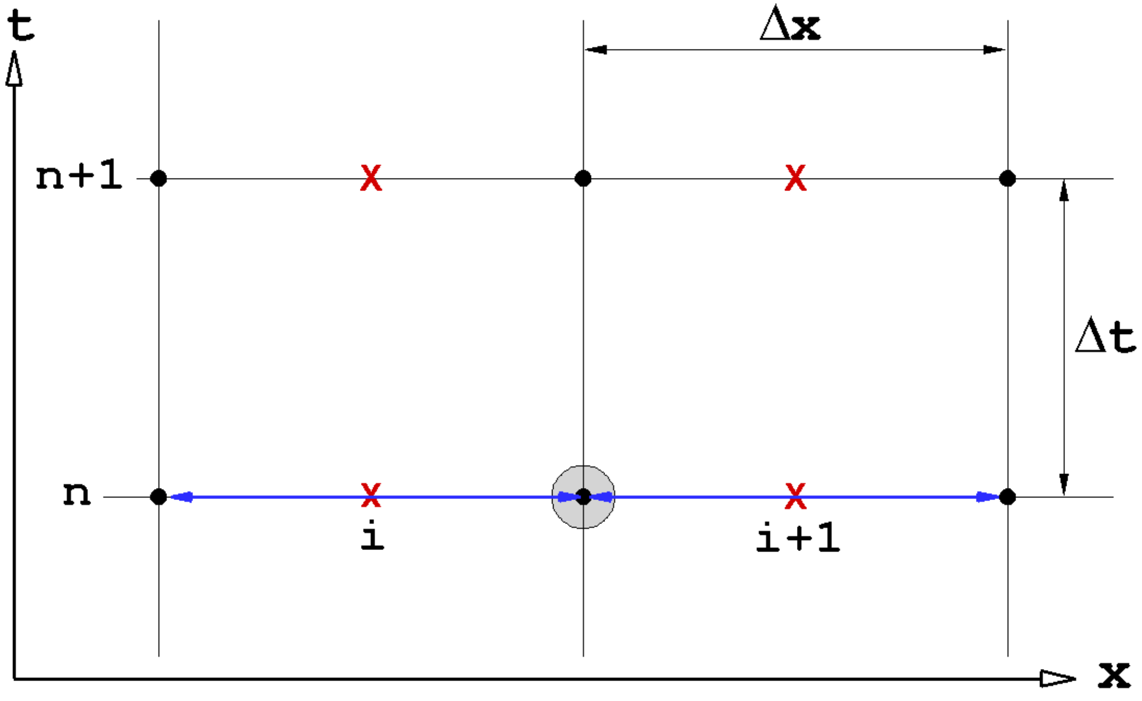
[5] ***A. Harten***, High resolution schemes for conservation laws, J. Comp. Phys., to appear.

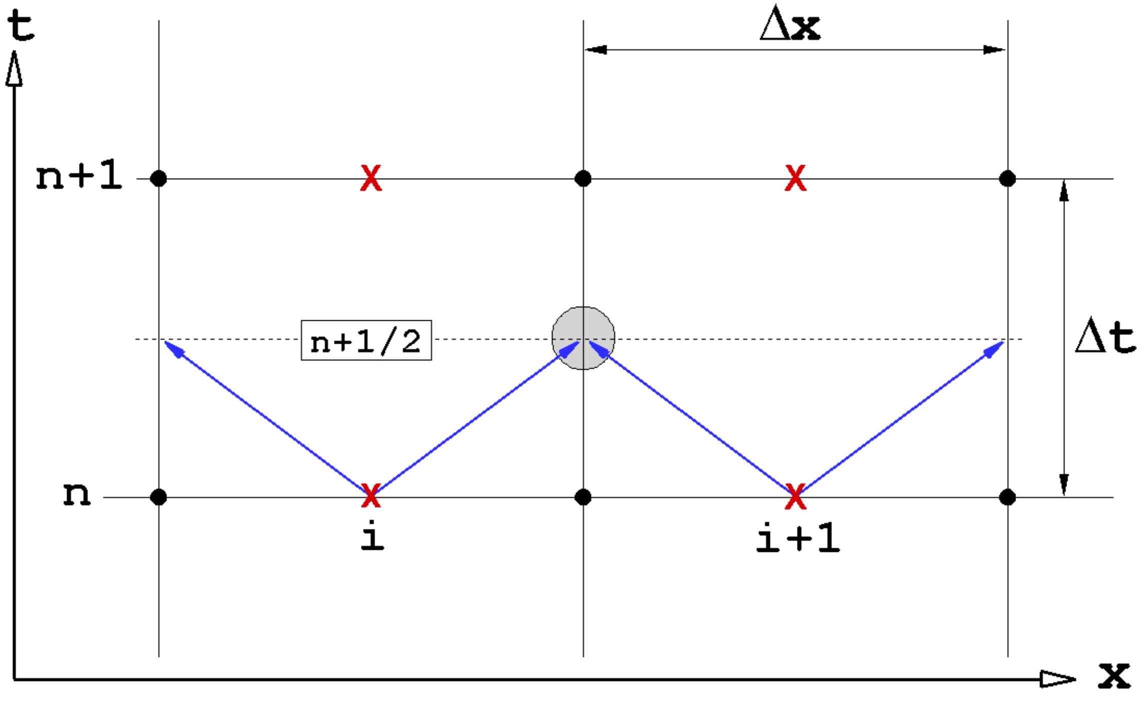
[12] ***S. Osher***, Shock modelling in transonic and supersonic flow, to appear in Recent Advances in Numerical Methods in Fluids …

[16] ***P. L. Roe***, Some contributions to the modelling of discontinuous flows, Proc. AMS/SIAM Seminar, San Diego 1983, to appear.

Метод MUSCL-Hancock

- ❑ ***van Albada G.D., van Leer B., Roberts W.W.*** A comparative study of numerical methods in cosmic gas dynamics // Astronomy and Astrophysics, **1982**
- ❑ ***van Leer B.*** On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Enquist and Roe // SIAM J. Sci. Stat. Comput. **1984**





$$\mathbf{Q}(x) = \mathbf{Q}_i + \frac{\Delta \mathbf{Q}_i}{\Delta x}(x - x_i), \qquad \mathbf{Q} = [\rho, u, p]^T$$

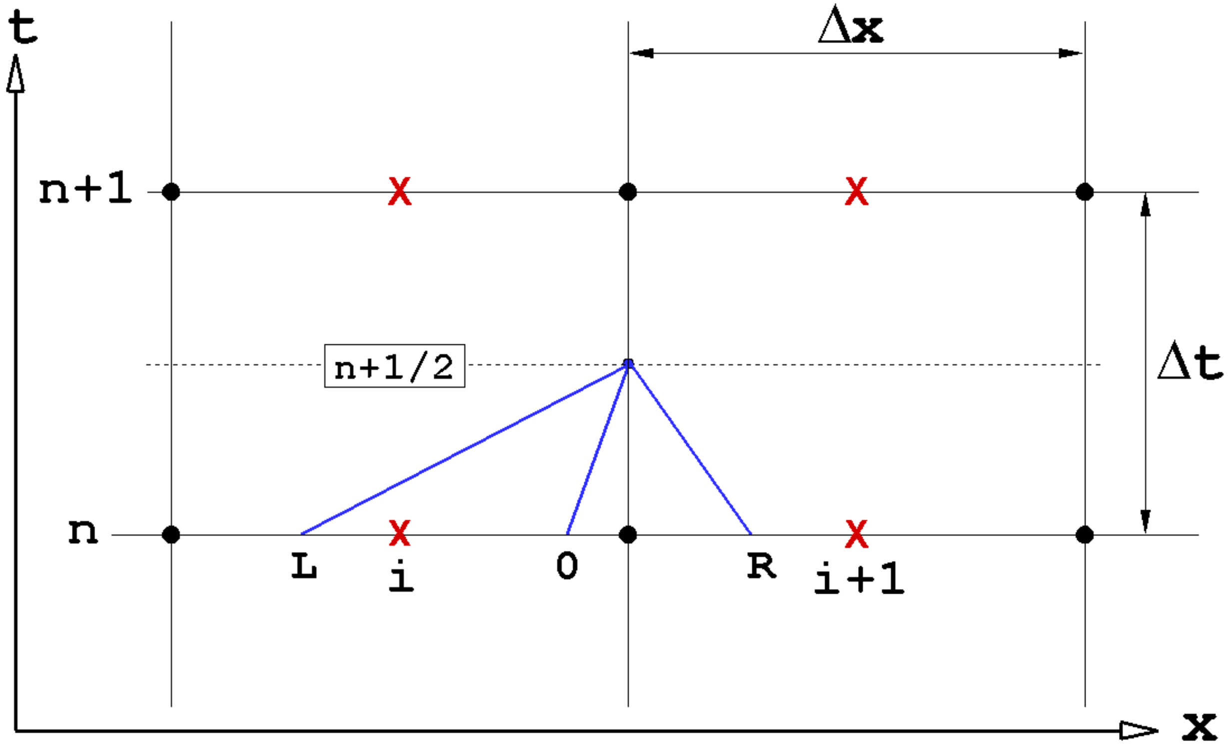
$$\mathbf{Q}(x,t) = \mathbf{Q}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}\right)_i (t - t^n) + \frac{\Delta \mathbf{Q}_i}{\Delta x}(x - x_i)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{Q})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0$$

[***] ***S. L. Hancock***, private communication (**1980**)

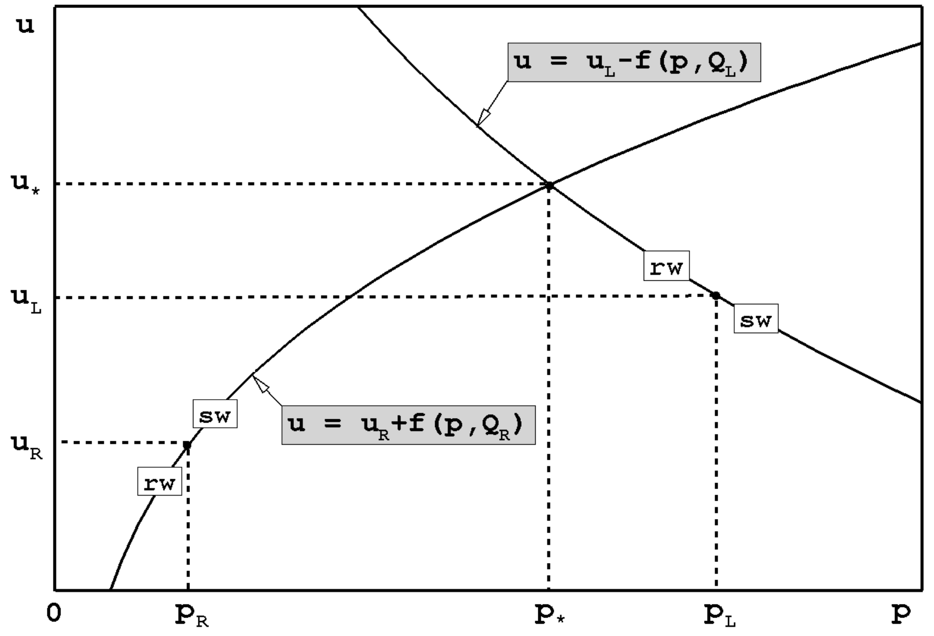
Схема Копченова и Крайко

- ***Копченов В.И., Крайко А.Н.*** Монотонная разностная схема второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // ЖВМ и МФ, **1983**



- Построение кусочно-линейного распределения параметров на нижнем временном слое с использованием п.м.п. Колгана (minmod).
- Выпускание характеристик *u-c*, *u* и *u+c*, приходящих в центр боковой грани, и вычисление параметров в точках L, 0 и R, из которых эти характеристики были выпущены.

- Решение классической задачи Римана с использованием параметров в точках L, 0 и R.



– уравнения для скорости и давления (см. верхний график)

$$u_* = u_L - f\left(p_*, \mathbf{Q}_L\right), \qquad u_* = u_R + f\left(p_*, \mathbf{Q}_R\right)$$

– уравнение для плотности

$$\rho_* = \rho_0 \cdot g(p_* / p_0)$$

Метод Хэнкока-Родионова (HR method)

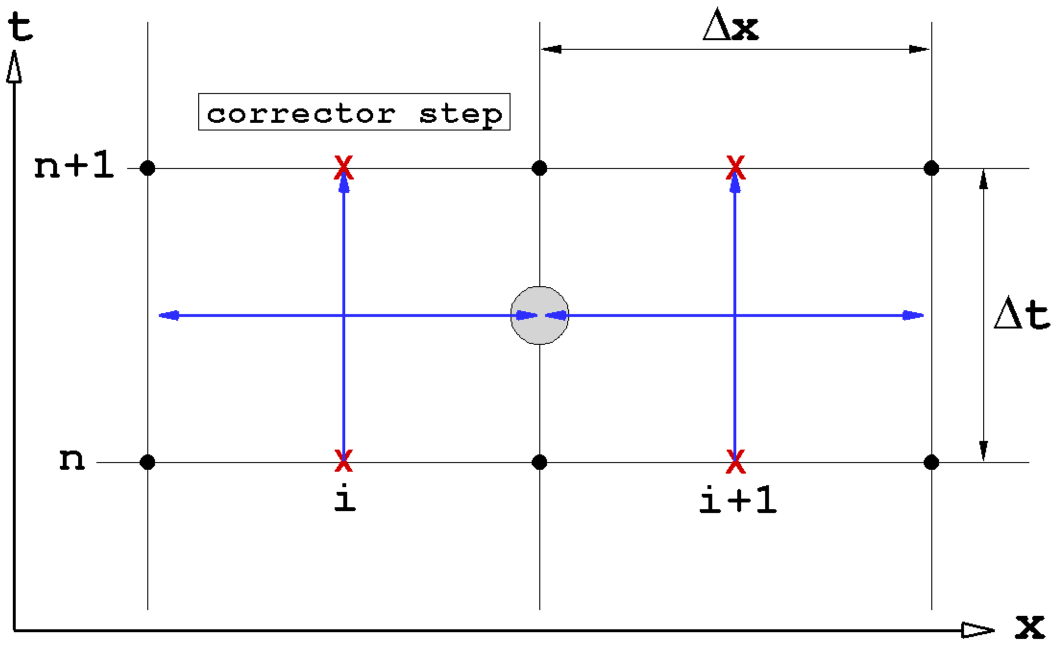
- ***Родионов А.В.*** Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // ЖВМ и МФ, т.27, №4, **1987** *(Поступила в редакцию 8.10.1985)*
- ***Родионов А.В.*** Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // ЖВМ и МФ,т.27, №12, **1987** *(Поступила в редакцию 22.10.1986)*

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{Q})}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x}=\mathbf{S}(\mathbf{Q}),\quad \mathbf{Q}=\left[u,\rho,p,c_1,c_2,\dots\right]^T$$

– уравнения газовой динамики с неравновесными физико-химическими процессами

$$\frac{\mathbf{U}(\mathbf{Q}_i^{n+1})-\mathbf{U}(\mathbf{Q}_i^{n})}{\Delta t}+\frac{\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i+1/2})-\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i-1/2})}{\Delta x}=\alpha\mathbf{S}(\mathbf{Q}_i^n)+(1-\alpha)\mathbf{S}(\mathbf{Q}_i^{n+1}),\quad \alpha\approx 0.5$$

– аппроксимация уравнений



- Реконструкция $\Delta\mathbf{Q}_i^n$ (minmod Колгана, ограничитель ван Лира, …).
- Шаг предиктор: расчет $\hat{\mathbf{Q}}_i^{n+1}$

  при $\mathbf{Q}_{i-1/2}=\mathbf{Q}_i^n-0.5\Delta\mathbf{Q}_i^n,\quad \mathbf{Q}_{i+1/2}=\mathbf{Q}_i^n+0.5\Delta\mathbf{Q}_i^n$
- Решение задачи Римана: вычисление $\mathbf{Q}_{i+1/2}^{RP}=f\left(\mathbf{Q}_{i+1/2-},\mathbf{Q}_{i+1/2+}\right)$

  при
$$\mathbf{Q}_{i+1/2-}=0.5\left(\mathbf{Q}_i^n+\hat{\mathbf{Q}}_i^{n+1}\right)+0.5\Delta\mathbf{Q}_i^n$$
$$\mathbf{Q}_{i+1/2+}=0.5\left(\mathbf{Q}_{i+1}^n+\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}^{n+1}\right)-0.5\Delta\mathbf{Q}_{i+1}^n$$
- Шаг корректор: расчет $\mathbf{Q}_i^{n+1}$ при $\mathbf{Q}_{i-1/2}=\mathbf{Q}_{i-1/2}^{RP},\quad \mathbf{Q}_{i+1/2}=\mathbf{Q}_{i+1/2}^{RP}$

Метод Рунге — Кутты

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Ме́тоды Ру́нге — Ку́тты (в литературе встречается название **методы Рунге — Кутта**) — большой класс численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Первые методы данного класса были предложены около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М. В. Куттой.

Обыкновенное дифференциальное уравнение: $$\frac{du}{dt} = f(t,u), \qquad u(0) = u_0$$

Метод Эйлера: $$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot f(t^n, u^n)$$

Классический метод Рунге-Кутты четвертого порядка:

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4),$$

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t^n, u^n), \\ f_2 &= f(t^n + 0.5\Delta t, u^n + 0.5\Delta t \cdot f_1), \\ f_3 &= f(t^n + 0.5\Delta t, u^n + 0.5\Delta t \cdot f_2), \\ f_4 &= f(t^n + \Delta t, u^n + \Delta t \cdot f_3), \end{aligned}$$

TVD методы Рунге-Кутты

- *Shu C.-W.* Total-variation-diminishing time discretizations // SIAM J. Sci. Stat. Comput., **1988**
- *Shu C.-W., Osher S*. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // J. Comp. Phys., **1988**

Метод Эйлера (схемы Годунова и Колгана): $\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \mathbf{L}_i(\mathbf{Q}^n)$,

$\mathbf{L}_i(\mathbf{Q})$ – пространственный оператор, выражающий суммарный вектор потока через все боковые грани i-й ячейки.

Метод Рунге-Кутты второго порядка (RK2):

$$\mathbf{U}_i^{(1)} = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \mathbf{L}_i(\mathbf{Q}^n),$$

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^{(1)} + \Delta t \mathbf{L}_i(\mathbf{Q}^{(1)})\right].$$

Метод Рунге-Кутты третьего порядка (RK3):

$$\mathbf{U}_i^{(1)} = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \mathbf{L}_i(\mathbf{Q}^n),$$

$$\mathbf{U}_i^{(2)} = \frac{1}{4}\left[3\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^{(1)} + \Delta t \mathbf{L}_i(\mathbf{Q}^{(1)})\right],$$

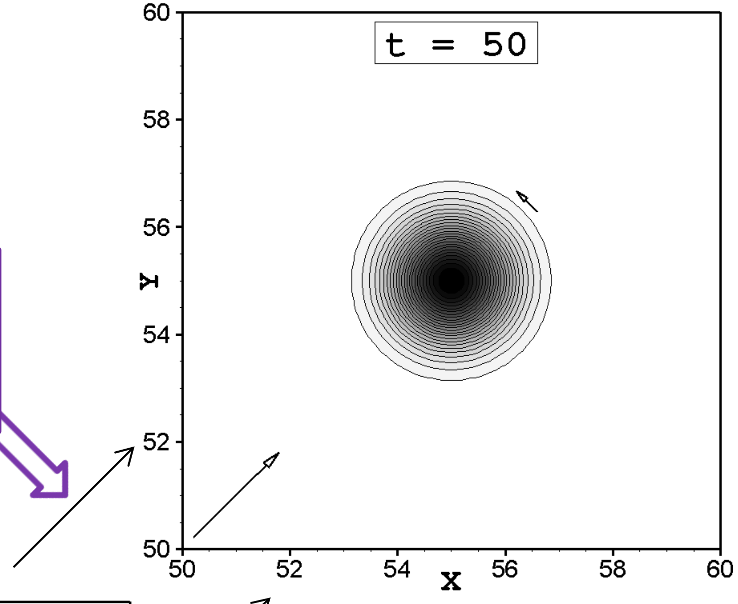
$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{3}\left[\mathbf{U}_i^n + 2\mathbf{U}_i^{(2)} + 2\Delta t \mathbf{L}_i(\mathbf{Q}^{(2)})\right].$$

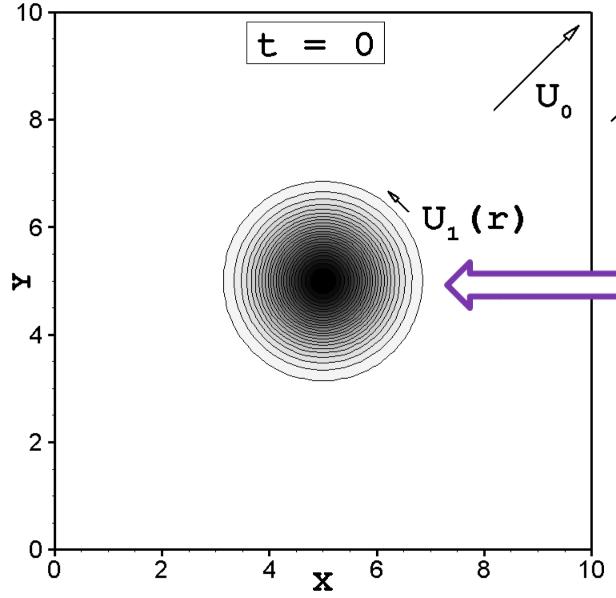
Сравнение различных методов интегрирования по времени

Тестовая задача о диагональном переносе изоэнтропического вихря

Диагональный перенос

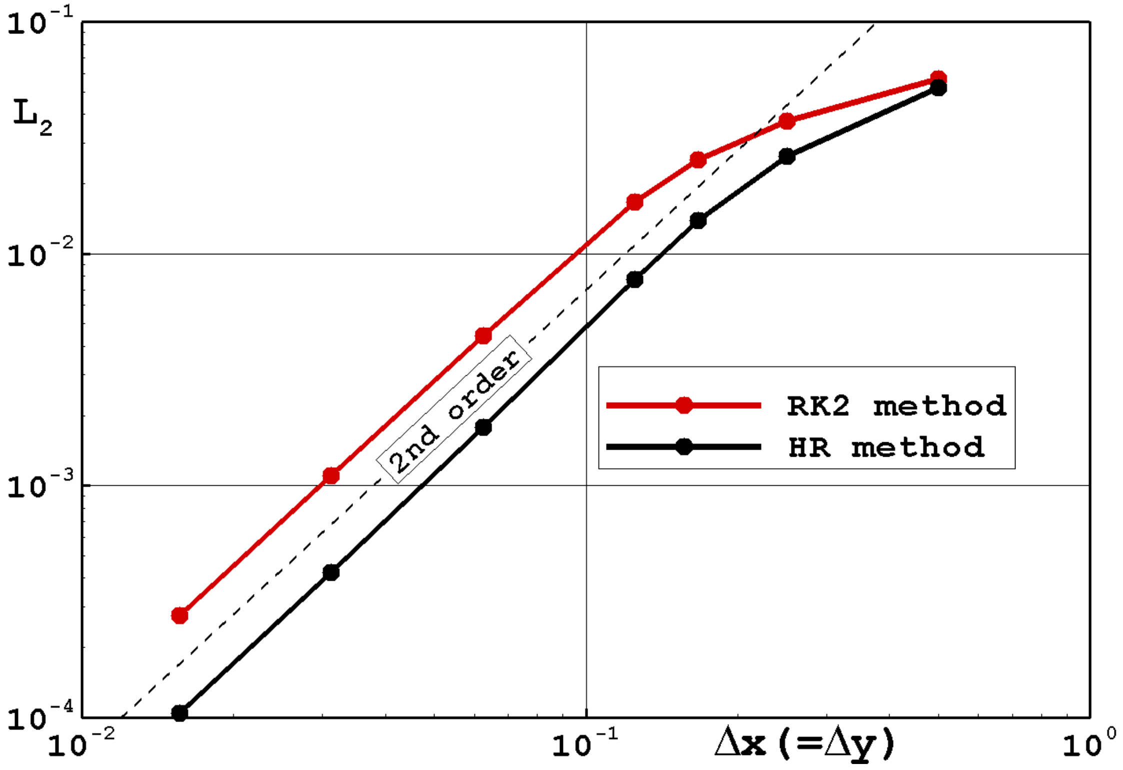
$$\mathbf{U}_0 = (\ 1, 1\ )$$





Вращение относительно центра

$$\mathbf{U}_1(r) = \frac{5}{2\pi}\exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right)(-\overline{y},\overline{x})$$



Погрешность расчета по норме L_2 для различных методов в зависимости от сеточного разрешения

Три важных понятия в теории «неосциллирующих» схем

Схемы, сохраняющие монотонность решения **=** *Монотонные схемы*

- ***Годунов С.К.*** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник, **1959**

> Для того чтобы разностная схема $u^k = \sum c_{n-k} u_n$ переводила все монотонные функции в монотонные с тем же направлением роста, необходимо и достаточно, чтобы все c_m были неотрицательными.

- ***Годунов С.К., Забродин, А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н. Прокопов Г. П.*** Численное решение многомерных задач газовой динамики. Наука, Москва, **1976**

> Наконец, еще одним свойством, которое, не будучи обязательным, тем не менее, по мнению авторов, представляется весьма желательным, является монотонность разностной схемы, т. е. способность схемы переводить монотонные распределения параметров (вернее, их комбинаций — римановых инвариантов соответствующих линеаризованных уравнений) в монотонные.

Три важных понятия в теории «неосциллирующих» схем

Схемы, сохраняющие монотонность решения $\supseteq$ *TVD-схемы (невозрастание полной вариации решения)* $\supseteq$ *Монотонные схемы*

- ***Harten A.*** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys., **1983**

Monotonicity preserving scheme

From CFD-Wiki

A scheme is said to be monotonicity preserving if u^n is a monotone mesh function, so is u^{n+1}.

Monotone scheme

If the scheme can be written as

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-k}^n, \ldots, u_j^n, \ldots, u_{j+l}^n)$$

$$\boxed{u_j^{n+1} = \sum C_{j-k} u_k^n}$$

then it is monotone if and only if it is an increasing function of all its arguments. If H is a differentiable function of its arguments, then the scheme is monotone if

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}(u_{-k}, \ldots, u_o, \ldots, u_l) \geq 0, \quad i = -k, ..., l$$

Три важных понятия в теории «неосциллирующих» схем

Линейные схемы (1-й порядок аппроксимации)

Схемы, сохраняющие монотонность решения	=	*TVD-схемы (невозрастание полной вариации решения)*	=	*Монотонные схемы*

Нелинейные схемы 2-го порядка аппроксимации и выше

Схемы, сохраняющие монотонность решения		*TVD-схемы (невозрастание полной вариации решения)*		*Монотонные схемы*

Нелинейные схемы 2-го порядка аппроксимации и выше
(кроме отдельных точек вблизи экстремумов)

Схемы, сохраняющие монотонность решения	$\supseteq$	*TVD-схемы (невозрастание полной вариации решения)*		*Монотонные схемы*

Три важных понятия в теории «неосциллирующих» схем

- ***Toro E.F.*** Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, 3-rd edition. Springer-Verlag, Berlin, **2009**

- ***LeVeque R.J.*** Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, **2002**

In particular, this is true for the class of *monotone methods*. These are methods with the property that

$$\frac{\partial Q_i^{n+1}}{\partial Q_j^n} \geq 0 \qquad (12.42)$$

for all values of j. This means that if we increase the value of any Q_j^n at time t_n, then the value of Q_i^{n+1} at the next time step cannot decrease as a result. This is suggested by the fact that the true vanishing-viscosity solution of a scalar conservation law has an analogous property: If $\mathring{q}(x)$ and $\mathring{p}(x)$ are two sets of initial data and $\mathring{q}(x) \geq \mathring{p}(x)$ for all x, then $q(x,t) \geq p(x,t)$ for all x at later times as well. Unfortunately, this monotone property holds only for certain first-order accurate methods, and so this approach cannot be applied to the high-resolution methods of greatest interest.

Три важных понятия в теории «неосциллирующих» схем

Схемы, сохраняющие монотонность решения $\supseteq$ *TVD-схемы (невозрастание полной вариации решения)* $\supseteq$ *Монотонные схемы*

- ***Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю***. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Физматлит, Москва, **2001**

2.7.2. TVD-схемы. Следующий подход связан с построением схем, которые вместо условия сохранения монотонности уменьшают или сохраняют полную вариацию функции. Такое условие невозрастания вариации численного решения, или TVD (total variation diminishing) принцип, является более слабым, чем требование монотонности схемы. Напомним, что полная вариация $\mathrm{TV}[u]$ для ограниченной функции $u = u(x)$

- Примеры дезориентирующих утверждений

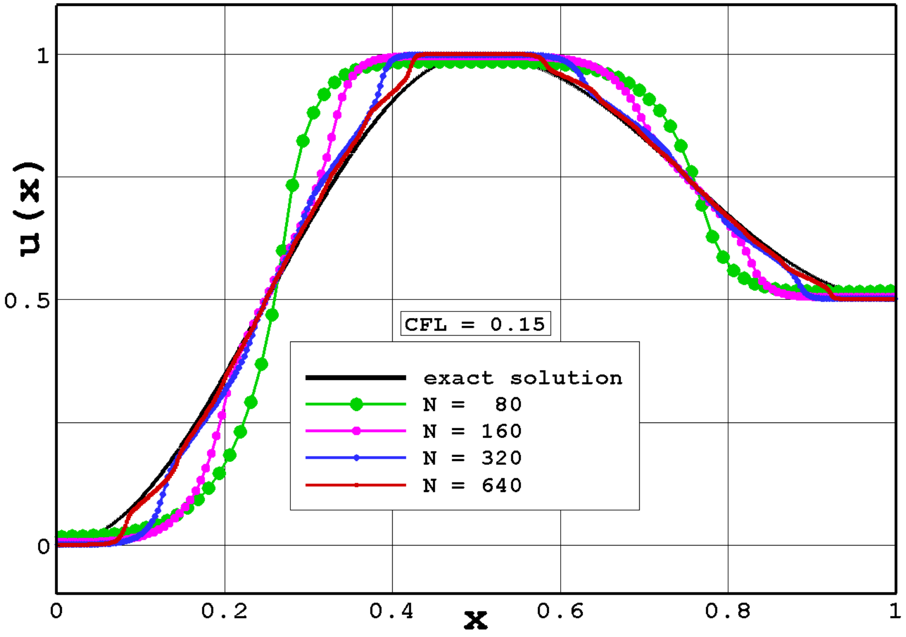
… ван Лир публикует серию статей, в которых описывается техника создания монотонных схем … Есть несколько подходов к построению монотонных схем: … подход ван Лира …

TVD-схемы не являются монотонными, но имеют более слабые свойства …

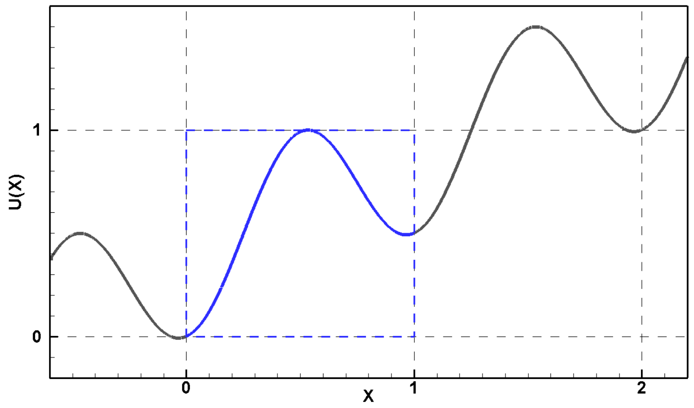
… являлась схемой, сохраняющей монотонность (т.е. решение оставалось монотонным при монотонных начальных данных). Отметим, что условие сохранения монотонности является более сильным, чем условие невозрастания полной вариации [Harten, 1983].

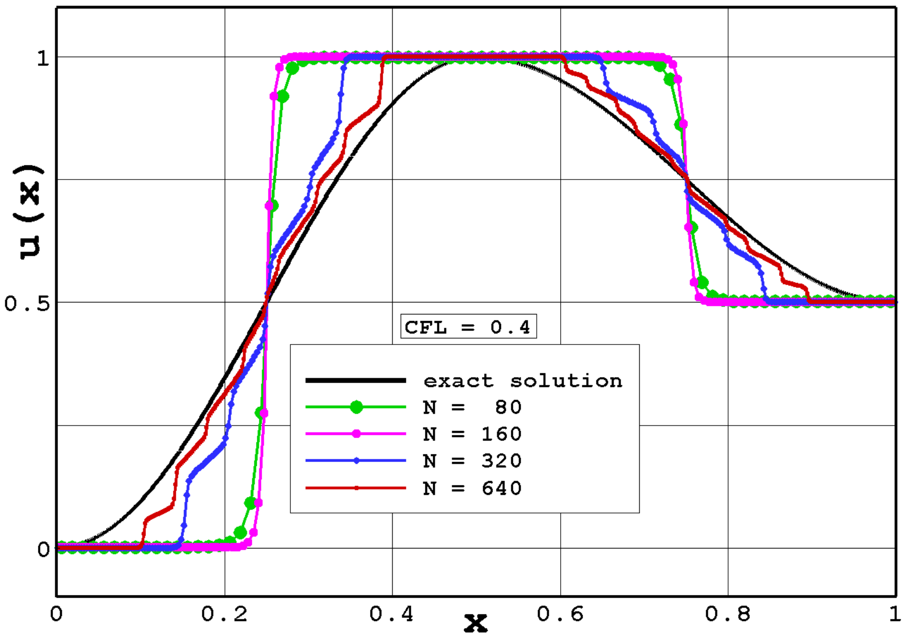
СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Схема Колгана: численное решение линейного уравнения переноса



Ступенчато-периодическая функция $u(x)$ с гладким профилем





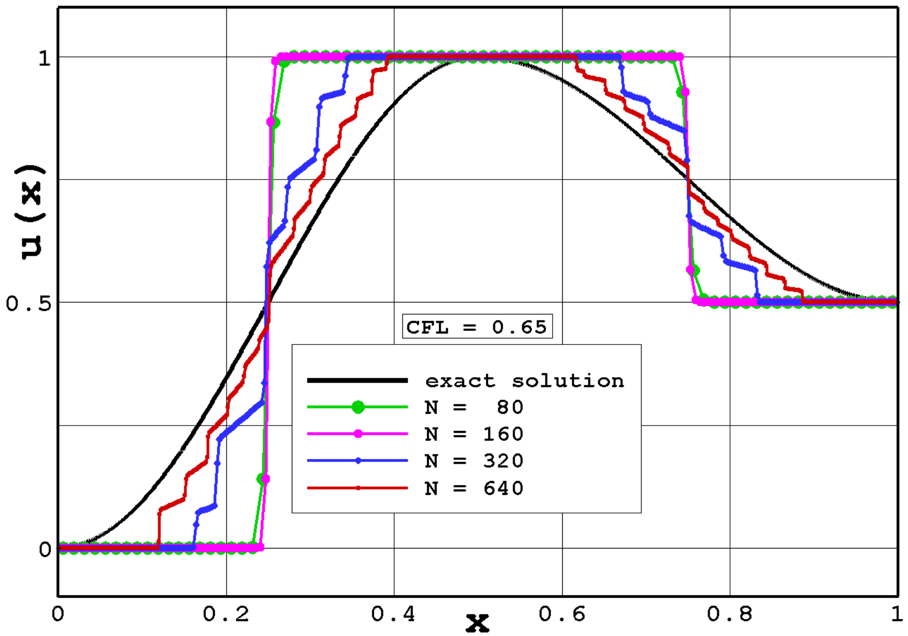
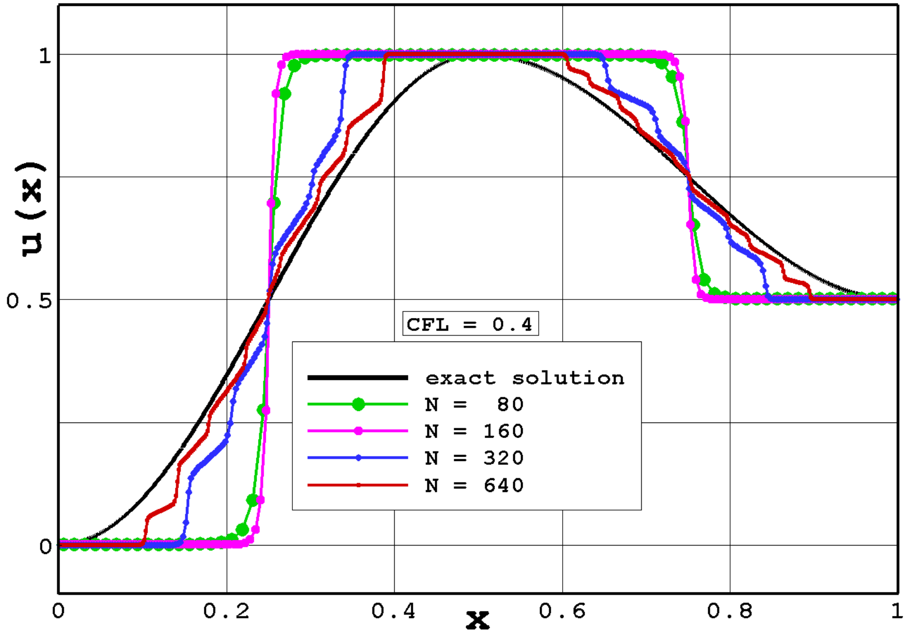
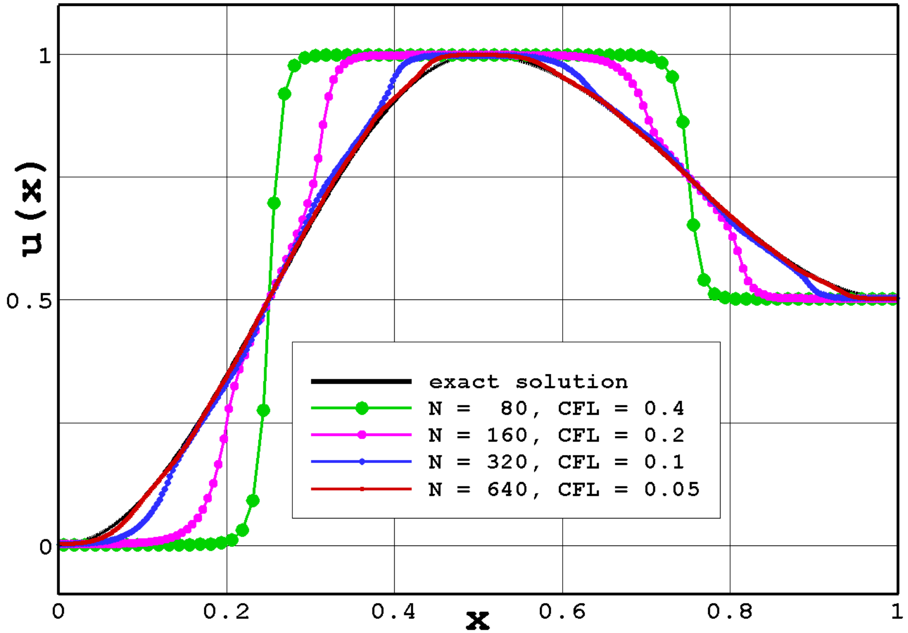


Схема Колгана: численное решение линейного уравнения переноса



$$\Delta t \sim \Delta x$$
$$C_{CFL} = \mathrm{const}$$



$$\Delta t \sim \Delta x^2$$
$$C_{CFL} \sim 1/\mathrm{N}$$